

УДК 517.977.8 + 519.834

ББК 22.18

ТЕОРЕТИКО-ИГРОВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНТРАКТА ПО ИСПОЛНЕНИЮ ПРОЕКТА

НИКОЛАЙ А. ЗЕНКЕВИЧ*

Санкт-Петербургский государственный Университет
198504, Санкт-Петербург, Университетский пр., 35
e-mail: zenkevich@gsom.pu.ru

ЮРИЙ С. СОКОЛОВ

Университета Мемфиса
Memphis, TN, 38152, USA
e-mail: ysokolov@memphis.edu

МАРИЯ В. ФАТТАХОВА*

Санкт-Петербургский государственный Университет
Аэрокосмического приборостроения
190000, Санкт-Петербург, ул. Б. Морская, д. 67
e-mail: mvfa@yandex.ru

В статье исследованы двухэтапные теоретико-игровые модели контракта по исполнению проекта со случайной продолжительностью работ, когда на первом шаге центр заключает с каждым из подрядчиков контракт на выполнение работы, в котором он определяет размер и режим выплаты, а на втором шаге подрядчики выбирают интенсивность выполнения своей работы. Оценены оптимальные размеры выплат и ожидаемое

время выполнения проекта. Проведено численное моделирование характеристик оптимального контракта для каждого режима выплат. Сравнительный анализ результатов численного моделирования показал, что управляющему проектом (центру) выгодно выбирать контракт для подрядчиков с различными выплатами и режимом выплаты по окончании работы.

Ключевые слова: проект, работа, менеджер проекта (центр), подрядчик, контракт по исполнению проекта, режим выплаты, размер выплаты, время окончания проекта, двухшаговая игра, равновесие по Штакельбергу.

1. Введение

На сегодняшний день теория управления проектами является интенсивно развивающейся областью общей теории управления социально-экономическими системами, результаты исследований в которой находят широкое применение на практике [1]. Традиционный подход к управлению проектами основан на использовании моделей календарно-сетевое управление и методе критического пути для их решения. Этот подход программно реализован в системах типа PERT/COST (PERT – Program Evaluation Review Technique) и позволяет находить оптимальную последовательность операций с точки зрения потраченного времени и затрат на выполнение проекта в целом. В настоящее время эта техника развита для случайно распределенного времени выполнения отдельных операций и проекта в целом (см. [7,8,10]). Однако данная техника не учитывает влияние мотивации отдельных участников на выполнение отдельных работ и проекта в целом. Поэтому последнее время все большее внимание в процессе управления проектом уделяется контрактным отношениям и их моделированию как альтернативному подходу [2, 6]. Задача управления проектом в условиях контрактных отношений значительно усложняется, если время завершения работ является случайной величиной. Одной из первых работ в этом направлении была статья Гутериза и Пауэла [11]. Сравнивая математическое ожидание и дисперсию времени завершения проекта в случаях, когда все работы проекта назначены одному подрядчику или нескольким, они нашли условия, при которых одна структура доминирует другую. Однако теория оптимального

контракта по исполнению проекта в настоящее время еще не разработана. В статье исследована модель контракта, впервые предложенная Квоном, Липманом, Маккардлом и Тангом [9]. В этой работе авторы исследовали двухэтапную теоретико-игровую модель исполнения проекта с одинаковыми подрядчиками и экспоненциально распределенным временем выполнения работ, для которой им удалось оценить оптимальные размеры выплат по контракту при режимах выплат по окончании работы или проекта в целом [9]. Данная модель развита нами на случай различных выплат в зависимости от очередности выполнения работы и проведено количественное моделирование результатов для всех возможных режимов выплаты подрядчикам. Сравнительный анализ результатов моделирования показал, что исполнителю проекта выгодно выбирать контракт для подрядчиков с различными выплатами и режимом выплаты по окончании работы.

2. Модель контракта по исполнению проекта с одинаковыми выплатами

2.1. Описательная постановка задачи

Управляющий проектом (центр) получает от заказчика проект, состоящий из $n \geq 2$ работ. Данные работы технологически независимы и могут выполняться одновременно. Стоимость проекта для центра равна величине Q , которую он получает после исполнения проекта.

Для исполнения проекта центр нанимает n подрядчиков и назначает каждого из них на одну работу. Центр заключает с каждым подрядчиком контракт на выполнение назначенной работы, в котором он определяет размер и режим выплаты. Для простоты будем предполагать, что трудоемкость всех работ одинакова, поэтому центр оплачивает их выполнение выплатами одинакового размера. Возможные варианты режимов выплат: в момент окончания работы или в момент исполнения проекта. Согласно первому режиму выплат подрядчик получает оплату сразу по завершению своей работы. При режиме выплат в момент исполнения проекта каждый подрядчик получит свою оплату только после того, когда все работы проекта будут выполнены. Если подрядчик согласен с размером и режимом выплаты, то он выбирает интенсивность выполнения своей работы. Дру-

гими словами, контракт представляет собой двухэтапную теоретико-игровую модель Штакельберга, в которой игроки последовательно выбирают свои стратегии. На первом этапе управляющий проектом определяет размер и режим выплат, а на втором – подрядчики выбирают интенсивности выполнения своих работ.

Предполагается, что время завершения работы является случайной величиной, распределенной по экспоненциальному закону. Данное предположение широко распространено в управлении проектами [1, 2, 5, 6, 7, 8].

На первом этапе подрядчики получают от центра контракт на выполнение работ и начинают исполнять свои работы одновременно. Поэтому момент начала выполнения всех проектных работ совпадает и является моментом начала исполнения проекта.

