Математическая Теория Игр и её Приложения, т.8, в.3, с. 34–66

УДК 519.863, 517.977.52
ББК 22.18

РАСЧЕТ ПРОГНОЗНЫХ ТРАЕКТОРИЙ РАЗВИТИЯ ЭКОНОМИКИ ПРИ НАЛИЧИИ СТРУКТУРНЫХ ИЗМЕНЕНИЙ

Александр М. Тарасьев *
Анастасия А. Усова
Институт математики и механики
Уральского отделения РАН
620990, Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, 16
e-mail: tam@imm.uran.ru, anastasy.ousova@gmail.com
Юлия В. Шмотина
Институт математики и компьютерных наук
Уральский федеральный университет
620075, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4
e-mail: juliashmotina@yandex.ru

Работа посвящена изучению односекторных моделей экономического роста и возникающих в этой связи задач оптимального распределения инвестиционных потоков. В работе рассматривается два эконометрических варианта модели, первый из которых со степенной производственной функцией типа Кобба–Дугласа не учитывает возможные структурные изменения, а второй вариант модели с линейной производственной функцией основывается на предположении о существовании структурных сдвигов в статистических данных изучаемых факторов. Введение в модель фиктивных переменных, отвечающих за наличие структурных изменений в экономике региона

* Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 15-11-10018)

позволяет, в случае их существенности, отследить временной диапазон применимости изначальной модели, и впоследствии, осуществить переход к новой схеме, отвечающей новому состоянию экономики. Проводится качественный анализ решений задач оптимального управления для каждой из моделей, а также сравнение оптимальных модельных сценариев и их непрерывной «склейки» на соответствующих временных промежутках с реальными статистическими трендами. Данный подход адаптации параметров модели к новым условиям можно назвать процессом обучаемости общей модели. Это делает модель более гибкой по отношению к качественным изменениям, влияющим на прогностические тренды экономического развития.

Ключевые слова: эконометрический анализ данных, фиктивные переменные, оптимальное управление, экономический рост.

1. Введение

В настоящее время изучение экономических процессов и явлений является одной из самых востребованных задач, которая требует междисциплинарного подхода к ее исследованию. В этой связи стали основополагающими работы известных экономистов и математиков, предлагающие методику построения математических моделей для описания взаимосвязи ряда значимых макроэкономических показателей, в частности, работы таких авторов как К. Эрроу, Л.В. Канторовича, Р. Солоу, К. Шелла, Дж. Гроссмана, И. Хелпмана, Р. Айреса, М. Интрилигатора, Л. Крушвица и У.Ф. Шарпа [3, 6, 12, 14, 21]. Математические модели служат основой для постановки целого класса задач оптимального управления, суть которых сводится к оптимизации инвестиционных потоков, направленных на повышение эффективности производственных факторов [4, 15, 16, 20, 23].

Отметим, что рассматриваемые модели обладают свойством масштабируемости. Они могут быть применены не только к макроэкономическим агрегированным показателям, но и к изучению региональных процессов экономического развития.

Вместе с тем количество факторов, влияющих на динамику экономического развития страны (региона), определяется их значимостью и может быть увеличено, как например в работах [4, 20, 23] и других. Более того, влияние каждого из факторов может меняться с течением времени, что приводит, в частности, к структурным изменениям в модели.

В процессе идентификации моделей требуется проведение эконометрического анализа данных. Для этих целей используются подходы, предлагаемые в книгах по эконометрическому анализу С.А. Айвазяна и Я.Р. Магнуса [1, 7]. Калибровка параметров моделей является самостоятельной задачей. В данной работе осуществляется поиск коэффициентов степенной и линейной производственных функций, при этом во втором случае учитывается наличие возможных структурных изменений в экономике страны. Таким образом, одной из целей данной работы является выявление структурных сдвигов в развитии экономики страны и их адаптация в постановках задач оптимального управления. На основе калиброванных математических моделей рассматриваются задачи оптимального управления инвестициями в основные фонды экономики страны с целью максимизации интегрального индекса потребления логарифмического типа, дисконтированного на бесконечном промежутке времени [5, 13, 18, 20]. Исследование задачи проводится в рамках принципа максимума Понтрягина [8] для задач с бесконечным горизонтом планирования [4, 13]. В работе проводится анализ стационарных уровней гамильтоновой динамики в принципе максимума, поиск оптимального уровня инвестиций, способного вывести экономику в зону роста рассматриваемых макроэкономических показателей. Результатом работы служат численные расчеты прогнозных сценариев развития экономики России для обоих производственных функций (степенной и линейной), в том числе с учетом структурных изменений. Проводится сравнительный анализ статистический данных, эконометрических прогнозов и модельных траекторий в задачах оптимального управления.

2. Описание модели

2.1. Производственная функция

Основу модели производства составляет производственная функция $F(\cdot)$, которая встраивается в динамический процесс развития экономики. *Производственная функция* (или *функция выпуска*) – это функциональная связь между объемом выпускаемой продукции Y и производственными факторами, такими как основной капитал K, рабочая сила L и другими. В работе рассматриваются двухфакторные (двухсекторные) производственные функции, учитывающие два фактора: основной капитал K и рабочую силу L [3]. Производственная функция $F(K, L)$ называется *неоклассической* [2], если выполняются следующие условия

1. При отсутствии одного из ресурсов производство в целом невозможно, что математически означает

$$F(0, L) = F(K, 0) = 0.$$

2. При неограниченном увеличении одного из ресурсов выпуск неограниченно растет, т.е.

$$F(K, \infty) = F(\infty, L) = \infty.$$

3. Предполагается постоянная отдача от масштаба производства, другими словами, однородность первой степени производственной функции

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L), \quad \lambda > 0.$$

4. С ростом ресурсов выпуск растет, что означает строгую положительность первых производных производственной функции:

$$\frac{\partial F}{\partial K} > 0, \quad \frac{\partial F}{\partial L} > 0.$$

5. С увеличением потребления ресурсов скорость роста выпуска замедляется, что означает отрицательность вторых производных производственной функции (закон убывающей предельной продуктивности):

$$\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0.$$

2.1.1. Линейная производственная функция

Для линейной производственной функции предполагается, что в каждый момент времени t выполнено соотношение

$$Y(t) = F(K(t), L(t)) = \alpha K(t) + \beta L(t), \tag{2.1}$$

где коэффициенты продуктивности α и β положительны. Производственная функция (2.1) называется линейной производственной функцией. В случае линейной производственной функции предполагается, что ресурсы производства замещаются с постоянным коэффициентом замещения при любом сочетании их использования. Отметим важное свойство линейной производственной функции.

Свойство 1. *Линейная производственная функция не является неоклассической функцией.*

Доказательство. Для обоснования этого свойства достаточно убедиться в том, что вторая производная линейной производственной функции по переменным K и L равны нулю

$$\frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial K^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial L^2} = 0.$$

□

В силу свойства однородности линейной производственной функции (2.1) удобно перейти к относительным величинам: уровень внутреннего валового продукта, приходящийся на одного рабочего $y = Y/L$, и объем основного капитала на одного рабочего $k = K/L$. В новых переменных линейная производственная функция (2.1) принимает вид

$$y = \frac{Y}{L} = \frac{F(K,L)}{L} = F\left(\frac{K}{L}, \frac{L}{L}\right) = F\left(\frac{K}{L}, 1\right) = F(k,1) = f(k).$$

Таким образом, линейная производственная функция в относительных величинах принимает вид

$$y = f(k) = \alpha k + \beta. \tag{2.2}$$

2.1.2. Производственная функция Кобба–Дугласа

Для производственной функции Кобба–Дугласа предполагается, что в каждый момент времени t выполнено соотношение

$$Y(t) = F(K(t), L(t)) = aK^{\alpha}(t)L^{1-\alpha}(t), \tag{2.3}$$

где положительный параметр a является коэффициентом масштаба (или отвечает общему объему выпуска за счет производственных факторов, неучтенных в производственной функции, TFP – Total Factor Productivity), а неотрицательная величина α есть коэффициент эластичности капитала.

