Математическая Теория Игр и её Приложения, т.8, в.4, с. 63–78

УДК 517.917
ББК 22.1

АГРЕССИВНОЕ ПОВЕДЕНИЕ В НЕАНТАГОНИСТИЧЕСКОЙ ПОЗИЦИОННОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ

Анатолий Ф. Клейменов
Институт математики и механики
им. Н.Н. Красовского УрО РАН
620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
e-mail: kleimenov@imm.uran.ru

Настоящая статья является продолжением работы [3], в которой была предложена формализация неантагонистической позиционной дифференциальной игры (НПДИ) двух лиц для случая использования различных типов поведения игроков (сокращенно – НПДИсТП). Предполагалось, что каждый игрок помимо обычного, *нормального* (nor), типа поведения, ориентированного на максимизацию собственного функционала, может использовать другие типы поведения, введенные в [1,2]. В частности, это – *альтруистический* (alt), *агрессивный* (agg) и *парадоксальный* (par) типы. Допускалось, что по ходу игры игроки могут осуществлять переключение своего поведения с одного типа на другой. Отметим, что использование таких переключений в повторяющейся биматричной 2×2 игре позволило в работах [6,7] получить новые решения этой игры. Изложенная в [3] формализация действий в НПДИсТП основывается на формализации и результатах общей теории антагонистических позиционных дифференциальных игр [4,5]. Предполагается, что в НПДИсТП каждый игрок одновременно с

©2016 А.Ф. Клейменов

выбором позиционной стратегии выбирает также индикаторную функцию, определенную на всем отрезке игры и принимающую значения в множестве $\{nor, alt, agg, par\}$. Индикаторная функция игрока показывает динамику изменения типа поведения, которой придерживается этот игрок. В [3] даны определения сильного и слабого BT-решений игры НПДИсТП. Ожидаемо, что использование типов поведения, отличных от нормального (так называемых *ненормальных* (*abnormal*) типов), в ряде случаев может привести к исходам, лучшим для игроков, чем в игре НПДИ. В рассмотренных в [3] примерах был сделан акцент на использование игроками альтруистического типа поведения. В настоящей статье приводятся два примера игры с динамикой простого движения на плоскости и фазовыми ограничениями, в которых каждый игрок может проявлять как альтруизм, так и агрессию по отношению к партнеру в течение некоторых промежутков времени; при этом допускается случай взаимной агрессии. В первом примере построены сильные BT-решения, на которых оба игрока увеличивают свой выигрыш по сравнению с игрой с нормальными типами поведения. При этом если игрокам запретить использовать агрессивный тип поведения, то BT-решений в игре не будет. Во втором примере тоже построены сильные BT-решения, однако теперь при наличии запрета на использование игроками агрессивного типа поведения BT-решения все-таки будут существовать, но они будут порождены с использованием только альтруистического типа поведения.

Ключевые слова: неантагонистическая позиционная дифференциальная игра, терминальные показатели качества, типы поведения игроков, альтруистический и агрессивный типы поведения, решения нэшевского типа.

1. Уравнения движения, функционалы, стратегии и движения

Динамика неантагонистической позиционной дифференциальной игры (НПДИ) описывается уравнением

$$\dot{x} = f\,(t, x, u, v)\,, \quad t \in [t_0, \vartheta]\,, \quad x(t_0) = x_0, \tag{1.1}$$

где $x \in R^n$ – фазовый вектор; управления первого и второго игроков u и v стеснены ограничениями $u \in P \in compR^p$ и $v \in Q \in compR^q$. Функция f непрерывна, липшицева по x и удовлетворяет условию подлинейного роста по x.

Функционалы выигрыша игроков имеют вид

$$I_i = \sigma_i(x(\vartheta)), \quad i = 1, 2, \tag{1.2}$$

где $\sigma_i(\cdot)$ – непрерывные функции.

Используемая в настоящей работе формализация НПДИ, включающая описание позиционных стратегий игрока 1 $U = \{u(t, x, \varepsilon), \beta_1(\varepsilon)\}$ и игрока 2 $V = \{v(t, x, \varepsilon), \beta_2(\varepsilon)\}$, а также порождаемых этими стратегиями конструктивных (аппроксимационных) движений $x^\varepsilon_\Delta[t] = x\,[t, t_0, x_0, U, \varepsilon_1, \Delta_1, V, \varepsilon_2, \Delta_2]$ и предельных (идеальных) движений $x(t) = x(t, t_0, x_0, U, V)$, основана на формализации и результатах общей теории антагонистических позиционных дифференциальных игр [4,5] и подробно описана в [1] (см. также [3]).