2.2. Решение модели контракта с выплатами по окончанию работ

Сначала рассмотрим контракт с режимом выплат по окончании работы, когда подрядчик (игрок) i получает выплату сразу по завершению своей работы.

Будем предполагать, что время выполнения работы X_i является случайной величиной, распределенной по экспоненциальному закону с параметром $r_i > 0$, представляющим собой интенсивность выполнения работы подрядчиком i , выбранную им в момент начала исполнения проекта ($t = 0$). Работы проекта выполняются параллельно, поэтому время завершения исполнения проекта $T = \max\{X_1, \dots, X_n\}$.

Будем предполагать, что каждый подрядчик не владеет информацией относительно состояния выполнения других работ. В силу свойства отсутствия последействия экспоненциального распределения получаем, что для каждого подрядчика оптимально продолжать работать с первоначально выбранной интенсивностью до завершения своей работы [10, 11, 12].

Обозначим через $\alpha > 0$ ставку дисконтирования, через $\beta(r_i)$ – коэффициент дисконтирования, связанный со случайной величиной X_i , и определим его, как

$$\beta(r_i) = E(e^{-\alpha X_i}) = \int_0^{\infty} r_i e^{-(r_i + \alpha)t} dt = \frac{r_i}{r_i + \alpha}, i = \overline{1, n}. \quad (2.1)$$

Аналогично определим связанный с продолжительностью проекта T коэффициент дисконтирования $\beta_n(r_1, \dots, r_n) = E(e^{-\alpha T})$. Поскольку функция распределения X_i имеет вид $F_i(t) = 1 - e^{-r_i t}$, то распределение времени завершения проекта T будет иметь вид $F(t) = \prod_{i=1}^n F_i(t)$. Тогда коэффициент дисконтирования для времени исполнения проекта в целом находится по формуле: $\beta_n(r_1, \dots, r_n) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} d[F(t)] = \alpha \int_0^\infty e^{-\alpha t} F(t) dt$, где последнее равенство может быть получено интегрированием по частям.

Будем предполагать, что расходы подрядчика (игрока) i в единицу времени при интенсивности r_i имеют вид $K_i(r_i) = k_i r_i^2$, где $k_i \in [0, 2k]$ – независимые равномерно распределенные случайные величины, $i = \overline{1, n}$. Так же будем предполагать, что каждому игроку известна лишь равномерная функция распределения параметров $k_i \in [0, 2k]$, $i = \overline{1, n}$. Тогда ожидаемые затраты подрядчика i будут $E\left(\int_0^{X_i} K_i(r_i) dt\right) = r_i k$.

Из вида функции β_n следует, что коэффициент дисконтирования $\beta_n(r_1, \dots, r_n)$ обладает следующими свойствами:

1. $\beta_n(r_1, \dots, r_n) \leq \beta(r_i)$, для $i = \overline{1, n}$;
2. функция $\beta_n(r_1, \dots, r_n)$ – возрастает и вогнута по r_i , для всех $i = \overline{1, n}$;
3. $\frac{\partial^2 \beta_n(r_1, \dots, r_n)}{\partial r_i \partial r_j} > 0$, для $i \neq j$;
4. если $r_i = r$, для всех $i = \overline{1, n}$, то $\beta_n(r_1, \dots, r_n) = \prod_{j=1}^n \frac{jr}{jr+\alpha}$ [9].

Определим функции выигрыша игроков. Функция выигрыша подрядчика i выглядит следующим образом:

$$\pi_i^N(p, r_i) = \beta(r_i)(p - kr_i) , \tag{2.2}$$

где p – размер выплаты при выполнении работы, $i = \overline{1, n}$. Верхний индекс N , будем использовать для обозначения режима выплаты по окончанию работы.

Каждому подрядчику i имеет смысл входить в команду по исполнению проекта при режиме выплат по окончанию работы только

если выполняется условие:

$$\max_{r_i} \pi_i^N(p, r_i) > 0. \quad (2.3)$$

Функция выигрыша центра имеет вид

$$\pi_c^N(p, Q) = Q\beta_n(r_1, \dots, r_n) - p \sum_{i=1}^n \beta(r_i), \quad (2.4)$$

где $Q > 0$ – доход от проекта, получаемый центром от заказчика, за исполнение всего проекта. В дальнейшем (для упрощения записи) будем также использовать обозначение $Q = nq$, где q может быть интерпретировано как доход от выполнения одной работы. Центр будет входить в команду по исполнению проекта, если выполняется условие $\pi_c^N(Q) = \max_p \pi_c^N(p, Q) > 0$.

Решение на втором шаге и его свойства следуют из теорем 2.1 и 2.2 [9].

Теорема 2.1. Для фиксированного $p > 0$, функция выигрыша $\pi_i^N(p, r_i)$ подрядчика i вогнута по r_i , при этом оптимальное значение производительности выражается как:

$$r_i^N(p) \equiv r^N(p) = \alpha \left(\sqrt{1 + \frac{p}{\alpha k}} - 1 \right), \quad (2.5)$$

а максимальное значение его функции выигрыша равно

$$\pi_i^N(p) \equiv \pi_i^N(p, r_i^N(p)) = k\alpha \left(\sqrt{1 + \frac{p}{\alpha k}} - 1 \right)^2, i = \overline{1, n}. \quad (2.6)$$

Теорема 2.2. Для фиксированного $p > 0$ ожидаемая продолжительность исполнения проекта при режиме выплат по окончанию работы имеет вид:

$$E(T^N(p, n)) = \frac{1}{r^N(p)} (\psi(n+1) - \psi(1)), \quad (2.7)$$

где $\psi(x)$ – пси-функция [4]. При этом функция $E(T^N(p, n))$ возрастает по n и убывает по $p > 0$.

