Математическая Теория Игр и её Приложения, т.8, в.3, с. 3–19

УДК 519.83
ББК 22.1

МИНИМАКСНАЯ ОЦЕНКА ПАРАМЕТРА ОТРИЦАТЕЛЬНОГО БИНОМИАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Владимир В. Морозов*
Мария А. Сырова*
Московский университет им. М.В. Ломоносова
факультет вычислительной математики и кибернетики
119991, Москва, Ленинские горы, 2-й учебный корпус
vmorosov@mail.ru, syr.maria@gmail.com

Решается статистическая игра, возникающая при оценивании параметра отрицательного биномиального распределения (ОБР) при квадратичной функции потерь. Указан численный метод приближенного решения игры. Построена оценка, минимизирующая максимальный риск среди линейных оценок.

Ключевые слова: отрицательное биномиальное распределение, минимаксная оценка, статистическая игра, гипергеометрическая функция, байесовская оценка.

1. Введение

Минимаксное оценивание используется в тех случаях, когда статистик рассматривает природу как активного противника, выбирающего значение параметра распределения и имеющего противоположные интересы. Вальд [2] заложил основы теории статистических игр.

---

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-01-00353 а.

Ряд фундаментальных результатов, включающих и решение конкретных игр, были получены Ходжесом и Леманом [10], а также Блэкуэллом и Гиршиком [1]. Обзор по статистическим играм оценки скалярного параметра см. в [5].

Настоящая статья посвящена построению минимаксной оценки параметра θ отрицательного биномиального распределения (ОБР) $f(t|\theta, r) = \theta^r(1-\theta)^t(r)_t/t!,\ t = 0, 1, \dots,$ где $(r)_t = r(r+1)\cdots(r+t-1),\ t \geqslant 1, (r)_0 = 1$, а параметр $r > 0$ предполагается известным. Используется квадратичная функция потерь $L(\theta, d) = (\theta - d)^2$. Для геометрического распределения ($r = 1$) статистическая игра решена Г.Н. Дюбиным в [6]. В данной работе аналогичное решение построено при $r \in (0, 1)$. При $r > 1$ указан численный метод нахождения минимаксной оценки, а при $r > 2$ построена оценка, минимизирующая максимальный риск среди линейных оценок[1] $c_1\delta_0 + c_2$, где δ_0 – несмещенная оценка параметра θ. Оценки параметров θ и r по методу максимального правдоподобия см. в [11].

2. Постановка задачи

Статистик проводит одно испытание и при этом наблюдает реализацию t случайной величины T, имеющей ОБР $f(t|\theta, r)$. Параметр $r > 0$ предполагается известным, а относительно параметра θ известно лишь, что $\theta \in [0, 1]$. Если r – целое, то ОБР называют распределением Паскаля. В этом случае $f(t|\theta, r)$ интерпретируется как вероятность r-го успеха в $(r + t)$-м испытании Бернулли.

Пример 2.1. Имеется r однотипных приборов. В каждом периоде из них работает только один. Предположим, что в течение одного периода с вероятностью θ прибор выходит из строя. В этом случае он заменяется другим прибором. Тогда $f(t|\theta, r)$ – вероятность того, что дублированный прибор проработает $t + r$ периодов.

Примеры применения ОБР в биологии см. в [8].

Статистик, зная реализацию t, строит оценку $d = \delta(t) \in [0, 1]$ параметра θ. Решающая функция $\delta : \mathbb{Z}_+ \to [0, 1]$ является стратегией статистика. Множество всех таких стратегий обозначим через Δ.

---

[1] В настоящее время функции вида $ax+b$ называют аффинными, но мы будем придерживаться традиционной терминологии из [7].

После подстановки стратегии δ в функцию потерь L и последующего осреднения по распределению $f(t|\theta, r)$ получаем функцию риска

$$R(\theta, \delta) = \mathrm{E}[L(\theta, \delta(T))|\theta, r] = \theta^r \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(r)_t}{t!}(1-\theta)^t(\theta - \delta(t))^2.$$

В статистической игре $G = \langle [0,1], \Delta, R(\theta, \delta)\rangle$ первый игрок (природа) максимизирует функцию риска R, а второй игрок (статистик) ее минимизирует. Предполагается, что природа может использовать смешанные стратегии – вероятностные распределения $\xi \in \Xi$ на отрезке $[0,1]$. При этом θ – реализация случайной величины Θ, имеющей распределение ξ, а $R(\xi, \delta) = \mathrm{E}\,[R(\Theta, \delta)]$ – функция риска, осредненная по ξ. Функция $R(\theta, \delta)$ выпукла по переменным $\delta(t),\ t = 0, 1, \ldots$ и, как показано в [1], статистику достаточно ограничиться чистыми стратегиями $\delta \in \Delta$. При этом значение игры G равно

$$v = \min_{\delta \in \Delta} \max_{\theta \in [0,1]} R(\theta, \delta) = \max_{\theta \in [0,1]} R(\theta, \delta^*),$$

где оптимальная стратегия статистика δ^* является минимаксной оценкой параметра θ. Можно доказать, что статистическая игра с n испытаниями эквивалентна сформулированной игре G с одним испытанием и параметром $r' = nr$ (см. лемму 3.1 в [7]).

3. Решение статистической игры при $0 < r < 1$

Пусть $\theta_0 \in (0,1)$ – единственный корень уравнения

$$\theta(2\theta^{r/2} + r + 2) = r. \tag{3.1}$$

Определим число

$$\lambda_0 = \frac{r - (r+2)\theta_0}{2\theta_0^{r+1} + r - (r+2)\theta_0}.$$

Через I_θ обозначим вероятностную меру, сосредоточенную в точке $\theta \in [0,1]$.