Производственная функция (2.3) называется *степенной функцией типа Кобба–Дугласа.*

В силу свойства однородности производственной функции Кобба–Дугласа (2.3) также удобно перейти к относительным величинам $y = Y/L$ и $k = K/L$. В новых переменных производственная функция Кобба–Дугласа (2.3) принимает вид

$$y = \frac{Y}{L} = a\frac{K^\alpha L^{1-\alpha}}{L} = a\left(\frac{K}{L}\right)^\alpha = k^\alpha = F(k,1) = f(k).$$

Таким образом, производственная функция Кобба–Дугласа в относительных величинах принимает вид

$$y = f(k) = ak^\alpha. \tag{2.4}$$

Отметим ряд важных свойств производственной функции Кобба–Дугласа как неоклассической функции.

Свойство 2. *Производственная функция Кобба–Дугласа $y = f(k)$ (2.4) строго монотонно растет.*

Доказательство. Для проверки данного свойства необходимо вычислить первую производную производственной функции по переменной k

$$y' = f'(k) = (ak^\alpha)' = a\alpha k^{\alpha-1}$$

Так как коэффициент эластичности α принимает значения из промежутка $(0,1)$, то вычисленная производная всегда положительная. Этот факт влечет строгий монотонный рост производственной функции по переменной k. □

Свойство 3. *Производственная функция Кобба–Дугласа $y = f(k)$ (2.4) строго вогнута по переменной k.*

Доказательство. Чтобы обосновать данное свойство, достаточно показать, что вторая производная производственной функции Кобба–Дугласа $y = f(k)$ по переменной k строго отрицательна

$$y'' = f''(k) = (ak^{\alpha})'' = a\alpha(\alpha - 1)k^{\alpha-2} = -a\alpha(1-\alpha)k^{\alpha-2}.$$

Поскольку параметр α удовлетворяет ограничениям $\alpha \in (0, 1)$, получим отрицательность второй производной, что влечет строгую вогнутость производственной функции Кобба–Дугласа. □

2.2. Динамика основных факторов

Предполагается, что изменение основного капитала $K(t)$ осуществляется согласно модели Солоу [21]

$$\dot{K}(t) = S(t) - \mu K(t), \tag{2.5}$$

где функция $S(t)$ определяет объем инвестиций в основной капитал $K(t)$ в момент времени t, а положительный параметр μ является коэффициентом амортизации основных фондов (основного капитала). Инвестиции $S(t)$ являются частью внутреннего валового продукта (ВВП), т.е. их можно представить в виде $S(t) = u(t)Y(t)$, где параметр $u(t)$ отвечает за долю ВВП, инвестируемую в основной капитал, и является *управляющим параметром модели.* Управляющий параметр $u(t)$ должен удовлетворять ограничениям

$$0 \leqslant S(t) < Y(t) \quad \Rightarrow \quad 0 \leqslant \frac{S(t)}{Y(t)} < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leqslant u(t) < 1.$$

Будем считать, что можно указать положительную константу $\overline{u}$ ($\overline{u} < 1$), определяющую максимальный уровень инвестиций. Значит, управляющий параметр модели $u(t)$ удовлетворяет ограничениям

$$0 \leqslant u(t) \leqslant \overline{u} < 1. \tag{2.6}$$

Относительно динамики изменения рабочей силы будем полагать, что она подчиняется экспоненциальному закону роста

$$\dot{L}(t) = nL(t), \quad n > 0, \tag{2.7}$$

где параметр n отвечает положительному темпу роста рабочей силы. Важно отметить, что по данным экономики России [19] за период с 1990 по 2011 годы данный закон изменения рабочей силы является адекватным.

Вычислим динамику изменения основного капитала, приходящегося на одного работающего человека, опираясь на соотношения (2.4), (2.5) и (2.7)

$$\dot{k}(t) = \left(\frac{K(t)}{L(t)}\right)' = \frac{\dot{K}(t)}{L(t)} - \frac{K(t)}{L(t)}\frac{\dot{L}(t)}{L(t)} = u(t)\frac{Y(t)}{L(t)} - \mu\frac{K(t)}{L(t)} - n\frac{K(t)}{L(t)} =$$
$$= u(t)y(t) - (\mu + n)k(t) = u(t)f(k(t)) - \delta k(t).$$

где положительный параметр δ обозначает уровень размытия капитала вследствие увеличения рабочей силы и амортизации основных фондов. Окончательно, динамика изменения относительного уровня капитала имеет вид

$$\dot{k}(t) = u(t)f(k(t)) - \delta k(t), \quad k(0) = k_0 = \frac{K(0)}{L(0)}. \tag{2.8}$$

2.3. Уравнение баланса

В условиях замкнутой экономической системы, когда ВВП $Y(t)$ распределяется между инвестициями $S(t)$ и потреблением $C(t)$, справедливо *уравнение баланса*

$$Y(t) = S(t) + C(t). \tag{2.9}$$

Балансовое равенство позволяет выразить уровень потребления $C(t)$ через объемы выпуска $Y(t)$ и инвестиций $S(t)$ в основные фонды в каждый момент времени t

$$C(t) = Y(t) - S(t).$$

Объемы инвестиций $S(t)$ можно представить в виде $S(t) = u(t)Y(t)$ где параметр $u(t)$ отвечает той доли выпуска, которая идет на инвестиции в основной капитал $K(t)$. В этом случае, уравнение баланса принимает вид

$$C(t) = (1 - u(t))Y(t).$$

При переходе в последнем равенстве к относительным величинам можно найти уровень потребления одного работающего $c(t)$

$$c(t) = \frac{C(t)}{L(t)} = (1-u(t))\frac{Y(t)}{L(t)} = (1-u(t))y(t) = (1-u(t))f(k(t)). \quad (2.10)$$

2.4. Критерий качества процесса управления

Качество процесса управления оценивается при помощи интегрального индекса потребления логарифмического типа, дисконтированного на бесконечном промежутке времени. Отметим, что в теории полезности логарифмическая функция описывает относительный прирост (в нашем случае потребления) за единицу времени. В условиях неопределенности логарифмическая функция задает постоянную относительную нерасположенность к риску [6].

$$J(\cdot) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\rho t} \ln c(t) dt = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\rho t} \left(\ln f(k(t)) + \ln\left(1 - u(t)\right)\right) dt. \quad (2.11)$$

2.5. Постановка задачи оптимального управления

Задача 1. Необходимо построить такую инвестиционную стратегию $(k(t), u(t))$, которая удовлетворяет ограничениям (2.6) и на траекториях динамической системы (2.8) максимизирует целевой функционал (2.11).

Поставленная задача оптимального управления удовлетворяет модификации принципа максимума Понтрягина [8, 13] для неограниченного промежутка времени. Ее исследованию посвящены работы [4, 5, 9, 10, 17, 22], в которых доказано существование единственной оптимальной стратегии, обладающей свойством насыщения роста.

3. Исследование задачи оптимального управления

Анализ задачи оптимального управления проводится в рамках принципа максимума Понтрягина для задач на неограниченном промежутке времени [13].

