Математическая Теория Игр и её Приложения, т.8, в.3, с. 20–33

УДК 518.9
ББК 22.18

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ РИСКА ПРИ ЧАСТИЧНОМ УПОРЯДОЧЕНИИ ИСХОДОВ

Виктор В. Розен
Саратовский государственный университет
им. Н. Г. Чернышевского
410012, Саратов, ул. Астраханская, 83
e-mail: rozenvv@info.sgu.ru

Рассматривается математическая модель принятия решений в условиях риска в следующем виде. Реализационная структура модели предполагает задание множества стратегий X, множества состояний среды Y, множества исходов A, функции реализации $F : X \times Y \to A$, а также априорного распределения вероятностей на множестве состояний среды Y. Целевая структура модели задается при помощи (частичного) отношения порядка ω на множестве исходов A. Каждой стратегии $x \in X$ соответствует вероятностный вектор стандартного симплекса $S(A)$, при этом отношение порядка ω продолжается на $S(A)$. Под оптимальным решением понимается такая стратегия $x^* \in X$, для которой соответствующий вероятностный вектор является максимальным элементом относительно продолженного порядка. Основной результат работы состоит в обосновании метода (алгоритма) нахождения оптимальных решений указанной модели в предположении, что множества X, Y, A являются конечными. Каждый шаг данного алгоритма основан на установлении разрешимости некоторой конечной системы линейных неравенств.

Ключевые слова: принятие решения в условиях риска, продолжение отношения порядка, порядковое ядро.

1. Введение

Математическим моделям принятия решений в условиях неопределенности и риска посвящена обширная литература (см., напр., переведенные на русский язык монографии [1,2]). В данной статье рассматриваются математические модели принятия решений в условиях риска, в которых, в отличие от классических моделей, целевая структура задается не в виде функций выигрыша, а в виде отношений предпочтения.

Математическая модель принятия решения в условиях риска предполагает, во-первых, задание трех множеств: *множества стратегий* X, *множества состояний среды* Y и *множества исходов* A. Связь между этими множествами устанавливается с помощью *функции реализации* F, которая является отображением декартова произведения $X \times Y$ в A. Таким образом, функция реализации каждой паре вида (x, y), где $x \in X$ и $y \in Y$, ставит в соответствие определяемый ею исход $F(x, y) \in A$. Набор объектов $\langle X, Y, A, F \rangle$ представляет собой *реализационную структуру* задачи принятия решения в условиях неопределенности. Неопределенность проявляется здесь в том, что исход зависит от двух факторов: от выбранной стратегии и от состояния среды; однако принимающий решение, выбирая стратегию, не знает истинного состояния среды. Говорят, что принятие решения происходит в условиях риска, если принимающий решение имеет информацию о наступлении того или иного состояния среды в форме вероятностного распределения на множестве Y. Здесь мы будем рассматривать простейший случай, когда множества X и Y являются конечными, а информация о состоянии среды задается вероятностным вектором q стандартного симплекса $S(Y)$ (то есть вектором с неотрицательными компонентами, сумма которых равна единице). При произвольном $y \in Y$ неотрицательное число $q(y)$ интерпретируется как вероятность наступления состояния среды y. Далее, целевая структура данной модели принятия решения задается в виде отношения предпочтения ω на множестве исходов A. Мы предполагаем, что отношение предпочтения транзитивно и антисимметрично, т. е. ω является отношением порядка на множестве A. При этом пара $\langle A, \omega \rangle$

представляет собой некоторое упорядоченное множество. Итак, модель принятия решения с упорядоченными исходами в условиях риска может быть задана в виде