Утверждение 3.1. *При* $r \in (0,1)$ *в игре* G $\xi^* = \lambda_0 I_{\theta_0} + (1-\lambda_0) I_1$ – *оптимальная смешанная стратегия природы,* $\delta^*(0) = (1 + 2/r)\theta_0$, $\delta^*(t) = \theta_0,\ t = 1, 2, \ldots$ – *оптимальная стратегия статистика, а* $v = (1 - \delta^*(0))^2$ – *значение игры.*

Доказательство. Определим на отрезке $[0,1]$ функцию

$$H(\theta) \stackrel{def}{=} R(\theta,\delta^*) = \theta^r(\theta-\delta^*(0))^2 + (1-\theta^r)(\theta-\delta^*(1))^2 =$$

$$= \theta^r(\delta^*(1)-\delta^*(0))(2\theta-\delta^*(0)-\delta^*(1)) + (\theta-\delta^*(1))^2.$$

Из (3.1) следует, что

$$H(1) = (1-\delta^*(0))^2 = \Big(1-\theta_0\Big(1+\frac{2}{r}\Big)\Big)^2 = \theta_0^r(\theta_0-\delta^*(0))^2 = H(\theta_0).$$

Поскольку $r \in (0,1)$ и $\delta^*(0) > \delta^*(1)$, производная

$$H'(\theta) = 2\theta^r(\delta^*(1)-\delta^*(0))(1+r)+$$

$$+r\theta^{r-1}((\delta^*(0))^2-(\delta^*(1))^2) + 2(\theta-\delta^*(1))$$

строго выпукла. Поэтому уравнение $H'(\theta) = 0$ на интервале $(0,1)$ имеет в точности два корня. Одним из них является θ_0. Второй корень θ_1 принадлежит интервалу $(\theta_0,1)$, что вытекает из равенства $H(\theta_0) = H(1)$. Поскольку производная H' строго выпукла, $H'''(\theta) > 0$ для всех $\theta \in (0,1)$. Следовательно, вторая производная $H''(\theta)$ – возрастающая функция. Из равенств $H'(\theta_0) = H'(\theta_1) = 0$ получаем, что $H''(\theta)$ обращается в ноль в некоторой точке интервала (θ_0,θ_1). Отсюда $H''(\theta_0) < 0$ и θ_0 – точка максимума функции $H(\theta)$ на отрезке $[0,1]$ (рис. 1a).

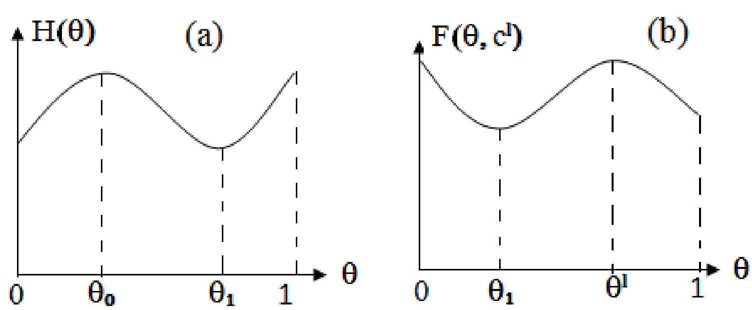

Рисунок 1. Функция риска при стратегиях δ^* $(0 < r < 1)$ и δ^l $(r > 2)$.

Итак, для всякого $\theta \in [0,1]$

$$R(\theta,\delta^*) = H(\theta) \leqslant H(\theta_0) = R(\theta_0,\delta^*) = H(1) = (1-\delta^*(0))^2. \qquad (3.2)$$

Для любой стратегии статистика $\delta \in \Delta$ имеем:

$$R(\xi^*, \delta) = \lambda_0 \theta_0^r (\theta_0 - \delta(0))^2 + \lambda_0 \sum_{t=1}^{\infty} \frac{(r)_t}{t!} \theta_0^r (1-\theta_0)^t (\theta_0 - \delta(t))^2 +$$

$$+(1-\lambda_0)(1-\delta(0))^2.$$

Нетрудно проверить, что

$$\min_{\delta \in \Delta} R(\xi^*, \delta) = R(\xi^*, \delta^*) = (1 - \delta^*(0))^2. \tag{3.3}$$

Из (3.2) и (3.3) следует, что (ξ^*, δ^*) – седловая точка функции $R(\xi, \delta)$ на $\Xi \times \Delta$. □

Отметим, что при $r = 1$ уравнение (3.1) имеет корень $\theta_0 = 1/4$. В результате получаем решение игры G, найденное в [6]:

$$\xi^* = (2/3)I_{1/4} + (1/3)I_1,\ \delta^*(0){=}3/4,\ \delta^*(t){=}1/4,\ t{=}1,2,\ldots,\ v{=}1/16.$$

4. Линейная минимаксная оценка

Пусть $r > 1$. Найдем несмещенную оценку $\delta_0(t)$ параметра θ, удовлетворяющую условию $\mathrm{E}[\delta_0(T)|\theta, r] = \theta$ при всех $\theta \in [0,1]$. Отсюда

$$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{(r)_t}{t!} (1-\theta)^t \delta_0(t) = \theta^{1-r} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(r-1)_t}{t!} (1-\theta)^t,\ \forall\, \theta \in (0,1].$$

Следовательно, $\delta_0(t) = (r-1)_t/(r)_t = (r-1)/(r+t-1),\ t = 0, 1, \ldots$.

