Математическая Теория Игр и её Приложения, т.8, в.3, с. 100–132

УДК 518.9
ББК 22.18

САМОКОВАРИАНТНЫЕ И СОГЛАСОВАННЫЕ РЕШЕНИЯ КООПЕРАТИВНЫХ ИГР С ТРАНСФЕРАБЕЛЬНЫМИ ПОЛЕЗНОСТЯМИ

Елена Б. Яновская
Национальный исследовательский университет
Высшая Школа Экономики в Санкт-Петербурге
190008, Санкт-Петербург, ул. Союза Печатников, 16
e-mail: eyanovskaya@hse.ru

Приводится определение свойства само-ковариантности решений кооперативных игр с трансферабельными полезностями. Это свойство означает ослабление ковариантнсти относительно сдвигов индивидуальных полезностей игроков до допустимых сдвигов только на кратные значения векторов решения. Дается описание всех непустых, одноточечных, эффективных, анонимных, слабо и само-ковариантных решений для класса игр двух лиц. Показывается, что среди них существует только три решения, допускающие согласованные расширения на класс игр с произвольным множеством игроков: это уравнивающее решение, стандартное решение, и решение, совпадающее со стандартым на классе субаддитивных игр и с решением ограниченного эгналитаризма на классе супераддитивных игр двух лиц. Охарактеризованы некоторые согласованные расширения последнего из трех решений.

Ключевые слова: кооперативная игра, ковариантность, самоковариантность, уравнивающее решение, стандартное решение, решение ограниченного эгалитаризма, согласованное расширение.

1. Введение

Настоящая статья продолжает исследование решений кооперативных игр с трансферабельными полезностями (ТП), удовлетворяющих ослабленному условию ковариантности – самоковариантности, введенным в [2]. Этому условию удовлетворяют почти все хорошо известные решения ТП игр, не являющиеся ковариантными: то решение ограниченного эгалитаризма, введенное Дутта и Рэем [6] для выпуклых игр, уравнивающее решение, доставляющее всем игрокам равные выигрыши. Ослабление коавариантности до самоковариантности для ковариантных решений позволяет получить более сильные аксиоматизации этих решений, а для нековариантным, но само-ковариантных решений получить новые аксиоматизации, схожие с аксиоматизациями ковариантных решений. Решение ТП игр называется *само-ковариантным*, если для любой ТП игры оно положительно однородно и удовлетворяет свойству ковариатности сдвига относительно векторов решений с положительными множителями. Само-ковариантность совместно со слабой (однородной) ковариантностью слабее, чем обычная ковариантность относительно независимых положительных линейных преобразований индивидуальных полезностей игроков.

В статье [2] было показано, что хорошо известные аксиоматизации пред n-ядра [1] и вектора Шепли [8] на классе выпуклых игр могут быть охарактеризованы с заменой ковариантности на самоковариантность и слабую ковариантность, причем в обоих случаях к характеризуемым решениям добавляется еще уравнивающее решение.

В данной статье описываются все решения ТП игр двух лиц, удовлетворяющие свойствам эффективности, одноточечности, анонимности, само- и слабой ковариантности. Далее находятся те из них, которые допускают согласованные в определении Дэвиса–Машлера расширения на игры с произвольным множеством игроков. Оказывается, что только три решения допускают такие расширения это известные стандартное решение, уравнивающее решение, и решение, совпадающее с решением ограниченного эгалитаризма для супераддитивных игр, и являющееся стандартным для субаддитивных игр.

Содержание статьи организовано следующим образом: в разделе 2 даются определения известных решений кооперативных игр и их свойств, а также приводятся формулировки аксиоматизации решений пред n-ядра и решения Дутта–Рэя. В разделе 3 приводится определение свойства само-ковариантности и приводится полная характеризация всех эффективных, одноточечны, анонимных, само- и слабо ковариантных решений для класса кооперативных игр двух лиц. Раздел 4 посвящен согласованным расширениям решений игр двух лиц, охарактеризованных в разделе 3, а также многозначных решений, обладающих теми же свойствами, на игры с произвольными множествами игроков. В разделе 5 приводятся некоторые открытые проблемы, связанные с согласованными решениями. Доказательства основных результатов даны в Приложении.

2. Известные результаты, определения и обозначения

2.1. Определения решений ТП игр и их свойства

Кооперативной игрой с трансферабельными полезностями (ТП игрой) называется пара (N, v), где N – конечное множество игроков, $v : 2^N \to \mathbb{R}$ – *характеристическая функция игры* сопоставляющая каждой коалиции $S \subset N$ вещественное число $v(S)$ (полагается $v(\emptyset) = 0$), выражающее силу коалиции. *Исходом* игры называется вектор выигрышей игроков $x \in \mathbb{R}^N \in X(N, v)$, где

$$X(N, v) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid \sum_{i \in N} x_i \leq v(N)\} -$$

множество *допустимых векторов выигрышей.*

Решением σ для класса $\mathcal{G}$ ТП игр называется отображение, сопоставляющее каждой игре $(N, v) \in \mathcal{G}$ некоторое подмножество $\sigma(N, v) \subset X(N, v)$.

Через $X^*(N, v)$ обозначим множество *эффективных* векторов выигрышей:

$$X^*(N, v) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid \sum_{i \in N} x_i = v(N)\}.$$

Если для каждой игры (N, v) из класса $\mathcal{G}$ $|\sigma(N, v)| = 1$, то решение σ называется *значением.*

Пусть $\mathcal{N}$ – произвольное *универсальное* множество игроков. Через $\mathcal{G}_{\mathcal{N}}$ будем обозначать такой класс игр, что

$$(N, v) \in \mathcal{G}_{\mathcal{N}} \implies N \subset \mathcal{N}.$$

Пусть $\pi : N \to \mathcal{N}$ – взаимно-однозначное отображение. Определим игру $\langle \pi(N), \pi v \rangle \in \mathcal{G}_{\mathcal{N}}$ равенствами $v(\pi(S)) = v(S)$ для всех $S \subseteq N$. Для любого вектора $x \in \mathbb{R}^N$ обозначим через $y = \pi(x)$ такой вектор $y \in \mathbb{R}^{\pi(N)}$, что $y_{\pi(i)} = x_i, i \in N$. Игра (N', w) называется *изоморфной* игре (N, v), если существует такое взаимно-однозначное отображение $\pi : N \to \mathcal{N}$, что $\pi(N) = N'$ и $\pi v = w$.

Для любой игры (N, v) *максимальным превосходством* игрока i над игроком j в условиях вектора выигрышей x называется величина $s_{ij}(x) = \max\limits_{\substack{S \ni i \\ S \not\ni j}} (v(S) - x(S)$.

Две игры $(N, v), (N', w) \in \mathcal{G}_{\mathcal{N}}$ называются *стратегически эквивалентными* , если существует такое взаимно-однозначное отображение $\pi : N \to \mathcal{N}$, что $\pi(N) = N'$ и такие вектор $\beta \in \mathbb{R}^N$ и положительное число $\alpha > 0$, что $w = \pi(v')$, где $v' = \alpha v + \beta$.

Напомним некоторые известные свойства теоретико-игровых решений, используемых в виде аксиом при характеризации тех или иных решений.

Решение σ для класса $\mathcal{G}_{\mathcal{N}}$ называется

- *не пустым*, если $\sigma(N, v) \neq \emptyset$ для всех $(N, v) \in \mathcal{G}_{\mathcal{N}}$;
- *эффективным*, если $\sum\limits_{i \in N} \Phi_i(N, v) = v(N)$ для любого $x \in \sigma(N, v)$ и для любой игры $(N, v) \in \mathcal{G}_{\mathcal{N}}$;
- *симметричным*, если для любой игры $(N, v) \in \mathcal{G}_{\mathcal{N}}$ *симметричные игроки* i, j, для которых $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$ для всех $S \not\ni i, j$, получают поровну: $x_i(N, v) = x_j(N, v)$ для всех $x \in \sigma(N, v)$;
- *анонимным*, если для любых игры $(N, v) \in \mathcal{G}$ и инъективного отображения $\pi : N \to \mathcal{N}$, для которого $(\pi N, \pi v) \in \mathcal{G}$, выполняется равенство $\sigma(\pi N, \pi v) = \pi(\sigma(N, v))$. Здесь характеристическая функция πv определяется равенствами $\pi v(\pi S) = v(S)$ для всех $S \subset N$;

– *положительно однородным*, если для любого числа $\alpha > 0$ и игры $(N, v) \in \mathcal{G}$ $(N, \alpha v) \in \mathcal{G}$ и $\sigma(N, \alpha v) = \alpha\sigma(N, v)$;

– *ковариантным относительно сдвигов*, если для любой игры $(N, v) \in \mathcal{G}_{\mathcal{N}}$ и числа b $(N, v + b) \in \mathcal{G}_{\mathcal{N}}$, и

$$x \in \sigma(N, v) \implies x \in \sigma(N, v + b),$$

где $(v + b)(S) = v(S) + b$ для всех $S \subsetneqq N$, и $(v + b)(N) = v(N)$;

– *ковариантным*, если оно положительно однородно и ковариантно относительно сдвигов;

– *слабо ковариантным*, если оно положительно однородно и если для любой игры $(N, v) \in \mathcal{G}$ и числа $\beta \in \mathbb{R}^N$ $(N, v + \beta) \in \mathcal{G}$ и выполняется равенство

$$\sigma(N, v + \beta) = \sigma(N, v) + \bar{\beta}, \tag{2.1}$$

где $(v + \beta(S) = v(S) + \beta|S|$ для всех $S \subset N$, $\bar{\beta} = (\beta, \beta, ..., \beta)$;

– *согласованным*, если для любой игры $(N, v) \in \mathcal{G}_{\mathcal{N}}$, коалиции $T \subset N$, и вектора $x \in \sigma(N, v)$ ее *редуцированная игра* $(N \setminus T, v^x_{N\setminus T})$, полученная после ухода игроков из коалиции T с выигрышами $x_i, i \in T$, также принадлежит классу $\mathcal{G}_{\mathcal{N}}$ и

$$x = (x_{N\setminus T}, x_T) \in \sigma(N, v) \implies x_{N\setminus T} \in \sigma(N \setminus T, v^{\Phi}_{N\setminus T}). \tag{2.2}$$

– *слабо согласованным*, если предыдущее свойство выполняется только для редуцированных игр двух лиц ($|N \setminus T| \leq 2$;)

Заметим, что из определения (2.2) следует, что свойство согласованности может быть определено только для классов игр, замкнутых относительно редуцирования, т.е., для классов игр, которым, наряду с игрой (N, v), принадлежат все игры $(N \setminus T, v^x_{N\setminus S}), T \subset N$ для любого вектора выигрышей x исходной игры. Существуют различные определения редуцированных игр и соответствующих им понятий согласованности решений. В этой работе мы пользуемся определением Дэвиса–Машлера [5]:

Редуцированной игрой (S, v_S^x) игры (N, v) на множество игроков S относительно вектора выигрышей x называется ТП игра со следующей характеристической функцией:

$$v_S^x(T) = \begin{cases} v(N) - x(N \setminus S), & \text{если } T = S, \\ v(T \cup (N \setminus S)) - \sum\limits_{i \in N \setminus S} \varphi_i(T \cup (N \setminus S), v), & \text{если } T \subsetneqq S, \end{cases} \tag{2.3}$$

где $T \cup (N \setminus S), v)$ под-игра игры (N,v).

