Математическая Теория Игр и её Приложения, т.8, в.4, с. 30–42

УДК 519.83
ББК 22.18

ВЕКТОРЫ ШЕПЛИ, ОУЭНА И АУМАННА-ДРЕЗЕ В ИГРЕ ПАТРУЛИРОВАНИЯ С КОАЛИЦИОННОЙ СТРУКТУРОЙ

Василий В. Гусев
Институт прикладных математических исследований
Карельского научного центра РАН
185910, Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11
e-mail: gusev@krc.karelia.ru

В работе исследуется простая модель кооперативной игры патрулирования с коалиционной структурой. Показано, что векторы Шепли, Оуэна и Ауманна-Дрезе в рассматриваемой игре совпадают друг с другом при нечетном количестве патрулирующих.

Ключевые слова: вектор Шепли, вектор Оуэна, вектор Ауманна-Дрезе, коалиция, коалиционная структура.

1. Введение

Распределение выигрыша между игроками в кооперативной игре является важной задачей теории игр. Популярными способами дележа являются C-, N-, K-ядро, вектор Шепли. Иногда участники игры могут образовывать коалиционные структуры, тогда выигрыш каждого игрока можно вычислить, например, используя вектор Оуэна или Ауманна-Дрезе. Каждый способ распределения выигрыша обладает своими достоинствами и недостатками, следовательно, выбранный способ дележа необходимо четко аргументировать.

Традиционно игры патрулирования исследуются как некооперативные игры [1,2,5,8]. В данной статье рассматривается игра патрулирования с коалиционной структурой. Поэтому пригодными способами дележа являются вектор Оуэна и Ауманна-Дрезе. Свойства вектора Оуэна подробно изложены в [9,10,11]. В работе [4] найдены устойчивые коалиционные структуры на основе вектора Ауманна-Дрезе. Для более точного исследования кооперативной игры часто используется вектор Шепли. В статье [7] показано, что среди способов распределения выигрыша, таких как вектор Шепли, Оуэна и Ауманна-Дрезе, наиболее пригодным дележом для перчаточной игры является вектор Оуэна.

Однако, если дележ основан на подсчете вкладов игроков для каждой перестановки участников игры, то вычислительная сложность алгоритмов нахождения выигрыша экспоненциальна в общем виде. Например, в [6] доказано, что вычислительная сложность подсчета вектора Шепли равна $O(2^{nlogn})$. Для рассматриваемой игры вычислительная сложность нахождения выигрышей игроков по векторам Шепли, Оуэна и Ауманна-Дрезе соответственно равна $O(1)$.

В первом разделе статьи вводится игра патрулирования с коалиционной структурой. Во втором — вычисляются выигрыши игроков. Доказано, что все три вектора совпадают при нечетном количестве патрулирующих игроков.

2. Кооперативная игра с коалиционной структурой

Обозначим: m – количество охраняемых объектов. Ценость на двух любых объектах одинакова. $N = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ – множество патрулирующих игроков, $|N| = n, 1 + \left[\frac{n-1}{2}\right] \leq m$; A – атакующий игрок. Игрока P_1 назовем сильным патрулирующим.

Атакующий старается нанести объектам урон, а патрулирующие защищают объекты от атакующего.

Определим правила поимки атакующего: 1. Если на фиксированном охраняемом объекте количество патрулирующих больше одного, то атакующий, если он находится на рассматриваемом объекте, считается пойманным. 2. Если на охраняемом объекте нет патрулирующих, но есть атакующий, то этот злоумышленник не пойман. 3. Допустим ситуацию, при которой на охраняемом объекте один патрулирующий и один атакующий. Если патрулирующий это игрок P_1, то атакующий пойман, иначе не пойман.

Патрулирующие разбиваются на коалиции и коалиции распределяются по разным охраняемым объектам. Атакующий с вероятностью $\frac{1}{m}$ выбирает любой охраняемый объект. Переходить с объекта на объект игрокам нельзя. Множество коалиций, на которые распределились патрулирующие, образуют коалиционную структуру.