3.1. Гамильтонова функция

Составим стационарную гамильтонову функцию задачи управления, которая в силу динамики (2.8) и функционала качества процесса управления (2.11) с сопряженной переменной ψ имеет вид

$$H(k,\psi,u) = \ln f(k) + \ln(1-u) + \psi(uf(k) - \delta k). \tag{3.1}$$

Предложение 3.1. *Управление, доставляющее максимум гамильтониану* $H(k,\psi,u)$ (3.1) *имеет вид*

$$u^0(k,\psi) = \begin{cases} 0, & 0 < f(k)\psi \leqslant 1 \\ 1 - \dfrac{1}{f(k)\psi}, & 1 \leqslant f(k)\psi \leqslant \dfrac{1}{1-\overline{u}} \\ \overline{u}, & f(k)\psi \geqslant \dfrac{1}{1-\overline{u}} \end{cases} \tag{3.2}$$

Доказательство. Для доказательства данного утверждения покажем, что гамильтонова функция строго вогнута по параметру управления u.

$$\frac{\partial^2 H(k,\psi,u)}{\partial u^2} = -\frac{1}{(1-u)^2} < 0, \quad \forall\, k,\, \psi > 0, \quad u \in [0,\overline{u}].$$

Значит, управление, найденное из необходимых условий максимума действительно доставляет максимум гамильтоновой функции, если оно лежит в отрезке $[0,\overline{u}]$. В противном случае максимум будет достигаться на концах этого отрезка. Необходимые условия максимума записываются в виде

$$\frac{\partial H(k,\psi,u)}{\partial u} = -\frac{1}{1-u} + f(k)\psi = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 1 - \frac{1}{f(k)\psi}.$$

Поэтому, если найденное управление u меньше нуля, то максимум достигается при $u^0 = 0$. Если управление $u \in [0,\overline{u}]$, то $u^0 = u$. В оставшемся случае $u = \overline{u}$. □

3.2. Гамильтонова система

Максимизирующее управление $u^0(k,\psi)$ (3.2) делит область определения переменных (k,ψ) на три подобласти, в каждой из которых гамильтонова динамика имеет различную структуру, определяемую соотношениями

$$\begin{aligned}
\dot{k}(t) &= \frac{\partial H(k(t), \psi(t), u^0(k(t), \psi(t)))}{\partial \psi} = \\
&= u^0(k(t), \psi(t)) f(k(t)) - \delta k(t), \\
\dot{\psi}(t) &= \rho \psi(t) - \frac{\partial H(k(t), \psi(t), u^0(k(t), \psi(t)))}{\partial k} = \\
&= (\rho + \delta)\psi(t) - \frac{f'(k(t))}{f(k(t))} - u^0(k(t), \psi(t)) f'(k(t)) \psi(t).
\end{aligned} \tag{3.3}$$

4. Производственная функция Кобба–Дугласа

Важно подчеркнуть, что построение прогнозных модельных траекторий и эконометрический анализ производственной функции и других параметров модели являются взаимодополняющими задачами, но при этом осуществляются в разных блоках и имеют соответственно различные основания. Эконометрический анализ основан на классических методах эконометрики [1, 7] и служит для идентификации модельных параметров, в частности, коэффициентов эластичности производственной функции и параметра общей продуктивности производственных факторов. Вычислительные алгоритмы модели после подстановки в нее параметров, идентифицированных в эконометрическом анализе, работают в автономном режиме, производя оптимальную модельную траекторию эндогенного экономического роста. Существенным обстоятельством является тот факт, что в части моделирования не ставится задача наилучшего приближения модельными траекториями реальных временных рядов, а строится именно оптимальный инвестиционный план и соответствующая траектория экономического роста. Если оптимальная модельная траектория близка к реальным данным экономического развития, то это свидетельствует об оптимальном в смысле интегрального индекса потребления экономическом росте анализируемой экономической системы. В случае же отклонения оптимальной модельной траектории от данных в «верхнем» или «нижнем» направлении имеет смысл говорить о недоинвестировании или переинвестировании в экономической системе. При этом модель строит оптимальный инвестиционный план, который укажет диспропорции в реальных данных. В этом смысле модельные траектории следует назвать оптимальными прогнозными траекториями и отличать их от прогнозов эконометрических моделей.

4.1. Эконометрический анализ параметров производственной функции Кобба–Дугласа

4.1.1. Описание статистических данных

Статистические данные [11, 19] по макроэкономическим показателям России за период с 1990 по 2011 годы представлены в табл. 1.

На основании представленных данных осуществлялась калибровка параметров производственной функции эконометрическими методами.

4.1.2. Расчет оценок параметров модели и статистических характеристик

Калибровка производственной функции (2.4) осуществлялась на основе статистических данных (см. табл. 1) по экономике России за период с 1990 по 2011 годы с использованием модели парной регрессии

$$w_t = \alpha x_t + \beta, \quad \text{где} \quad w_t = \ln y_t,\ x_t = \ln k_t,\ \beta = \ln a\ (t = \overline{1, 22}). \quad (4.1)$$

Как известно, оценки параметров модели парной регрессии, вычисленные методом наименьших квадратов, находятся по формулам

$$\widehat{\alpha} = \frac{\operatorname{cov}(w, x)}{\sigma^2(x)} = 0.836, \quad \widehat{\beta} = \overline{w} - \widehat{\alpha}\overline{x} = 0.249 \quad \Rightarrow \quad \widehat{y} = 1.283k^{0.836}.$$

На графиках, представленных на Рис. 1, изображены реальные данные и траектория, построенная по модели парной регрессии.

4.1.3. Значимость модели регрессии

Для оценки качества регрессионной модели был вычислен коэффициент детерминации $R^2 = 0.909$, величина которого свидетельствует о хорошей «подгонке» модели к реальным данным. Результаты проверки гипотезы о значимости регрессионной модели позволяют заключить, что основной капитал оказывает существенное влияние на уровень ВВП страны, и это подтверждается следующими расчетами

Таблица 1. Статистические данные по экономике России за период с 1990 по 2011 гг.

Год, t	**ВВП,** $Y(t) \cdot 10^{11}$	**Осн. фонды,** $K(t) \cdot 10^{11}$	**Раб. сила,** $L(t) \cdot 10^{8}$
1990	5.16814	1.55718	0.77350
1991	5.09382	1.84740	0.76765
1992	4.60205	1.59293	0.75545
1993	4.35060	1.17497	0.73120
1994	3.95087	1.00895	0.70741
1995	3.95528	1.00620	0.70844
1996	3.91721	0.92711	0.69849
1997	4.04927	0.88989	0.68288
1998	2.70953	0.40546	0.67469
1999	1.95906	0.29054	0.72512
2000	2.59708	0.48550	0.73253
2001	3.06603	0.67299	0.72270
2002	3.45110	0.69197	0.73060
2003	4.30348	0.89766	0.72086
2004	5.91017	1.23530	0.72811
2005	7.64001	1.53392	0.73431
2006	9.89931	2.09584	0.74172
2007	12.9971	3.14068	0.75145
2008	16.6085	4.23536	0.75766
2009	12.2265	2.31403	0.75758
2010	14.8752	3.38788	0.75851
2011	18.5777	4.64374	0.76308

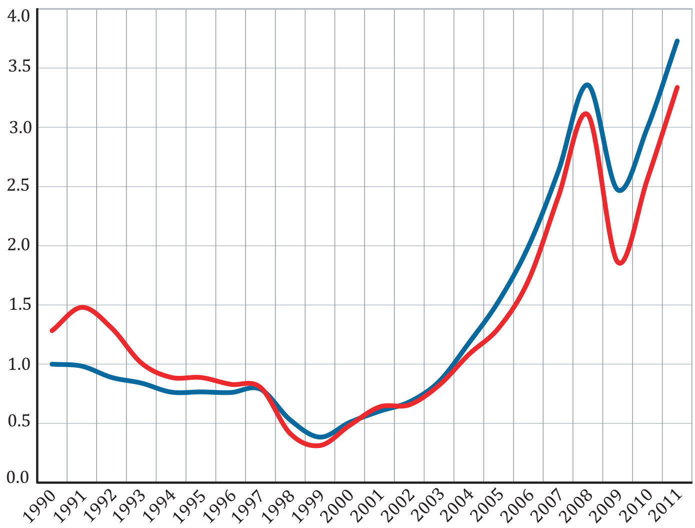

Рисунок 1. Сравнение реальных данных (темная линия) и прогнозных значений ВВП (светлая линия) по модели парной регрессии.