Из (2.1)–(2.2) следует, что поведение подрядчика определяется значением параметра $p > 0$. Оптимальное поведение управляющего проектом заключается в максимизации функции (2.4) по $p > 0$ в предположении (2.5). Данная задача может быть решена только численно.

2.3. Решение модели в случае выплат по окончанию проекта

При данном режиме выплат подрядчик получает оплату, когда все работы проекта выполнены. Поэтому дисконтированная прибыль каждого подрядчика зависит от интенсивности работы всех подрядчиков. Будем предполагать, что каждый подрядчик не наблюдает состояние выполнения работ другими подрядчиками.

Введем функции выигрышей игроков при данном режиме выплат. Функция выигрыша подрядчика i имеет вид:

$$\pi_i^D(p, r_1, \dots, r_n) = \beta_n(r_1, \dots, r_n)p - \beta(r_i)r_ik, i = \overline{1, n}. \quad (2.8)$$

Верхний индекс D будем использовать для обозначения режима выплаты по исполнению проекта.

Функция выигрыша центра выражается как

$$\pi_c^D(p, Q) = \beta_n(r_1, \dots, r_n)(Q - np). \quad (2.9)$$

Решение на втором шаге и его свойства следуют из леммы 2.1 и теорем 2.3 и 2.4 [9].

Лемма 2.1. *Для фиксированного набора $r_{-i} = (r_1, \dots, r_{i-1}, r_{i+1}, \dots, r_n)$, функция выигрыша подрядчика $\pi_i^D(p, r_1, \dots, r_n)$ вогнута по r_i . При этом наилучший ответ подрядчика $r_i^* = \arg \left\{ \max_{r_i} \pi_i^D(p, r_1, \dots, r_n) \right\}$ возрастает по r_j , где $j \neq i$.*

Теорема 2.3. *На втором шаге игры не существует несимметричного равновесия по Нэшу. Однако, существует такое число p_n , что при $p > p_n$ существует симметричное равновесие по Нэшу, при котором производительность подрядчиков определяется из уравнения*

$$\frac{\alpha p}{r^2} B\left(\frac{r + \alpha}{r}, n\right) \left(\psi\left(\frac{r + \alpha}{r} + n\right) - \psi\left(\frac{r + \alpha}{r}\right) \right) = \frac{r(r + 2\alpha)}{k(r + \alpha)^2}. \quad (2.10)$$

При этом равновесие по Нэшу с наибольшим решением $r^D(n, p) > 0$ уравнения (2.10) и соответствующий ему ожидаемый дисконтированный выигрыш $\pi_i^D(n, p)$ подрядчика убывают по n .

Теорема 2.4. *Ожидаемое время продолжительности исполнения проекта при режиме выплат по окончанию проекта имеет вид*

$$E(T^D(p)) = \frac{1}{r^D(n, p)} (\psi(n+1) - \psi(1)). \quad (2.11)$$

Из представленных результатов видно, что равновесное поведение подрядчика и его характеристики можно рассчитать только численно. Оптимальное поведение управляющего проектом, в свою очередь, заключается в численной оптимизации по $p > 0$ функции (2.8) в условиях равновесного поведения подрядчиков, определяемого уравнением (2.10).

3. Модель контракта при различных выплатах

3.1. Модель в случае различных выплат

Рассмотрим модель контракта с режимом выплат по окончании работ для случая $n = 2$, в которой порядок завершения работы оговорен в контракте и влияет на размер выплаты.

Центр предлагает двум подрядчикам контракт на выполнение работы проекта, согласно которому выплаты будут осуществляться по окончании работы, но размер выплат зависит от порядка выполнения работы. Согласно контракту, центр платит величину p_a подрядчику, который закончил работу первым, и величину p_b тому, кто закончил работу вторым. Предположим, что $p_a > p_b$ и рассмотрим случай с информацией об окончании работ.

В разделе 2.2 подрядчики по выполнению работы получали одинаковые выплаты и их выигрыш зависел только от собственной интенсивности выполнения работы. В случае различных выплат центра в зависимости от очередности окончания работ, оставшемуся подрядчику имеет смысл изменять свою интенсивность.

Пусть в начальный момент $t = 0$ подрядчик i начинает выполнять свою работу с интенсивностью $r_i^{(1)}$. Время выполнения работы X_i – экспоненциально распределенная случайная величина с параметром

$r_i^{(1)}$, $i = 1, 2$. В момент $t_1 = \min\{X_1, X_2\}$ один из подрядчиков выполнит свою работу, а оставшийся подрядчик изменит свою интенсивность на $r_i^{(2)}$ и завершит выполнение своей работы через случайное время t_2 , которое экспоненциально распределено с параметром $r_i^{(2)}$. Поэтому время исполнения проекта есть $T = t_1 + t_2$.

Как и ранее функция затрат $K_i(r_i)$ подрядчика в единицу времени при интенсивности $r_i^{(j)}$ равна $K_i(r_i^{(j)}) = k_i (r_i^{(j)})^2$, где $k_i \in [0, 2k]$ – независимые равномерно распределенные случайные величины.