Определение 2.1. *Коалиционная структура π – это такое разбиение $\{B_1, B_2, \ldots, B_l\}$ множества игроков N, что выполняются следующие свойства:*
1. $B_1 \cup \ldots \cup B_l = N$;
2. $\forall i, j,\ i \neq j,\ B_i \cap B_j = \emptyset$.

Через $B(i) \in \pi$ будем обозначать коалицию, которая содержит игрока $i \in N$.

Определение 2.2. *Эффективная коалиционная структура π_e – это коалиционная структура, при выборе которой вероятность поимки атакующего максимальна.*

Пример 1. Пусть $m = 10$, $|N| = 16$. Если атакующий и некоторая коалиция патрулирующих встретились на объекте, то будем считать, что атакующий пойман, если его сила (вес) не больше силы коалиции патрулирующих. Пусть вес атакующего равен 6. Рассмотрим три коалиционные структуры
$\pi_1 = \{\{1,1,1,1,1,1\},\{2,2,2\},\{3,3\},\{4,4\},\{5,5\},\{6\}\}$,
$\pi_2 = \{\{3,1,1,1\},\{3,2,1\},\{4,2\},\{4,2\},\{5,1\},\{5,1\},\{6\}\}$,
$\pi_3 = \{\{6,1,1\},\{5,1,1\},\{5,1,1\},\{2,3,4\},\{2,3,4\},\{2\}\}$.
Числом от 1 до 6 обозначается сила охранника. Найдем эффективную коалиционную структуру. Если игроки распределились на коалиции согласно коалиционной структуре π_1, то вероятность поймать атакующего равна $\frac{6}{m} = 0.6$. Для π_2 вероятность составит $0,7$, π_3 – 0.5. Для любой другой коалиционной структуры вероятность поймать атакующего не больше 0.7, значит коалиционная структура π_2 является эффективной.

Вернемся к постановке задачи, описанной в начале раздела. В этой задаче эффективных коалиционных структур может быть нес-

колько. Распределять выигрыш между игроками будем в соответствии с эффективной коалионной структурой π_e, которая имеет следующий вид:
1. Если n четно, то $\pi_e = \{\{P_1\}, \{P_2, P_3\}, \dots, \{P_{n-2}, P_{n-1}\}, \{P_n\}\}$;
2. Если n нечетно, то $\pi_e = \{\{P_1\}, \{P_2, P_3\}, \dots, \{P_{n-1}, P_n\}\}$.

Введем характеристическую функцию игры. Зададим ее следующим образом:

$$v(K) = \begin{cases} \frac{1}{m}\left(1 + \left[\frac{|K|-1}{2}\right]\right), P_1 \in K; \\ \frac{1}{m}\left[\frac{|K|}{2}\right], P_1 \notin K, \end{cases}$$

где $|K|$ – количество патрулирующих в коалиции $K \in N$. Значение характеристической функции $v(K)$ равно вероятности поимки атакующего коалицией K.

Теорема 2.1. *Характеристическая функция $v(K)$ обладает свойством монотонности и супераддитивности.*

Доказательство. Докажем свойство монотонности, т.е. $K \subseteq N$, $L \subseteq N, K \subseteq L : v(K) \leq v(L)$. Значит $|K| \leq |L|$. Рассмотрим три возможных случая:

1. $P_1 \in K, P_1 \in L : v(K) = \frac{1}{m}\left(1 + \left[\frac{|K|-1}{2}\right]\right) \leq \frac{1}{m}\left(1 + \left[\frac{|L|-1}{2}\right]\right) = v(L)$;

2.$P_1 \notin K, P_1 \notin L : v(K) = \frac{1}{m}\left[\frac{|K|}{2}\right] \leq \frac{1}{m}\left[\frac{|L|}{2}\right] = v(L)$;

3. $P_1 \notin K, P_1 \in L : v(K) = \frac{1}{m}\left[\frac{|K|}{2}\right] \leq \frac{1}{m}\left(1 + \left[\frac{|K|-1}{2}\right]\right) \leq$
$\leq \frac{1}{m}\left(1 + \left[\frac{|L|-1}{2}\right]\right) = v(L)$.