1. Оценка дисперсии ошибок является малой величиной

$$s^2 = \frac{1}{(N-2)\sum e_i^2} = 0.03.$$

2. Оценка дисперсии коэффициента эластичности $\sigma^2(\alpha)$ также мала

$$\sigma^2(\alpha^2) = \frac{s^2}{\sum(x_i - \overline{x})} = 0.0032.$$

3. Наблюдаемое значение статистики Стьюдента для $N-2 = 20$ степеней свободы находится в высоком диапазоне, что свидетельствует о значимости коэффициента эластичности α

$$t = \frac{\alpha}{\sigma(\alpha)} = 14.86,$$

при сравнении с критическим значением статистики (уровень надежности $\gamma = 95\%$)

$$t_k = t_{(1-\gamma)/2}(N-2) = 2.086 \Rightarrow t > t_k.$$

4.2. Исследование задачи оптимального управления

Рассмотрим гамильтонову систему (3.3) для производственной функции Кобба–Дугласа при различных режимах управления.

4.2.1. Режим нулевого управления

Область действия режима нулевого управления $u^0(k, \psi) = 0$ определяется ограничениями $0 < f(k)\psi \leqslant 1$. Гамильтонова система при таком управлении для производственной функции Кобба–Дугласа записывается в виде

$$\begin{aligned} \dot{k}(t) &= -\delta k(t), \\ \dot{\psi}(t) &= (\rho + \delta)\psi(t) - \frac{f'(k(t))}{f(k(t))}. \end{aligned}$$

Переходя к нормализованной динамике, получим систему дифференциальных уравнений в переменных (k, z), где $z = k\psi$.

$$\begin{aligned} \dot{k}(t) &= -\delta k(t), \\ \dot{z}(t) &= \rho z(t) - \frac{f'(k(t))k(t)}{f(k(t))} = \rho z(t) - \alpha. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Последнее равенство в системе уравнений было получено исходя из свойства производственной функции (2.4)

$$f'(k) = a\alpha k^{\alpha-1} = \alpha \frac{f(k)}{k}.$$

Как видно из структуры системы (4.2), ее решение относительно фазовой компоненты $k(t)$ экспоненциально убывает до нуля со скоростью обесценивания основных фондов δ. Таким образом, отсутствие инвестиционной составляющей $u(t)$ приводит к снижению основного капитала вплоть до нулевого уровня.

4.2.2. Режим переменного управления

Режим переменного управления характеризуется ненулевой долей выпуска, инвестируемой в основные фонды, которая вычисляется по формуле

$$u^0(k, \psi) = 1 - \frac{1}{f(k)\psi} \quad \Rightarrow \quad u^0(k, z) = 1 - \frac{k}{f(k)z}, \qquad z = k\psi, \tag{4.3}$$

и действует в ограничениях

$$1 \leqslant \frac{f(k)z}{k} \leqslant \frac{1}{1-\overline{u}}.$$

Гамильтонова система в области переменного управления для производственной функции Кобба–Дугласа имеет следующую структуру

$$\begin{aligned} \dot{k}(t) &= \left(\frac{f(k(t))}{k(t)} - \frac{1}{z(t)} - \delta\right) k(t), \\ \dot{z}(t) &= \left(\rho + (1-\alpha)\frac{f(k(t))}{k(t)}\right) z(t) - 1. \end{aligned} \tag{4.4}$$

4.2.3. Область насыщенного управления

Область насыщенного управления характеризуется максимально возможными объемами инвестиций $u^0(k,\psi) = u^0(k,z) = \overline{u}, \quad z = k\psi$, направленными в основные фонды $k(t)$, и стеснена ограничениями

$$\frac{f(k)z}{k} \geqslant \frac{1}{1-\overline{u}} > 1.$$

В этих условиях гамильтонова система (3.3) в переменных (k, z) для производственной функции Кобба–Дугласа принимает следующий вид

$$\begin{aligned} \dot{k}(t) &= \left(\overline{u}\frac{f(k(t))}{k(t)} - \delta\right) k(t), \\ \dot{z}(t) &= \left(\rho + \overline{u}(1-\alpha)\frac{f(k(t))}{k(t)}\right) z(t) - \alpha. \end{aligned} \tag{4.5}$$

4.3. Равновесное состояние экономики

Стационарные уровни гамильтоновой системы (3.3) определяют равновесные состояния экономической системы. Для нахождения этих уровней приравняем правые части гамильтоновых систем (4.2)-(4.5) к нулю и решим системы алгебраических уравнений в области определения переменных $k > 0$, $z > 0$. Очевидно, что гамильтонова система (4.2) в области нулевого управления не имеет стационарных уровней, удовлетворяющих ограничениям $k > 0$, $z > 0$. Однако в областях переменного и насыщенного управления стационарные уровни существуют, и их координаты определяются параметрами модели.

Предложение 4.1. *Положение равновесия в областях переменного и насыщенного управления может быть найдено по формулам*

$$k^* = \begin{cases} \left(\dfrac{a\alpha}{\delta+\rho}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, & u^* = \dfrac{\alpha\delta}{\delta+\rho} < \overline{u}, \\ \left(\dfrac{a\overline{u}}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, & u^* = \overline{u} \geqslant \dfrac{\alpha\delta}{\delta+\rho}. \end{cases}, \quad z^* = \frac{\alpha}{(1-\alpha)\delta+\rho}, \tag{4.6}$$

$$y^* = a(k^*)^\alpha, \quad c^* = y^*(1-u^*).$$

Доказательство. 1. Вычислим координаты стационарной точки в области переменного управления. Для этого необходимо приравнять правые части гамильтоновой системы (4.4) к нулю

$$\frac{f(k)}{k} - \frac{1}{z} - \delta = 0 \;\Rightarrow\; \frac{f(k^*)}{k^*} = \delta + \frac{1}{z^*},$$

$$\left(\rho + (1-\alpha)\frac{f(k)}{k}\right)z - 1 = 0 \;\Rightarrow\; \left(\rho + (1-\alpha)\left(\delta + \frac{1}{z^*}\right)\right)z^* = 1 \;\Rightarrow$$

$$z^* = \frac{\alpha}{(1-\alpha)\delta+\rho} \;\Rightarrow\; \frac{f(k^*)}{k^*} = \frac{\delta+\rho}{\alpha} \;\Rightarrow\; k^* = \left(\frac{a\alpha}{\delta+\rho}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Вычислим управление, отвечающее стационарному уровню

$$u^* = 1 - \frac{k^*}{f(k^*)z^*} = 1 - \frac{\alpha((1-\alpha)\delta+\rho)}{(\delta+\rho)\alpha} = \frac{\alpha\delta}{\delta+\rho} < 1.$$

Стационарная точка лежит в области переменного управления, если $u^* < \overline{u}$. Следовательно, если параметры модели удовлетворяют ограничениям

$$\frac{\alpha\delta}{\delta+\rho} < \overline{u},$$

то равновесное состояние (k^*, z^*, u^*) достигается в области переменного управления.