3.2. Решение модели в случае различных выплат

Рассмотрим игру, начиная с момента t_1 . Оставшийся подрядчик выбирает производительность $r_i^{(2)}$ и получает выплату p_b по завершению своей работы. Ожидаемые затраты подрядчика i на втором этапе равны $E \left(\int_0^{X_i} K_i(r_i^{(2)}) dt \right) = r_i^{(2)} k$. Поэтому выигрыш подрядчика, дисконтированный к моменту t_1 , есть величина

$$v_i(p_b, r_i^{(2)}) = \beta(r_i^{(2)}) (p_b - r_i^{(2)} k), \quad (3.1)$$

где $\beta(r_i^{(2)})$ – коэффициент дисконтирования (2.1).

По теореме 2.1 оптимальная производительность на втором этапе оставшегося подрядчика выражается как

$$r^{(2)}(p_b) = \alpha \left(\sqrt{1 + \frac{p_b}{\alpha k}} - 1 \right), \quad (3.2)$$

а соответствующий его максимальный выигрыш для (3.1) равен

$$v_i^*(p_b, r^{(2)}(p_b)) = \frac{1}{\alpha k} (r^{(2)}(p_b))^2. \quad (3.3)$$

Перейдем к рассмотрению первого этапа игры, начинающегося с момента $t = 0$. На этом этапе функция выигрыша подрядчика i зависит от времени завершения работ обоими подрядчиками.

Рассмотрим игру с точки зрения первого подрядчика. По условию $t_1 = \min\{X_1, X_2\}$. Поэтому t_1 – экспоненциально распределенная случайная величина с параметром $(r_1^{(1)} + r_2^{(2)})$. На данном этапе возможны две альтернативы: либо подрядчик 1 выполнит свою работу первым, либо нет. Вероятности этих событий равны $P\{X_1 < X_2\} =$

$\frac{r_1^{(1)}}{r_1^{(1)}+r_2^{(1)}}$ и $P\{X_2 < X_1\} = \frac{r_2^{(1)}}{r_1^{(1)}+r_2^{(1)}}$, соответственно. Поэтому выигрыш подрядчика 1 на данном этапе имеет вид

$$\begin{aligned} \pi_1^{ND} (p_a, r_1^{(1)}, r_2^{(1)}) &= \beta_2 (r_1^{(1)}, r_2^{(1)}) \left(\frac{r_1^{(1)}}{r_1^{(1)} + r_2^{(1)}} p_a + \right. \\ &\quad \left. + \frac{r_2^{(1)}}{r_1^{(1)} + r_2^{(1)}} v_i^* (p_b, r^{(2)}(p_b)) - E \left(\int_0^{t_1} K_1 (r_1^{(1)}) dt \right) \right) = \\ &= \frac{r_1^{(1)}}{r_1^{(1)} + r_2^{(1)} + \alpha} p_a + \frac{r_2^{(1)}}{r_1^{(1)} + r_2^{(1)} + \alpha} v_i^* (p_b, r^{(2)}(p_b)) - \frac{k (r_1^{(1)})^2}{r_1^{(1)} + r_2^{(1)} + \alpha}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Аналогично получаем для второго подрядчика:

$$\begin{aligned} \pi_2^{ND} (p_a, r_1^{(1)}, r_2^{(1)}) &= \frac{r_2^{(1)}}{r_1^{(1)} + r_2^{(1)} + \alpha} p_a + \\ &\quad + \frac{r_1^{(1)}}{r_1^{(1)} + r_2^{(1)} + \alpha} v_i^* (p_b, r^{(2)}(p_b)) - \frac{k (r_2^{(1)})^2}{r_1^{(1)} + r_2^{(1)} + \alpha}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Теорема 3.1. *Для фиксированных $p_a > p_b > 0$, существует единственное равновесие по Нэшу, при котором подрядчики на первом этапе выполняют свои работы с одинаковой производительностью*

$$r^{(1)} = \frac{-k\alpha + \sqrt{k^2\alpha^2 + 2\alpha k (p_a + v^*(p_b, r^{(2)}(p_b)))}}{4k}, \quad (3.6)$$

а на втором этапе оставшийся подрядчик завершает работу с производительностью (3.2), где v^* определяется (3.3).

При этом функция выигрыша центра примет вид:

$$\begin{aligned} \pi_c^{ND} (Q, p_a, p_b) &= \beta_2 (r^{(1)}, r^{(1)}) (\beta (r^{(2)}) (Q - p_b) - p_a) = \\ &= (Q - p_b) \frac{2r^{(1)}r^{(2)}}{(2r^{(1)} + \alpha)(r^{(2)} + \alpha)} - p_a \frac{2r^{(1)}}{2r^{(1)} + \alpha}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

4. Количественное моделирование оптимальных контрактов

4.1. Примеры численного моделирования контрактов с одинаковыми выплатами

Рассмотрим проект, состоящий из двух работ. Численные данные для этого примера были подобраны для демонстрации зависимости оптимального поведения от исходных значений параметров.

На рис. 1 приведены графики оптимальных выплат при различных значениях ставки дисконтирования. Из графиков а), б), в) рис. 1 видно, что данный параметр оказывает существенное влияние на поведение управляющего проектом. Например, при $\alpha = 4.6$ и цене за исполнение проекта $Q < 10$, для него оптимально будет отказаться от проекта.