Докажем свойство супераддитивности, т.е. $K \cap L = \emptyset$, то $v(K \cup L) \geq v(K) + v(L)$. Рассмотрим два возможных случая:

1. $P_1 \in K, P_1 \notin L : v(K \cup L) = \frac{1}{m}\left(1 + \left[\frac{|K|+|L|-1}{2}\right]\right) \geq$
$\geq \frac{1}{m}\left(1 + \left[\frac{|K|-1}{2}\right] + \left[\frac{|L|}{2}\right]\right) = v(K) + v(L)$;

2. $P_1 \notin K, P_1 \notin L : v(K \cup L) = \frac{1}{m}\left[\frac{|K|+|L|}{2}\right] \geq \frac{1}{m}\left(\left[\frac{|K|}{2}\right] + \left[\frac{|L|}{2}\right]\right) = v(K) + v(L)$ $\square$

Для кооперативной игры $\Gamma = \langle N, v(K), \pi_e\rangle, K \subseteq N$ вычислим выигрыш каждого игрока по вектору Шепли, Оуэна и Ауманна-Дрезе.

3. Распределение выигрыша между патрулирующими

3.1. Вектор Шепли

Теорема 3.1. *Вектор Шепли [3] в игре* $\Gamma(\cdot)$ *вычисляется по формуле*

$$\phi_i(v) = \begin{cases} \frac{1}{m}, i = 1; \\ \frac{1}{2m}, i \neq 1, N - \textit{нечетно}; \\ \frac{N-2}{2m(N-1)}, i \neq 1, N - \textit{четно}. \end{cases}$$

Доказательство. Вычислим выигрыш первого игрока.

$$\phi_1(v) = \sum_{S:P_1 \in S} \frac{(|S|-1)!(|N|-|S|)!}{|N|!}(v(S) - v(S \setminus P_1)) =$$
$$= \sum_{S:P_1 \in S} \frac{1}{|S|C_{|N|}^{|S|}} \left(\frac{1}{m}\left(1 + \left[\frac{|S|-1}{2}\right]\right) - \frac{1}{m}\left[\frac{|S|-1}{2}\right]\right) = \frac{1}{m} \sum_{S:P_1 \in S} \frac{1}{|S|C_{|N|}^{|S|}} =$$
$$= \frac{1}{m}\left(\frac{C_{|N|-1}^0}{1 \cdot C_{|N|}^1} + \frac{C_{|N|-1}^1}{2 \cdot C_{|N|}^2} + \ldots + \frac{C_{|N|-1}^{|N|-1}}{N \cdot C_{|N|}^{|N|}}\right) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{|N|} \frac{C_{|N|-1}^{k-1}}{k \cdot C_{|N|}^k} = \frac{1}{m}.$$

Так как остальные патрулирующие не имеют отличий друг от друга, тогда выигрыш каждого игрока $P_i, i \neq 1$ будет равен

$$\frac{v(N) - \frac{1}{m}}{|N|-1} = \frac{1}{m(|N|-1)}\left[\frac{|N|-1}{2}\right] = \begin{cases} \frac{1}{2m}, N - \text{нечетно}; \\ \frac{N-2}{2m(N-1)}, N - \text{четно}. \end{cases} \qquad \square$$

3.2. Вектор Ауманна-Дрезе

Пусть $\pi = \{B_1, B_2, \ldots, B_l\}$. Вектор Шепли, вычисленный для фиксированной коалиционной структуры π называется значением Ауманна-Дрезе [4] и находится по формуле

$$\phi_i^\pi = \sum_{S \subseteq B(i): i \in S} \frac{(|B(i)| - |S|)!\,(|S|-1)!}{|B(i)|!}\left(v(S) - v(S \setminus \{i\})\right).$$