2. Вычислим координаты стационарной точки в области насыщенного управления, когда $u(t) = \overline{u}$. Для этого решим систему нелинейных алгебраических уравнений, составленную из правых частей гамиль-

тоновой динамики (4.5)

$$\overline{u}\frac{f(k)}{k} - \delta = 0 \;\Rightarrow\; \frac{f(k^*)}{k^*} = \frac{\delta}{\overline{u}} \;\Rightarrow\quad k^* = \left(\frac{a\overline{u}}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$\left(\rho + \overline{u}(1-\alpha)\frac{f(k)}{k}\right) z - \alpha = 0 \;\Rightarrow$$

$$(\rho + (1-\alpha)\delta)\, z^* = \alpha \;\Rightarrow\quad z^* = \frac{\alpha}{(1-\alpha)\delta + \rho}.$$

Стационарный уровень управления совпадает с максимальным объемом инвестиций, направленных в основной капитал $k(t)$, т.е. $u^* = \overline{u}$.

Равновесный уровень выпуска $y^* = f(k^*)$ в этой ситуации вычисляется по формуле $y^* = a(k^*)^\alpha$. Уровень потребления, выраженный через соотношение баланса, в состоянии экономического равновесия принимает значение $c^* = (1-u^*)y^*$. □

Если вложения в основной капитал удовлетворяют ограничению $u^* < \overline{u}$, то с течением времени происходит его снижение до уровня u^*, в противном случае, уровень инвестиций остается максимально возможным $\overline{u}$ на всем временном промежутке вплоть до момента стабилизации динамической системы. При любом из сценариев развития характер решений имеет более или менее выраженную S–образную форму, что обеспечивается наличием стационарных точек u^* или параметра ограничений $\overline{u}$ на инвестиции $u(t)$. Кроме того, оптимальным траекториям свойственна тенденция насыщения роста.

4.4. Прогнозные модельные траектории

Для модели экономического роста строятся численно [4, 5, 9, 22] ее оптимальные траектории. Вычислительные алгоритмы основаны на много-фазовой процедуре интегрирования гамильтоновой динамики: сначала в прямом времени строится нелинейный регулятор, стабилизирующий систему в положении равновесия. Траектории нелинейного регулятора с высокой точностью аппроксимируют оптимальные траектории в окрестности положения равновесия. Поэтому, далее решается задача интегрирования гамильтоновой динамики в обратном времени от аппроксимации нелинейного регулятора в положении равновесия до начальных состояний системы. Наконец, выполняется развертка в прямом времени найденной оптимальной траектории.

Проводится сравнение оптимальных модельных траекторий с реальными данными. Для построения прогноза используются результаты статистического анализа модели, а также данные по экономике России за период с 1990 по 2011 годы [11, 19]. Расчетные показатели экономического развития оказались равными $k^* = 5.97$, $y^* = 5.74$, $\overline{u} = 0.443$, $c^* = 3.195$.

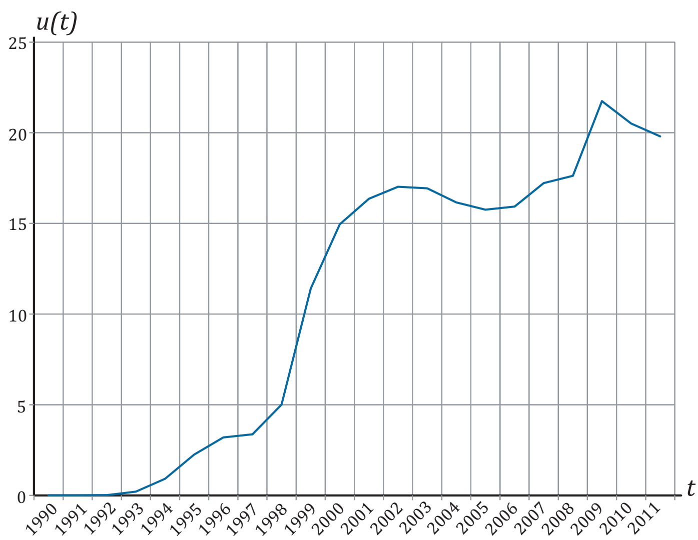

Рисунок 2. Доля ВВП, инвестируемая в основной капитал, $u(t), \%$.

1. Уровень амортизации основных фондов по данным Росстат [11] в среднем составил 42%, таким образом, параметр μ равен 0.42.
2. Темп роста рабочей силы n за период с 1990 по 2011 годы равен 0.004. 3. Дисконтирующий множитель ρ согласно данным [11] по ставке рефинансирования ЦБ РФ взят равным 0.08.
4. Объем инвестиций в основной капитал согласно данным Росстат [11] имеет четко выраженный растущий тренд (см. Рис. 2). Поэтому для построения прогноза максимальный уровень инвестиций был выбран на достаточно высоком уровне в 44.3%. Однако даже лимит инвестиций в 44.3% не отвечает неравенству

$$u^* = \frac{\alpha\delta}{\delta + \rho} =< \overline{u},$$

т.к. $u^* = 0.703$, а $\overline{u} = 0.443$.

Этот факт свидетельствует о том, что объем инвестиций снижаться не будет в прогнозном периоде. Выбор меньшего значения приводит к фактически нулевому росту экономики.

Модель показывает, что оптимальный уровень инвестиций для экономики России в настоящем периоде реализуется на верхнем уровне ограничений. Проводилось несколько экспериментов с различными ограничениями на максимальный объем инвестиций, и во всех этих экспериментах ответ один и тот же – наилучший уровень инвестиций реализуется на верхнем ограничении. Это означает, что основные фонды в экономике являются недоинвестированными и требуют увеличения даже верхнего порога. На рисунках (Рис.3-4) приведены

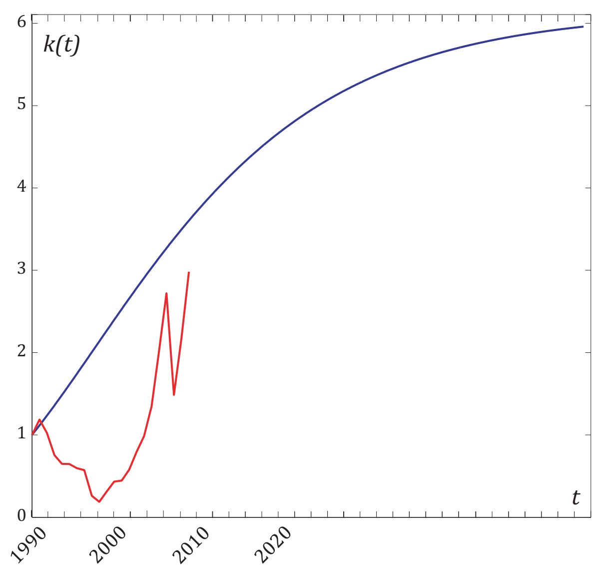

Рисунок 3. Прогноз темпа роста (темная линия) основного капитала $k(t)$ на душу работающего населения.

модельные траектории развития экономики России с прогнозом до 2050 года (темная линия) в сравнении с реальными данными (светлая линия). Графики четко показывают, что в 90–хх годах наблюдалось резкое падение производства и инвестиций в основной капитал, что привело к резкому снижению реальных статистических трендов. В это же время модельные траектории демонстрируют явно выраженную растущую динамику, т.к. модель, по сути своей, ориенти-

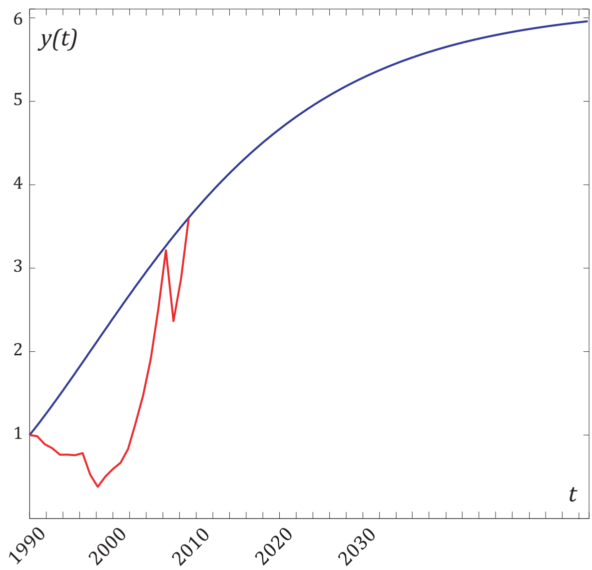

Рисунок 4. Прогноз темпа роста ВВП $y(t)$ (темная линия) на душу работающего населения.