$$G = \langle X, Y, A, \omega, F, q \rangle \tag{1.1}$$

и ее компоненты имеют смысл, указанный выше. Принятие решения состоит либо в выборе некоторого элемента $x \in X$, либо в выборе вероятностного вектора $p \in S(X)$. Используя терминологию теории игр, говорят в первом случае, что принимающий решение «применяет чистую стратегию», а во втором – «применяет смешанную стратегию». При этом чистую стратегию формально можно рассматривать как частный случай смешанной стратегии (в соответствии с которой элемент $x \in X$ выбирается с вероятностью, равной 1, а все остальные элементы множества X с вероятностью, равной 0). Отметим, что множество вероятностных векторов $S(X)$ является подмножеством линейного (векторного) пространства, состоящего из всевозможных действительных векторов, число компонент которых равно мощности множества X Принципиальным является то обстоятельство, что принимающий решение «знает» вероятностный вектор q состояний среды. Каждому вероятностному вектору $p \in S(X)$ соответствует вероятностный вектор F_p^q стандартного симплекса $S(A)$, где при произвольном $a \in A$ неотрицательное число $F_p^q(a)$ есть вероятность наступления исхода a при условии, что принимающий решение применяет смешанную стратегию p. В нашем случае (когда множества X и Y конечны) вероятность $F_p^q(a)$ может быть найдена по формуле [3]:

$$F_p^q(a) = \sum_{\substack{F(x,y)=a \\ (x,y)\in X\times Y}} p(x)q(y). \tag{1.2}$$

В частности, если принимающий решение использует чистую стратегию $x \in X$, формула (1.2) принимает вид:

$$F_x^q(a) = \sum_{\substack{F(x,y)=a \\ y\in Y}} q(y). \tag{1.3}$$

Для упорядочения множества векторов стандартного симплекса $S(A)$ мы используем здесь *каноническое продолжение* $\tilde{\omega}$ (см. [4]), которое может быть эффективно задано с помощью равносильности:

$$\mu \leq^{\tilde{\omega}} \nu \quad \Leftrightarrow \quad (\forall\ B \in M(\omega)) \quad \mu(B) \leq \nu(B). \tag{1.4}$$

Замечание 1.1. Здесь μ, $\nu \in S(A)$, $\mu(B) = \sum\limits_{a \in B} \mu(a)$, $\nu(B) = \sum\limits_{a \in B} \nu(a)$, $M(\omega)$ есть семейство мажорантно-стабильных подмножеств упорядоченного множества $\langle A, \omega \rangle$. Напомним, что подмножество $B \subseteq A$ называется *мажорантно-стабильным* [3], если условия $a \in B$, $a' \geq^{\omega} a$ влекут $a' \in B$.

Определение 1.1. *Под оптимальным решением в модели* (1.1) *понимается подмножество $X^* \subseteq X$, состоящее из таких стратегий $x^* \in X$, для которых вероятностный вектор$F^q_{x^*}$ является максимальным элементом подмножества $\{F^q_p : \ p \in S(X)\}$ относительно порядка $\tilde{\omega}$.*

Нашей дальнейшей задачей является доказательство существования и описание оптимальных решений для моделей вида (1.1). Отметим вначале следующее обстоятельство.

Замечание 1.2. Множество $\{F^q_p : p \in S(X)\}$ совпадает с выпуклой оболочкой конечного множества векторов $\{F^q_x : x \in X\}$ и, следовательно, является выпуклым многогранником.

Справедливость данного утверждения вытекает из легко проверяемого равенства: $F^q_p = \sum\limits_{x \in X} p(x) F^q_x$, где F^q_x определяется формулой (1.3). Таким образом, задача описания оптимальных решений для модели G вида (1.1) сводится к нахождению максимальных относительно порядка $\tilde{\omega}$ вероятностных векторов в выпуклых многогранниках стандартного симплекса $S(A)$. В следующем разделе мы рассмотрим эту задачу в общем виде.

2. Максимальные вероятностные векторы в выпуклых многогранниках

Пусть $\langle A, \omega \rangle$ – произвольное конечное упорядоченное множество, $\tilde{\omega}$ – каноническое продолжение порядка ω на стандартный симплекс $S(A)$ вероятностных векторов (см. (1.4)). Установим несколько вспомогательных свойств порядка $\tilde{\omega}$.

Лемма 2.1 (свойство выпуклости). *Отношение $\tilde{\omega}$ является выпуклым, т. е. из условий*

$$\begin{cases} \mu_1 \leq^{\tilde{\omega}} \nu_1, \\ \mu_2 \leq^{\tilde{\omega}} \nu_2 \end{cases}$$

следует $\alpha_1\mu_1+\alpha_2\mu_2 \leq^{\tilde{\omega}} \alpha_1\nu_1+\alpha_2\nu_2$ при любых $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$, $\alpha_1+\alpha_2 = 1$.