Теорема 3.2. *Значения Ауманна-Дрезе в игре* $\Gamma(\cdot)$ *вычисляется по формуле*

$$\phi_i^{\pi_e} = \begin{cases} \frac{1}{m}, i = 1; \\ \frac{1}{2m}, |B(i)| = 2; \\ 0, |B(i)| = 1, i \neq 1. \end{cases}$$

Доказательство. Если $|B(i)| = 1, i \neq 1$, то

$$\phi_i^{\pi_e} = \sum_{S \subseteq B(i), i \in S} \frac{(|B(i)| - |S|)!\,(|S|-1)!}{|B(i)|!}(0 - 0) = 0.$$

Если $i = 1$, то

$$\phi_i^{\pi_e} = \frac{(|B(i)| - |B(i)|)!\,(|B(i)| - 1)!}{|B(i)|!}\left(\frac{1}{m} - 0\right) +$$

$$+ \sum_{S \subset B(i), i \in S} \frac{(|B(i)| - 1)!\,(|S| - 1)!}{|B(i)|!}(0 - 0) = \frac{1}{m}$$

Если $|B(i)| = 2$, то

$$\phi_i^{\pi_e} = \frac{(|B(i)| - |B(i)|)!\,(|B(i)| - 1)!}{|B(i)|!}\left(\frac{1}{m} - 0\right) +$$

$$+ \sum_{S \subset B(i), i \in S} \frac{(|B(i)| - 1)!\,(|S| - 1)!}{|B(i)|!}(0 - 0) = \frac{1}{2m}$$

$\square$

3.3. Вектор Оуэна

Чтобы определить выигрыш каждого игрока в кооперативной игре с коалиционной структурой π можно воспользоваться вектором Оуэна

$$Ow_i(N, v, \pi) = \frac{1}{|\Sigma(N, \pi)|} \sum_{\sigma \in \Sigma(N, \pi)} \left(v(K_i(\sigma)) - v(K_i(\sigma) \setminus \{i\})\right), \quad (3.3)$$

где $\Sigma(N, \pi)$ – это множество всех перестановок игроков σ, совместимых с коалиционной структурой π, т.е. $\forall i, j \in B \in \pi$ выполняется $|\sigma(i) - \sigma(j)| < |B|$. $K_i(\sigma)$ – множество игроков, которые в перестановке σ стоят до игрока i, включая его.

Пример 2. Пусть некоторая характеристическая функция для четырех игроков задана следующим образом: $w(\emptyset) = w(I) = w(II) = w(III) = w(IV) = 0, w(I, II) = w(I, III) = w(I, IV) = w(II, III) = w(II, IV) = w(III, IV) = 2, w(I, II, III) = 5, w(I, II, IV) = 6,$ $w(I, III, IV) = 7, w(II, III, IV) = 8, w(I, II, III, IV) = 10$. Вычислим вектор Оуэна с характеристической функцией $w(K)$, например, для коалиционной структуры $\pi_1 = \{\{I, II, III\}, \{IV\}\}$. Все вычисления проведем в табл. 1.

Таблица 1. Вычисление вектора Оуэна

σ	I	II	III	IV
1234	0	2	3	5
1324	0	3	2	5
2134	2	0	3	5
2314	3	0	2	5
3124	2	3	0	5
3214	3	2	0	5
4123	2	4	4	0
4132	2	3	5	0
4213	4	2	4	0
4231	2	2	6	0
4312	5	3	2	0
4321	2	6	2	0
Ow_i	2.25	2.5	2.75	2.5

Теорема 3.3. *Вектор Оуэна, вычисленный для эффективной коалиционной структуры, совпадает с вектором Ауманна-Дрезе.*