2. Некоторые результаты из теории НПДИ

Здесь приводятся некоторые результаты из теории НПДИ [1].

Определение 2.1. *Пара стратегий (U^N, V^N) образует равновесное по Нэшу решение (NE-решение) в НПДИ (1.1)–(1.2), если для любого движения $\overline{x}(\cdot) \in X(t_0, x_0, U^N, V^N)$, любого $\tau \in [t_0, \vartheta]$, любых стратегий U и V имеют место следующие неравенства:*

$$\max_{x(\cdot)} \sigma_1(x(\vartheta, \tau, \overline{x}(\tau), U, V^N]) \le \min_{x(\cdot)} \sigma_1(x(\vartheta, \tau, \overline{x}(\tau), U^N, V^N]), \tag{2.1}$$

$$\max_{x(\cdot)} \sigma_2(x(\vartheta, \tau, \overline{x}(\tau), U^N, V]) \le \min_{x(\cdot)} \sigma_2(x(\vartheta, \tau, \overline{x}(\tau), U^N, V^N]), \tag{2.2}$$

где операции $\max$ *и* $\min$ *производятся по соответствующим множествам предельных движений.*

Определение 2.2. *NE-решение (U^P, V^P), неулучшаемое по Парето относительно величин (I_1, I_2) (2.2), называется P^*-решением.*

Рассмотрим вспомогательные антагонистические позиционные дифференциальные игры Γ_1 и Γ_2. Динамика обеих игр описывается уравнением (1.1). В игре Γ_i игрок i максимизирует функционал $\sigma_i(x(\vartheta))$

(1.2), а игрок $3-i$ ему противодействует. Из [5] следует, что обе игры Γ_1 и Γ_2 имеют универсальные седловые точки

$$u^{(i)}(t,x,\varepsilon),\ v^{(i)}(t,x,\varepsilon), \quad i=1,2 \tag{2.3}$$

и непрерывные функции цены

$$\gamma_1(t,x),\ \gamma_2(t,x). \tag{2.4}$$

Свойство универсальности стратегий (2.3) означает, что они являются оптимальными не только для фиксированной начальной позиции (t_0,x_0), но и для любой позиции $(t_*,x_*)\in G$, рассматриваемой в качестве начальной.

Очевидно, что для позиции $(t,x)\in G$ игры НПДИ величина $\gamma_i(t,x)$ представляет собою гарантированный выигрыш игрока i в этой позиции.

В [1] показано, что все NE- и P^*-решения игры могут быть найдены в классе пар стратегий (U,V), порождающих единственное предельное движение (траекторию). Решающие стратегии, составляющие такую пару, которая порождает траекторию $x^*(\cdot)$, имеют следующий вид:

$$U^0 \div \{u^0(t,x,\varepsilon),\ \beta_1^0(\varepsilon)\}, \quad V^0 \div \{v^0(t,x,\varepsilon),\ \beta_2^0(\varepsilon)\}, \tag{2.5}$$

$$u^0\left(t,x,\varepsilon\right)=\begin{cases} u^*\left(t,\varepsilon\right), & \text{если } \|x-x^*(t)\|<\varepsilon\varphi\left(t\right), \\ u^{(2)}(t,x,\varepsilon), & \text{если } \|x-x^*(t)\|\geq\varepsilon\varphi\left(t\right), \end{cases} \tag{2.6}$$

$$v^0\left(t,x,\varepsilon\right)=\begin{cases} u^*\left(t,\varepsilon\right), & \text{если } \|x-x^*(t)\|<\varepsilon\varphi\left(t\right), \\ v^{(1)}(t,x,\varepsilon), & \text{если } \|x-x^*(t)\|\geq\varepsilon\varphi\left(t\right) \end{cases}$$

для всех $t\in[t_0,\vartheta],\varepsilon>0$. В (2.4)-(2.5) через $u^*(t,\varepsilon),\ v^*(t,\varepsilon)$ обозначены семейства программных управлений, порождающих траекторию $x^*(t)$. Функция $\varphi(\cdot)$ вместе с функциями $\beta_1^0(\cdot)$ и $\beta_2^0(\cdot)$ выбирается таким образом, что ломаные Эйлера, порожденные парой (U^0,V^0) из начальной позиции (t_0,x_0), не выходят за пределы $\varepsilon\varphi(t)$ -окрестности траектории $x^*(t)$. Функции $u^{(2)}(\cdot,\cdot,\cdot)$ и $v^{(1)}(\cdot,\cdot,\cdot)$ определены в (2.3).