Из свойства выпуклости отношения $\tilde{\omega}$ сразу следует, что при любом фиксированном $\mu \in S(A)$ сечение $\{\nu \in S(A) : \ \mu \leq^{\tilde{\omega}} \nu\}$ является выпуклым подмножеством в пространстве $S(A)$.

Некоторым усилением леммы 2.1 является следующее утверждение.

Лемма 2.2 (уточненное свойство выпуклости). *1. Из соотношений*

$$\begin{cases} \mu_1 \leq^{\tilde{\omega}} \nu_1, \\ \dots\dots\dots \\ \mu_m \leq^{\tilde{\omega}} \nu_m \end{cases} \tag{2.1}$$

следует

$$\alpha_1\mu_1 + \ldots + \alpha_m\mu_m \leq^{\tilde{\omega}} \alpha_1\nu_1 + \ldots + \alpha_m\nu_m$$

при любых $\alpha_k \geq 0$ $(k = 1, \ldots, m)$, $\sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k = 1$.

2. Если среди соотношений (2.1) хотя бы одно строгое и все $\alpha_k > 0$ $(k = 1, \ldots, m)$, то выполняется

$$\alpha_1\mu_1 + \ldots + \alpha_m\mu_m <^{\tilde{\omega}} \alpha_1\nu_1 + \ldots + \alpha_m\nu_m.$$

Для доказательства леммы 2.2 достаточно просуммировать с весовыми коэффициентами $\alpha_k \geq 0$ $(k = 1, \ldots, m)$ неравенства $\mu_k(B) \leq$ $\leq \nu_k(B)$ при произвольном мажорантно-стабильном подмножестве $B \in M(\omega)$ и воспользоваться представлением порядка $\tilde{\omega}$ по формуле (1.4).

Лемма 2.3 (свойство слабой сократимости). *Из соотношения*

$$\mu <^{\tilde{\omega}} \alpha_0\mu + \alpha_1\mu_1 + \ldots + \alpha_m\mu_m, \tag{2.2}$$

где $\alpha_s \geq 0$ $(s = 0, \ldots, m)$, $\sum\limits_{s=0}^{m} \alpha_s = 1$ следует соотношение

$$\mu <^{\tilde{\omega}} \beta_1\mu_1 + \ldots + \beta_m\mu_m \tag{2.3}$$

для некоторых $\beta_k \geq 0$ $(k = 1, \ldots, m)$, $\sum\limits_{k=1}^{m} \beta_k = 1$.

В самом деле, из соотношения (2.2) согласно (1.4) при произвольном $B \in M(\omega)$ имеем: $\mu(B) \leq \alpha_0\mu(B) + \alpha_1\mu_1(B) + \ldots + \alpha_m\mu_m(B)$, откуда получаем $\mu(B) \leq \beta_1\mu_1(B) + \ldots + \beta_m\mu_m(B)$, где $\beta_k = \alpha_k/1 - \alpha_0$ для всех $k = 1, \ldots, m$. Заметим, что, ввиду $\alpha_0 < 1$, выполняется $\beta_k \geq 0$, и $\sum\limits_{k=1}^{m} \beta_k = 1$. Согласно (1.4) из последнего неравенства получаем $\mu \leq^{\tilde{\omega}} \beta_1\mu_1 + \ldots + \beta_m\mu_m$. Так как соотношение (2.2) выполняется как строгое, последнее соотношение также будет строгим, и получаем (2.3).

3. Порядковое ядро

Следующая наша задача – дать описание множества максимальных относительно порядка $\tilde{\omega}$ векторов в выпуклых многогранниках, содержащихся в стандартном симплексе $S(A)$, где $\langle A, \omega \rangle$ – произвольное конечное упорядоченное множество. Установим вначале несколько вспомогательных утверждений. Зафиксируем некоторое подмножество $P \subseteq S(A)$.