Определим класс линейных оценок $\Delta^l = \{\delta = c_1\delta_0 + c_2 | c_j \in [0,1],\ j = 1,2\}$. Интерес представляет линейная оценка δ^l, минимизирующая максимальный риск среди оценок из множества Δ^l (см., например, [9]). Займемся ее поиском. Положим $c = (c_1, c_2)$. Для стратегии $\delta = c_1\delta_0 + c_2 \in \Delta^l$ функцию риска можно записать в виде

$$F(\theta, c) \overset{def}{=} R(\theta, \delta) = \mathrm{E}[(\theta - c_1\delta_0(T) - c_2)^2 | \theta, r] =$$

$$= (\theta(1-c_1) - c_2)^2 + c_1^2(\mathrm{E}[\delta_0^2(T)|\theta, r] - \theta^2),$$

где

$$\mathrm{E}[\delta_0^2(T)|\theta, r] = \theta^r \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(r-1)_t^2}{t!(r)_t}(1-\theta)^t.$$

Здесь множитель

$$h(\theta) \stackrel{def}{=} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(r-1)_t^2}{t!(r)_t}(1-\theta)^t$$

является гипергеометрической функцией (см. [4]). Пусть $\theta \in (0,1)$. Представим функцию h в интегральной форме. Имеем:

$$\frac{h(\theta)}{r-1} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(r-1)_t}{t!(r+t-1)}(1-\theta)^t = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(r-1)_t}{t!}(1-\theta)^t \int_0^1 x^{r+t-2}dx =$$

$$= \int_0^1 x^{r-2} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(r-1)_t}{t!}(x(1-\theta))^t dx = \int_0^1 x^{r-2}(1-x(1-\theta))^{1-r}dx =$$

$$= \frac{1}{(1-\theta)^{r-1}} \int_0^{(1-\theta)/\theta} \frac{z^{r-2}}{1+z}dz.$$

Последний интеграл получен после замены $z = x(1-\theta)/(1-x(1-\theta))$.

Определим на интервале $(0,1)$ функции

$$h_0(\theta) = \frac{\theta^r h(\theta)}{r-1} = \frac{\theta^r}{(1-\theta)^{r-1}}J(\theta),\ h_2(\theta) = \frac{\theta^{r-2}}{(1-\theta)^{r-1}}J(\theta),$$

где

$$J(\theta) \stackrel{def}{=} \int_0^{(1-\theta)/\theta} \frac{z^{r-2}}{1+z}dz.$$

Лемма 4.1. *Пусть $r > 2$. На интервале $(0,1)$ функция h_0 возрастает и строго выпукла, а ее производная h_0' строго вогнута. Функция h_2 на интервале $(0,1)$ убывает. Функции h_0, h_0' и h_2 имеют следующие предельные значения в концах отрезка $[0,1]$:*

$$h_0(0) = h_0'(0) = 0,\ h_2(0) = \frac{1}{r-2},\ h_2(1) = \frac{1}{r-1}.$$

Кроме того, $(r-1)h_i(\theta) - \theta^{2-i} > 0,\ i = 0, 2$ при всех $\theta \in (0,1)$.

Доказательство. Первые три производные функции h_0 можно записать в виде

$$h_0'(\theta) = l_1(\theta)J(\theta) - \frac{\theta}{1-\theta},\ h_0''(\theta) = l_2(\theta)J(\theta) + \frac{\theta - r - 1}{(1-\theta)^2}, \tag{4.1}$$

$$h_0'''(\theta) = l_3(\theta)J(\theta) + \frac{\theta^2 - \theta - 2r\theta - r^2 + r}{\theta(1-\theta)^3},$$

где

$$l_1(\theta) = \frac{\theta^{r-1}(r-\theta)}{(1-\theta)^r},\ l_2(\theta) = \frac{r(r-1)\theta^{r-2}}{(1-\theta)^{r+1}},$$

$$l_3(\theta) = \frac{r(r-1)\theta^{r-3}(r+3\theta-2)}{(1-\theta)^{r+2}}.$$

Отметим, что на интервале $(0,1)$ функции l_i $(i = 1,2,3)$ положительны. Покажем, что производные h_0' и h_0'' на этом интервале положительны, а h_0''' отрицательна. Определим вспомогательные функции

$$p_1(\theta) = \frac{h_0'(\theta)}{l_1(\theta)},\ p_2(\theta) = \frac{h_0''(\theta)}{l_2(\theta)},\ p_3(\theta) = \frac{h_0'''(\theta)}{l_3(\theta)},\ \theta \in (0,1).$$

Нетрудно видеть, что $p_i(1) = 0,\ i = 1,2,3$. Поэтому достаточно проверить, что на отрезке $(0,1)$ производные p_1' и p_2' отрицательны, а p_3' положительна. Опуская вычисления, запишем эти производные

$$p_1'(\theta) = -\frac{(1-\theta)^{r-1}(2r-\theta)}{(r-\theta)^2\theta^{r-1}},\ p_2'(\theta) = -\frac{2(1-\theta)^r}{r(r-1)\theta^{r-1}},$$

$$p_3'(\theta) = \frac{6(1-\theta)^{r+1}}{r(r-1)(3\theta+r-2)^2\theta^{r-2}}.$$

Монотонность функции h_2 доказывается аналогично. Указанные предельные значения находятся по правилу Лопиталя. Из того, что функция h_2 убывает на интервале $(0,1)$ до значения $1/(r-1)$ следует неравенство $(r-1)h_2(\theta)-1 > 0$. Умножая его на θ^2, получим $(r-1)h_0(\theta)-\theta^2 > 0$ при всех $\theta \in (0,1)$. □