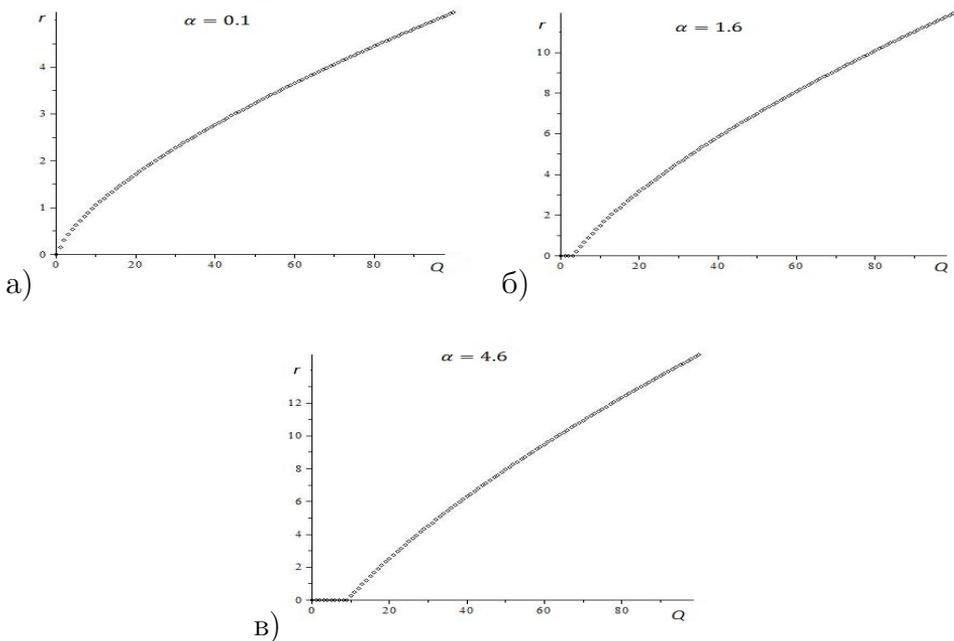


Рисунок 1. Влияние ставки дисконтирования $\alpha = \{0.1, 1.6, 4.6\}$ на оптимальные выплаты $r^N(Q)$, как функции от стоимости проекта

Рассмотрим далее графики зависимости оптимальных выплат подрядчику, как функции от верхней границы k промежутка возможных значений параметра функции затрат подрядчика.

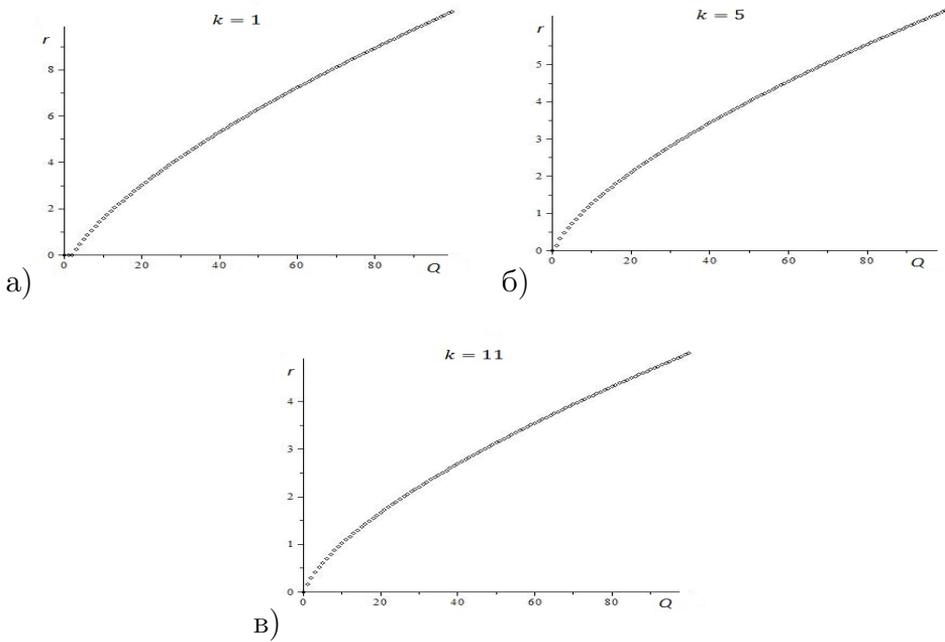


Рисунок 2. Влияние параметра $k = \{1, 5, 11\}$ на размер оптимальных выплат $r^N(Q)$, как функции от стоимости проекта

Из графиков а), б), в) на рис. 2 видно, что при возрастании параметра k , оптимальный размер выплат сокращается, но общая зависимость от стоимости Q проекта сохраняется.

Перейдем теперь к сравнению режимов выплат по окончании работы и по окончании проекта. Рассмотрим численный пример при следующих значениях параметров: $q = 50$, $\alpha = 1$, $k = 1$.

На рис. 3 изображены графики зависимости интенсивности подрячика $r(p)$ для различных режимов выплат. Из графика видно, что при выплате $p < 0.99$ подрядчик будет входить в команду по исполнению проекта только при режиме выплат по окончании работы. Значения интенсивности при режиме выплат по окончании работы доминируют значения интенсивности при режиме выплат по исполнению проекта. Отсюда, в частности следует, что время исполнения проекта будет меньше при выплатах по окончании работы.