Далее, из [1] следует, что для каждой NE- и, в частности, P^*- траектории $x^*(t)$ имеет место следующее свойство: точка $t=\vartheta$ является точкой максимума функции гарантированного выигрыша $\gamma_i(t,x)$ игрока i, вычисленной вдоль этой траектории, то есть

$$\max_{t\in[t_0,\vartheta]} \gamma_i(t,x^*(t)) = \gamma_i(\vartheta,x^*(\vartheta)),\ i=1,2. \tag{2.7}$$

3. Типы поведения игроков

Дополнительно предполагаем, что помимо обычного, *нормального* (*nor*), типа поведения, ориентированного на максимизацию собственных функционалов выигрыша (1.2), игроки могут использовать другие типы поведения, например, введенные в работах [2,7]. А именно, это следующие типы: *альтруистический* («чем лучше моему партнеру, тем лучше мне»), *агрессивный* («чем хуже моему партнеру, тем лучше мне») и *парадоксальный* («чем хуже мне, тем лучше мне»). Эти три типа поведения формализуются следующим образом.

Определение 3.1. *Скажем, что игрок 1 придерживается на отрезке $[t_*,t^*]$ альтруистического (alt) типа поведения по отношению к игроку 2, если на этом отрезке действия игрока 1 направлены на максимизацию функционала I_2 игрока 2.*

Определение 3.2. *Скажем, что игрок 1 придерживается на отрезке $[t_*,t^*]$ агрессивного (agg) типа поведения по отношению к игроку 2, если на этом отрезке действия игрока 1 направлены на минимизацию функционала I_2 игрока 2.*

Определение 3.3. *Скажем, что игрок 1 придерживается на отрезке $[t_*,t^*]$ парадоксального (par) типа поведения, если на этом отрезке действия игрока 1 направлены на минимизацию собственного функционала I_1.*

Аналогично определяются альтруистический и агрессивный типы поведения игрока 2 по отношению к игроку 1, а также парадоксальный тип поведения игрока 2.

Идея использования игроками переключения своего поведения с одного типа на другой по ходу игры была реализована для игры с кооперативной динамикой в работе [7] и для повторяющейся биматричной 2×2 игры в работе [6], что позволило получить новые решения в этих играх.

Распространение указанного подхода на неантагонистические позиционные дифференциальные игры приводит к новым постановкам задач. В частности, актуальной становится задача минимизации времени «ненормального» поведения при условии достижения результата, более хорошего, чем при нормальном поведении игроков.

Согласно [3] полагаем, что одновременно с выбором позиционной стратегии каждый игрок выбирает также свою индикаторную функцию, определенную на отрезке $t \in [t_0, \vartheta]$ и принимающую значение в множестве $\{nor,\ alt,\ agg,\ par\}$. Индикаторную функцию игрока i обозначим символом $\alpha_i : [t_0, \vartheta] \to \{nor, alt, agg, par\}$, $i = 1, 2$. Если индикаторная функция игрока принимает значение, скажем, alt на некотором отрезке времени, то этот игрок действует на этом отрезке как альтруист по отношению к своему партнеру.

Таким образом, в рассматриваемой игре с различными типами поведения игроков игрок 1 управляет выбором пары *действий* {позиционная стратегия, индикаторная функция}: $(U,\ \alpha_1(\cdot))$, а игрок 2 управляет выбором пары действий $(V,\ \alpha_2(\cdot))$. Далее НПДИ с типами поведения обозначаем через НПДИсТП. Заметим, что если индикаторные функции обоих игроков тождественно равны значению nor на всем отрезке игры, то имеем классическую НПДИ.

4. BT-решение игры НПДИсТП

Рассмотрим НПДИсТП с классами действий игроков 1 и 2:

$$(U,\ \alpha_1(\cdot)),\ \ (V,\ \alpha_2(\cdot)) \tag{4.1}$$

Очевидно, что множество движений, порожденных парой действий (4.1), совпадает с множеством движений, порожденных парой (U, V) в соответствующей НПДИ.