Доказательство. Пусть N нечетно. Вычислим выигрыш первого игрока. Общее количество перестановок σ, удовлетворяющих коалиционной структуре π_e равно $|\Sigma(N,\pi_e)| = \left(\frac{N-1}{2}\right)! \cdot 2^{\frac{N-1}{2}} \cdot \frac{N+1}{2}$ $\forall\sigma \in \Sigma(N,\pi_e) : v(K_i(\sigma)) - v(K_i(\sigma) \setminus \{i\}) = \frac{1}{m}$. Подставляя найденные значения в формулу (3.3), получаем, что $Ow_1 = \frac{1}{m}$. Вычислим выигрыш $i-$го игрока, $i \neq 1$. Вклад $i-$го игрока будет равен $\frac{1}{m}$ только для $\left(\frac{N-1}{2}\right)! \cdot 2^{\frac{N-1}{2}-1} \cdot \frac{N+1}{2}$ перестановок, для оставшихся перестановок вклад игрока равен нулю. Тогда значение $Ow_i = \frac{1}{2m}$.

Пусть N четно. Тогда существует не сильный игрок $P_{|N|}$, который в коалиционной структуре π_e остался без пары. Так как вклад такого игрока равен нулю для любой перестановки σ, то значение $Ow_i = 0$.

Вычислим выигрыш первого игрока. $|\Sigma(N,\pi_e)| = \left(\frac{N}{2}\right)! \cdot 2^{\frac{N}{2}-1} \cdot \left(\frac{N}{2}+1\right) \forall\sigma \in \Sigma(N,\pi_e) : v(K_i(\sigma)) - v(K_i(\sigma) \setminus \{i\}) = \frac{1}{m}$. Подставляя найденные значения в формулу (3.3), получаем, что $Ow_1 = \frac{1}{m}$. Вычислим выигрыш $i-$го игрока, $i \neq 1, i \neq |N|$. Вклад $i-$го игрока будет равен $\frac{1}{m}$ только для $\left(\frac{N}{2}\right)! \cdot 2^{\frac{N}{2}-2} \cdot \left(\frac{N}{2}+1\right)$ перестановок, для осташихся перестановок вклад игрока равен нулю. Тогда значение $Ow_i = \frac{1}{2m}$. $\square$

4. Вектор Оуэна для разных коалиционных структур

Расширим предположение о силе игроков. Введем функцию $f : N \to \{1,2\}, f(A) = 3$, значение которой равно силе игрока I. Перепишем характеристическую функцию следующим образом:

$$v(K) = \begin{cases} \frac{l(K)}{m}, \sum\limits_{I \in K} f(I) \geq 3; \\ \quad 0, \text{иначе}, \end{cases}$$

где $l(K)$ – максимальное количество подкоалиций K' в разбиении коалиции K, для которых выполняется условие $\sum\limits_{I \in K'} f(I) \geq 3$. Считаем значение m достаточно большим, чтобы $\forall K \subseteq N : l(K) \leq m$.

Рассмотрим коалиционную структуру $\pi_\alpha = \{\{P_1, P_2\}, \{P_3\}, \{P_4\}, \ldots, \{P_{k+2}\}\}, k \geq 1, f(P_1) = 1, f(P_i) = 2$ $\forall i = 2, 3, \ldots, k+2$.

Теорема 4.1. $Ow_1(N, v, \pi_\alpha) = Ow_2(N, v, \pi_\alpha) = \frac{1}{2m}$.

Доказательство. Количество перестановок, соответствующих коалиционной структуре π_α равно $|\Sigma(N, \pi_\alpha)| = 2(k+1)!$. Количество перестановок, для которых вклад игрока P_1 составляет $\frac{1}{m}$, равно $(k+1)!$. Для всех других перестановок вклад игрока P_1 равен 0, откуда $Ow_1(N, v, \pi_\alpha) = \frac{1}{m} \cdot \frac{(k+1)!}{2(k+1)!} = \frac{1}{2m}$. Аналогичные рассуждения для игрока P_2. □

Исходя из Теоремы 4.1, получаем, что выигрыш игрока с единичной силой не отличается от выигрыша игрока, который находится с ним в паре.