Для стратегии $\delta = c_1\delta_0 + c_2$ функция риска имеет вид

$$F(\theta, c) = (\theta(1-c_1) - c_2)^2 + c_1^2((r-1)h_0(\theta) - \theta^2).$$

Решим игру $G^l = \langle [0,1], [0,1]^2, F(\theta, c)\rangle$. Рассмотрим следующую систему уравнений относительно переменных θ, c_1, c_2 :

$$F_{c_1}(\theta, c) = 0,\ F_\theta(\theta, c) = 0,\ F(\theta, c) = F(0, c)$$

или

$$-\theta(\theta(1-c_1)-c_2) + c_1((r-1)h_0(\theta) - \theta^2) = 0, \tag{4.2}$$

$$2(1-c_1)(\theta(1-c_1)-c_2) + c_1^2((r-1)h_0'(\theta) - 2\theta) = 0, \tag{4.3}$$

$$(\theta(1-c_1)-c_2)^2 + c_1^2((r-1)h_0(\theta) - \theta^2) = c_2^2. \tag{4.4}$$

Лемма 4.2. *При $r > 2$ система уравнений* (4.2) – (4.4) *имеет единственное решение* $(\theta^l, c_1^l, c_2^l) \in (0,1)^3$. *При этом* $c_1^l + c_2^l < 1$.

Доказательство. Исключая из уравнений (4.2) и (4.4) переменную c_2, получим

$$-c_1^2(r-1)h_2(\theta) + 2c_1(r-1)h_2(\theta) - 1 = 0. \tag{4.5}$$

Аналогично из уравнений (4.2) и (4.3) находим

$$c_1 = \frac{2((r-1)h_0(\theta) - \theta^2)}{(r-1)(2h_0(\theta) - \theta h_0'(\theta))} = \frac{2((r-1)h_2(\theta) - 1)(1-\theta)}{(r-1)((2-r-\theta)h_2(\theta) + 1)}.$$

Отсюда и из (4.5) получим уравнение относительно θ :

$$c_1 = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{(r-1)h_2(\theta)}} = \frac{2((r-1)h_2(\theta) - 1)(1-\theta)}{(r-1)((2-r-\theta)h_2(\theta) + 1)}. \tag{4.6}$$

Предположим, что существует корень уравнения (4.6) $\theta^l \in (0,1)$. Тогда величины c_1^l и c_2^l однозначно определяются по θ^l соответственно из (4.6) и (4.2). Покажем, что при этом $c_1^l, c_2^l > 0$ и $c_1^l + c_2^l < 1$. Действительно, по лемме 4.1 $(r-1)h_i(\theta^l) > (\theta^l)^{2-i},\ i = 0, 2$. Отсюда из (4.6) следует, что $c_1^l \in (0,1)$, а из (4.4) получаем $c_2^l > 0$. Наконец, из (4.2) вытекает, что $0 < \theta^l(1-c_1^l) - c_2^l < 1 - c_1^l - c_2^l$.

Осталось показать, что уравнение (4.6) имеет единственное решение $\theta^l \in (0,1)$. Обозначим через $g_1(\theta)$ и $g_2(\theta)$ функции, стоящие соответственно в левой и правой частях уравнения (4.6). По лемме

4.1 функция h_2 убывает на интервале $(0,1)$. Следовательно, функция g_1 возрастает на $(0,1)$. Функции g_1 и g_2 имеют предельные значения

$$g_1(0) = 1 - \sqrt{\frac{1}{r-1}}, \;\; g_2(0) = +\infty, \;\; g_1(1) = 1, \; g_2(1) = 0.$$

Докажем, что функция g_2 убывает на интервале $(0,1)$. Тогда графики функций g_1 и g_2 на интервале $(0,1)$ будут пересекаться в единственной точке. Введем функцию $f(\theta) = (r-1)h_2(\theta) - 1$. Имеем:

$$f'(\theta) = \frac{(r+\theta-2)f(\theta)+\theta-1}{\theta(1-\theta)}, \; g_2(\theta) = \frac{2f(\theta)(1-\theta)}{(2-r-\theta)f(\theta)+1-\theta},$$

$$g_2'(\theta) = \frac{f'(\theta)(1-\theta)^2 + f^2(\theta)(r-1)}{((2-r-\theta)f(\theta)+1-\theta)^2} =$$

$$= \frac{((r+\theta-2)f(\theta)+\theta-1)(1-\theta)+(r-1)\theta f^2(\theta)}{\theta((2-r-\theta)f(\theta)+1-\theta)^2}.$$

Докажем, что на интервале $(0,1)$ производная $g_2'(\theta) < 0$. Положим $D = (r+\theta-2)^2 + 4(r-1)\theta$. Поскольку числитель в выражении для $g_2'(\theta)$ является квадратичной функцией от $f(\theta)$, неравенство $g_2'(\theta) < 0$ эквивалентно неравенству

$$f(\theta) - \frac{(1-\theta)\big(-(r+\theta-2)+\sqrt{D}\big)}{2(r-1)\theta} < 0,$$

которое выполнено только тогда, когда функция

$$q(\theta) \stackrel{def}{=} (r-1)J(\theta) - \frac{(1-\theta)^{r-1}}{\theta^{r-2}} - \frac{(1-\theta)^r\big(-(r+\theta-2)+\sqrt{D}\big)}{2(r-1)\theta^{r-1}}$$