Если рассматривать определение игры двух лиц в качестве аксиомы для ее решения, то некоторые из них характеризуются как раз этой аксиомой и согласованностью. Среди них имеются следующие одноточечных решения: это уравнивающее решение для класса всех ТП игр и решение Дутта–Рэя для класса выпуклых игр. Пред n-ядро также имеет подобную характеризацию на классе выпуклых игр, так как на этом классе оно совпадает с пред k-ядром, а последнее и имеет аксиоматизацию с помощью стандартного решения для игр двух лиц и согласованности в определении Дэвиса–Машлера [11]. Приведем определения этих и других известных решений.

2.2. Рассматриваемые решения ТП игр и их аксиоматические характеризации

Уравнивающее решение для любой ТП игры делит общий выигрыш поровну между всеми игроками. Это решение эффективно, одноточечно, анонимно и согласовано.

Пусть (N, v) – произвольная ТП игра, $x \in X(N, v)$, $e(S, x)$– эксцесс коалиции относительно вектора x, $(\{e(S, x)\}_{S \subsetneqq N}$ – вектор эксцессов. Через $\theta(x) \in \mathbb{R}^{2^N}$ обозначим вектор, компоненты которого совпадают с компонентами вектора $\{e(S, x)\}_{S \subsetneqq N}$, но расположенными в порядке убывания:

$$\theta^t(x) = \max_{\substack{\mathcal{T} \subset 2^N \\ |\mathcal{T}| = t}} \min_{S \in \mathcal{T}} e(S, x). \tag{2.4}$$

Пусть $\geq_{lex}$ – отношение лексикографического упорядочения в произвольном векторном пространстве $\mathbb{R}^m$:

$$x \geq_{lex} y \iff x = y \text{ или } \exists 1 \leq k \leq m,$$

$$\text{такое что } x_k = y_k \text{ и } x_i > y_i \text{ для } i < k.$$

Пред n-ядром $PN(N,v)$ игры (N,v) [12] называется единственный эффективный вектор выигрышей, на котором достигается лексикографический минимум множества векторов $\theta(y)$, $y \in X(N,v)$:

$$\theta(y) \geq_{lex} \theta(PN(N,v)) \text{ для всех } y \in X^*(N,v). \tag{2.5}$$

Пред n-ядро не пусто для любой ТП игры. На классе игр двух лиц оно совпадает со *стандартным решением (ST)*, определяемым для каждой игры двух лиц следующим образом:

$$ST_i(N,v) = \frac{v(N)}{2} + \frac{v(\{i\})}{2} - \frac{v(\{j\})}{2}, \text{ где } N = \{i,j\}. \tag{2.6}$$

Оба выше определенных решения эффективны, одноточечны для классе всех ТП игр, анонимны и ковариантны.

Эгалитарное решение Дутта-Рэя (DR-решение) [6], определено на классе выпуклых ТП игр, оно сопоставляет каждой выпуклой ТП игре единственный вектор из с-ядра, доминирующий по Лоренцу все остальные векторы из с-ядра.

Для супераддитивных игр двух лиц это решение совпадает с решением *ограниченного эгалитаризма (CE)*. Пусть $N = \{i,j\}$. Тогда

$$CE(N,v) = \begin{cases} \left(\frac{v(N)}{2}, \frac{v(N)}{2}\right), \text{ если} & v(\{i\}), v(\{j\}) \leq \frac{v(N)}{2}, \\ (v(\{i\}), v(N) - v(\{i\})), \text{ если} & v(\{i\}) > \frac{v(N)}{2}, \\ (v(N) - v(\{j\}), v(\{j\})), \text{ если} & v(\{j\}) > \frac{v(N)}{2}. \end{cases} \tag{2.7}$$

DR-решение на классе выпуклых игр эффективно, одноточечно, анонимно, но не удовлетворяет аксиоме ковариантности,оно удовлетворяет только аксиоме слабой ковариантности.

Приведем аксиоматические характеризации выше определенных решений.

Предложение 2.1. *Уравнивающее решения является единственным решением для класса всех ТП игр в произвольным универсальным множеством игроков, удовлетворяющее аксиомам непустоты, одноточечности, согласованности и совпадающее с уравнивающим решением на классе игр двух лиц.*

Доказательство. Очевидно, уравнивающее решение удовлетворяет всем приведенным аксиомам.

Пусть теперь Φ – произвольное решение, удовлетворяющее приведенным аксиомам, (N, v) – произвольная игра и $x = \Phi(N, v)$. Рассмотрим редуцированную игру $(\{i,j\}v^x_{i,j}$ на множество игроков $\{i,j\}$ относительно вектора выигрышей x. Тогда, по согласованности решения Φ $(x_i, x_j) = \Phi(\{i,j\}, v^x_{i,j})$, и, следовательно, $x_i = x_j = \frac{x_i u + x_j}{2}$. Так как последнее равенство выполлняется длоя любых $i, j \in N$, мы получаем равенства $x_i = x_j$ для всех $i, j \in N$. По определению редуцированной игры $v^x_{i,j}(\{i,j\}) = v(N) - \sum\limits_{k \neq i,j} x_k = x_i + x_j$. Последнее равенство следовало из эффективности Φ , и мы получаем $\Phi(N, v) = (x, x, \ldots, x)$, где $x = \frac{v(N)}{n}$. □

Теорема I [Sobolev, 1975]. *Единственным решением для класса всех ТП игр с бесконечным универсальным множеством игроков, удовлетворяющим аксиомам непустоты, одноточечности, анонимности, ковариантности и согласованности, является пред n -ядро.*

Теорема II [Dutta 1990]. *Единственным решением для класса выпуклых игр с произвольным универсальным множеством игроков, удовлетворяющим аксиомам непустоты, одноточечности согласованности и совпадающим с решением ограниченного эгалитаризма на классе игры двух лиц, является решение Дутта–Рэя.*

Решение Дутта–Рэя анонимно, но не ковариантно, оно удовлетворяет только аксиоме слабой ковариантности.

На классе выпуклых игр пред n-ядро им имеет аксиоматизацию, схожую с данной в Теореме II:

Теорема I′. *Единственным значением для класса выпуклых ТП игр с произвольным универсальным множеством игроков, удовлетворяющим аксиомам непустоты, стандартности для игр двух лиц и согласованности по Дэвису–Машлеру является пред n-ядро.*

Доказательство следует из совпадения пред n-ядра и пред k-ядра на классе выпуклых игр и из характеризации пред k-ядра, данной Пелегом [11].

Таким образом, мы получили характеризацию трех решений: уравнивающего, пред n-ядра и решения Дутта-Рэя (два последних только для выпуклых игр) – единым способом с помощью согласованности и известного решения для игр двух лиц. Этот результат можно рассматривать как существование согласованных расширений на класс выпуклых игр трех решений для класса игр двух лиц. Далее будут найдены другие решения игр двух лиц, удовлетворяющие ослабленной аксиоме ковариантности и допускающие согласованные расширения на игры с произвольными множествами игроков.

3. Само-ковариантность решений ТП игр

3.1. Определение

Введем еще одно ослабление – одно из них является слабой ковариантностью – аксиомы ковариантности относительно сдвигов для одноточечного ТП решения (значения) φ :

Значение φ для класса игр $\mathcal{G}$ называется *само-ковариантным* относительно сдвигов, если для любого числа $A \geq -1$ выполняются равенства

$$\varphi(N, v + A\varphi(v)) = (A+1)\varphi(N, v) \tag{3.1}$$

для всех игр $(N, v) \in \mathcal{G}$.

В данном определении сдвиг характеристических функций позволяется только для произвольно кратных векторов решения исходной игры и не меняющих знаки выигрышей в сдвинутой игре. Последнее условие обеспечивает сохранение знаков больше-меньше между выигрышами игроков в исходной и сдвинутой играх.

Назовем решение φ *само-ковариантно*, если оно положительно однородно и само-ковариантно относительно сдвигов.

Предложение 3.1 (2). *DR-решение удовлетворяет свойству само-ковариантности на классе выпуклых ТП игр.*

3.2. Само-ковариантные решения игр двух лиц

3.2.1. Определения и общий вид само-ковариантных решения для игр двух лиц

В этом пункте будут охарактеризованы все эффективные, одноточечные, анонимные, слабо и само-ковариантные решения для класса всех игр двух лиц с произвольным универсальным множеством игроков. Так как будут рассматриваться только анонимные решения для этого класса, достаточно ограничить их определения для игр с фиксированным множеством игроков $\{i, j\}$. Введем упрощающие обозначения $v(\{i\}) = v_i, v(\{j\}) = v_j$. Любой класс игр двух лиц состоит из подклассов аддитивных, строго субаддитивных и строго супераддитивных игр. Так как допустимые преобразования индивидуальных полезностей, применяемых в определениях слабой и самоковариантности, не переводят игру из одного подкласса в другой, мы будет определять указанные решения в каждом из трех подклассов отдельно. Слабая ковариантность решений позволяет рассматривать только игры с нулевым значением большой коалиции двух лиц.

Начнем с подкласса $\mathcal{G}_2^{0ad}$ аддитивных игр двух лиц со значениями $v(\{i, j\} = 0$.