Определение 4.1. *Пара* $\{(U^0, \alpha_1^0(\cdot)), (V^0, \alpha_2^0(\cdot))\}$ *образует сильное BT-решение игры НПДИсТП, если найдется порожденная парой траектория* $x^{BT}(\cdot)$ *и найдется P^*-решение в соответствующей игре НПДИ, порождающее траекторию* $x^P(\cdot)$*, такие, что*

$$\sigma_i(x^{BT}(\vartheta)) > \sigma_i(x^P(\vartheta)),\ \ i = 1, 2. \tag{4.2}$$

Определение 4.2. *Пара* $\{(U^0, \alpha_1^0(\cdot)), (V^0, \alpha_2^0(\cdot))\}$ *образует слабое BT-решение игры НПДИсТП, если найдется порожденная парой тра-*

ектория $x^{BT}(\cdot)$ *и найдется* P^**-решение в соответствующей игре НПДИ, порождающее траекторию* $x^P(\cdot)$*, такие, что*

$$\Sigma\sigma_i(x^{BT}(\vartheta)) > \Sigma\sigma_i(x^P(\vartheta)). \tag{4.3}$$

Очевидно, что сильное BT-решение является слабым BT-решением; обратное, вообще говоря, неверно.

Задача 4.1. Найти множество (сильных и слабых) BT-решений.

Задача 4.2. Найти множество BT-решений, доставляющих минимум времени использования игроками *ненормальных* типов поведений.

Вполне ожидаемо, что использование игроками в игре НПДИсТП типов поведения, отличных от нормального, может в ряде случаев привести к исходам, более предпочтительным для них, чем в соответствующей игре НПДИ только с нормальным типом поведения.

В рассмотренных в [3] примерах был сделан акцент на использование игроками альтруистического типа поведения.

В настоящей статье приводятся два примера игры с динамикой простого движения на плоскости и фазовыми ограничениеми, в которых каждый игрок может проявлять как альтруизм так и агрессию по отношению к партнеру в течение некоторых промежутков времени; при этом допускается случай взаимной агрессии. В первом примере построены сильные BT-решения, на которых оба игрока увеличивают свой выигрыш по сравнению с игрой с нормальными типами поведения. При этом если игрокам запретить использовать агрессивный тип поведения, то BT-решений в игре не будет. Во втором примере тоже построены сильные BT-решения, однако теперь при наличии запрета на использование игроками агрессивного типа поведения BT-решения все-таки будут существовать, но они будут «порождены» с использованием только альтруистического типа поведения.

5. Пример 1

Пусть динамика (1.1) имеет вид

$$\dot{x} = u + v, \quad x, u, v \in R^2, \ \|u\| \leq 1, \ \|v\| \leq 1, \ \ 0 \leq t \leq \vartheta, \ \ x(0) = x_0, \tag{5.1}$$

а функционалы выигрыша (1.2) суть

$$I_i = 20 - \|(x(\vartheta) - a^{(i)}\|, \quad i = 1, 2, \tag{5.2}$$

то есть игрок i стремится привести точку $x(\vartheta)$ как можно ближе к своей целевой точке $a^{(i)}$.

Зададим следующие значения параметров игры:

$$\vartheta = 5.0,\ x_0 = (0, 0),\ a^{(1)} = (13.2, 11.3),\ a^{(2)} = (-13.2, 11.3). \tag{5.3}$$

В задаче имеется следующее фазовое ограничение в плоскости (x_1, x_2): траекториям системы (5.1) запрещается заходить во внутренность множества S, которое получается удалением из шестиугольника $ac_1k_1Ok_2c_2$ двухзвенной ломаной Obd (рис. 1). Множество S состоит из двух частей S_1 и S_2, то есть $S = S_1 \bigcup S_2$.

Координаты точек, задающих фазовое ограничение, следующие:

$$a = (0, 8),\ c_1 = (5.6, 6.6),\ k_1 = (5.6, 4.8),\ O = (0, 0),$$

$$k_2 = (-5.6, 4.8),\ c_2 = (-5.6, 6.6),\ b = (0, 5),\ d = (-4, 7). \tag{5.4}$$

Нетрудно проверить, что целевая точка $a^{(1)}$ является точкой пересечения двух прямых, содержащих ребра шестиугольника ac_2 и Ok_1. Аналогично, целевая точка $a^{(2)}$ является точкой пересечения продолжений ребер ac_1 и Ok_2.

Множество достижимости системы (5.1), построенное для момента $\vartheta = 5.0$, содержит точки, расположенные не выше двухзвенника k_1Ok_2 и ограниченные дугой окружности радиуса 10, а также двумя дугами, соединяющими эту окружность со сторонами ac_1 и ac_2 шестиугольника (рис. 1). Кроме того, во множество достижимости входят точки ломаной Obd, а также точки полукруга с центром в точке d и радиусом r.

Одну из точек пересечения границы множества достижимости и ребра ac_2 обозначим через h. На ребре ac_2 находим точку e, расстояние от которой до точки $a^{(1)}$ равно расстоянию от точки O до $a^{(1)}$.