Определение 3.1. *Подмножество $P_1 \subseteq P$ назовем Int-устойчивым, если ни один вектор $\mu \in P_1$ не мажорируется относительно строгого порядка $<^{\tilde{\omega}}$ выпуклой линейной комбинацией остальных векторов из P_1.*

Определение 3.2. *Подмножество $P_1 \subseteq P$ назовем End-устойчивым в P, если всякий вектор $\mu \in P \backslash P_1$ мажорируется относительно строгого порядка $<^{\tilde{\omega}}$ некоторой выпуклой линейной комбинацией векторов из P_1.*

Определение 3.3. *Подмножество $P_1 \subseteq P$, которое одновременно является Int- и End-устойчивым в P, назовем порядковым ядром для подмножества P.*

Установим некоторые свойства Int- и End-устойчивых подмножеств.

Теорема 3.1 (свойство единственности порядкового ядра)**.** *Любое подмножество вероятностных векторов $P \subseteq S(A)$ содержит не* *более одного порядкового ядра.*

Доказательство. Предположим, что $P_1,\ P_2 \subseteq P$ – два порядковых ядра для P. Покажем, что $P_1 \backslash P_2 = \emptyset$. В противном случае найдется вектор $\mu \in P_1,\ \mu \notin P_2$. По свойству End-устойчивости подмножества $P_2 \subseteq P$ имеем соотношение: $\mu <^{\tilde{\omega}} \alpha_1\mu_1 + \ldots + \alpha_m\mu_m$ для некоторых $\mu_1, \ldots, \mu_m \in P_2$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m > 0$, $\sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k = 1$. Среди векторов $\mu_1, \ldots, \mu_m$ хотя бы один не принадлежит подмножеству P_1 (иначе получаем противоречие со свойством *Int-устойчивости* P_1). Не нарушая общности, считаем, что первые r векторов не принадлежат P_1, тогда $\mu_1, \ldots, \mu_r \in P_2 \backslash P_1$ $(1 \leq r \leq m)$. По свойству End-устойчивости подмножества $P_1 \subseteq P$ каждый из векторов $\mu_1, \ldots, \mu_r$ мажорируется относительно строгого порядка $<^{\tilde{\omega}}$ некоторой выпуклой линейной комбинацией векторов из P_1. Далее, используя уточненное свойство выпуклости (лемма 2.2), получаем, что вектор $\alpha_1\mu_1 + \ldots + \alpha_m\mu_m$ мажорируется относительно порядка $<^{\tilde{\omega}}$ некоторой выпуклой линейной комбинацией векторов из P_1. Вместе с соотношением $\mu <^{\tilde{\omega}} \alpha_1\mu_1 + \ldots + \alpha_m\mu_m$ это приводит к противоречию с условием Int-устойчивости подмножества P_1. Показали, что $P_1 \backslash P_2 = \emptyset$, аналогично $P_2 \backslash P_1 = \emptyset$, откуда $P_1 = P_2$. □

На основании теоремы 3.1 введем обозначение $\operatorname{ord}\ker P$ для порядкового ядра произвольного подмножества вероятностных векторов $P \subseteq S(A)$. Характеризацию порядковых ядер дает

Теорема 3.2. *Вероятностный вектор $\mu \in P$ принадлежит* $\operatorname{ord}\ker P$ *тогда и только тогда, когда μ является максимальным элементом выпуклой оболочки* $\operatorname{conv} P$ *относительно порядка $\tilde{\omega}$.*

Доказательство. Пусть вектор μ является максимальным элементом выпуклой оболочки $\operatorname{conv} P$. Предположение $\mu \notin \operatorname{ord}\ker P$ влечет по свойству End-устойчивости мажорирование вектора μ относительно строгого порядка $<^{\tilde{\omega}}$ некоторой выпуклой линейной комбинацией векторов из $\operatorname{ord}\ker P$. Так как последняя принадлежит $\operatorname{conv} P$, то приходим к противоречию с определением максимального элемента.