Предложение 3.2. *Существуют только два решения для класса $\mathcal{G}_2^{0ad}$, удовлетворяющие аксиомам NE, EFF, ANO, WCOV и self-COV. Это уравнивающее решение, дающее нулевой выигрыш обоим игрокам, и решение $\phi_{ind}(v) = \bar{v}$.*

Доказательство. Очевидно, оба решения удовлетворяют всем аксиомам, указанным в теореме.

Пусть ϕ – произвольное одноточечное решение для класса $\mathcal{G}_2^{0ad}$, удовлетворяющая всем аксиомам Утверждения. Если $\phi(v) = 0$ для некоторой игры $v \neq (0, 0)$, то по положительной однородности и анонимности решения ϕ $\phi(v) = (0, 0)$ для всех игр $v \in \mathcal{G}_2^{0ad}$.

Остается рассмотреть случай, когда $\phi(v) \neq (0, 0)$ для всех игр $v \neq (0, 0)$. Тогда $\phi(v) = (x, -x) = \alpha\bar{v}$ для некоторых $x, \alpha \neq 0$, и из положительной однородности и анонимности ϕ следует, что $\phi(v) = \alpha\bar{v}$ для всех $v \in \mathcal{G}_2^{0ad}$. Из само-ковариантности решения ϕ получаем $\phi(v + \alpha\bar{v}) = 2\phi(v) = \phi(2v)$, а по положительной однородности $\phi(v + \alpha\bar{v}) = (1 + \alpha)\phi(v)$. Из двух последних равенств следует $\alpha(1 + \alpha)\bar{v} = \alpha(2\bar{v})$. Следовательно, $\alpha = 1$ и $\phi(v) = \bar{v}$ для всех $v \in \mathcal{G}_2^{0ad}$, т.е., $\phi = \phi_{ind}$. □

Эти два решения можно легко распространить на класс аддитивных игр двух лиц с произвольными значениями $v(\{i, j\})$ с помощью аксиомы слабой ковариантнсти. Тогда уравнивающее решение определяется для любой аддитивной игры двух лиц равенством $ES(v) = \left(\frac{v(\{i,j\})}{2}, \frac{v(\{i,j\})}{2}\right)$. Решение $\phi_{ind}(v) = \bar{v}$ не изменяется.

Рассмотрим теперь класс $\mathcal{G}_2^{0sp}$ строго аддитивных игр двух лиц с множеством игроков $\{i, j\}$, и с нулевым выигрышем большой коалиции $v(\{i, j\}) = 0$. Определим для этого класса однопараметрическое семейство непустых, эффективных, одноточечных и анонимных решений $\varphi_k, k \in (-1, 1]$. Ввиду анонимности достаточно определить их только для игр v с $v_i < v_j$.

$$\varphi_k(v) = \begin{cases} (0,0), & \text{если } v_i = v_j, \text{ или } v_j < kv_i,, \\ \left(\left(\dfrac{kv_i - v_j}{1+k}\right)_i, \left(\dfrac{v_j - kv_i}{1+k}\right)_j\right), & \text{если } v_j \geq kv_i. \end{cases} \tag{3.2}$$

Очевидно, для любого $k \in (-1, 1]$ φ_k является непустым, эффективным и анонимным решением.

Для $k = 0$ решение φ_0 совпадает с решением ограниченного эгалитаризма.

Для $k = 1$ φ_1 – стандартное решение;

Для $k = -1$ решение φ_{-1} не определено равенствами (3.2). Однако когда $k \to -1$, то для любой игры $v \in \mathcal{G}^{0sp}$, область $v_j \geq kv_i$, $v_i + v_j < 0$ переходит в полупрямую $v_i + v_j = 0, v_i < 0$, и для любой игры v $\lim\limits_{k \to -1} \varphi_k(v) = (0, 0)$.

Поэтому определим φ_{-1} для класса строго супераддитивных игр двух лиц как уравнивающее решение.

На рис. 1 и 2 жирными линиями изображены геометрические места точек значений φ_k для разных значений $v_i, v_j), v_i < v_j$ и $v(N) = 0$. Отдельно показаны случаи положительных и отрицательных значений параметра k.

Для (v_1, v_2), расположенных внутри угла α по обе стороны от диагонали значение $\varphi_k(N, v) = (0, 0)$.

Заметим, что для $k \geq 0$ решения φ_k обладают свойством индивидуальной рациональности, а для отрицательных k – нет.

Таким же образом мы может определить решения φ_k для всех строго супераддитивных игр двух лиц с произвольными значениями $v(\{i, j\})$. Однако параметр k в расширениях таких решений может

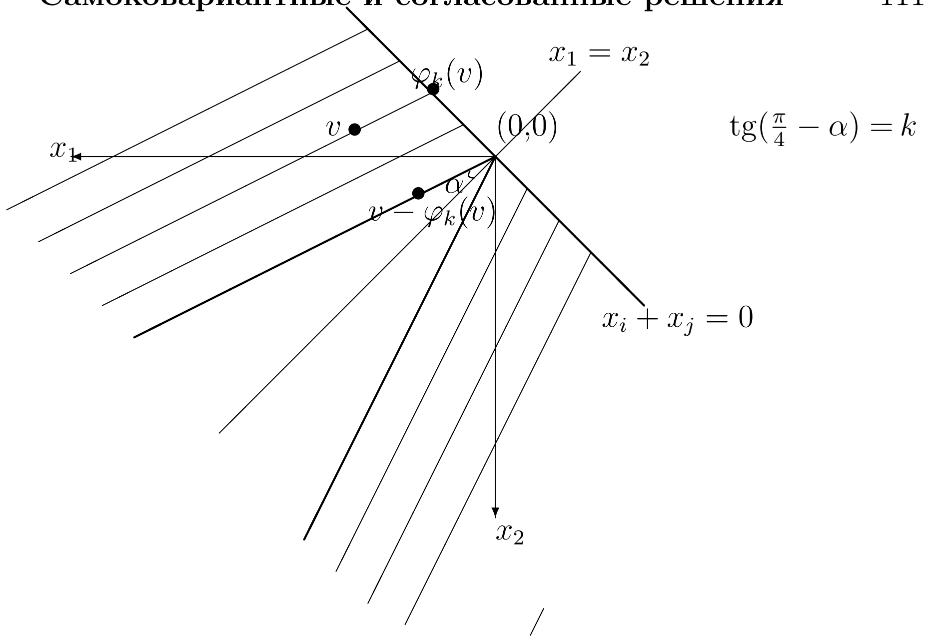

Рисунок 1. Случай $k > 0$.

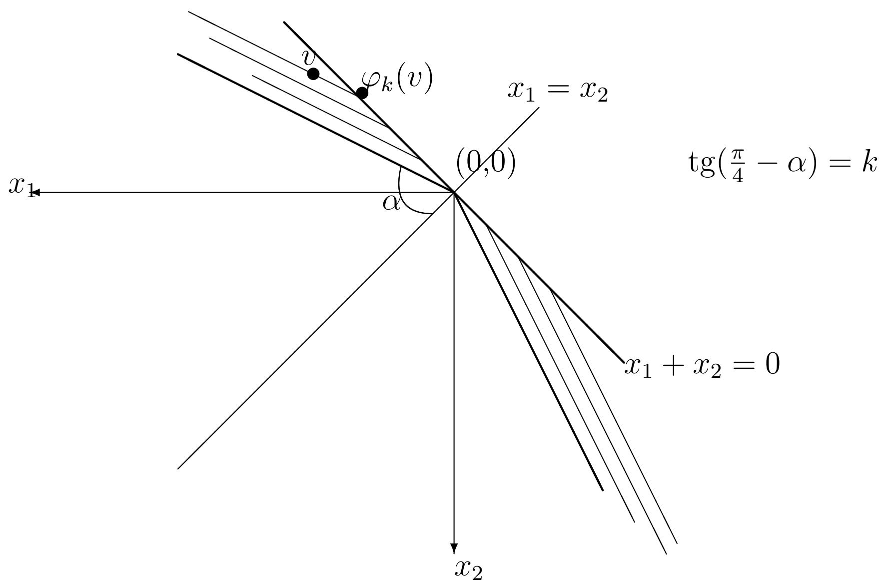

Рисунок 2. Случай $k < 0$.

зависеть от $v(\{i,j\})$, что приведет к чрезмерному усложнению общего вида само-ковариантных решений. Поэтому мы будем использовать аксиому само-ковариантности вместе с еще одной аксиомой слабой ковариантности.

Тогда расширение решения φ_k на случай произвольных значений $v(\{i,j\})$ будет иметь следующий вид:

$$\varphi_k(\{i,j\},v)=\begin{cases}\left(\dfrac{v(\{i,j\})}{2},\dfrac{v(\{i,j\})}{2}\right), & \text{если } v_i=v_j, \text{ или} \\ & v_j-kv_i<(1-k)\frac{v(\{i,j\})}{2}, \\ \left(\dfrac{v(\{i,j\})-v_j+kv_i}{k+1},\dfrac{kv(\{i,j\})+v_j-kv_i}{k+1}\right) & \text{иначе.}\end{cases} \tag{3.3}$$

Применительно к аддитивным играм эта формула дает $\varphi_k(\{i,j\},v)=\bar v$ для всех $k\in(-1,1]$.

Для строго супераддитивных игр $x_i\neq v_i$, мы получаем из (3.3) формулу для параметра k :

$$k=\frac{(\varphi_k(\{i,j\},v))_j-v_j}{(\varphi_k(\{i.j\},v))_i-v_i}. \tag{3.4}$$

Таким образом, параметр k равен тангенсу угла между горизонтальной осью и прямой, проходящей через точки $\bar v$ и $((\varphi_k(\{i,j\},v))_i,(\varphi_k(\{i,j\},v)_j)\neq\left(\frac{v(\{i,j\})}{2},\frac{v(\{i,j\})}{2}\right)$.

Для $k=-1$, как и в случае $v(\{i,j\})=0$, полагаем $\varphi_{-1}(\{i,j\},v)=\left(\frac{v(\{i,j\})}{2},\frac{v(\{i,j\})}{2}\right)$ для всех строго супераддитивных игр. Теперь решения φ_k определены для всего класса $\mathcal{G}_2^{sp}$ строго супераддитивных игр, и эти решения анонимны и слабо ковариантны.