Результаты приближенных вычислений следующие: $r = 0.5279$, $h = (-3.4878, 7.1281)$, $e = (-3.6574, 7.0856)$. Видно, что точка e лежит между точками d и h.

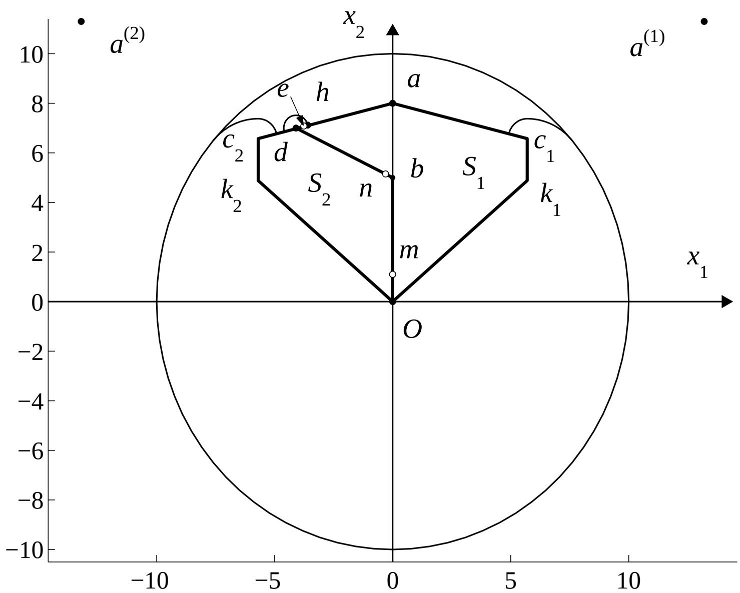

Рисунок 1. К примеру 1

Функции цены $\gamma_1(t,x)$ и $\gamma_2(t,x)$, $0 \le t \le \vartheta, x \in R^2 \backslash S$ (2.4) соответствующих вспомогательных антагонистических игр Γ_1 и Γ_2 в данном примере будут

$$\gamma_i\,(t,x) = \begin{cases} 20 - \|(x - a^{(i)}\|, & \text{если } xa^{(i)} \bigcap intS = \emptyset\,, \\ 20 - \rho_S\left(x, a^{(i)}\right), & \text{в противном случае}\,, \end{cases} \tag{5.5}$$

где $i = 1, 2$, а через $\rho_S\left(x, a^{(i)}\right)$ обозначено наименьшее из двух расстояний от точки x до точки $a^{(i)}$, одно из которых вычисляется при обходе множества S по часовой стрелке, а другое – при обходе S против часовой стрелки.

В игре НПДИ с нормальным типом поведения игроков траектория $x(t) \equiv 0$, $t \in [0,5]$ (точка O) будет нэшевской траекторией. Нетрудно проверить, что допустимые траектории, построенные вдоль ломаной Obd, нэшевскими не являются, поскольку ни для одной из них не выполняется условие (2.6). Также не являются нэшевскими и все допустимые траектории, огибающие множества S_1 и S_2 справа и слева, соответственно. В итоге получается, что упомянутая траектория является единственной нэшевской траекторией (а, следовательно, и P^*-траекторией); выигрыши игроков на ней равны $I_1 = I_2 = 2.6239$.

Перейдем теперь к игре НПДИсТП, в которой каждый игрок может проявлять агрессию по отношению к другому игроку в течение некоторых промежутков времени, причем допускается случай взаимной агрессии. Кроме того, допускается, что игроки 1 и 2 могут проявлять альтруизм по отношению к своему партнеру также в течение некоторых промежутков времени.

Найдем точку m, равноудаленную от точки $a^{(2)}$ как при обходе множества S_2 по часовой стрелке, так и при обходе S_2 против часовой стрелки. Найдем также точку n, равноудаленную от точки $a^{(1)}$ как при обходе множества S_1 по часовой стрелке, так и при обходе S_1 против часовой стрелки. Результаты вычислений: $m = (0, 1.1256)$, $n = (-0.0778, 5.0396)$.

Рассмотрим траекторию $Obdh$; выигрыши игроков на ней составляют $I_1 = 2.7976, I_2 = 9.4297$, то есть выигрыши обоих игроков на этой траектории больше, чем на единственной P^*-траектории. Как следует из вышесказанного, траектория $Obdh$ не является нэшевской. Поэтому если удастся построить соответствующие индикаторные функции-программы игроков, то тем самым будет построено сильное BT-решение.