рована на поиск такой инвестиционной стратегии, которая выводит экономику в область роста. Рост капиталовложений положительно отражается на статистических показателях динамики, как видно из графиков, начиная с 2000 года наметился явный рост исследуемых факторов (за исключением кризиса 2008 года), а к концу изучаемого периода фактические данные практически достигли модельных трендов.

5. Линейная производственная функция

Аналогичным образом построим прогнозные модельные траектории и произведем эконометрический анализ линейной производственной функции и других параметров модели, как делалось для случая производственной функции Кобба–Дугласа. Как говорилось ранее, эти задачи являются взаимодополняющими, но при этом осуществляются в разных блоках и имеют соответственно различные функции.

5.1. Эконометрический анализ параметров линейной производственной функции

5.1.1. Описание статистических данных

Статистические данные [11, 19] по макроэкономическим показателям России за период с 1991 по 2013 годы представлены в табл. 2.

Таблица 2. Статистические данные по экономике России за период с 1991 по 2013 гг.

Год, t	$K(t)/L(t)$	$Y(t)/L(t)$
1991	0.02790868	0.01895786
1992	0.60100132	0.26423754
1993	0.90301188	2.42505656
1994	17.9446746	8.97164683
1995	80.0009046	21.5362581
1996	201.529476	30.5378110
1997	207.822823	36.2762102
1998	224.197039	41.2920246
1999	223.582728	75.2284992
2000	270.691012	113.235271
2001	330.797722	137.636196
2002	401.581008	165.165082
2003	487.629185	200.188451
2004	525.151324	256.406567
2005	621.235597	323.538231
2006	706.962486	400.708628
2007	887.861539	488.797442
2008	1087.58335	602.809826
2009	1219.97197	575.237072
2010	1378.95456	685.270746
2011	1594.65571	826.365065
2012	1784.20592	915.406925
2013	1961.03614	983.126934

Как правило, независимые переменные в регрессионных моделях имеют «непрерывные» области изменения. Однако теория не накладывает никаких ограничений на характер регрессоров, в частности, некоторые переменные могут принимать всего два значения или, в более общей ситуации, дискретное множество значений. Дискретные фиктивные переменные количественным образом описывают качественные признаки. На основе статистических данных по макроэкономическим показателям России за период с 1991 по 2013 гг. можно сделать вывод о наличии структурных изменений в развитии экономики страны, пришедшихся на 1997 г. В связи с этим, для построения более гибкой математической модели экономического роста, с помощью которой будет легче отслеживать такого рода структурные изменения, введем фиктивную переменную $r = r(t)$. Ее бинарные значения $\{0, 1\}$ будут распределены следующим образом: 0 – период до структурных изменений, 1 – период с момента структурных изменений. На основании представленных данных, с учетом введенной фиктивной переменной, осуществлялась калибровка параметров линейной производственной функции эконометрическими методами по двум периодам с 1991 по 1996 год и с 1997 по 2013 год.

5.1.2. Расчет оценок параметров модели и статистических характеристик

Калибровка производственной функции (2.2) осуществлялась на основе статистических данных (см. табл. 2) по экономике России за период с 1991 по 2013 годы с использованием модели парной регрессии. Рассчитаем статистику для рядов, содержащих значения капиталовложений и ВВП, чтобы вычислить линейную функцию, наилучшим образом аппроксимирующую имеющиеся данные. Поскольку временной ряд был разделен на два периода до 1997 года и с 1998 года, то и значения параметров будут двузначными α_1^*, α_2^* и β_1^*, β_2^*. Значения параметров получились следующие

$$\alpha_1^* = 0.329 \quad \beta_1^* = 0.215 \quad \alpha_2^* = 0.542 \quad \beta_2^* = 14.942. \tag{5.1}$$

Как известно, модельные значения зависимой переменной находятся по формулам

$$\widehat{y} = \begin{cases} \alpha_1^* k + \beta_1^*, & t < 1997 \\ \alpha_2^* k + \beta_2^*, & t \geqslant 1997. \end{cases} \tag{5.2}$$

Заметим, что введенная фиктивная переменная, разделившая временной ряд на два периода, обусловила различие в оценках параметров модели, что в еще большей степени оказывает влияние на построение более гибкой модели. На графиках, представленных на Рис. 5,

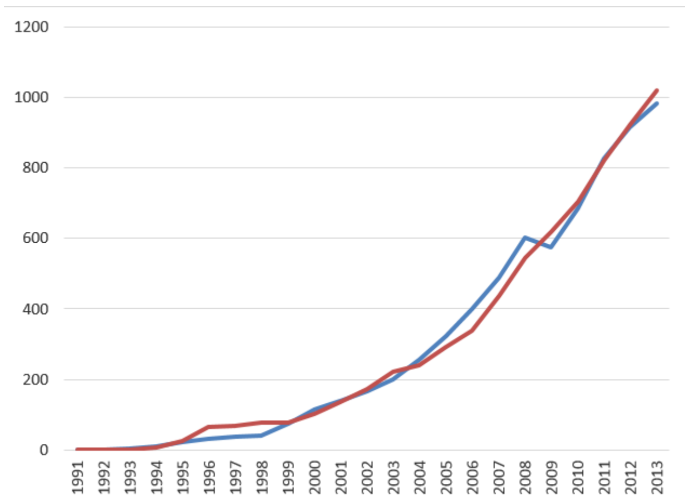

Рисунок 5. Сравнение реальных данных (темная линия) и прогнозных значений ВВП (светлая линия) по модели парной регрессии.

изображены реальные данные и траектория, построенная по модели парной регрессии.

5.1.3. Обоснование наличия структурных изменений

Для оценки качества регрессионной модели был вычислен коэффициент детерминации $R^2 = 0.99$, величина которого свидетельствует о хорошей «подгонке» к реальным данным. Результаты проверки гипотезы о значимости регрессионной модели позволяют заключить, что основной капитал оказывает существенное влияние на уровень ВВП страны, и это подтверждается следующими расчетами.

1. Наблюдаемое значение статистики Стьюдента для $N - 2 = 20$ степеней свободы достаточно высоко:

$$t = \frac{\alpha}{\sigma(\alpha)} = 2.228.$$

2. При этом критическое значение статистики (уровень надежности $\gamma = 95\%$) меньше наблюдаемого значения:

$$t_k = t_{(1-\gamma)/2}(N-2) = 2.086 \quad \Rightarrow \quad t > t_k.$$

5.2. Исследование задачи оптимального управления

Рассмотрим гамильтонову систему (3.3) для линейной производственной функции при различных режимах управления.