Обратно, зафиксируем произвольно вектор $\mu_0 \in \operatorname{ord}\ker P$. Предположим, что μ_0 не является максимальным элементом выпуклой оболочки $\operatorname{conv} P$. Тогда имеет место $\mu_0 <^{\tilde{\omega}} \alpha_1\mu_1 + \ldots + \alpha_m\mu_m$, где

$\mu_1,\ldots,\mu_m \in P$, $\alpha_k \geq 0 \quad (k=1,\ldots,m)$, $\sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k = 1$. Найдется индекс $k \in \{1,\ldots,m\}$, для которого $\mu_k \notin \operatorname{ord}\ker P$ (иначе получаем противоречие со свойством Int-устойчивости порядкового ядра). Не нарушая общности, считаем, что условие $\mu_k \notin \operatorname{ord}\ker P$ выполняется для $k \in \{1,\ldots,r\}$, где $1 \leq r \leq m$. По свойству End-устойчивости порядкового ядра каждый из векторов μ_k мажорируется относительно строгого порядка $<^{\tilde{\omega}}$ некоторой выпуклой линейной комбинацией векторов, принадлежащих $\operatorname{ord}\ker P$. Тогда с учетом уточненного свойства выпуклости (лемма 2.2) получаем, что вектор μ_0 мажорируется относительно порядка $<^{\tilde{\omega}}$ некоторой выпуклой линейной комбинацией векторов, принадлежащих $\operatorname{ord}\ker P$, а это противоречит свойству Int-устойчивости порядкового ядра. $\square$

Перейдем теперь к вопросу существования порядковых ядер.

Теорема 3.3. *Пусть $P \subseteq S(A)$ – произвольное подмножество вероятностных векторов. Всякое минимальное по включению End-устойчивое в P подмножество является Int-устойчивым. Следовательно, согласно теореме 3.1, подмножество P может иметь не более одного минимального End-устойчивого в нем подмножества, и в случае его существования последнее является порядковым ядром.*

Доказательство. Пусть $P_1 \subseteq P$ – минимальное End-устойчивое в P подмножество. Предположим, что P_1 не является Int-устойчивым, тогда имеет место $\nu_0 <^{\tilde{\omega}} \beta_1\nu_1 + \ldots + \beta_l\nu_l$ для некоторых ν_0, ν_1,..., $\nu_l \in P_1$, $\beta_1,\ldots,\beta_l \geq 0$, $\beta_1+\ldots+\beta_l = 1$, причем в силу свойства слабой сократимости (см. лемму 2.3) можно считать, что среди $\nu_1,\ldots,\nu_l$ вектор ν_0 не встречается. Убедимся, что подмножество $P_1 \backslash \{v_0\}$ является End-устойчивым в P. Зафиксируем вектор $\mu \in (P \backslash P_1) \cup \{v_0\}$. Если $\mu = \nu_0$, то по предположению вектор μ мажорируется относительно порядка $<^{\tilde{\omega}}$ указанной выпуклой линейной комбинацией векторов $\nu_1,\ldots,\nu_l \in P_1$. Если же $\mu \neq \nu_0$, то по свойству End-устойчивости подмножества P_1 в P вектор μ мажорируется относительно порядка $<^{\tilde{\omega}}$ некоторой выпуклой линейной комбинацией векторов $\kappa_1,\ldots,\kappa_t \in P_1$. Если среди $\kappa_1,\ldots,\kappa_t$ вектор ν_0 не встречается, то все доказано; в противном случае надо заменить ν_0 на мажорирующий его вектор

$\beta_1\nu_1+\ldots+\beta_l\nu_l$ и воспользоваться уточненным свойством выпуклости (см. лемму 2.2). $\square$

Следствие 3.1. *Всякое конечное множество вероятностных векторов $P \subseteq S(A)$ имеет единственное порядковое ядро.*

Единственность установлена выше (см. теорему 3.1). Доказательство существования порядкового ядра основано на следующем вспомогательном утверждении.

Лемма 3.1 (транзитивность End-устойчивости)**.** *Рассмотрим три множества вероятностных векторов $P_1 \subseteq P_2 \subseteq P_3$, причем P_1 End-устойчиво в P_2 и P_2 End-устойчиво в P_3. Тогда P_1 End-устойчиво в P_3.*

В самом деле, рассмотрим $\mu \in P_3\backslash P_1$. Если $\mu \in P_2$, то $\mu \in P_2\backslash P_1$ и по свойству End-устойчивости P_1 в P_2 вектор μ мажорируется относительно строгого порядка $<^{\tilde{\omega}}$ некоторой выпуклой линейной комбинацией векторов из P_1 и все доказано. В случае, когда $\mu \notin P_2$, имеем $\mu \in P_3\backslash P_2$ и по свойству End-устойчивости P_2 в P_3 вектор μ мажорируется относительно строгого порядка $<^{\tilde{\omega}}$ некоторой выпуклой линейной комбинацией векторов из P_2. Если в этой линейной комбинации все вектора попадают в P_1, то все доказано. В противном случае, заменяя каждый вектор, не попавший в P_1, на мажорирующую его выпуклую комбинацию векторов из P_1 и используя уточненное свойство выпуклости (см. лемму 2.2), получаем требуемое.