отрицательна на интервале $(0,1)$. Заметим, что $q(1) = 0$. Поэтому достаточно доказать, что $q'(\theta) > 0$ при $\theta \in (0,1)$. Производная разности $(r-1)J(\theta) - (1-\theta)^{r-1}\theta^{2-r}$ равна $-((1-\theta)/\theta)^{r-1}$. Отсюда

$$q'(\theta) = \frac{1}{2(r-1)}\Big(\frac{1-\theta}{\theta}\Big)^{r-1}\Big[\Big(\frac{r+\theta-1}{\theta}\Big)(-(r+\theta-2)+\sqrt{D}) -$$

$$-(1-\theta)\Big(-1+\frac{3r+\theta-4}{\sqrt{D}}\Big)\Big] - \Big(\frac{1-\theta}{\theta}\Big)^{r-1}.$$

Неравенство $q'(\theta) > 0$ эквивалентно следующему:

$$(r+\theta-1)D - \theta(1-\theta)(3r+\theta-4) >$$

$$> \sqrt{D}[2(r-1)\theta + (r+\theta-1)(r+\theta-2) - \theta(1-\theta)]. \qquad (4.7)$$

Обе части неравенства (4.7) положительны при $r > 2$ и $\theta \in (0,1)$. Например, левая часть положительна, поскольку

$$4(r+\theta-1)\theta(r-1) > 4(1-\theta)\theta(r-1) > (1-\theta)\theta(3r+\theta-4).$$

Можно показать, что разность квадратов левой и правой частей неравенства (4.7) равна $4(r-1)^2\theta^2(r-1+2\theta+2\theta^2) > 0$. □

Утверждение 4.1. *Пусть $r > 2$, а (θ^l, c_1^l, c_2^l) – решение системы уравнений (4.2) – (4.4). Положим $\lambda^l = c_2^l/(\theta^l(1-c_1^l))$. Тогда в игре G^l $\xi^l = \lambda^l I_{\theta^l} + (1-\lambda^l)I_0$ и $\delta^l = c_1^l\delta_0 + c_2^l$ – оптимальные стратегии природы и статистика, соответственно, а $v^l = (c_2^l)^2$ – значение игры.*

Доказательство. Из леммы 4.1 и уравнения (4.2) следует, что $\lambda^l \in (0,1)$. По выбору тройки (θ^l, c_1^l, c_2^l) функция $F(\theta, c^l)$ принимает значение $(c_2^l)^2$ в точках 0 и θ^l. Ее производная в нуле $F'_\theta(0, c^l) = -(1-c_1^l)c_2^l < 0$. Поэтому производная $F'_\theta(\theta, c^l)$ обращается в нуль в некоторой точке $\theta_1 \in (0, \theta^l)$. Далее, из равенства $F'_\theta(\theta^l, c^l) = 0$ следует, что вторая производная $F''_{\theta\theta}(\theta, c^l)$ обращается в нуль в некоторой точке $\theta_2 \in (\theta_1, \theta^l)$. Эта точка единственна, поскольку по лемме 4.1 производная $F'''_{\theta\theta\theta}(\theta, c^l) = (c_1^l)^2(r-1)h_0'''(\theta)$ отрицательна. Отсюда $F''_{\theta\theta}(\theta^l, c^l) < 0$ и θ^l – точка максимума функции $F(\theta, c^l)$ на отрезке $[0,1]$ (см. рис. 1*b*). Следовательно, при любых $\theta \in [0,1]$

$$F(\theta, c^l) \leqslant F(0, c^l) = F(\theta^l, c^l) = (c_2^l)^2. \qquad (4.8)$$

С другой стороны, для любой стратегии $\delta = c_1\delta_0 + c_2 \in \Delta^l$

$$R(\xi^l, \delta) = (1-\lambda^l)F(0,c) + \lambda^l F(\theta^l, c) =$$

$$= (1-\lambda^l)c_2^2 + \lambda^l[(\theta^l(1-c_1) - c_2)^2 + c_1^2((r-1)h_0(\theta^l) - (\theta^l)^2)].$$

Нетрудно проверить, что

$$\min_{\delta \in \Delta^l} R(\xi^l, \delta) = R(\xi^l, \delta^l) = (c_2^l)^2. \qquad (4.9)$$

Из (4.8) и (4.9) следует, что (ξ^l, δ^l) – седловая точка функции $R(\xi, \delta)$ на $\Xi \times \Delta^l$. □

Из утверждения 4.1 следует, что $\delta^l = c_1^l \delta_0 + c_2^l$ – линейная минимаксная стратегия статистика, для которой

$$\max_{\theta\in[0,1]} F(\theta, c^l) = \min_{c\in[0,1]^2} \max_{\theta\in[0,1]} F(\theta, c).$$

Пример 4.1. Пусть $r = 4$. Тогда $\theta^l = 0.707665$, $\lambda^l = 0.783058$, $c_1^l = 0.722955$, $c_2^l = 0.153569$, $v^l = (c_2^l)^2 = 0.023569$.

В следующем разделе рассматривается метод приближенного решения игры G, позволяющий, как показывают вычисления, улучшить стратегию статистика δ^l.