Прежде всего отметим, что при движении по траектории $Obdh$ с максимальной скоростью при $t \in [0, 5]$, время попадания в точку m будет $t = 0.5628$, в точку n будет $t = 2.5437$, в точку d будет $t = 4.7361$. Нетрудно проверить, что при таком движении по траектории $Obdh$ на промежутке $t \in [0, 0.5628]$ обе функции $\gamma_1(t,x)$ и $\gamma_2(t,x)$ монотонно убывают; при движении на промежутке $t \in [0.5628, 2.5437]$ функция $\gamma_1(t,x)$ продолжает убывать, а функция $\gamma_2(t,x)$ возрастает; при движении на промежутке $t \in [2.5437, 4.7361]$ обе функции возрастают; наконец, на оставшемся промежутке $t \in [4.7361, 5]$ функция $\gamma_1(t,x)$ продолжает возрастать, а функция $\gamma_2(t,x)$ убывает.

Рассмотрим пару стратегий игроков $(U^{(1)}, V^{(1)})$, порождающую предельное движение $Obdh$ при $t \in [0, 5]$. И рассмотрим индикаторные функции-программы игроков $\alpha_1^{(1)}(t) = \{agg, t \in [0, 0.5628);\ alt, t \in [0.5628, 2.5437);\quad nor, t \in [2.5437, 5]\}$ и $\alpha_2^{(1)}(t) = \{agg, t \in [0, 2.5437);\quad nor, t \in [2.5437, 4.7361);\ \ alt, t \in [4.7361, 5]\}$.

Нетрудно видеть, что пара действий $\{(U^{(1)}, \alpha_1^{(1)}(\cdot)), (V^{(1)}, \alpha_2^{(1)}(\cdot))\}$ доставляет сильное BT-решение. То есть оба игрока выигрывают по сравнению с игрой с нормальным типом поведения.

Можно проверить, что траектории, порожденные всеми сильными BT-решениями, заканчиваются в точках множества D_1, состоящего из точек упоминавшегося выше полукруга с центром в точке d и радиусом r, и находящихся от точки $a^{(1)}$ на расстоянии, меньшем, чем $|ea^{(1)}|$ (на рис. 1 множество D_1 не изображено ввиду его малости. Скажем только, что полуинтервал $(eh]$ ограничивает это множество снизу).

Нетрудно показать, что при наличии запрета на использование игроками агрессивного типа поведения BT-решения в игре не существуют.

6. Пример 2

В примере 2 динамика игры задаются снова, как и в примере 1, уравнением (5.1), функционалы выигрыша игроков задаются формулами (5.2), а значения параметров игры – выражениями (5.3).

Единственное отличие примера 2 от примера 1 состоит в том, что сторона c_1k_1 многоугольника S_1, входящего в множество S, задающее фазовое ограничение в примере 1 (см. рис. 1), занимает теперь положение c_3k_3, где $c_3 = (4, 7),\ k_3 = (4, 3.4242)$ (рис. 2). Можно проверить, что точки c_3 и k_3 на рис. 2, как и точки c_1 и k_1 на рис. 1, лежат на прямых $aa^{(2)}$ и $Oa^{(1)}$, соответственно.

Множество достижимости в примере 2 отличается от своего аналога в примере 1 только тем, что дуга, соединяющая окружность радиуса 10 со стороной ac_3 оказывается несколько смещенной .

Точку пересечения границы множества достижимости и ребра ac_3 обозначим через g. На ребре ac_3 находим точку l, расстояние от которой до точки $a^{(2)}$ равно расстоянию от точки O до $a^{(2)}$. Результаты вычислений показывают, что $g = (2.8751, 7.2812), l = (3.4644, 7.1339)$. Видно, что точка l лежит между точками c_3 и g.

Функции цены $\gamma_1(t, x)$ и $\gamma_2(t, x)$ вспомогательных антагонистических игр Γ_1 и Γ_2 снова вычисляются по формулам (5.5).