Лемма 3.1. *Решения φ_k само-ковариантны в классе $\mathcal{G}_2^{sp}$ для всех $k\in[-1,1]$.*

Приведем аксиоматизацию решений φ_k для всех $k\in[-1,1]$.

Теорема 3.1. *Если решение φ в классе строго супераддитивных игр $\mathcal{G}_2^{sp}$ удовлетворяет аксиомам NE, EFF, ANO, WCOV и self-COV, то оно является решением φ_k для некоторого $k\in[-1,1]$. Если к тому же оно индивидуально рационально, то $k\in[0,1]$.*

Замечание 3.1. Решения φ_k формулами (3.3) определены так же и для аддитивных игр двух лиц. Однако, когда мы описываем множество всех эффективных, одноточечных, анонимных, слабо и самоковариантных решений для класса всех игр двух лиц, мы должны отдельно описать их для всех трех подклассов аддитивных, строго супераддитивных и строго субаддитивных игр, так как допустимые преобразования индивидуальных полезностей, в аксиомах слабой и само-ковариантности не выводят игру из подкласса, которому она принадлежит.

Обратимся теперь к классу строго субаддитивных игр $\mathcal{G}_2^{sb}$ двух лиц.

Игра двух лиц v строго субаддитивна, если $v_i + v_j > v(\{i,j\})$. Расширение решения ограниченного эгалитаризма на класс субаддитивных игр двух лиц был дан в статье Арина и Инарра [3]. Для любой субаддитивной игры оно определяется следующим образом:

$$CE(\{i,j\},v) = \begin{cases} \left(\frac{v(\{i,j\})}{2}, \frac{v(\{i,j\})}{2}\right), \text{ если} & v_i, v_j \geq \frac{v(\{i,j\})}{2}, \\ (v_i, v(\{i,j\}) - v_i), \text{ если} & v_i \leq \frac{v(\{i,j\})}{2} < v_j, \\ (v(\{i,j\}) - v_j, v_j), \text{ если} & v_j \leq \frac{v(\{i,j\})}{2} < v_i. \end{cases} \tag{3.5}$$

Решение CE для субаддитивных игр (3.5) защищает «бедного» игрока с меньшим значением характеристической функции, так же как и в случае супераддитивных игр. Действительно, решение (3.5) либо дает обоим игрокам равные выигрыши, либо «бедный» игрок сохраняет свое значение, а за общий проигрыш расплачивается только другой, более богатый игрок.

Таким образом, формулы (2.7), (3.5) и уравнивающее решение для аддитивных игр определяют решение ограниченного эгалитаризма для всего класса игр двух лиц. На рис. 3 жирной линией изображено геометрическое место точек решения CE для фиксированных значений (v_i, v_j), $v_j > v_i$ и всех значений $v(\{i,j\})$.

Геометрическое место точек для стандартного решения изображено пунктирной линией. Так как оба этих решений анонимны, на другой полуплоскости $v_i > v_j$ они изображаются аналогично.

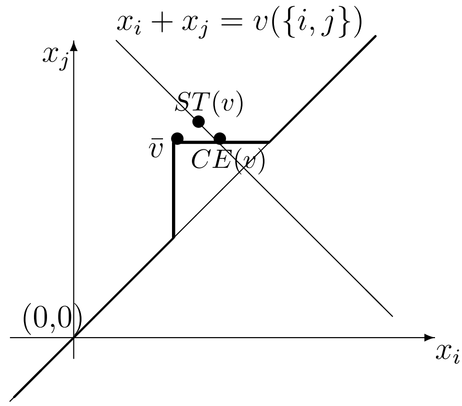

Рисунок 3. Ограниченно эгалитарное решение

Аналогично решениям φ_k, определим однопараметрическое семейство анонимных решений для строго субаддитивных игр. Каждое решение ψ_l из этого семейства определяется для параметра $l \in (-\infty, -1) \cup [1, \infty)$ следующим образом:

$$\psi_l(\{i,j\}, v) = \begin{cases} \left(\dfrac{v(\{i,j\})}{2}, \dfrac{v(\{i,j\})}{2}\right), \text{ если } v_j - lv_i < \dfrac{(1-l)v(\{i,j\})}{2}, \\ \left(\dfrac{v(\{i,j\}) - v_j + lv_i}{l+1}\right)_i, \left(\dfrac{lv(\{i,j\}) + v_j - lv_i}{l+1}\right)_j, \text{ иначе.} \end{cases} \tag{3.6}$$

Заметим, что формула (3.6) почти совпадает с формулой (3.3). Разница между ними состоит лишь в различии областей параметров k, l и характеристических функций: $k \in [-1, 1]$, $l \in (-\infty, -1) \cup [1, \infty)$; и $v_i + v_j \leq v(\{i,j\})$ в (3.3), $v_i + v_j \geq v(\{i,j\})$ в (3.6).

Равенство $(\psi_l(\{i,j\}, v))_i = v_i$ возможно только для аддитивных игр, поэтому из (3.6) следует равенство

$$l = \frac{(\psi_l(v))_j - v_j}{(\psi_l(v))_i - v_i}. \tag{3.7}$$

На рис. 4 жирная линия изображает геометрическое место точек решения ψ_l, $l > 1$ для различных значений $v(\{i,j\}) \leq v_i + v_j$. Параметр l равен тангенсу угла между горизонтальной осью и лучом из точки (v_i, v_j) и проходящем через точку $\psi_l(v)$.

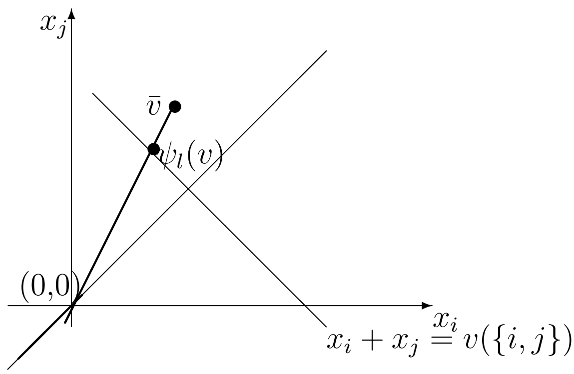

Рисунок 4. Решение ψ_l

Угол $\frac{\pi}{2}$ соответствует пределу $\lim\limits_{l\to\pm\infty} \psi_l$ и совпадает с решением ограниченного эгалитаризма. Поэтому мы полагаем $\psi_{\pm\infty}(v) = CE(v)$.

Для $l = 1$ ψ_l является стандартным решением.

Если $l \to -1$, то $\lim\limits_{l\to-1} \psi_l(v) = \left(\frac{v(\{i,j\})}{2}, \frac{v(\{i,j\})}{2}\right)$ для любой строго субаддитивной игры v, поэтому полагаем $\psi_{-1}(\{i,j\}, v) = \left(\frac{v(\{i,j\})}{2}, \frac{v(\{i,j\})}{2})\right)$.

По анонимности решений ψ_l формула (3.6) и ее дополнения для $l = -1, l = \infty$ полностью определяют решения ψ_l для $l \in [-\infty, -1] \cup [1, \infty]$.

Решения ψ_l на классе $\mathcal{G}_2^{sb}$ удовлетворяют тем же аксиомам, характеризующим решения φ_k для класса супераддитивных игр в Теореме 3.1: они не пусты, одноточечны,анонимны и слабо ковариантны. Переписывая доказательство Леммы 3.1 для решений ψ_l, легко показать, что они само-ковариантны на классе $\mathcal{G}_2^{sb}$ для всех $l \in [-\infty, -1] \cup [1, \infty]$.

Приведем аналог Теоремы 3.1:

Теорема 3.2. *Если решение ψ для класса строго субаддитивных игр двух лиц $\mathcal{G}_2^{sb}$ удовлетворяет аксиомам NE, EFF, SV, ANO, WCOV и self-COV, то оно является решением ψ_l для некоторого $l \in [-\infty, -1] \cup [1, \infty]$.*

Так как все игры двух лиц являются либо супераддитивными, либо субаддитивными, семейства значений φ_k, ψ_l определяют все слабоковариантные, само-ковариантные и анонимные значения для класса игр двух лиц. Именно, определим двухпараметрическое семейство значений ϕ_{kl} $k \in [-1,1], l \in (-\infty,-1] \cup [1,\infty)$ следующим образом:

$$\phi_{kl}(\{i,j\},v) = \begin{cases} \varphi_k, & \text{если игра } (\{i,j\},v) \text{ супераддитивная,} \\ \psi_l, & \text{если игра } (\{i,j\},v) \text{ субаддитивная.} \end{cases} \tag{3.8}$$

Ввиду того, что для аддитивных игр (N,v) $\varphi_k(\{i,j\},v) = \varphi_l(v(\{i,j\},v) = (v_i,v_j)$ для всех значений параметров k, $l \neq -1$, а $\varphi_{-1}(\{i,j\},v) = \psi_{-1}(N,v) = (\frac{v(\{i,j\})}{2}, \frac{v(\{i,j\})}{2})$, определение (3.8) корректно.

Для аддитивных игр $\phi_{kl}(\{i,j\},v) = \phi_{ind}(\{i,j\},v) = (v_i,v_j)$ для всех $k,l \neq -1$, а $\phi_{-1-1}(\{i,j\},v)$ является уравнивающим решением. Заметим, что эти два решения могут быть произвольно скомбинированы с решениями для неаддитивных игр (3.8).

Геометрическое место точек решения ϕ_{kl} для фиксированных значений (v_i,v_j), $v_i < v_j$, $k \neq -1,0,1$, $l \neq \infty,-1,1$ и для переменных значений $v(\{i,j\})$ приведено жирной линией на рис. 5.

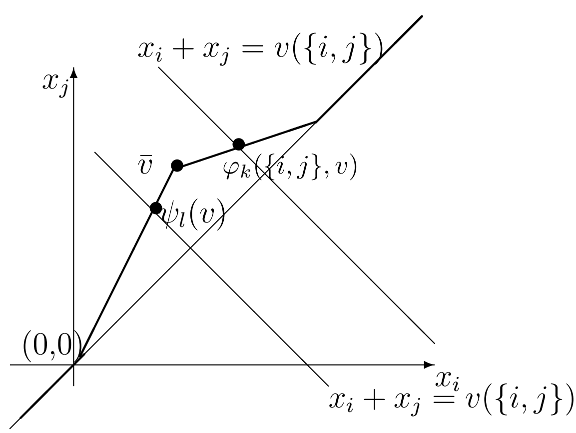

Рисунок 5. Решение ϕ_{kl}.