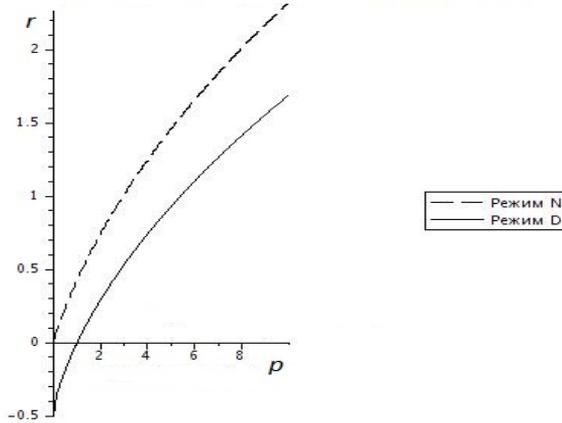


Рисунок 3. График зависимости производительности $r(p)$ от размера выплаты $p > 0$

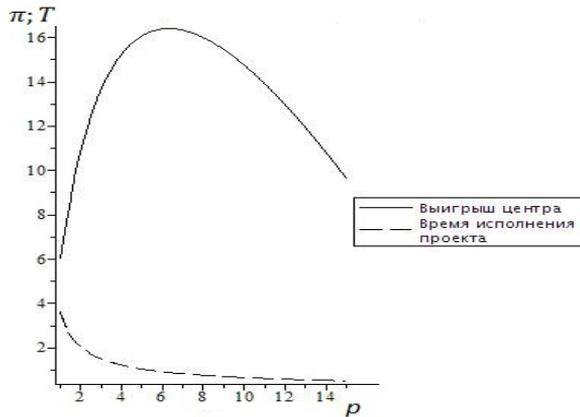


Рисунок 4. График функции выигрыша $\pi_C^N(p)$ управляющего проектом и ожидаемого времени исполнения проекта $E(T^N(p, 2))$ при выплатах по окончании работы

Из графика на рис. 4 следует, что существует размер выплаты p^* , при которой функция выигрыша достигает максимума. Заметим также, что ожидаемое время исполнения проекта $E(T^N(p, 2))$ резко убывает при увеличении размера выплаты p .

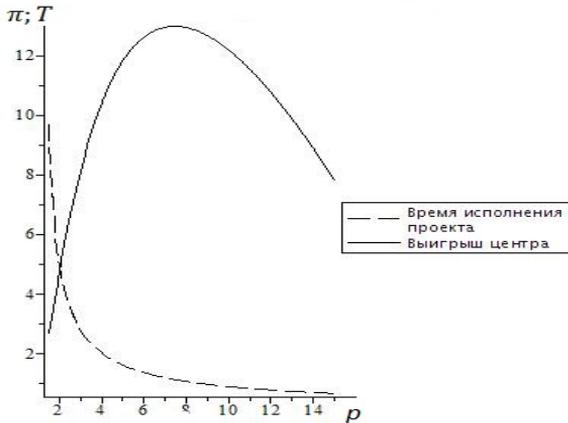


Рисунок 5. График функции выигрыша центра $\pi_C^D(p)$ и ожидаемого времени исполнения проекта $E(T^D(p, 2))$ при выплатах по окончанию проекта (режим D)

Общий вид графиков на рис. 4 и 5 схожи, но значение максимума выигрыша центра и значение выплаты, на котором оно достигается, больше при режиме N . Поэтому центру и подрядчикам выгодней заключать контракт с режимом N .

4.2. Случай полной информации с режимом выплат по окончании проекта

Приведем пример численного моделирования оптимального поведения участников при режиме D с информацией об окончании работ и анализ чувствительности размера оптимальных выплат от параметров модели.

При режиме выплат N каждый подрядчик получает выплату сразу по завершению своей работы и его выигрыш не зависит от времени исполнения работ другими подрядчиками. Поэтому оптимальным для подрядчика будет работать с первоначально выбранной производительностью и не изменять её в течение всего времени выполнения работы (см. раздел 1.2).

При режиме D выплат по окончанию проекта с информацией об окончании работ предполагается, что подрядчикам становится известно о моменте окончания работ каждого подрядчика. Данная информация влияет на изменение производительности подрядчиков,

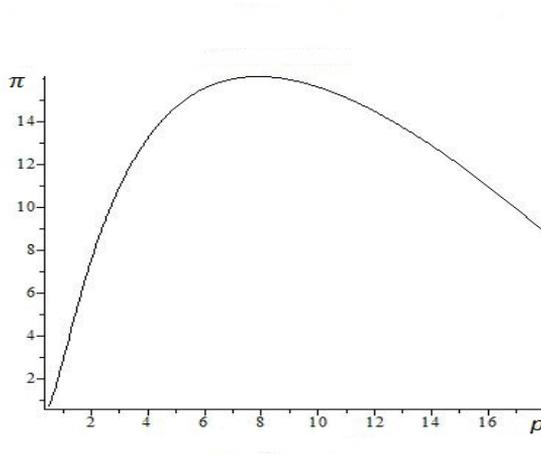


Рисунок 6. График функции выигрыша $\pi_C^{DS}(p)$ центра при выплатах по окончании проекта с информацией об окончании работ