Доказательство следствия 3.1 проводится следующим образом. Пусть $P \subseteq S(A)$ – произвольное конечное подмножество вероятностных векторов. Если P Int-устойчиво, то, поскольку любое множество является End-устойчивым в себе самом, получаем, что P есть порядковое ядро для P: $\operatorname{ord}\ker P = P$. В противном случае найдется вектор $\mu_1 \in P$, который мажорируется относительно строгого порядка $<^{\tilde{\omega}}$ некоторой выпуклой линейной комбинацией отличных от μ_1 векторов из P. Тогда $P_1 = P\backslash\{\mu_1\}$ является End-устойчивым в P. Если подмножество P_1 является Int-устойчивым, то $\operatorname{ord}\ker P = P_1$. В противном случае найдется вектор $\mu_2 \in P_1$, который мажорируется относительно строгого порядка $<^{\tilde{\omega}}$ некоторой выпуклой линейной комбинацией отличных от μ_2 векторов из P_1. Тогда $P_2 =$

$P_1\backslash\{\mu_2\} = P\backslash\{\mu_1, \mu_2\}$ является End-устойчивым в P_1 и по свойству транзитивности End-устойчивости подмножество P_2 будет End-устойчивым в P. Если подмножество P_2 является Int-устойчивым, то $\operatorname{ord}\ker P = P_2$. Так как в силу конечности подмножества P последовательность $P_1, P_2, \ldots$ должна оборваться на некотором подмножестве $P_r \subseteq P$, то P_r будет либо порядковым ядром для P, либо минимальным по включению End-устойчивым в P; в силу теоремы 3.3 и в этом случае мы получаем порядковое ядро для P, т. е. $\operatorname{ord}\ker P = P_r$.

Таким образом, получаем окончательно следующий результат.

Теорема 3.4. *Каково бы ни было конечное подмножество вероятностных векторов $P \subseteq S(A)$, в результате процедуры последовательного удаления векторов, которые мажорируются относительно порядка $<^{\tilde{\omega}}$ некоторой выпуклой линейной комбинацией остальных векторов, мы получим порядковое ядро для P. На основании*(1.4) *задача нахождения порядкового ядра сводится к установлению разрешимости некоторых систем линейных неравенств.*

В следующем разделе иллюстрируется применение теоремы 3.4 для нахождения оптимальных решений модели (1.1).

4. Нахождение оптимальных решений для моделей принятия решений в условиях риска

Вернемся к задаче нахождения оптимальных стратегий для моделей принятия решений в условиях риска. Напомним, что оптимальные (смешанные) стратегии для модели (1.1) были определены как вероятностные векторы $p^* \in S(X)$,для которых вектор $F^q_{p^*}$ является максимальным элементом подмножества $\{F^q_p : p \in S(X)\}$ относительно порядка $\tilde{\omega}$ (см. определение 1.1). Так как на основании замечания 1.2 $\{F^q_p : p \in S(X)\} = \operatorname{conv}\{F^q_x : x \in X\}$, то в силу теоремы 3.2 последняя задача сводится к нахождению порядкового ядра для конечного множества вероятностных векторов $\{F^q_x : x \in X\}$. Покажем практическое решение этой задачи на примере.

Пример 4.1. Рассмотрим модель принятия решения в условиях риска вида (1.1), где $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ – множество стратегий, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ – множество состояний среды, $A = \{a, b, c, d\}$ – множество исходов, вероятностный вектор q имеет следующие компоненты:

$q(y_1) = 3/12$, $q(y_2) = 4/12$, $q(y_3) = 5/12$, функция реализации F задана табл. 1, а отношение порядка ω – диаграммой рис. 1. Вначале находим вероятностные векторы, соответствующие стратегиям x_1, x_2, x_3, x_4 (табл. 2) .