Следующая теорема является объединением Теорем 3.1 и 3.2.

Теорема 3.3. *Если решение ϕ для класса всех неаддитивных игр двух лиц $\mathcal{G}_2$ удовлетворяет аксиомам NE, SV, EFF, ANO, WCOV и self-COV, то оно является решением ϕ_{kl} для $k \in (-1,1], l \in [-\infty,-1),[1,\infty]$ and $k = l = -1$.*

Заметим, что оба решения для аддитивных игр, охарактеризованные в Утверждении 3.2, могут рассматриваться совместно с любым решением Теоремы 3.3. Таким образом, мы получаем множество решений, удовлетворяющих условиям Теоремы 3.3, для всего класса игры двух лиц.

4. Согласованные расширения слабо и само-ковариантных решений игр двух лиц

В этом разделе будут найдены те значения k, l, для которых существуют непустые согласованные расширения на класс всех ТП игр, для которых решения для игр двух лиц совпадают с ϕ_{kl}. Очевидным примером является $k = l = 1$. Решение ϕ_{11} является стандартным, и оно совпадает с согласованными решениями пред n-ядром и пред k-ядром для игр двух лиц. Другим примером, но уже невозможности, является $\phi_{0,\infty}$. Многозначное решение, которое совпадает с $\phi_{0,\infty}$ на играх двух лиц и согласовано, называется эгалитарным множественным решением, которое рассматривалось Арином и Инаррой. В статье [4] ими было показано, что оно может быть пустым для некоторых игр. Наконец, решение равных выигрышей непусто и согласовано, оно является решением $\phi_{-1,-1}$. Поэтому мы сразу будем рассматривать случаи, когда оба значения $k, l \neq -1$. Если только одно из них равно -1, то для аддитивных игр мы получим два значения: (v_i, v_j) и $(\frac{v(\{i,j\})}{2}, \frac{v(\{i,j\})}{2})$. Так как мы рассматриваем только одноточечные решения двух игр, этот случай также невозможен.

Поиск подходящих значений k и l будем проводить исключением неподходящих значений на примерах возможных значений для игр трех лиц, характеристическая функция которых аддитивна на двухэлементных коалициях. Для игр трех лиц имеются три редуцированные игры двух лиц. В каждой из них решение ϕ_{kl} должно совпадать с одними и теми же k и l . Если совпадений не получается, то соответствующие значения k и l исключаются.

Предложение 4.1. *Оба решения для аддитивных игр двух лиц, определенные в Утверждении 3.2, допускают согласованные расширения.*

Для неаддитивных игр двух лиц единственными значениями параметров k, l, для которых решения ϕ_{kl} могут иметь согласован-

ные расширения на класс всех ТП игр, являются $k = \{0,1\}$, $l = 1$, и $k = l = -1$.

Следующая Теорема показывает, что согласованные расширения решений ϕ_{kl} для значений k, l, указанных в Утверждении 4.1, действительно существуют.

Теорема 4.1. *Единственными непустыми, эффективными, одноточечными, анонимными, слабо и само-ковариантными решениями игр двух лиц, допускающими согласованные расширения на класс все ТП игр, являются:*
1) стандартное решение ϕ_{11},
2) решение ϕ_{01} ограниченного эгалитаризма для супераддитивных игр и стандартное решение для субаддитивных игр ;
3) уравнивающее решение ϕ_{-1-1}.

Замечание 4.1. Отметим, что здесь мы применяем решения ϕ_{11}, ϕ_{01} также и для класса аддитивных игр, см. Замечание 1. Действительно, невозможно распространить решение ϕ_{kl} для неаддитивных игр двух лиц вместе с уравнивающим решением для аддитивных игр на игры с более чем двумя игроками (см. доказательство Теоремы 4.1).

Так как параметры k, l могут быть выражены через эксцессы соответствующих игр двух лиц: $k, l = \frac{e_j}{e_i}$ если $x_j > x_i$, и, так как максимальные превосходства в играх n лиц

$$s_{ij}(x) = \max_{S \ni i, S \notin j} (v(S) - x(S)) \qquad (4.1)$$

не изменяются при их редуцировании, второй случай Теоремы 4.1 можно с формулировать следующим образом:

Следствие 4.1. *Пусть ϕ – согласованное расширение решения ϕ_{01} на класс всех ТП игр. Тогда для любых игры (N, v) и вектора $x \in \phi(N, v)$ $s_{ij}(x)s_{ji}(x) \geq 0$ для всех $i, j \in N$, и либо $s_{ij}(x) = s_{ji}(x) > 0$, либо $x_i = x_j$, либо $x_j > x_i$, и $s_{ji}(x) = 0, s_{ij}(x) \leq 0$.*

Доказательство. Пусть некоторое решение ϕ удовлетворяет всем условиям Следствия, (N, v) – произвольная игра, $x \in \phi(N, v)$. Из определения значений параметров k, l, определяющих решение ϕ, через эксцессы (3.7), и определений эксцессов редуцированных игр на множество двух игроков через максимальные превосходства (4.1), не меняющиеся при редуцировании игры, из $x \in \phi(N, v)$ следует, что

$$k \text{ или } l = \frac{s_{ji}(x)}{s_{ij}(x)}. \tag{4.2}$$

Так как $k = 0$ или 1, и $l = 1$, равенство (4.2) доказывает утверждение следствия. □

Применим теперь утверждение к определению нового решения кооперативных игр.

Эффективное решение Φ для класса $\mathcal{G}$ всех ТП игр называется *эгалитарным пред k-ядром (EPK),* если для любых игры (N, v) и вектора $x \in \Phi(N, v)$ выпоняется неравенство $s_{ij}(x)s_{ji}(x) \geq 0$ для любых $i, j \in N$, и либо выполняется строгое неравенство $s_{ij}(x) = s_{ji}(x) > 0$, а в случае равенства либо $x_i = x_j$, либо из $x_j > x_i$ следует $s_{ji}(x) = 0, s_{ij}(x) \leq 0$.

Термин «эгалитарное пред k-ядро» обусловлен двумя его свойствами. Во-первых, вектор выигрышей $x \in \Phi(N, v)$ принадлежит пред k-ядру $PK(N, v)$, если $s_{ij}(x) > 0$ для всех $i, j \in N$, и, во-вторых, он принадлежит эгалитарному множественному решению [3], если $s_{ij}(x) \leq 0$ для всех $i, j \in N$.

Определение эгалитарного пред k-ядра, так же как и определения пред k-ядра и эгалитарного множественного решения, определяют эти решения с помощью некоторых равенств и неравенств между компонентами вектора решений и между соответствующими значениями максимальных превосходств. Так как последние значения не изменяются при редуцировании игры, все такие решения согласованы. Более. того, они обладают свойством обратной согласованности. Докажем этот факт для эгалитарного пред k-ядра.

Предложение 4.2. *Эгалитарное пред k-ядро обладает свойством обратной согласованности.*

Доказательство. Пусть (N, v) – произвольная игра, $x \in X^*(\{i, j\}, v)$, и для всех редуцированных игр двух лиц относительно вектора x их решения $(x_i, x_j) = EPK(\{i, j\}, v^x_{i,j})$. Так как значения максимальных превосходств $s_{ij}(x)$ в редуцированных играх двух лиц такие же, как и в исходной игре, получаем, что вектор x удовлетворяет утверждению Следствия 4.1. $\square$

Рассмотрим еще одно решение кооперативных игр – положительное с-ядро [10]. Оно не пусто и компактно для любой ТП игры, и совпадает с с-ядром игры в случае, если оно не пусто [10].

Напомним определение доминирования по Лоренцу. Пусть $x, y \in \mathbb{R}^n$. Обозначим через $\theta(x), \theta(y) \in \mathbb{R}^n$ вектор, компоненты которого совпадают с компонентами векторов x, y, но слабо упорядочены по возрастанию. Вектор x *доминирует по Лоренцу* вектор y, если найдется такое число $k = 1, \ldots, n$, что $\sum\limits_{i=1}^{k} \theta_i(x) > \sum\limits_{i=1}^{k} \theta_i(y)$, и $\sum\limits_{i=1}^{j} \theta_i(x) = \sum\limits_{i=1}^{j} \theta_i(y)$ для всех $j = 1, \ldots, k-1$. Вектор выигрышей x игры (N, v) называется *максимальным по Лоренцу* в положительном с-ядре, если $x \in PC(N, v)$, и любой вектор $z \in PC(N, v)$ не доминирует x по Лоренцу. Так как положительное с-ядро компактно для каждой игры, множество максимальных по Лоренцу векторов в нем $PC_{Lor}(N, v)$ не пусто для любой ТП игры (N, v).

Таким образом, мы можем рассматривать множество $PC_{Lor}(N, v)$ как множественное не пустое решение для ТП игр.

Предложение 4.3. *$PC_{Lor}(N, v) \subset EPK(N, v)$ для любой ТП игры (N, v).*

Доказательство. Пусть (N, v) – произвольная игра, $x \in PC_{Lor}(N, v)$. По определению положительного с-ядра выполняются равенства $s_{ij}(x) = s_{ji}(x)$ для всех $i, j \in N$, для которых $s_{ij}(x) \geq 0$.

Предположим, что $s_{ij}(x) < 0$, если $x_i < x_j$. Тогда по определению доминирования по Лоренцу не существует таких трансферов (y_i, y_j), что $y_i + y_j = x_i + x_j$, $(x||y_i, y_j) \in PC(N, v)$ и вектор $(x||y_i, y_j)$ доминирует по Лоренцу вектор x. Это может случиться только если $s_{ji}(x) = 0$, откуда следует $PC_{Lor}(N, v) = \phi_{0,1}(N, v)$ для всех игр двух лиц, или, эквивалентно, $PC_{Lor}(N, v) \subset EPK(N, v)$. $\square$

Предложение 4.4. *Решение PC_{Lor} согласовано в классе всех ТП игр.*

Доказательство. Так как положительное с-ядро обладает свойством подтверждения (RCP) [10] доказательство совпадает с с доказательством Леммы 2 статьи [9]. □

Утверждения 4.3 и 4.4 показывают, что решение PC_{Lor} является непустым согласованным подрешением эгалитарного пред k-ядра, и, следовательно, непустым согласованным подрешением решения ϕ_{01}.