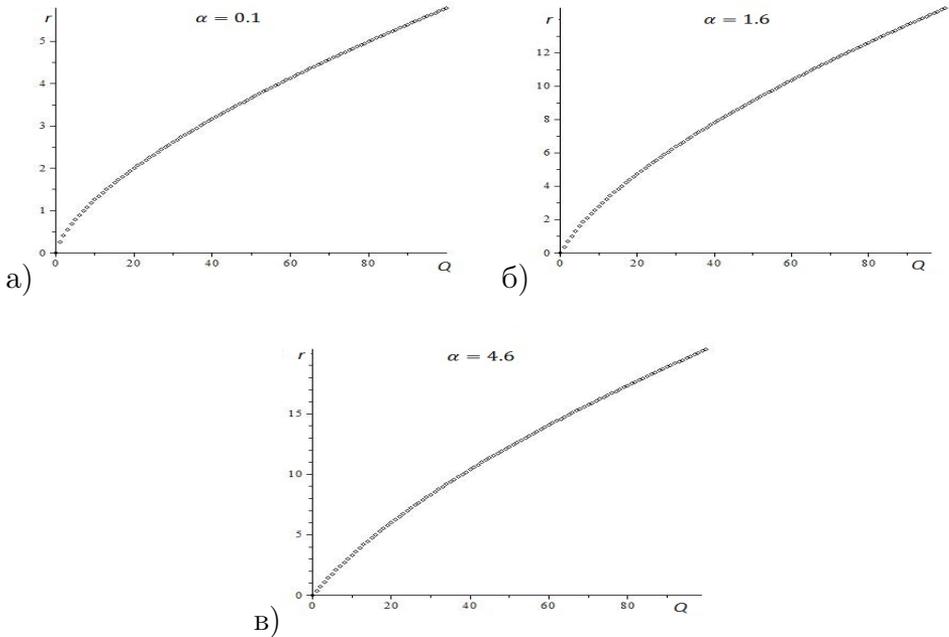


Рисунок 7. Влияние параметра ставки дисконтирования α на размер оптимальных выплат $r(Q)$, как функций от цены проекта; $\alpha = \{0.1, 1.6, 4.6\}$ для графиков а), б), в) соответственно

поскольку функция прибыли подрядчика зависит от производительности всех подрядчиков [9].

Рассмотрим численный пример при тех же значениях параметров: $q = 50, \alpha = 1, k = 1$, что и на рис. 5.

На рис. 6 изображен график зависимости выигрыша центра $\pi_C^{DS}(p)$ от размера выплат p . В примере максимальное значение выигрыша центра достигается при размере 16.105. Сравнивая рис. 6 и рис. 5, получаем, что при одинаковых значениях параметров модели, центру выгоднее выбирать режим выплат DS по окончании проекта с информацией об окончании работ по сравнению с режимом D .

Перейдем к анализу влияния параметров модели на размер оптимальных выплат подрядчикам. Моделирование проводилось для цены проекта из интервала $Q \in (0, 100)$.

Из графиков а), б), в) рис. 7 видно, что вид зависимости размера оптимальных выплат от цены проекта остается одинаковым при разных значениях параметра α . Однако величина оптимальной выплаты существенно увеличивается с ростом параметра α .

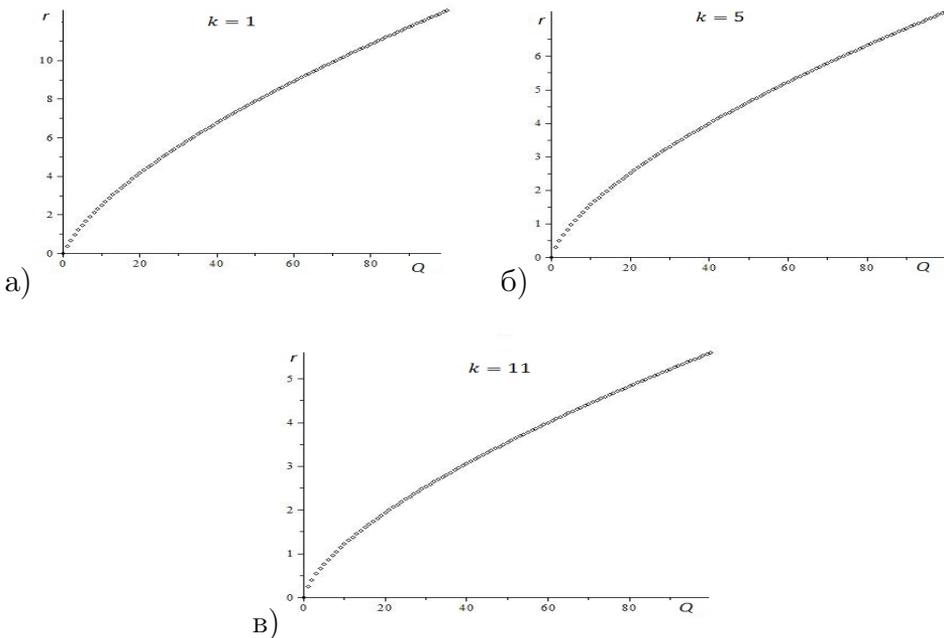


Рисунок 8. Влияние параметра k на размер оптимальных выплат $r(Q): k = \{1, 5, 11\}$

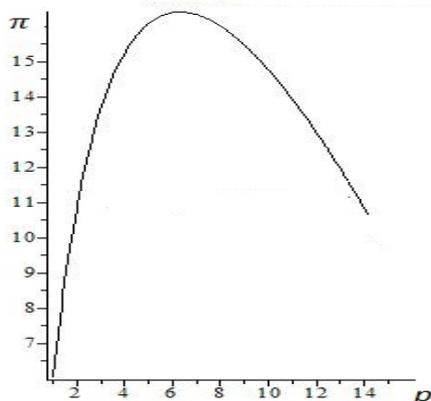


Рисунок 9. Выигрыш центра π_C^N при одинаковых выплатах по окончании работы

Из графиков а), б), в) рис. 8 видно, что с ростом параметра k , оптимальный размер выплат уменьшается при сохранении общего вида его зависимости от цены проекта.

4.3. Численные примеры контрактов при выплатах по окончании работ

Рассмотрим примеры численного моделирования контракта по исполнению проекта с одинаковыми и с различными выплатами по окончании работ. В качестве исходных параметров модели были выбраны следующие значения: $q = 50$, $\alpha = 1$, $k = 1$.

Из рис. 9 видно, что при одинаковых выплатах по окончании работы выигрыш центра достигает максимум 16.405 при размере выплат 6.304.