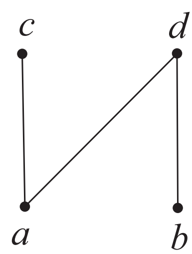

Рисунок 1. Диаграмма отношения порядка ω

Таблица 1.

F	y_1 3/12	y_2 4/12	y_3 5/12
x_1	d	a	a
x_2	a	b	c
x_3	b	c	a
x_4	c	a	d

Таблица 2.

	a	b	c	d
$F^q_{x_1}$	9/12	0	0	3/12
$F^q_{x_2}$	3/12	4/12	5/12	0
$F^q_{x_3}$	5/12	3/12	4/12	0
$F^q_{x_4}$	4/12	0	3/12	5/12

Согласно теореме 3.4 нахождение порядкового ядра для множества вероятностных векторов $\{F^q_{x_1}, F^q_{x_2}, F^q_{x_3}, F^q_{x_4}\}$ состоит в отбрасывании векторов, которые мажорируются относительно порядка $<^{\tilde{\omega}}$ выпуклой линейной комбинацией оставшихся векторов.

Мажорирование вектора $F^q_{x_1}$ выпуклой комбинацией векторов $(F^q_{x_2}$, $F^q_{x_3}$, $F^q_{x_4})$ означает справедливость соотношения

$$F^q_{x_1} <^{\tilde{\omega}} \alpha_2 F^q_{x_2} + \alpha_3 F^q_{x_3} + \alpha_4 F^q_{x_4} \tag{4.1}$$

для некоторых α_2, α_3, $\alpha_4 \geq 0$, $\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1$. Для выяснения выполнимости этого соотношения находим все мажорантно-стабильные подмножества упорядоченного множества $\langle A, \omega \rangle$: $\{c\}$, $\{d\}$, $\{c, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{b, d\}$, $\{b, c, d\}$, A. Согласно (1.4) выполнимость (4.1) равносильна строгой разрешимости следующей системы линейных неравенств относительно α_2, α_3, α_4 (т. е. хотя бы одно неравенство должно выполняться как строгое):

$$\begin{cases} 0 \le \frac{5}{12}\alpha_2 + \frac{4}{12}\alpha_3 + \frac{3}{12}\alpha_4, \\ \frac{3}{12} \le \frac{5}{12}\alpha_4, \\ \frac{3}{12} \le \frac{5}{12}\alpha_2 + \frac{4}{12}\alpha_3 + \frac{8}{12}\alpha_4, \\ 1 \le \frac{8}{12}\alpha_2 + \frac{9}{12}\alpha_3 + \alpha_4, \\ \frac{3}{12} \le \frac{4}{12}\alpha_2 + \frac{3}{12}\alpha_3 + \frac{5}{12}\alpha_4, \\ \frac{3}{12} \le \frac{9}{12}\alpha_2 + \frac{7}{12}\alpha_3 + \frac{8}{12}\alpha_4. \end{cases} \tag{4.2}$$

Система (4.2) строго разрешима (например, при $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$, $\alpha_4 = 1$). Отбрасывая вектор $F^q_{x_1}$, переходим к подмножеству $\{F^q_{x_2}, F^q_{x_3}, F^q_{x_4}\}$. Условие мажорирования вектора $F^q_{x_2}$ выпуклой линейной комбинацией остальных векторов этого подмножества означает существование неотрицательных чисел $\beta_3, \beta_4 \ge 0$, $\beta_3+\beta_4 = 1$, для которых

$$F^q_{x_2} <^{\tilde{\omega}} \beta_3 F^q_{x_3} + \beta_4 F^q_{x_4}. \tag{4.3}$$