5.2.1. Режим нулевого управления

Область действия режима нулевого управления $u^0(k,\psi) = 0$ определяется ограничениями $0 < f(k)\psi \leqslant 1$. Гамильтонова система при таком управлении для линейной производственной функции записывается в виде

$$\begin{aligned} &\dot{k}(t) = -\delta k(t), \\ &\dot{\psi}(t) = (\rho+\delta)\psi(t) - \frac{\alpha}{\alpha k(t)+\delta}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

5.2.2. Режим переменного управления

Режим переменного управления характеризуется ненулевой долей выпуска, инвестируемой в основные фонды, которая вычисляется по формуле

$$u^0(k,\psi) = 1 - \frac{1}{f(k)\psi} \quad \Rightarrow \quad u^0(k,z) = 1 - \frac{k}{f(k)z}, \qquad z = k\psi, \tag{5.4}$$

и действует в ограничениях

$$1 \leqslant \frac{f(k)z}{k} \leqslant \frac{1}{1-\overline{u}}.$$

Гамильтонова система в области переменного управления для линейной производственной функции имеет следующую структуру

$$\begin{aligned} &\dot{k}(t) = (\alpha-\beta)k(t) - \frac{1}{\psi} + \beta, \\ &\dot{\psi}(t) = (\rho+\delta-\alpha)\psi(t). \end{aligned} \tag{5.5}$$

5.2.3. Область насыщенного управления

Область насыщенного управления характеризуется максимально возможными объемами инвестиций $u^0(k,\psi) = u^0(k,z) = \overline{u}, \quad z = k\psi$, направленными в основные фонды $k(t)$, и стеснена ограничениями

$$\frac{f(k)z}{k} \geqslant \frac{1}{1-\overline{u}} > 1.$$

В этих условиях гамильтонова система (3.3) в переменных (k,ψ) принимает для линейной производственной функции следующий вид

$$\begin{aligned} \dot{k}(t) &= (\overline{u}\alpha - \delta)k(t) + \overline{u}\beta, \\ \dot{\psi}(t) &= (\rho + \delta - \overline{u}\alpha)\psi(t) - \frac{\alpha}{\alpha k + \beta}. \end{aligned} \tag{5.6}$$

5.3. Равновесное состояние экономики

Стационарные уровни гамильтоновой системы (3.3) для линейной производственной функции определяют равновесные состояния экономической системы. Для нахождения этих уровней приравняем правые части гамильтоновых систем (4.2)–(4.5) для линейной производственной функции к нулю и решим системы алгебраических уравнений в области определения переменных $k > 0, \quad \psi > 0$.

Очевидно, что гамильтонова система (4.2) в областях нулевого и переменного управлений не имеет стационарных уровней, удовлетворяющих ограничениям $k > 0, \quad \psi > 0$. Однако, в области насыщенного управления стационарный уровень существует, и его координаты определяются параметрами модели.

Предложение 5.1. *Положение равновесия в области насыщенного управления может быть найдено по формулам*

$$k^* = \frac{\beta\overline{u}}{\delta - \alpha\overline{u}}, \quad u^* = \overline{u}, \tag{5.7}$$

если и только если выполнено неравенство $\delta > \alpha\overline{u}$.

Доказательство. Очевидно, что в областях с управлением (3.2), не отвечающем максимальному уровню $(u < \overline{u})$, не существует стационарной точки гамильтоновых систем (5.3) и (5.5), удовлетворяющей ограничениям $k^* > 0$, $\psi^* > 0$.

В области насыщенного управления $u = \overline{u}$ гамильтонова система (5.6) имеет стационарную точку, которая находится из системы алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}(\overline{u}\alpha - \delta)k + \overline{u}\beta &= 0,\\ (\rho + \delta - \overline{u}\alpha)\psi - \frac{\alpha}{\alpha k + \beta} &= 0.\end{aligned}$$

В силу простоты первого уравнения системы легко найти стационарный уровень фазовой переменной

$$k^* = \frac{\beta\overline{u}}{\delta - \alpha\overline{u}},$$

который удовлетворяет ограничениям $k^* > 0$ тогда и только тогда, когда $\delta > \alpha\overline{u}$. Второе уравнение доставляет стационарный уровень для сопряженной переменной

$$\psi^* = \frac{1}{\delta + \rho - \alpha\overline{u}} \cdot \frac{\alpha}{\alpha k^* + \beta} > 0,$$

поскольку $\delta + \rho - \alpha\overline{u} > \delta - \alpha\overline{u} > 0$.

Таким образом, предложение доказано. $\square$

5.4. Расчет стационарных уровней моделей системы

Для модели экономического роста с линейной производственной функцией проведены построения согласно многофазным алгоритмам с нелинейным регулятором из работ [4, 5, 9, 22] ее оптимальных траекторий и проведено сравнение с реальными данными. Для построения прогноза используются результаты регрессионного анализа производственной функции, а также данные по экономике России за период с 1991 по 2011 годы [11, 19].

Расчетные показатели экономического развития для первого периода оказались равными

$$k^* = 0.1028, \quad u^* = \overline{u}_1 = 0.1,$$

для второго периода, когда максимальный уровень инвестиций определен значением $\overline{u}_2 = 0.5$, стационарная точка системы отсутствует, поскольку не выполнено условие $\delta - \alpha\overline{u} > 0$ для значений $\delta = 0.244$ и $\alpha = 0.5418$.

5.5. Модельные траектории и статистические тренды

Траектории, отвечающие решению задачи оптимального управления, приведены на рис. 6 и 7 в сравнении с реальными данными, указанными в табл. 2, для основного капитала $k = k(t)$ и объема ВВП $y = y(t) = f(k(t))$, соответственно.

В сравнении с модельными траекториями для производственной функции Кобба–Дугласа можно сказать, что линейная функция, учитывающая структурные изменения, дает более близкий прогноз, предсказывая поведение, согласующееся с реальными данными.

За исследуемый промежуток времени с 1991 по 2013 годы величина относительного отклонения реальных данных по основному капиталу $k = k(t)$ от модельной траектории составляет величину

$$\Delta k(t) = \frac{\overline{|k(t) - k_t|}}{\sum\limits_{t=1991}^{2013} |k(t) - k_t|} = 0.0435,$$

Символом k_t обозначено статистическое значение реальных данных для основного капитала k в период t. Величина $\overline{|k(t) - k_t|}$ определяет среднее отклонение по абсолютной величине основного капитала $k(t)$ от значения реальных данных k_t, $t = 1991, \ldots, 2013$. Относительное отклонение $\Delta y(t)$ реальных данных по ВВП y_t от модельных значений $y(t)$ совпадает с $\Delta k(t) = 0.0435$. Такая точность обусловлена применением линейной производственной функции с фиктивной переменной, обнаруживающей структурные изменения.

6. Заключение

Работа посвящена изучению односекторных моделей экономического роста и возникающих в этой связи задач оптимального распределения инвестиционных потоков в случае наличия существенных структурных изменений в модели.

Произведена идентификация параметров экспоненциальной и линейной производственных функций, в том числе, с учетом структурных изменений по данным экономики России с 1991 по 2013 годы в

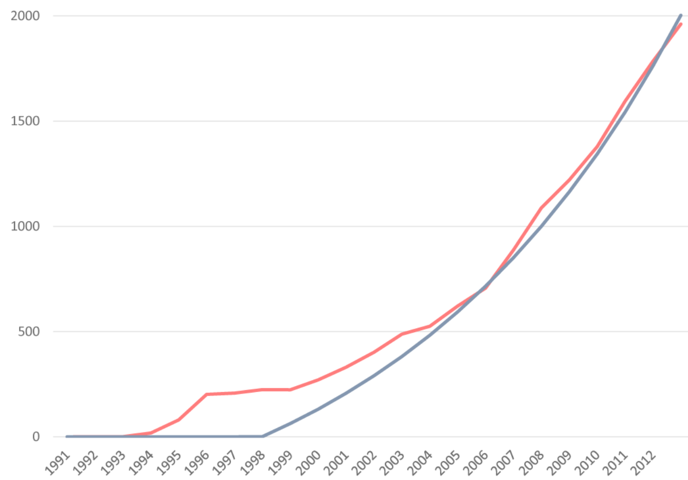

Рисунок 6. Оптимальный (темная линия) и статистический (светлая линия) тренды основного капитала $k(t)$.