5. Приближенное решение статистической игры

Пусть $r > 1$. Для каждого целого $N \geqslant 1$ определим усеченную стратегию статистика $\delta_N = (\delta(0), \delta(1), \dots, \delta(N)) \in [0,1]^{N+1}$ и соответствующую функцию выигрыша

$$R_N(\theta, \delta_N) = \theta^r \sum_{t=0}^{N} \frac{(r)_t}{t!}(1-\theta)^t(\theta - \delta(t))^2$$

в игре $G_N = \langle [0,1], [0,1]^{N+1}, R_N(\theta, \delta_N)\rangle$. Функция G_N выпукла по δ_N. Поэтому (см., например, [3]) в игре G_N природа может ограничиться использованием смешанных стратегий вида $\xi = \sum\limits_{i=1}^{m} a_i I_{\theta_i}$, где

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = 1,\ a_i \geqslant 0,\ i = 1, \dots, m,\ 0 \leqslant \theta_1 \leqslant \theta_2 \leqslant \dots \leqslant \theta_m \leqslant 1,\ m \leqslant N+2.$$

Множество всех таких стратегий природы обозначим через Ξ^m. Для каждой стратегии $\xi \in \Xi^m$ соответствующая байесовская стратегия δ_N^ξ, минимизирующая функцию $R_N(\xi, \delta_N)$ по $\delta_N \in [0,1]^{N+1}$, имеет вид $\delta_N^\xi = (\mathrm{E}\,[\Theta|t], t = 0, 1, \dots, N)$, где осреднение берется по апостериорному распределению

$$\xi|t = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} a_i \theta_i^r (1-\theta_i)^t I_{\theta_i}}{\sum\limits_{j=1}^{m} a_j \theta_j^r (1-\theta_j)^t}.$$

Чтобы приближенно решить игру G_N, зададим точность $\varepsilon_1 > 0$ и выберем некоторое значение $m < N+2$. Величины

$$\underline{v}_N = \max_{\xi \in \Xi^m} R(\xi, \delta_N^\xi) = R(\xi^*, \delta_N^{\xi^*}),\ \bar{v}_N = \max_{\theta \in [0,1]} R(\theta, \delta_N^{\xi^*})$$

оценивают значение v_N игры G_N снизу и сверху соответственно. Если неравенство $\bar{v}_N - \underline{v}_N \leqslant \varepsilon_1$ не выполнено, увеличиваем m и повторяем расчеты до тех пор, пока не будет достигнута точность ε_1. Отметим, что при заданном ε_1 минимальное требуемое значение m растет с увеличением r (см. табл.1).

Таблица 1. Минимальные m, обеспечивающие точность $\varepsilon_1 = 10^{-8}$.

r	2	3	4	5	6	7	8	9	10
m	10	12	14	21	25	26	28	30	32

По найденной стратегии статистика $\delta_N^{\xi^*}$ определим стратегию δ^* в исходной игре G :

$$\delta^*(t) = \begin{cases} \delta_N^{\xi^*}(t), & 0 \leqslant t \leqslant N, \\ \delta_N^{\xi^*}(N), & t > N. \end{cases} \tag{5.1}$$

Стратегия δ^* является ε-минимаксной оценкой, т.е. реализующей минимум функции $M(\delta) = \max\limits_{0 \leqslant \theta \leqslant 1} R(\theta, \delta)$ с точностью до некоторого $\varepsilon > 0$. Чтобы найти ε, оценим «хвост» ряда $R(\theta, \delta^*)$:

$$\sum_{t=N+1}^{\infty} \frac{(r)_t}{t!} \theta^r (1-\theta)^t (\theta - \delta^*(t))^2 \leqslant \max_{0 \leqslant \theta \leqslant 1} \theta^2 \Big(1 - \sum_{t=0}^{N} \frac{(r)_t}{t!} \theta^r (1-\theta)^t \Big) \stackrel{def}{=} \varepsilon_2(N).$$

Теперь можно взять $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2(N)$. Следует отметить, что величина $\varepsilon_2(N)$ медленно убывает с ростом N. Например, при $r = 4$ $\varepsilon_2(200) \approx 0.00017$, а $\varepsilon_2(1000) \approx 0.000007$. При больших N решение игры G_N требует значительного объема вычислений.

Уменьшить величину $\varepsilon_2(N)$ можно с помощью следующего приема. Пусть статистик предполагает, что $\theta \in [\underline{\theta}, 1]$, где $\underline{\theta} > 0$ – нижняя граница для параметра θ. Допущения такого рода встречаются при оценке параметров (см. [7]). Тогда в играх G и G_N нужно заменить отрезок $[0,1]$ на $[\underline{\theta},1]$, а при вычислении $\varepsilon_2(N)$ следует максимизировать по отрезку $[\underline{\theta},1]$. Например, при $r=4$ и $\underline{\theta}=0.1$ улучшенное значение $\varepsilon_2(200)$ станет равным 10^{-8}. При этом значение игры $v\approx v_{200}$ с точностью до $\varepsilon=2\cdot10^{-8}$ равно 0.01943937.

6. Сравнение минимаксных оценок с классическими

Используя функцию риска, сопоставим при $r>2$ оценки δ^l и δ^* в (5.1) с несмещенной оценкой $\delta_0(t)=(r-1)/(r+t-1)$ и оценкой

$$\delta_1(t)=\arg\max_{0\leqslant\theta\leqslant1}\theta^r(1-\theta)^t=\frac{r}{r+t},\ t=0,1,\ldots,$$

полученной по методу максимального правдоподобия.

Утверждение 6.1. *Пусть $r>2$. Функция риска $R(\theta,\delta_0)$ имеет на отрезке $[0,1]$ единственную точку максимума $\theta_0(r)$, которая стремится к $2/3$ при $r\to\infty$.*

Доказательство. Функция $R(\theta,\delta_0)=F(\theta,1,0)=(r-1)h_0(\theta)-\theta^2$ обращается в нуль в концах отрезка $[0,1]$ и положительна на интервале $(0,1)$. Покажем, что она унимодальна на отрезке $[0,1]$. Действительно, предположим, например, что она имеет на интервале $(0,1)$ две точки локального максимума и одну точку локального минимума. Тогда найдется точка $\theta\in(0,1)$, в которой $h_0'''(\theta)=0$, что противоречит лемме 4.1.