Сравним полученный результат со случаем различных выплат. Здесь выигрыш центра есть функция двух переменных: $\pi_C^{ND}(p_a, p_b)$.

На рис. 10 изображена поверхность выигрыша центра в случае различных выплат по окончании работ. Максимум данной функции π_C^{ND} достигается при выплатах $p_a = 6.633$ и $p_b = 6.01$, а максимальное значение выигрыша центра равно 16.437.

Аналитически установить свойства функции выигрыша центра представляет собой трудно разрешимую задачу. Однако в отдельных

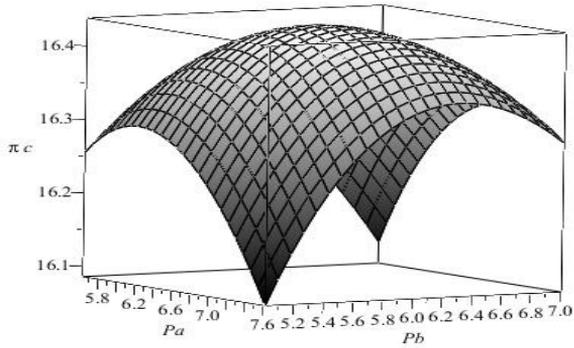


Рисунок 10. Выигрыш центра π_C^{ND} при выплатах p_a и p_b по окончании работы

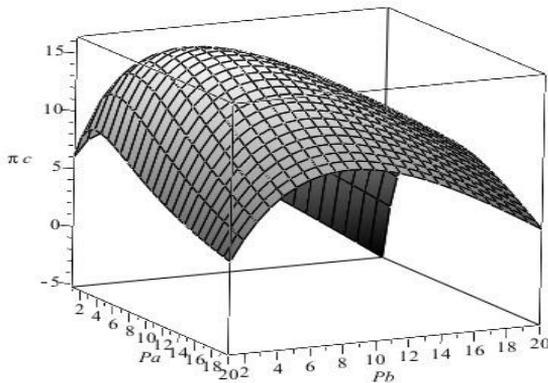


Рисунок 11. Общий вид функции выигрыша центра в случае различных выплат

случаях поведение функции можно охарактеризовать на основе численного моделирования. В частности, на рис. 11 представлен общий вид выигрыша центра, из которого видно, что эта функция обладает свойством вогнутости.

В заключение отметим, что при одинаковых значениях параметров модели выигрыш центра больше при контракте с различными

выплатами, как это следует из результатов численного моделирования. Поэтому центру выгодно предлагать подрядчикам контракт с режимом выплат ND по окончании работ, когда размер выплаты больше у подрядчика, который закончил работу первым.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воропаев В.И. *Управление проектами в России*. М.: Аланс, 1995.
2. Лысаков А.В., Новиков Д.А. *Договорные отношения в управлении проектами*. М.: ИПУ РАН, 2004.
3. Петросян Л.А., Зенкевич Н. А., Шевкопляс Е. В. *Теория игр*. СПб.: БХВ-Петербург, 2012.
4. *Справочник по специальным функциям*. / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979.
5. Adler P., Mandelbaum A., Nguyen V., Schwerer E. *From project to process management: An empirical-based framework for analyzing product development time* // Management Science. 1995. V. 41. N 3. P. 458–482.
6. Cohen I., Mandelbaum A., Shtub A. *Multi-project scheduling and control: A project-based comparative study of the critical chain methodology and some alternatives* // Project Management Journal. 2004. V. 35. N 2. P. 39–5011.
7. Kamburowski J. *An upper bound on the expected completion time of PERT networks* // European Journal of Operational Research. 1985. V. 21. N 2. P. 206–212.
8. Kulkarni V.G., Adlakha V.G. *Markov and Markov-regenerative PERT networks* // Operation Research. 1986. V. 34. N 5. P. 769–781.
9. Kwon H., Lippman S., McCardle K., Tang C. *Project management contracts with delayed payments* // Manufacturing and Service Operations Management. 2010. V. 12. N 4. P. 692–707 .

10. Maggott J., Skudlarski K. *Estimating the mean completion time of PERT networks with exponentially distributed durations of activities* // European Journal of Operational Research. 1993. V. 71. N 8. P. 7079.
11. Paul A., Gutierrez G. *Simple probability models for project contract* // European Journal of Operational Research. 2005. V. 165. P. 329–338.
12. Ross S. *Introduction to Stochastic Dynamic Programming*. Academic Press, 1983.

GAME-THEORETIC MODELING OF THE PROJECT MANAGEMENT CONTRACT

Nikolay A. Zenkevich, St.-Petersburg State University, Cand.Sc., professor (zenkevich@gsom.pu.ru),

Yury S. Sokolov, Department of Mathematics, The University of Memphis, PhD, researcher (ysokolov@memphis.edu),

Maria V. Fattakhova, St.-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, Cand.Sc., associate professor (mvfa@yandex.ru).

Abstract: Two-stage game-theoretic models of the project management contract with random duration of works are considered. On the first stage the center signs the contract for work performance in which it determines the size and the mode of payment with each of contractors, and on the second stage suppliers choose their own work rates. The optimum amount of payments and the expected time of implementation of the project are estimated. Numerical modeling of characteristics of the optimum contract for each mode of payments is carried out. The comparative analysis of results of numerical modeling showed that it is favorable to project manager to choose the contract for suppliers with various payments and the mode of payment for completion of work.

Keywords: project, work, project manager (center), supplier, project management contract, payment regime, payment, project completion time, two-stage game, Stackelberg equilibrium.