Вычислим вектор Оуэна для коалиционной структуры $\pi_\beta = \{\{P_1, P_2\}, \{P_3\}, \ldots, \{P_{k+2}\}\}, f(P_2) = 2, \forall i \neq 2 : f(P_i) = 1$. Игрок P_1 находится в конкуренции с k игроками (имеющие единичную силу), которые хотели бы быть на месте игрока P_1. Поэтому, чтобы игрок P_2 не отказался от пары с игроком P_1 в пользу другого патрулирующего, логично предположить, что выигрыш P_2 должен быть больше, чем у P_1.

Теорема 4.2. $Ow_1(N, v, \pi_\beta) = \frac{1}{2m(k+1)} \left(\left[\frac{k+1}{3}\right] + \left[\frac{k}{3}\right] + 1 \right)$,
$Ow_2(N, v, \pi_\beta) = 1 - Ow_1(N, v, \pi_\beta)$,
$Ow_i(N, v, \pi_\beta) = \frac{v(N) - Ow_1(N, v, \pi_\beta) - Ow_2(N, v, \pi_\beta)}{N-2}, i \neq 1, i \neq 2$.

Доказательство. Общее количество перестановок, соответствующих коалиционной структуре π_β равно $2(k+1)!$. Вычислим выигрыш игрока P_1. Вклад игрока P_1 будет равен $\frac{1}{m}$ для двух классов перестановок:

1. а) Игроки P_1, P_2 в перестановке σ идут в порядке P_1, P_2; б) Количество игроков в перестановке σ до игрока P_1 при делении на 3 дает остаток. Количество перестановок σ, удовлетворяющих условиям а) и б) равно $k!\left(\left[\frac{k+1}{3}\right]\right)$.

2. а) Игроки P_1, P_2 в перестановке σ идут в порядке P_2, P_1; б) Количество игроков в перестановке σ до игрока P_2 делится на 3. Количество перестановок σ, удовлетворяющих условиям а) и б) равно $k!\left(\left[\frac{k}{3}\right]+1\right)$.

Для любой другой перестановки игроков вклад игрока P_1 равен 0. Значит,

$$Ow_1(N, v, \pi_\beta) = \frac{k!\left(\left[\frac{k+1}{3}\right]+\left[\frac{k}{3}\right]+1\right)}{2m(k+1)!} = \frac{\left[\frac{k+1}{3}\right]+\left[\frac{k}{3}\right]+1}{2m(k+1)}.$$

Вычислим выигрыш игрока P_2. Для перестановок, кроме рассмотренных выше, вклад игрока P_2 равен $\frac{1}{m}$. Значит, $Ow_2(N, v, \pi_\beta) = 1 - Ow_1(N, v, \pi_\beta)$. Игроки $P_i, i \neq 1, i \neq 2$ не отличаются друг от друга, значит их выигрыш одинаковый и составит $\frac{v(N) - Ow_1(N,v,\pi_\beta) - Ow_2(N,v,\pi_\beta)}{N-2}$. □

Пример 3. Составим таблицу значений $m \cdot Ow_1(N, v, \pi_\beta)$ для $k = 0, 1, \ldots, 9$ с точностью до третьего знака после запятой (табл. 2).

Таблица 2. Значения $m \cdot Ow_1(N, v, \pi_\beta)$

k	0	1	2	3	4
Ow_1	0.5	0.25	0.333	0.375	0.3
k	5	6	7	8	9
Ow_1	0.333	0.357	0.312	0.333	0.35

Можно заметить, что выигрыш игрока P_1 изменяется не монотонно в зависимости от k. Например, при $k = 4$ выигрыш меньше, чем при $k = 9$, несмотря на то, что конкуренция при $k = 9$ больше, чем при $k = 4$. Такое распределение выигрыша можно объяснить тем, что при некоторых значениях k интерес быть в паре с P_2 не высок, потому что игроки с единичной силой могут сами образовывать коалиции друг с другом.