Последний результат описывает максимальное по включению согласованное расширение решения ϕ_{01} в терминах условий на эксцессы векторов, принадлежащих решению.

Предложение 4.5. *Максимальное по включению согласованное расширение решения ϕ_{01} для класса всех ТП игр с бесконечным множеством игроков для каждой игры (N, v) задается следующими соотношениями:*

$$x \in \phi(N,v) \iff \begin{array}{l} s_{ij}(x) = s_{ji}(x) \geq 0 \text{ или} \\ x_i > x_j \;\; \rightarrow \;\; s_{ij}(x) = 0, s_{ji}(x) \leq 0. \end{array} \tag{4.3}$$

Доказательство. Первая строка формулы (4.3) характеризует стандартное решение на множестве субаддитивных игр двух лиц, а вторая строка дает решение ограниченного эгалитаризма для супераддитивных игр двух лиц. Так как значения максимальных превосходств не меняются при редуцировании, формула (4.3) описывает все согласованные расширения решений ϕ_{01}. □

5. Заключение

Из результатов разделов 3 и 4 можно выявить некоторые открытые проблемы, касающиеся решений согласованных расширений решения $\phi_{1,0}$. Для класса выпуклых игр существует единственное согласованное расширение решения ограниченного эгалитаризма – это решение Дутта–Рэя [7]. Для класса всех ТП игр максимальным согласованным расширением решения ограниченного эгалитаризма является эгалитарное пред k-ядро. Его подмножество PC_{Lor} имеет по меньшей мере два одноточечных селектора. Для любой игры (N, v) они определяются как векторы, максимальные по отношению лексимина и минимальные по отношению лексимакса на множестве $PC_{Lor}(N, v)$. Доказательство этого факта совпадает в доказательством аналогичного утверждения для сбалансированных игр

[13]. Встает задача описания класса ТП игр, не являющегося подклассом выпуклых, такого что для любой игры из этого класса существовал бы единственный согласованный селектор из эгалитарного пред k-ядра. Такой класс мог бы стать эгалитарным аналогом класса выпуклых игр.

Хорошо известные одноточечные решения – значение Шепли и решение Дутта–Рэя могут быть охарактеризованы их определением для игр двух лиц и свойством согласованности: в определении Дэвиса–Машлера для решения Дутта–Рэя и в определении Соболева [1] линейной согласованности для значения Шепли. Однако пред n-ядро еще не имеет подобной аксиоматизации. Неизвестно, является ли свойство ковариантности независимым от свойств стандартности для двух лиц, симметрии (ETP) и согласованности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Соболев А.И. *Характеризация принципов оптимальности в кооперативных играх посредством функциональных уравнений* // Математические методы в социальных науках. 1975. Вып. 6. под ред. Н.Н. Воробьева. Вильнюс. Институт физики и математики АН Литовской ССР. С. 94–151.

2. Яновская Е.Б. *Совместная характеризация пред n-ядра и решения Дутта–Рэя для выпуклых игр* // Математическая теория игр и ее приложения. 2012. Т. 4. N 2. С. 96–123.

3. Arín J, Iñarra E *Egalitarian solutions in the core* // International Journal of Game Theory. 2001. V. 30. N 2. P. 187–194.

4. Arín J., Iñarra E. *Egalitarian sets for TU-games* // International Game Theory Review. 2002. V. 4. N 3. P. 183–199.

5. Davis M., Maschler M. *The kernel of a cooperative game* // Naval Res. Logist. Quart. 1965. V. 12. P. 223–235.

6. Dutta B., Ray D. *A concept of egalitarianism under participation constraints* // Econometrica. 1965. V. 57. P. 615–630.

7. Dutta B. *The egalitarian solution and the reduced game properties in convex games* // International Journal of Game Theory. 1990. V. 19. P. 153–159.

8. Hart S., Mas-Colell A. *Potential, value, and consistency* // Econometrica. 1989. V. 57. P. 589–614.

9. Hougaard J.L., Peleg B., Thorlund-Petersen L. *On the set of Lorenz-maximal imputations in the core of a balanced game* // International Journal of Game Theory. 2001. V. 30. P. 147–166.

10. Orshan G., Sudhölter P. *The positive core of a cooperative game* // International Journal of Game Theory. 2010. V. 39. P. 113–136.

11. Peleg B. *On the Reduced Game Property and its Converse* // International Journal of Game Theory. 1086. V. 15. P. 187–200.

12. Schmeidler D. *The nucleolus of a characteristic function game* // SIAM Journal of Applied Mathematics. 1969. V. 17. P. 1163–1170.

13. Yanovskaya E. *Lexicographical maxmin core solutions for cooperative games* // In: Tangian A. and Gruber J.(eds.) Constructing Scalar-Valued Objective Functions, Lecture Notes in Economics 453. Springer-Verlag. 1997. P. 125-136.

6. Приложение

Доказательство Леммы 3.1. Очевидно, что решения φ_k положительно однородны.

Достаточно доказать само-ковариантнсть решений φ_k только для класса $\mathcal{G}_2^{0sp}$ с фиксированным множество игроков $\{i,j\}$. Очевидно, что уравнивающее решение φ_1 само-ковариантно. Пусть $(\{i,j\},v) \in \mathcal{G}_2^{0sp}$ – произвольная игра. Если $\varphi(v) = (0,0)$, то утверждение Леммы справедливо. Предположим теперь, что $\varphi_k(\{i,j\},v) \neq (0,0)$. Тогда из равенств (3.2) получаем

$$\varphi_k(\{i,j\},v) = \left(\frac{-v_j + kv_i}{k+1}, \frac{v_j - kv_i}{k+1}\right).$$

Вычислим величину $\varphi_k(\{i,j\}, v + A\varphi_k(\{i,j\},v))$ для $A > -1$. Обозначим $\varphi_k(v + A\varphi_k(\{i,j\},v) = (m_i, m_j)$.

Из равенств (3.2) следует, что $(\varphi_k(\{i,j\},v))_i \le \varphi_k(\{i,j\},v))_j$ для всех $k \in [0,1]$. Следовательно, for $A > -1$ $m_i < m_j$, и мы получаем равенство

$$\varphi_k\Big(\{i,j\}, v + A\varphi_k(\{i,j\},v)\Big)_i = \frac{-m_j+km_i}{k+1} = \frac{(-v_j+kv_i)}{k+1}\Big(1+\frac{A}{k+1}+\frac{Ak}{k+1}\Big) \tag{6.1}$$
$$= (1+A)\frac{-v_j+kv_i}{k+1} = (1+A)(\varphi_k(v))_i.$$

Аналогично можно проверить, что
$\varphi_k\Big(\{i,j\}, v + A\varphi_k(\{i,j\},v)\Big)_j = (A+1)(\varphi_k(\{i,j\},v))_j.$ □

Доказательство Теоремы 3.1. Очевидно, решения φ_k удовлетворяют аксиомам NE, EFF, SV, ANO и PH. Лемма 3.1 показывает, что они удовлетворяют также само-ковариантности. Более того, по определению они удовлетворяют слабой ковариантности.

Пусть теперь φ произвольное решение для класса $\mathcal{G}_2^{sp}$, удовлетворяющее всем аксиомам, указанным в формулировке Теоремы.

Докажем сначала единственность для класса $\mathcal{G}_2^{0sp}$.

Пусть $(\{i,j\},v) \in \mathcal{G}_2^{0sp}$ – произвольная игра. Тогда $v_i + v_j \le 0$.

Если $\varphi(\{i,j\},v) = (0,0)$ для всех $(\{i,j\},v) \in \mathcal{G}_2^0$, то $\varphi = \varphi_{-1}$.

Предположим теперь, что существует игра $(\{i,j\},v) \in \mathcal{G}_2^{0sp}$, для которой $\varphi(\{i,j\},v) \ne (0,0)$. Из определения (3.1) само-ковариантнсоти следует, что $\varphi(\{i,j\},w) = \varphi(\{i,j\},v)$ для всех игр $(\{i,j\},w)$, в которых характеристическая функция w представима в виде

$$w = \beta v + (1-\beta)\varphi(\{i,j\},v) \quad \text{для некоторого } \beta \ge 0. \tag{6.2}$$

Покажем, что параметр $k(v) = \frac{\varphi_j(\{i,j\},v)-v_j}{\varphi_i(\{i,j\},v)-v_i}$ один и тот же для всех v', удовлетворяющих неравенствам $v'_i < v'_j$ и $\varphi(\{i,j\},v') \ne (0,0)$. Предположим, что найдутся две такие игры $(\{i,j\},v^1), (\{i,j\},v^2) \in \mathcal{G}_2^{0sp}$ для которых $\varphi(\{i,j\},v^1), \varphi(\{i,j\},v^2) \ne (0,0)$, и $k(v^1) \ne k(v^2)$. Пусть $k(v^1) > k(v^2)$.

Предположим, что $\varphi(\{i,j\},v^2)_i > \varphi(\{i,j\},v^1)_i$. Тогда лучи из точек $\varphi(\{i,j\},v^1)$ и $\varphi(\{i,j\},v^2)$, проходящие соответственно через точки v^1, v^2, пересекаются в точке (u_i,u_j), $u_i < u_j$, для которой $u_i + u_j < 0$. Тогда из равенства (6.2) получаем равенства $\varphi(\{i,j\},u) = \varphi(\{i,j\},v^1) = \varphi(\{i,j\},v^2)$, что противоречит предположению.

Если $\varphi(\{i,j\},v^1)_i > \varphi\{i,j\},(v^2)_i$, то рассмотрим игру αv^1, где $\alpha > 0$ достаточно малое число, так что $\varphi(\{i,j\},\alpha v^1)_i = \alpha\varphi(\{i,j\},v^1)_i < \varphi(\{i,j\},v^2)_i$. Тогда, как и в предыдущем случае, мы получаем $k(v^2) = k(\alpha v^1)$, и $k(\alpha v^1) = k(v^1)$ по положительной однородности решения φ.

Таким образом, мы получили единственность параметра k, определяющего решение $\varphi = \varphi_k$ для игр v с $\varphi(\{i,j\},v) \neq (0,0)$.