Если (4.3) выполнено, то для мажорантно-стабильного подмножества $\{c\}$ согласно (1.4) должно быть верно неравенство:

$$\frac{5}{12} \le \frac{4}{12}\beta_3 + \frac{3}{12}\beta_4,$$

и с учетом равенства $\beta_3 + \beta_4 = 1$ получаем $\beta_3 \ge 2$, что невозможно. Итак, вектор $F^q_{x_2}$ отбрасывать нельзя. Условие мажорирования вектора $F^q_{x_3}$ выпуклой комбинацией векторов $\{F^q_{x_2}, F^q_{x_4}\}$ приводит к следующей системе неравенств относительно γ_2, $\gamma_4 \ge 0$, $\gamma_2 + \gamma_4 = 1$:

$$\begin{cases} \frac{4}{12} \le \frac{5}{12}\gamma_2 + \frac{3}{12}\gamma_4, \\ 0 \le \frac{5}{12}\gamma_4, \\ \frac{4}{12} \le \frac{5}{12}\gamma_2 + \frac{3}{12}\gamma_4, \\ \frac{9}{12} \le \frac{8}{12}\gamma_2 + \gamma_4, \\ \frac{3}{12} \le \frac{4}{12}\gamma_2 + \frac{5}{12}\gamma_4, \\ \frac{7}{12} \le \frac{9}{12}\gamma_2 + \frac{8}{12}\gamma_4. \end{cases} \tag{4.4}$$

Система (4.4) строго разрешима (например, при $\gamma_2 = \gamma_4 = 1/2$); отбрасывая вектор $F^q_{x_3}$, переходим к подмножеству $\{F^q_{x_2}, F^q_{x_4}\}$. В последнем подмножестве ни один из векторов $F^q_{x_3}$, $F^q_{x_4}$ не мажорируется другим; таким образом, оно представляет собой искомое порядковое ядро: ord $\ker\{F^q_{x_1}, F^q_{x_2}, F^q_{x_3}, F^q_{x_4}\} = \{F^q_{x_2}, F^q_{x_4}\}$.

Итак, в силу теоремы 3.2, в рассматриваемой модели принятия решения в качестве оптимального решения выступает подмножество стратегий $\{x_2, x_4\}$ (см. определение 1.1). На основании установленных в предыдущем разделе свойств порядковых ядер, оптимальность множества $\{x_2, x_4\}$ состоит в следующих двух свойствах.

1. Векторы $F^q_{x_2}$, $F^q_{x_4}$ являются максимальными элементами выпуклого многогранника $\operatorname{conv}\{F^q_{x_i} : x_i \in X\}$ относительно канонического продолжения $\tilde{\omega}$. В частности, ни один из них не мажорируется другим относительно порядка $\tilde{\omega}$.

2. Всякий вектор выпуклого многогранника $\operatorname{conv}\{F^q_{x_i} : x_i \in X\}$ мажорируется относительно порядка $\tilde{\omega}$ некоторой выпуклой линейной комбинацией векторов $\{F^q_{x_2}, F^q_{x_4}\}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Райфа Г. *Анализ решений.* М.: Наука, 1977.

2. Райфа Г., Шлейфер Р. *Прикладная теория статистических решений.* М.: Статистика , 1977.

3. Розен В.В. *Упорядоченные векторные пространства и их приложения.* Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2014.

4. Rozen V.V. *Equilibrium points in Games with ordered outcomes* // Contributions to game theory and management. Vol. III. Collected papers presented on the Third Int. Conference Game Theory and Management, Editors L.A. Petrosyan, N.A. Zenkevich. SPb.: Graduate School of Management SPbU, 2010. P. 368–386.

MATHEMATICAL MODELS OF DECISION MAKING UNDER RISK WITH ORDERED OUTCOMES

Victor V. Rozen, Saratov State University, Dr.Sc., prof. (rozenvv@info.sgu.ru).

Abstract: We consider mathematical models of decision making under risk as follows. Realization structure of the model consists of a set of strategies X, a set of states of an environment Y, set of outcomes A, realization function $F : X \times Y \to A$ and some distribution of probabilities on set Y. Goal structure of the model by partial order relation ω on the set of outcomes A is given. Fix a strategy $x \in X$ we can consider some probabilistic vector of standard simplex $S(A)$ and the order relation ω may be extended on $S(A)$. An optimal solution we mean as a strategy $x^* \in X$ that the corresponding probabilistic vector is a maximal element under extension of the order ω. The main problem of the article is development of method for finding of optimal solutions in considered model. In the case the sets X, Y, A are finite, we propose some algorithm for solving of this problem. Every step of the algorithm is based on the check of solvability some finite system of linear inequalities.

Keywords: decision making under risk, extension of order relation, ordinal core.