Пример 4. Рассмотрим коалиционную структуру
$\pi = \{\{P_1, P_2, P_3, P_4\}, \{P_5, P_6, P_7, P_8, P_9\}, \{P_{10}\}, \{P_{11}\}\}$,
$f(P_1) = f(P_2) = f(P_5) = f(P_{11}) = 2$. Сила остальных патрулирующих равна 1, сила атакующего равна 6. Характеристическая функция имеет вид:

$$v(K) = \begin{cases} \frac{l(K)}{m}, \sum\limits_{I \in K} f(I) \geq 6; \\ \quad 0, \text{иначе}, \end{cases}$$

где $l(K)$ – максимальное количество подкоалиций K' в разбиении коалиции K, для которых выполняется условие $\sum\limits_{I \in K'} f(I) \geq 6$. Считаем значение m достаточно большим, чтобы $\forall K \subseteq N : l(K) \leq m$.

Вычислим $m \cdot Ow_{P_3}$. Общее количество перестановок $|\Sigma(N, \pi)| = 4! \cdot 4! \cdot 5!$. Для любой перестановки σ приносимый игроком P_3 выигрыш равен нулю или единице. Пусть в σ коалиция $B(P_3)$ стоит на первом месте. Тогда P_3 приносит в коалицию единичный доход когда стоит на четвертом месте. Количество таких перестановок равно $3! \cdot 3! \cdot 5!$. Если $B(P_3)$ стоит на втором месте в π, то P_3 дает единичный выигрыш коалиции когда P_3 стоит на 3-ем или 4-ом месте для некоторых σ. Фиксируя положение $B(P_3)$ считаем перестановки для которых P_3 приносит ненулевой доход (см. табл. 3). В табл. 3 цифрами 1 и 2 указываются силы игроков, жирным шрифтом выделен P_3. Курсивом выделяется цифра (сила игрока), которая зафиксирована в перестановке.

Тогда $m \cdot Ow_{P_3} = \frac{12336}{69120} \approx 0.178$. Заметим, что для коалиционной структуры $\{\{P_1, P_2, P_3, P_4\}, \{P_5, P_6, P_7, P_8, P_9\}\}$ значение $m \cdot Ow_{P_3} = 0.25$. Однако, из-за появившихся двух игроков, по вектору Оуэна будет справедливо уменьшить выигрыш P_3 примерно на 28.8%.

Таблица 3. Количество σ

Перестановки, соответствующие π	Количество перестановок
$\{2,2,1,\mathbf{1}\},\{2,1,1,1,1\},\{1\},\{2\}$	$3!\cdot 3!\cdot 5!$
$\{2,1,1,1,1\},\{2,2,1,\mathbf{1}\},\{1\},\{2\}$	$2!\cdot 5!\cdot 3!$
$\{1\},\{2,2,\mathbf{1},1\},\{2,1,1,1,1\},\{2\}$	$2!\cdot 2!\cdot 5!$
$\{2\},\{2,1,\mathbf{1},2\},\{2,1,1,1,1\},\{1\}$	$2!\cdot 2!\cdot 2\cdot 5!$
$\{2,1,1,1,1\},\{1\},\{2,2,\mathbf{1},1\},\{2\}$	$5!\cdot 2!$
$\{2,1,1,1,1\},\{2\},\{2,1,\mathbf{1},2\},\{1\}$	$5!\cdot 2!\cdot 2$
$\{1\},\{2,1,1,1,\mathit{1}\},\{2,2,\mathbf{1},1\},\{2\}$	$4!\cdot 4\cdot 2!$
$\{1\},\{1,1,1,1,\mathit{2}\},\{2,2,1,\mathbf{1}\},\{2\}$	$4!\cdot 3!$
$\{2\},\{1,1,1,\mathit{1},2\},\{2,1,\mathbf{1},2\},\{1\}$	$4!\cdot 4\cdot 2!\cdot 2$
$\{2\},\{1,1,1,\mathit{2},1\},\{2,2,\mathbf{1},1\},\{1\}$	$4!\cdot 2!$
$\{1\},\{2\},\{2,\mathbf{1},2,1\},\{2,1,1,1,1\}$	$2!\cdot 5!\cdot 2!\cdot 2$
$\{2,1,1,1,1\},\{1\},\{2\},\{2,\mathbf{1},2,1\}$	$2!\cdot 5!\cdot 4$
$\{1\},\{2,1,1,1,\mathit{1}\},\{2\},\{2,\mathbf{1},2,1\}$	$4!\cdot 4\cdot 2!\cdot 2$
$\{1\},\{1,1,1,1,\mathit{2}\},\{2\},\{2,1,\mathbf{1},2\}$	$4!\cdot 4$
$\{2\},\{2,1,1,1,1\},\{1\},\{2,\mathbf{1},1,2\}$	$5!\cdot 2!\cdot 2$
$\{1\},\{2\},\{2,1,1,1,1\},\{2,\mathbf{1},1,2\}$	$2!\cdot 5!\cdot 2!\cdot 2$