оценке зависимости ВВП от основного капитала страны, и проведен анализ значимости регрессионной модели.

Рассмотрена задача оптимизации капиталовложений, построены ее решения в рамках принципа максимума Понтрягина и проанализированы тренды оптимальных модельных траекторий. С использованием алгоритмов поиска решений задач управления, построены модельные тренды, рассчитаны стационарные уровни основных экономических показателей и проведено сравнение с реальными статистическими данными по экономике России. Для модели с линейной функцией рассмотрены две задачи оптимального управления, отвечающих разным оценкам параметров производственной функции. Полученные оценки дают качественно разные результаты. В частности, для первого набора параметров, отвечающих периоду с 1991 по 1997 годы, гамильтонова динамика имеет стационарную точку, что свидетельствует о замедлении роста в окрестности стационарной точки k^*. Тогда как параметры, полученные для второго периода с 1997 по 2013 годы не отвечают условиям существования установившегося состояния, что свидетельствует о наличии монотонных трендов (в данном случае, возрастающих). Однако для сдвига экономической

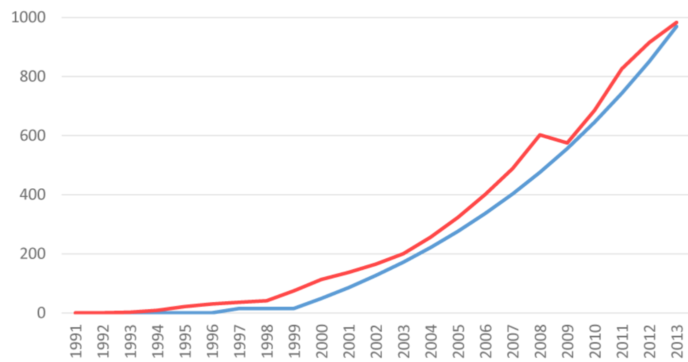

Рисунок 7. Оптимальный (темная линия) и статистический (светлая линия) тренды уровня ВВП $y(t)$.

системы в «зону роста» требуется достаточно высокий уровень инвестиций в основной капитал.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айвазян С.А., Иванова С.А. *Эконометрика.* М.: Маркет ДС, 2010.

2. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. *Математические методы в экономике.* М.: Дело и сервис, 2001.

3. Интрилигатор М. *Математические методы оптимизации и экономическая теория.* М.: Айрис Пресс, 2002.

4. Красовский А.А., Тарасьев А.М. *Свойства гамильтоновых систем в принципе максимума Понтрягина для задач экономического роста* // Труды Математического института им. В.А. Стеклова. 2008. Т. 262. С. 127–145.

5. Красовский А.А., Тарасьев А.М. *Построение нелинейных регуляторов в моделях экономического роста* // Труды Института математики и механики. Екатеринбург: УрО РАН. 2009. Т. 15, № 3. С. 127–138.

6. Крушвиц Л. *Финансирование и инвестиции.* С.-П.: Питер, 2006.

7. Магнус Я.Р., Катышев П.К., Пересецкий А.А. *Эконометрика.* М.: Дело, 2007.

8. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. *Математическая теория оптимальных процессов.* М.: Наука, 1983.

9. Тарасьев А.М., Усова А.А. *Построение регулятора для гамильтоновой системы двухсекторной модели экономического роста* // Труды математического института им.В.А.Стеклова. 2010. Т. 271. С. 278–298.

10. Тарасьев А.М., Усова А.А. *Стабилизация гамильтоновой системы для построения оптимальных траекторий* // Труды математического института им. В.А. Стеклова. 2012. Т. 277. С. 257–274.

11. Федеральная служба государственной статистики РФ (ФСГС РФ) `http://www.gks.ru/wps/wcm/connect/rosstat_main/rosstat/ru/statistics`

12. Шарп У.Ф., Александер Г.Дж., Бэйли Д.В. *Инвестиции.* М.: Инфра-М, 2010.

13. Aseev S.M., Kryazhimskiy A.V. *The Pontryagin Maximum Principle and Optimal Economic Growth Problems* // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. Pleiades Publishing. 2007. V. 257.

14. Ayres R.U., Warr B. *The Economic Growth Engine: How Energy and Work Drive Material Prosperity.* Cheltenham, UK: Edward Elgar Publishing, 2009.

15. Crespo Cuaresma J., Palokangas T., Tarasyev A. *Dynamic Systems, Economic Growth, and the Environment.* Heidelberg, New York, Dordrecht, London: Springer, 2010.

16. Crespo Cuaresma, J., Palokangas, T., Tarasyev, A. *Green Growth and Sustainable Development.* Heidelberg, New York, Dordrecht, London: Springer, 2013.

17. Krasovskii A., Kryazhimskiy A., Tarasyev A. *Optimal Control Design in Models of Economic Growth.* In: Evolutionary Methods for Design, Optimization and Control (P. Neittaanmeki, J. Poriaux and T. Tuovinen, Eds.), CIMNE, Barcelona, Spain. 2008, P. 70–75.

18. Krasovskii A., Tarasyev A. *Conjugation of Hamiltonian Systems in Optimal Control Problems* // Proceedings of the 17th IFAC World Congress, COEX, South Korea. 2008. V. 17, Part 1, P. 7784–7789. DOI: 10.3182/20080706-5-KR-1001.01316.

19. *OECD Statistics* `http://stats.oecd.org`. 2012.

20. Sanderson W., Tarasyev A., Usova A. *Capital vs Education: Assessment of Economic Growth from Two Perspectives* // IFAC PapersOnLine, Proceedings of the 8th NOLCOS IFAC Symposium (Id: 10.3182/20100901–3–IT–2016.000 34). 2010.

21. Solow R.M. *Growth Theory: An Exposition.* NY: Oxford University Press, 1970.

22. Tarasyev A.M., Usova A.A. *The Value Function as a Solution of Hamiltonian Systems in Linear Optimal Control Problems with Infinite Horizon* // Proceedings of the 18th IFAC World Congress, Milan. 2011. V. 18, Part 1. DOI:10.3182/20110828-6-IT-1002.00835.

23. Tarasyev A.M., Watanabe C. *Optimal Dynamics of Innovation in Models of Economic Growth* // Journal of Optimization Theory and Applications. 2001. V. 108, No. 1. P. 175–203.

PREDICTIVE TRAJECTORIES OF ECONOMIC DEVELOPMENT UNDER STRUCTURAL CHANGES

Alexandr M. Tarasyev, IMM UbRAS, Dr.Sc., professor
(tam@imm.uran.ru),
Anastasiya A. Usova, IMM UbRAS, Cand.Sc.
(anastasy.ousova@gmail.com),
Yuliya V. Shmotina, IMCS, UrFU, student
(juliashmotina@yandex.ru).

Abstract: The paper is devoted to the investigation of one-sector economic growth models and corresponding optimal control problems on distribution of investment flows. The paper deals with two type of production functions: the exponential (Cobb–Douglas) function and the linear function which takes into account possible structural changes in statistical data of main economical factors. Dummy variables allow to determine periods when the original model is applicable, and to evaluate model parameters describing economic situations both before and after structural changes. The paper provides the qualitative analysis of solutions of control problems for each model and make a comparison of optimal model scenarios, including trajectories obtained by continuous sewing of solutions constructed on different time intervals, with real statistical trends. The proposed approach of adaptation of model parameters to new conditions can be treated as the learning ability of the general model. It makes the model more flexible with respect to qualitative changes influencing on predictive trajectories of economic development.

Keywords: econometric data analysis, dummy variables, optimal control, economic growth.