Точка максимума $\theta_0(r)$ функции $R(\theta,\delta_0)$ удовлетворяет уравнению $(r-1)h_0'(\theta)-2\theta=0$ или (см. (4.1)) уравнению

$$\Big(\frac{r-\theta}{r-1}\Big)\Big(\frac{\theta}{1-\theta}\Big)^{r-1}(r-1)J(\theta)-\theta=\frac{2\theta(1-\theta)}{r-1}. \qquad (6.1)$$

Пусть $\theta\in(1/2,1)$. При больших r справедливы следующие разложения:

$$J(\theta)=\int\limits_0^{(1-\theta)/\theta}\frac{z^{r-2}}{1+z}dz=\int\limits_0^{(1-\theta)/\theta}z^{r-2}\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^tz^tdz=$$

$$=\Big(\frac{1-\theta}{\theta}\Big)^{r-1}\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^t\frac{1}{r-1+t}\Big(\frac{1-\theta}{\theta}\Big)^t,$$

$$\frac{r-1}{r+t}=1-\frac{t+1}{r}+\frac{t(t+1)}{r^2}+o\Big(\frac{1}{r^2}\Big),\ t=0,1,\ldots,$$

$$(r-1)\Big(\frac{\theta}{1-\theta}\Big)^{r-1}J(\theta)=1-\Big(1-\frac{1}{r}\Big)\Big(\frac{1-\theta}{\theta}\Big)+\Big(1-\frac{2}{r}+\frac{1\cdot 2}{r^2}\Big)\Big(\frac{1-\theta}{\theta}\Big)^2-$$

$$-\Big(1-\frac{3}{r}+\frac{2\cdot 3}{r^2}\Big)\Big(\frac{1-\theta}{\theta}\Big)^3+\ldots=$$

$$=\theta-\frac{1}{r}\sum_{t=1}^{\infty}(-1)^t t\Big(\frac{1-\theta}{\theta}\Big)^t+\frac{1}{r^2}\sum_{t=2}^{\infty}(-1)^t(t-1)t\Big(\frac{1-\theta}{\theta}\Big)^t+o\Big(\frac{1}{r^2}\Big)=$$

$$=\theta+\frac{1}{r}\theta(1-\theta)+\frac{2}{r^2}\theta(1-\theta)^2+o\Big(\frac{1}{r^2}\Big),$$

$$\frac{r-\theta}{r-1}=1+\frac{1-\theta}{r}+\frac{1-\theta}{r^2}+o\Big(\frac{1}{r^2}\Big),$$

$$\frac{1}{r-1}=\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}+o\Big(\frac{1}{r^2}\Big).$$

Подставляя эти разложения в (6.1), получим

$$\Big(1+\frac{1-\theta}{r}+\frac{1-\theta}{r^2}+o\Big(\frac{1}{r^2}\Big)\Big)\Big(\theta+\frac{1}{r}\theta(1-\theta)+\frac{2}{r^2}\theta(1-\theta)^2+o\Big(\frac{1}{r^2}\Big)\Big)-\theta=$$

$$=2\theta(1-\theta)\Big(\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}+o\Big(\frac{1}{r^2}\Big)\Big)$$

или $\theta/r^2=2/(3r^2)+o(1/r^2)$. $\square$

Функция $R(\theta,\delta^l)=F(\theta,c^l)$ принимает в концах отрезка $[0,1]$ положительные значения $(c_2^l)^2$ и $(c_1^l+c_2^l-1)^2$, а $R(0,\delta_0)=R(1,\delta_0)=0$. Поскольку $\delta_0\in\Delta^l$, из определения стратегии δ^l следует неравенство $R(\theta_0(r),\delta_0)>R(\theta_0(r),\delta^l)$. Поэтому уравнение $R(\theta,\delta^l)=R(\theta,\delta_0)$ имеет в интервале $(0,1)$ по меньшей мере два корня θ_{01} и $\theta_{02},\ \theta_{01}<\theta_{02}$. Однако более двух корней оно иметь не может, поскольку в противном случае, как и в доказательстве утверждения 6.1, получаем противоречие с леммой 4.1.

Итак, при $\theta\in(\theta_{01},\theta_{02})$ оценка δ^l имеет меньшее значение функции риска, чем δ_0. Наоборот, при $\theta\in(0,\theta_{01})\cup(\theta_{02},1)$ оценка δ_0 по функции риска более предпочтительна, чем δ^l. Как показывают вычисления, с ростом r длина интервала $(\theta_{01},\theta_{02})$ уменьшается и, например, при $r>50000$ становится меньше $1/10$. Как отмечалось выше, рост r может быть связан с увеличением числа испытаний. Сходная картина наблюдалась и в [10] для минимаксной оценки параметра биномиального распределения.

Аналогичные выводы можно сделать и при сравнении стратегий статистика δ^l и δ_1. В частности, уравнение $R(\theta, \delta^l) = R(\theta, \delta_1)$ имеет в интервале $(0, 1)$ в точности два корня θ_{11} и θ_{12}, $\theta_{11} < \theta_{12}$.

В табл. 2 содержатся значения корней θ_{ij} $(i = 0, 1,\ j = 1, 2)$ при $r = 5, 50, 500, 5000, 50000$.