В игре НПДИ с нормальным типом поведения игроков траектория $x(t) \equiv 0,\ t \in [0, 5]$ (точка O), как и в примере 1, будет единствен-

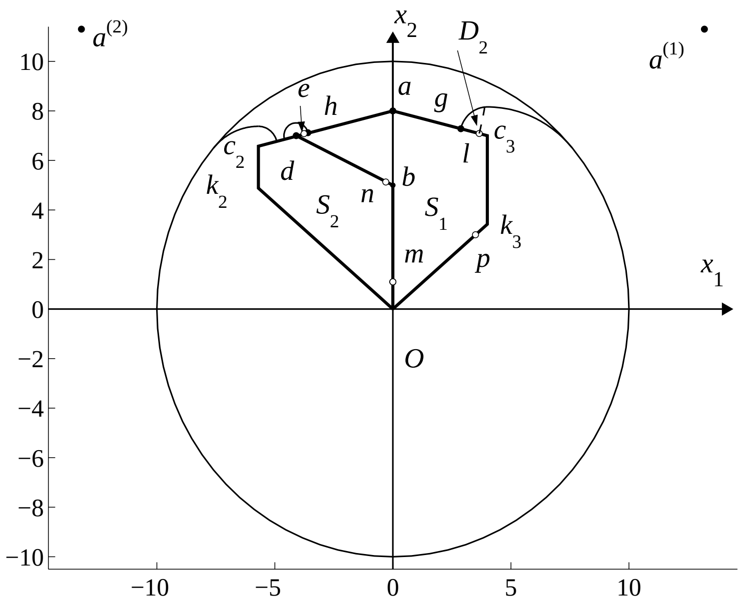

Рисунок 2. К примеру 2

ной нэшевской траекторией (а, следовательно, и P^*- траекторией); выигрыши игроков на ней равны $I_1 = I_2 = 2.6239$.

Переходя к игре НПДИсТП, рассматриваем два варианта. В первом варианте допускаем, что игроки 1 и 2 могут проявлять альтруизм по отношению к своему партнеру в течение некоторых промежутков времени. Во втором варианте помимо допущения об альтруизме игроков дополнительно предполагаем, что каждый игрок может проявлять агрессию по отношению к другому игроку в течение некоторых промежутков времени, причем допускается случай взаимной агрессии.

В рамках первого варианта рассмотрим траекторию Ok_3c_3g; выигрыши игроков на ней составляют $I_1 = 2.7976, I_2 = 9.4297$, то есть оба игрока выигрывают больше, чем на единственной P^*- траектории. Как следует из вышесказанного, траектория $Obdh$ не является нэшевской. И если удастся построить соответствующие индикаторные функции-программы игроков, то тем самым будет построено сильное BT-решение.

На стороне Ok_3 найдем точку p, равноудаленную от точки $a^{(2)}$

как при обходе множества S по часовой стрелке, так и при обходе S против часовой стрелки. В результате получим $p = (3.4921, 2.9895)$.

Отметим, что если двигаться по траектории Ok_3c_3g с максимальной скоростью при $t \in [0, 5]$, то время попадания в точку p будет $t = 2.2985$, в точку c_3 будет $t = 4.4202$. При этом нетрудно проверить, что при движении на промежутке $t \in [0, 2.2985]$ функция $\gamma_1(t, x)$ монотонно возрастает, а функция $\gamma_2(t, x)$ убывает; при движении на промежутке $t \in [2.2985, 4.4202]$ обе функции $\gamma_1(t, x)$ и $\gamma_2(t, x)$ монотонно возрастают; наконец, на оставшемся промежутке $t \in [4.4202, 5.0]$ функция $\gamma_2(t, x)$ продолжает возрастать, а функция $\gamma_1(t, x)$ убывает.

Рассмотрим пару стратегий игроков $(U^{(2)}, V^{(2)})$, порождающую предельное движение Ok_3c_3g при $t \in [0, 5]$. И рассмотрим индикаторные функции-программы игроков $\alpha_1^{(2)}(t) = \{nor, t \in [0, 4.4202);$ $alt, t \in [4.4202, 5]\}$ и $\alpha_2^{(2)}(t) = \{alt, t \in [0, 2.2985);\ \ nor, t \in [2.2985, 5]\}$. Нетрудно видеть, что пара действий $\{(U^{(2)}, \alpha_1^{(2)}(\cdot)), (V^{(2)}, \alpha_2^{(2)}(\cdot))\}$ доставляет сильное BT-решение. То есть оба игрока выигрывают по сравнению с игрой с нормальным типом поведения.

Можно проверить, что траектории, порожденные всеми сильными BT-решениями в первом варианте, заканчиваются в точках множества D_2, состоящего из точек круга с центром в точке c_3, входящих в множество достижимости, и находящихся на расстоянии от точки $a^{(2)}$, меньшем, чем $|la^{(2)}|$ (см. рис. 2).