5. Заключение

Предложенные способы дележа, основанные на принципах кооперативной теории игр, могут быть использованы в практических ситуациях при оплате труда работников. При этом, наиболее удобным для определения выплат является вектор Оуэна. В работе [7] для другой кооперативной игры векторы Шепли, Оуэна и Ауманна-Дреза отличны друг от друга. Однако, для рассматриваемой игры патрулирования показано, что такие способы дележа совпадают при нечетном количестве патрулирующих, среди которых один сильный игрок.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гусев В.В. *Ситуация равновесия в игре патрулирования на графе* // Труды Карельского научного центра РАН. 2015. №10. С. 28–33.

2. Гусев В.В., Мазалов В.В. *Оптимальные стратегии в игре патрулирования на графе* // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. Прикл. матем. Информ. Проц. упр. 2015. № 2. С. 61–76.

3. Мазалов В.В. *Математическая теория игр и приложения: учеб. пособие.* СПб.: Изд-во «Лань», 2010.

4. Парилина Е.М., Седаков А.А. *Устойчивость коалиционных структур одной модели банковской кооперации* // Математическая Теория Игр и ее Приложения. 2012. Т. 4, вып. 4. С. 45–62.

5. Alpern S., Fokkink R. and Simanjuntak M. *Optimal search and ambush for a hider who can escape the search region* // European Journal of Operational Research. 2016. V. 251. N 3. P. 707–714.

6. Bachrach Y., Markakis E., Resnick E., Procaccia A.D., Rosenschein J.S., Saberi A. *Approximating power indices: theoretical and empirical analysis* // Autonomous Agents and Multi-Agent Systems. 2010. V. 20. P. 105–122.

7. Belau J. *A Note on the Owen Value for Glove Games* // International Game Theory Review. 2015. V. 17. N. 4. P. 1550014-1-1550014-8.

8. Garnaev A. *Search Games and Other Applications of Game Theory.* Heidelberg, New York, Springer, 2000.

9. Juan J. *Vidal-Puga and Gustavo Bergantinos An implementation of the Owen value* // Games and Economic Behavior. 2003. V. 44. N 2. P. 412–427.

10. Hamiache G. *A new axiomatization of the Owen value for games with coalition structures* // Mathematical Social Sciences. 1999. V. 37. P. 281–305.

11. Khmelnitskaya A.B., Yanovskaya E.B. *Owen coalitional value without additivity axiom* // Mathematical Methods of Operations Research. 2007. V. 66. N 2. P. 255–261.

THE VECTORS OF SHAPLEY, OWEN, AND THE AUMANN-DREZE IN THE GAME PATROLLING WITH COALITION STRUCTURE

Vasilij V. Gusev, IAMR KRC RAS, postgraduate student (gusev@krc.karelia.ru).

Abstract: We consider a simple model of cooperative version for a patrolling game with coalition structure. It is shown that the Shapley value coincides with the Owen and the Aumann-Dreze vector for odd number of the patrolling.

Keywords: patrolling game, cooperative approach, coalition structure, Shapley value, Owen value, Aumann-Dreze value.