Таблица 2. Корни θ_{ij} при некоторых значениях r.

r	5	50	500	5000	50000
θ_{01}	0.2561	0.4106	0.5144	0.5799	0.6180
θ_{02}	0.9032	0.8569	0.7964	0.7462	0.7131
θ_{11}	0.2136	0.4010	0.5134	0.5798	0.6180
θ_{12}	0.8450	0.8441	0.7941	0.7458	0.7130

Для сравнения стратегии статистика δ^* (см. (5.1)) с какой-либо другой стратегией δ отметим, что изменение функции риска $R(\theta, \delta^*)$ на отрезке $[0, 1]$ незначительно. Поэтому вместо $R(\theta, \delta^*)$ будем использовать постоянную $\hat{v}$, оценивающую сверху значение v игры G и близкую к v. Можно показать, что уравнение $R(\theta, \delta) = \hat{v}$ имеет на интервале $(0, 1)$ при $\delta = \delta_0$ и $\delta = \delta_1$ по два корня: $\theta^*_{01} < \theta^*_{02}$ и $\theta^*_{11} < \theta^*_{12}$ соответственно. Как показывают расчеты, при $\delta = \delta^l$ это уравнение имеет три корня $\theta^l_1 < \theta^l_2 < \theta^l_3$. Взаимное расположение графиков функций $R(\theta, \delta^l)$, $R(\theta, \delta_0)$ и $R(\theta, \delta_1)$ представлено на рис. 2.

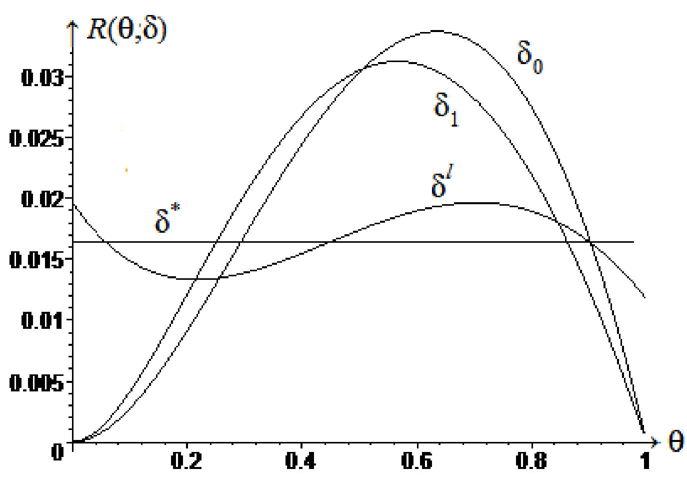

Рисунок 2. Функция риска при стратегиях $\delta^*, \delta^l, \delta_0$ и δ_1 $(r = 5)$.

Пример 6.1. Пусть $r = 5$. Тогда $\theta_1^l = 0.0615$, $\theta_2^l = 0.4390$, $\theta_3^l = 0.9055$, $\theta_{01}^* = 0.2911$, $\theta_{02}^* = 0.9038$, $\theta_{11}^* = 0.2482$, $\theta_{12}^* = 0.8641$. Величина $\hat{v} = 0.01623661$ отличается от v не более, чем на 10^{-7}. На интервалах $(0, \theta_{01}^*), (\theta_{01}^*, \theta_2^l), (\theta_2^l, \theta_{12}^*)$ и $(\theta_{12}^*, 1)$ лучшими среди четырех оценок являются $\delta_0, \delta^l, \delta^*$ и δ_1 соответственно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Блекуэл Д., Гиршик М. *Теория игр и статистических решений.* М.: Иностранная литература, 1958.

2. Вальд А. *Статистические решающие функции.* В кн. Позиционные игры. М.: Наука, 1967. С. 300–582.

3. Васин А.А., Морозов В.В. *Теория игр и модели математической экономики.* М.: МАКС Пресс, 2005.

4. Гельфанд И.М., Граев М.И., Ретах В.С. *Общие гипергеометрические системы уравнений и ряды гипергеометрического типа* // Успехи математических наук. 1992. Т. 47. № 4. С. 3–82.

5. Грень Е. *Статистические игры и их применение.* М.: Статистика, 1975.

6. Дюбин Г.Н. *Статистическая игра оценки параметра геометрического распределения.* В кн.: Теоретико-игровые вопросы принятия решений. Л.: Наука, 1978. С. 124–125.

7. Леман Э. *Теория точечного оценивания.* М.: Наука, 1991.

8. Bliss C.I., Fisher R.A. *Fitting the negative binomial distribution to biological data* // Biometrics. 1953. V. 9. № 2. P. 176–200.

9. Ferguson T.S, Kuo L. *Minimax estimation of a variance* // Annals of the Institute of Statistical Mathematics. 1994. V. 46. № 2. P. 295–308.

10. Hodges J.L., Lehmanm E.L. *Some problems in minimax point estimation* // Annals of Mathematical Statistics. 1950. V. 21. № 2. P. 182–192.

11. Saha K., Paul S. *Bias-corrected maximum likelihood estimator of the negative binomial dispersion parameter* // Biometrics. 2005. V. 61. № 1. P. 179–185.

MINIMAX ESTIMATION OF PARAMETER OF THE NEGATIVE BINOMIAL DISTRIBUTION

Vladimir V. Morozov, Moscow State University, Cand.Sc., Associated Professor, (vmorosov@mail.ru),
Maria A. Syrova, Moscow State University, post-graduate student, (syr.maria@gmail.com).

Abstract: A minimax estimation of parameter of the negative binomial distribution is considered. We derive of a numerical method for solution of the statistical game with a quadratic loss function. A minimax linear estimation is found.

Keywords: negative binomial distribution, statistical game, minimax estimate, hypergeometric function, Bayes estimate.