Во втором варианте помимо предположения об альтруизме игроков дополнительно предполагается, что игроки могут использовать агрессивный тип поведения. Поэтому, с учетом того, что левые части рисунков 1 и 2 тождественны, получаем, что всё, касающееся BT-решений, построенных в примере 1 (напомним, что в примере 1 все траектории, порожденные BT-решениями, заканчиваются в точках множества D_1, включающего и точку h), переносится и на пример 2. То есть все BT-решения из примера 1 являются также BT-решениями и во втором варианте примера 2. В частности, пара действий $\{(U^{(1)}, \alpha_1^{(1)}(\cdot)), (V^{(1)}, \alpha_2^{(1)}(\cdot))\}$ доставляет сильное BT-решение; порожденная решением траектория приводит в точку h.

В то же время, в отличие от примера 1, в примере 2 при допущении только альтруистического типа поведения имеются другие BT-

решения, а именно, все BT-решения, полученные в первом варианте игры и порождающие траектории, заканчивающиеся в точках множества D_2. В частности, пара действий $\{(U^{(2)}, \alpha_1^{(2)}(\cdot)), (V^{(2)}, \alpha_2^{(2)}(\cdot))\}$ доставляет сильное BT-решение; порожденная решением траектория приводит в точку g.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Клейменов А.Ф. *Неантагонистические позиционные дифференциальные игры.* Екатеринбург: Наука, 1993.

2. Клейменов А.Ф. *О решениях в неантагонистической позиционной дифференциальной игре* // Прикладная математика и механика. 1997. Т. 61, вып. 5. С. 739–746.

3. Клейменов А.Ф. *Альтруистическое поведение в неантагонистической позиционной дифференциальной игре* // Математическая теория игр и ее приложения. 2015. Т. 7, вып. 4. С. 40–55.

4. Красовский Н.Н., Субботин А.И. *Позиционные дифференциальные игры.* М.:Наука, 1974.

5. Красовский Н.Н. *Управление динамической системой.* М.:Наука, 1985.

6. Kleimenov A.F. *An Approach to Building Dynamics for Repeated Bimatrix* 2×2 *Games Involving Various Behavior Types* // In: *Dynamic and Control*, (Leitman G., ed), London: Gordon and Breach, 1998. P. 195–204.

7. Kleimenov A.F., Kryazhimskii A.V. *Normal Behavior, Altruism and Aggression in Cooperative Game Dynamics* // Interim Report IR-98-076, Laxenburg: IIASA, 1998.

AGGRESSIVE BEHAVIOR IN A NON-ANTAGONISTIC POSITIONAL DIFFERENTIAL GAME

Anatolii F. Kleimenov, IMM UrO RAN, Dr.Sc., leading researcher (kleimenov@imm.uran.ru).

Abstract: The present article is a continuation of the paper [3], in which the formalization of non-antagonistic positional differential two-person games (NPDG) was offered for the case of using different types of behavior of players (in short – NPDGwBT). It was assumed that each player in addition to the usual, *normal* (*nor*) type of behavior, oriented the maximization of their own functional, can use other types of behavior imposed in [1,2]. In particular, it is - *altruistic* (*alt*), *aggressive*(*agg*) and *paradoxical*(*par*) types. It was assumed that in the course of the game players can perform switch their behavior from one type to another. Note that the use of such switches in a repeated bimatrix 2×2 game allowed in the works [6,7] to obtain new solutions of this game. The actions' formalization in the NPDGwBT as set out in [3], based on the formalization and the results of the general theory of antagonistic positional differential games [4,5]. It is assumed that in an NPDGwBT each player simultaneously with a choice of positional strategy chooses also his own function indicator defined on the whole interval of the game and taking values in the set $\{nor, alt, agg, par\}$. The indicator function shows the dynamics of changes in player' behavior type, which adheres to this player. The definitions of strong and weak BT-solutions of the game NPDGwBT were given in [3]. Expectedly, that the using behavior types which differ from normal one (so-called *abnormal* types), in some cases, may lead in NPDGwBT to more favorable outcomes for the players than in the NPDG. In the examples discussed in [3], emphasis was placed on the use of altruistic behavior by players. This article presents two examples of games with the dynamics of a simple motion on a plane and phase constraints in which each player can choose in addition to altruistic also aggressive behavior towards a partner for certain periods of time; the case of mutual aggression, not excluded. In the first example, we built strong BT-solutions in which the payoffs of both players are increased, in comparison with the game with normal type of behavior. If players are to prohibit use of an aggressive type of behavior, BT-solutions in the game will not exist. In the second example, we built strong BT-solutions also, but now in the presence of the ban on the use of aggressive behavior type, BT-solutions still will exist, but they will be generated using only the type of altruistic behavior.

Keywords: non-antagonistic positional two-person differential game, terminal cost functionals, behavior types of players, altruistic type, solutions of Nash type.