Рассмотрим теперь игры $(\{i,j\},v)$ с нулевым решением $\varphi(\{i,j\},v) = (0,0)$.

Из равенства (6.2) следует, что $\varphi(\{i,j\},v) = (0,0)$ для всех игр $(\{i,j\},v)$, для которых вектор v расположен на луче $x_j = kx_i, x_i \leq 0$, выходящем из нулевой точки. Рассмотрим игру $(\{i,j\},v)$ с $v_j < kv_i$. Предположим, что $\varphi_i(\{i,j\},v) < 0$, тогда прямая, соединяющая точки v и $\varphi(\{i,j\},v)$, пересекает прямую $x_j = kx_i$, и, по самоковариантности решения φ, мы получаем $\varphi(\{i,j\},v) = (0,0)$, что противоречит предположению, что $\varphi_i(\{i,j\},v) < 0$. Предположим теперь, что $\varphi_i(\{i,j\},) > 0$. Тогда луч, выходящий из точки $\bar{v}$ и проходящий через точку $\varphi(\{i,j\},v)$, пересекает диагональ в некоторой точке $\bar{w} = (w,w), w < 0$. Так ак. по анонимности решения φ, $\varphi(\{i,j\},w) = (0,0)$, из (6.2) мы получаем, что $\varphi(\{i,j\},v) = (0,0)$, что опять противоречит предположению.

Следовательно, $\varphi(\{i,j\},v) = (0,0)$ для всех игр v с $v_i < v_j$ и $v_j \leq kv_i$, и, мы опять доказали, что $\varphi = \varphi_k$ для некоторого $k \in (-1,1]$ и для всех игр из $\mathcal{G}^{0sa}$.

Пусть теперь значение φ индивидуально рационально. Тогда $k = \dfrac{\varphi_j(\{i,j\},v) - v_j}{\varphi_i\{i,j\},(v) - v_i} > 0$, и доказательство теоремы завершено. □

Доказательство Теоремы 3.2 аналогично доказательству Теоремы 3.1.

Доказательство Утверждения 4.1. Уравнивающее решение и решение $\phi_{ind}(N,v) = \{v_i\}_{i\in N}$ для аддитивных игр эффективны, одноточечны, анонимны, слабо и само-ковариантны и согласованы.

Рассмотрим теперь решение ϕ_{kl} для класса неаддитивных игр двух лиц и удовлетворяющих свойствам, указанным в Теореме 3.3. Найдем параметры k,l, при которых решение ϕ_{kl} не имеет согласованных расширений на класс игр $\mathcal{G}_{3,0}$ трех лиц, определяемых следующим образом:

$(N,v) \in \mathcal{G}_{3,0}$ если $|N| = 3$, $v_i > 0, v(\{i,j\} = v_i + v_j$ для всех $i,j \in N$. Для простоты полагаем $N = \{1,2,3\}$. Не ограничивая общности мы можем предположить, что $v_1 \le v_2 \le v_3$. Пусть ϕ согласованное расширение какого-либо решения ϕ_{kl}. Для любой игры $(N,v) \in \mathcal{G}_{3,0}$ обозначим $\phi(N,v) = (x_1,x_2,x_3)$. Рассмотрим всевозможные случаи соотношений между значениями v_i, x_i, $i = 1,2,3$ и x_1,x_2,x_3. Далее будем употреблять обозначение $e_i = v_i - x_i$, $i = 1,2,3$.

Если решение ϕ согласовано, то для любой редуцированной игры $(\{i,j\}, v^x_{ij})$ ее характеристическая функция определяется следующим образом:

$$v^x_{ij}(\{i\}) = \begin{cases} v_i, & \text{if } e_t \le 0, \\ v_i + e_t & \text{if } e_t > 0,\ t \in \{1,2,3\}, t \ne i,j. \end{cases} \tag{6.3}$$

Из определения решений ϕ_{kl} для игр двух лиц следует, что эти решения сохраняют неравенства между индивидуальными значениями характеристической функции: для игры $(\{i,j\}, v)$

$$v_i > v_j \implies \phi_i(\{i,j\}, v) > \phi_j(\{i,j\}, v). \tag{6.4}$$

Таким образом, из (4.3),(6.4) и неравенств $x_1 \le x_2 \le x_3$ следует, что

$$k \text{ или } l = \begin{cases} \frac{e_j}{e_i} & \text{если } e_t \le 0, \\ \frac{e_j + e_t}{e_i + e_t} & \text{иначе }, \end{cases} \tag{6.5}$$

где $v_j \ge v_i$, $i,j,t = 1,2,3$, и k или l выбираются в зависимости от спер- или суб-аддитивности редуцированной игры $(\{i,j\}, v^x_{ij})$.

Для случая неравенств $v_1 \le v_2 \le v_3$ и $x_1 \le x_2 \le x_3$, рассмотрим все возможности неравенств между v_i и x_i, $i = 1,2,3$, и между $v_1 + v_2 + v_3$ и $v(N)$.

1. $v_1 + v_2 + v_3 > v(N)$.

1-1. $e_1 < 0, e_2, e_3 > 0$.

Тогда редуцированная игра на множество игроков $(\{2,3\})$ субаддитивна, и мы получаем $l = \frac{e_3}{e_2}$.

a) $e_1 + e_2 + 2e_3 > 0$.

Так как $e_3 \ge e_2$, из неравенства $e_1 + e_3 + 2e_2 > 0$ следует неравенство $e_1 + e_2 + 2e_3 > 0$.

Тогда обе редуцированные и игры на множества игроков $\{1,2\}$ и $\{1,3\}$ субаддитивны, и мы получаем равенства

$$l = \frac{e_2+e_3}{e_1+e_3} = \frac{e_2+e_3}{e_1+e_2} = \frac{e_3}{e_2}.$$

Из этих равенств следует равенство $e_2 = e_3$, и единственная возможность для l – это $l = 1$.

b) $e_1 + e_3 + 2e_2 < 0$.

В этом случае редуцированная игра $(\{1,3\}, v^x_{13})$ супераддитивна. Следовательно,

$$k = \frac{e_3+e_2}{e_1+e_2}.$$

Так как $k \in [-1,1]$, из последнего равенства следует $e_3 \leq e_1$, что противоречит неравенствам $e_1 < 0, e_3 > 0$.

Подслучаи a) и b) охватывают весь случай 1-1.

1-2. $v_1 + v_2 + v_3 > v(N)$, $e_1, e_2, e_3 > 0$.

В этом случае все редуцированные игры на множества двух игроков субаддитивны. Следовательно,

$$l = \frac{e_2+e_3}{e_1+e_2} = \frac{e_3+e_2}{e_1+e_2} = \frac{e_3+e_1}{e_2+e_1},$$

откуда получаем $e_1 = e_2 = e_3$, $l = 1$.

1-3. $v_1 + v_2 + v_3 > v(N)$, $e_1 < 0, e_2 < 0, e_3 > 0$.

a) $e_1 + e_3 > 0$, $e_2 + e_3 > 0$. Как и в предыдущем случае мы получаем, что все редуцированные игры двух лиц субаддитивны, и

$$l = \frac{e_3}{e_1} = \frac{e_3}{e_2} = \frac{e_2+e_3}{e_1+e_3} = 1.$$

b) $e_1 + e_3 > 0$, $e_2 + e_3 < 0$. Редуцированные игры $(\{1,3\}, v^x_{1,3})$ и $(\{1,2\}, v^x_{1,2})$ субаддитивны, следовательно,

$$l = \frac{e_3}{e_1} = \frac{e_2+e_3}{e_1+e_3}.$$

Однако это равенство невозможно, так как $e_2 + e_3 < e_3, e_1 + e_3 > e_1$.

Невозможность случая $e_2 + e_3 > 0, e_1 + e_3 < 0$ показывается аналогично случаю b). Так как $e_1 + e_2 < 0$, случай 1-3 рассмотрен полностью, из него мы получаем единственную возможность $l = 1$.

Все случаи $e_i, e_j < 0, e_t > 0, i, j, t = 1, 2, 3$ рассматриваются аналогично случаю 1-3. Таким образом, случай 1 рассмотрен полностью.

2. $v_1 + v_2 + v_3 < v(N)$.
2-1. $e_1, e_2, e_3 < 0$. В этом случае все редуцированные игры двух лиц супераддитивны, следовательно, мы получаем следующие значения для k :

$$k = \frac{e_2}{e_1} = \frac{e_3}{e_1} = \frac{e_3}{e_2},$$

откуда следует, что $k = 1$.
2-2. $e_1 < 0, e_2 < 0, e_3 > 0$.

a) $e_1 + e_2 + 2e_3 < 0$. Тогда редуцированная игра $(\{1, 2\}, v^x_{1,2})$ супераддитивна, и $k = \frac{e_2+e_3}{e_1+e_3}$.

a-1) $e_1 + e_3 > 0$. Тогда $e_2 + e_3 < 0$, и редуцированная игра $(\{1, 3\}, v^x_{1,3})$ субаддитивна, а игра $(\{2, 3\}, v^x_{2,3})$ супераддитивна. Следовательно,

$$l\frac{e_3}{e_1},\ \ k = \frac{e_3}{e_2}.$$

Приравнивая выражения для k, получим $k = \frac{e_3}{e_2} = \frac{e_2+e_3}{e_1+e_3}$. Однако ввиду того что $e_3 > e_2 + e_3$, $e_2 < 0 < e_1 + e_3$, последнее равенство невозможно.

a-2) $e_2 + e_3 > 0$. Тогда $e_1 + e_3 < 0$, и аналогично случаю a-1) получаем

$$l = \frac{e_3}{e_2},\ \ k = \frac{e_3}{e_1}. \tag{6.6}$$

Приравнивая выражения для k, получаем

$$k = \frac{e_3}{e_1} = \frac{e_2 + e_3}{e_1 + e_3}, \tag{6.7}$$

откуда следует $e_3^2 = e_1 e_2$. Далее, $k = \sqrt{\frac{e_2}{e_1}}$. Так как $|l| \geq |k|$, из (6.6) следует $e_2 \geq e_1$, а из $|k| \leq 1$, следует, что равенство (6.7) может выполняться только если $e_1 = e_2 = e_3$, что невозможно.

a-3) $e_1 + e_3 < 0, e_2 + e_3 < 0$. Как и в предыдущем случае, мы получаем выражение $l = \frac{e_2+e_3}{e_1+e_3}$. Редуцированные игры $(\{1, 3\}, v^x_{1,3}), (\{2, 3\}, v^x_{2,3})$ супераддитивны, следовательно,

$$k = \frac{e_3}{e_1} = \frac{e_2}{e_1}$$

откуда получаем $e_1 = e_2$, и $k = l = 1$.

Подслучай 2-2а) рассмотрен полностью.

b)$e_1 + e_2 + 2e_3 > 0$. Редуцированная игра $(\{1,2\}, v^x_{1,2})$ субаддитивна, и $l = \frac{e_2+e_3}{e_1+e_3}$.

b-1) $e_1 + e_3 > 0$. Так как $e_1 + e_2 < 0$, редуцированная игра $(\{1,2\}, v^x_{1,2})$ субаддитивна, $l = \frac{e_3}{e_1}$. Аналогично случаю a-2), приравнивая два выражения для l, мы получаем равенство $l = \frac{e_3}{e_1} = \frac{e_2+e_3}{e_1+e_3}$, которое невозможно.

b-2) $e_1 + e_3 < 0$, откуда следует $e_2 + e_3 > 0$. Аналогично предыдущим случаям, получаем

$$k = \frac{e_3}{e_1}, \;\; l = \frac{e_3}{e_2} = \frac{e_2 + e_3}{e_1 + e_3}.$$

Так как $|l| \geq |k|$, из этих равенств следует $e_1 < e_2$.

Из последнего равенства следует $e_3^2 + e_1e_3 = e_2^2 + e_2e_3$, откуда получаем неравенства $e_3^2 > e_2^2 > e_1^2$, одначаюшие, что ввиду неравенства $|k| \leq 1$ единственной возможностью явяется $e_3 = -e_1$, т.е. $k = -1$, $e_1 + e_3 = 0 \;\; \rightarrow \;\; e_2 = 0$. Следовательно, $e_1 + e_2 + e_3 = 0$ что противоречит условиям случая 2.

b-3). $e_1 + e_3 < 0, e_2 + e_3 < 0$. Из супераддитивных редуцированных игр $(\{1,3\}, v^x_{1,3})$, $(\{2,3\}, v^x_{2,3})$ получаем

$$k = \frac{e_3}{e_1} = \frac{e_3}{e_2}.$$

Последнее неравенство дает $e_1 = e_2$, откуда $k = 1$.

Если редуцированная игра $(\{1,2\}, v^x_{1,2})$ супераддитивна, то мы получаем выражение для k еще раз. Если же она субаддитивна, то $l = \frac{e_2+e_3}{e_1+e_3} = 1$.

Таким образом, рассмотрение подслучая 2-2в) завершено, и все возможности перебраны. Из этого перебора следует, что для игр трех лиц, рассмотренных в случаях 1–2, одноточечное согласованное анонимное решение ϕ совпадает с $\phi_{k,l}$ на играх двух лиц на редуцированных играх относительно вектора решения $x = \phi(\{1,2,3\}, v)$, и $v_i - x_i \neq 0$, $i = 1, 2, 3$, для единственно возможных значений параметров $k, l : k, l = 1$.

Если некоторые из эксцессов равны нулю, то параметры k, l могут принимать значения $k = 0$ и $l = \infty$. Покажем, что второе равенство

$l = \infty$ невозможно. Рассмотрим пример субаддитивной игры трех лиц из статьи [3]:

$$N = \{1, 2, 3\},\ v_1 = v_2 = 1, v_3 = 0,\ v(\{1, 3\}) = 1.4,$$

$$v(\{2, 3\}) = 1.3, v(\{1, 2\}) = v(N) = 2.2.$$

Пусть $y = \varphi_{k,l}(N, v)$. Тогда максимальное превосходство игрока i над игроком j в векторе y равно $s_{ij}(y) = \max\{v(\{i\}) - y_i, v(\{i, k\}) - (y_i + y_k)\}$, $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$.

Редуцируя эту игру на двухэлементные множества игроков относительно y, получим, что $k($ или $)l = \frac{s_{ij}(y)}{s_{ji}(y)}$, если $y_i > y_j$.

Сначала покажем что $s_{ij}(y) \geq 0$ для всех $i, j \in N$. Рассмотрим все пары игроков.

1) $s_{12}(y) \leq 0$. Так как $k = 0$ или 1, должно быть $s_{12}(y) = s_{21}(y) \leq 0$, откуда следуют неравенства $y_1 \geq 1, y_1 + y_3 \geq 1.4,\ \ y_2 \geq 1, y_2 + y_3 \geq 1.3$, и условие эффективности $y_1 + y_2 + y_3 = 2.2$ Эти неравенства и равенство несовместны.

2) $s_{13}(y) = s_{31}(y) \leq 0$. Тогда $y_1 \geq 1, y_1 + y_2 \geq 2.2$. Из последнего неравенства следует $y_3 \leq 0$. Однако из $s_{31}(y) \leq 0$ следует $y_3 \geq 0$, и мы получаем $y_3 = 0$. Из неравенства $y_2 + y_3 \geq 1.3$ следует $y_2 \geq 1.3$, и это неравенство вместе с неравенством $y_1 \geq 1$ несовместно с равенством эффективности $y_1 + y_2 = 2.2$

3) $s_{23}(y) = s_{32}(y) \leq 0$. Не трудно проверить, что система неравенств

$$\begin{aligned} y_2 \geq 1, &\quad y_1 + y_2 \geq 2.2, \\ y_3 \geq 0, &\quad y_1 + y_3 \geq 1.4, \\ y_1 + y_2 + y_3 &\ = 2.2 \end{aligned} \tag{6.8}$$

несовместна.

Следовательно, все редуцированные игры двух лиц субаддитивны, и параметр l для решения ψ_l может принимать только два значения $l = 1$ или $l = \infty$. Первое значение невозможно, так показывают выше рассмотренные случаи 1)—3). Второе значение означает, что

$$y_j > y_i \implies s_{ji}(y) \geq 0, \text{ и } s_{ij}(y) = 0.$$

Невозможность этого соотношения была показана в статье Арина и Инарры [4]. $\square$

Доказательство Теоремы 4.1. Сначала покажем, что существуют согласованные расширения решений 1)–3). Пред n-ядро совпадает со стандартным решением на классе игр двух лиц, т.е., с решением ϕ_{11}. Оно согласовано, т.е. является согласованным расширением этого решения.

Найдем согласованное расширение решения ϕ_{01}. Для произвольной игры (N, v), обозначим через $C(N, v)$ ее с-ядро, а через $PC(N, v)$ – ее положительное с-ядро. Последнее не пусто для любой ТП игры [10]. на классе субаддитивных игр двух лиц положительное с-ядро совпадает с пред n-ядром, а на классе супераддитивных игр двух лиц оно совпадает с с-ядром.

Рассмотрим решение PC_{lexmin}, сопоставляющее каждой ТП игре вектор выигрышей из положительного с-ядра, а котором достигается максимум отношения lexmin. Это решение непусто, одноточечно, анонимно, и на классе сбалансированных игр совпадает с lexmin с-ядром [3], [13]. Следовательно, на классе субаддитивных игр двух лиц оно совпадает с пред n-ядром, а на классе супераддитивных игр совпадает с решением CE ограниченного эгалиатризма, таким образом, а классе всех игр двух лиц $PC_{lexmin} = \phi_{01}$.

Доказательство согласованности решения PC_{lexmin} может быть проведено небольшой модификацией соответствующего доказательства для сбалансированных игр в [13].

Пусть теперь ϕ – произвольное решение, удовлетворяющее всем условиям Теоремы. Уравнивающее решение определено для всех ТП игр и удовлетворяет всем условиям Теоремы (см. Утверждение 3.2).

Если $\phi \neq ES$, то $\phi = \phi_{kl}, k, l \neq -1$ на классе неаддитивных игр двух лиц (Теорема 3.3), и единственность значений $k = 0$ или $k = 1$, $l = 1$ для класса неаддитивных игр доказана в Утверждении 4.1.

Покажем теперь, что для любой аддитивной игры двух лиц v решение $\phi(\{i, j\}, v) = \phi_{ind}(\{i, j\}, v) = (v_i, v_j)$. Для этого следует поверить, что решения – уравнивающее или решение ϕ_{ind} на классе аддитивных игр двух лиц – могут оказаться несовместными с решениями ϕ_{11} и ϕ_{01} на классе неаддитивных игр двух лиц.

Рассмотрим пред n-ядро. Оно совпадает с решением ϕ_{11} на классе всех игр двух лиц. Так как существуют выпуклые игр с числом игроков большим трех, для которых по крайней мере одна редуцированная игра на двухэлементное множество игроков относительно этого решения аддитивна, мы получаем, что не существует согласованных решений, отличающихся от стандартного решения на классе аддитивных игр двух лиц, так как для любой такой игры $ST(\{i,j\},v) = (v_i, v_j) = \phi_{ind}(\{i,j\},v)$.

Рассмотрим теперь решение $PC_{lexmin} \in PC$. Для любой аддитивнрой игры двух лиц v $PC(\{i,j\},v) = v$. Так как положительное с-ядро согласовано, мы получаем , что $\phi = \phi_{ind}$ для любой аддитивной игры двух лиц.

Таким образом, только решение ϕ_{ind} может быть скомбинировано с согласованными расширениями решений ϕ_{11} и ϕ_{01}. □

SELF-COVARIANT AND CONSISTENT SOLUTIONS OF COOPERATIVE GAMES

Elena B. Yanovskaya, National Research University at St.Petersburg, Dr.Sc., prof. (eyanovskaya@hse.ru).

Abstract: A weakening of covariance property for solutions of cooperative games with transferable utilities – self-covariance – is defined. Self-covariant solutions are positively homogenous and satisfy a ”restricted” translation covariance such that feasible shifts are only the solution vectors themselves and their multipliers. A description of all nonempty, efficient, anonymous, self-covariant, and single-valued solution for the class of two-person TU games is given. Among them the solutions admitting consistent extensions in the Davis–Maschler sense are found. They are the equal share solution, the standard solution, and the constrained egalitarian solution for superadditive two-person games. Characterizations of consistent extensions of these solutions to the class of all TU games are given.

Keywords: cooperative game, covariance, self-covariance, equal share solution, standard solution, constrained egalitarian solution consistent extension.