Математическая Теория Игр и её Приложения, т.8, в.4, с. 3–13

УДК 517.97
ББК 22.18

# ИГРА ПРЕСЛЕДОВАНИЯ-УБЕГАНИЯ НА РЕБЕРНОМ ОСТОВЕ ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОГРАННИКОВ.II*

Абдулла А. Азамов
Институт математики
Национального университета Узбекистана
100129, Узбекистан, Ташкент, Дурман йули, 29

Атамурат Ш. Кучкаров
Институт математики
Национального университета Узбекистана
100129, Узбекистан, Ташкент, Дурман йули, 29
Ташкентский архитектурно-строительний институт
1001011, Узбекистан, Ташкент, Наваи, 13

Азамат Г. Холбоев
Ташкентский архитектурно-строительний институт
1001011, Узбекистан, Ташкент, Наваи, 13
e-mail: abdulla.azamov@gmail.com, kuchkarov1@yandex.ru,
azamatholboyev@gmail.com

В этой части статьи рассматривается игра между группой из $n$ преследователей и одним убегающим, движущимися по



* Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета по координации развития науки и технологий РУз (грант № Ф4-ФА-Ф014)

графу реберного остова $\mathbf{M}$ трех типов правильных многогранников в пространствах $\mathbb{R}^d$, $d \geq 3$. Целью работы является, как и в части I, определение числа $N(\mathbf{M})$ такого, что при $n \geq N(\mathbf{M})$ игра будет выигрышной для группы преследователей, а в случае $n < N(\mathbf{M})$ – для убегающего. Показано, что $N(\mathbf{M}) = 2$ для $d$-мерных симплекса или кокуба (многомерного аналога октаэдра) и $N(\mathbf{M}) = [d/2] + 1$ для $d$-мерного куба.

*Ключевые слова*: игра преследования-убегания, задача сближения, задача уклонения, позиционная стратегия, контрстратегия, точная поимка, правильный многогранник, одномерный остов, граф.

## 1. Введение

В этой части статьи, также как в первой, рассматривается игра преследования-убегания на графе $\mathbf{M}$, являющимся реберным (т.е. одномерным) остовом правильного многогранника, в которой команда $\mathbb{P}$ из $n$ точек $P_1, P_2, \ldots, P_n$ преследует точку $Q$ [1]. Все точки движутся по графу $\mathbf{M}$ со скоростью, не превышающей по модулю $\rho, \rho > 0$. За счет выбора единицы измерения можно считать, что $\rho = 1$ и все ребра многогранника $\mathbf{M}$ имеют длину 1. Ставится задача нахождения числа $N(\mathbf{M})$, такого, что

а) при $n \geq N(\mathbf{M})$ игра выигрышна для игрока $\mathbb{P}$;

б) при $n < N(\mathbf{M})$ игра выигрышна для игрока $Q$.

Постановка задач была приведена в части I (там же приведен основной список использованный литературы) и был рассмотрен случай правильных многогранников в $\mathbb{R}^3$ : $N(\mathbf{M}) = 2$ для тетраэдра, куба и октаэдра, $N(\mathbf{M}) = 3$ для додекаэдра и икосаэдра. Здесь будет изучен случай правильных симплекса, куба и кокуба в евклидовых пространствах произвольной размерности $d$. Отметим, что при $d \geq 5$ ими исчерпываются типы правильных многогранников [2]. Их можно задавать аналитически следующим образом.

I. $d$-мерный симплекс $\mathbf{\Sigma}^d$ удобно представить как выпуклую оболочку стандартного базиса $e_1, e_2, \ldots, e_{d+1}$ пространства $\mathbb{R}^{d+1}$, сжатую в $\sqrt{2}$ раза, т.е. как множество, задаваемое условием:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{d+1} = \frac{1}{\sqrt{2}},\ x_k \geq 0,\ k = 1, 2, \ldots, d+1.$$

(Сжатие вводится для того, чтобы длина всех ребер была равна 1.)

II. $d$-мерный куб $\mathbf{K}^d$ как подмножество $\mathbb{R}^d$ задается стандартном образом условием

$$0 \le x_i \le 1,\ i = 1, 2, \dots, d.$$

III. $d$-мерный кокуб $\mathbf{K}_*^d$, двойственной к $\mathbf{K}^d$, задается условием

$$|x_1| + |x_2| + \dots + |x_d| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(т.е. как выпуклая оболочка $2d$ векторов $\pm e_1, \pm e_2, \dots, \pm e_d$, также сжатая в $\sqrt{2}$ раза).

В дальнейшем, граф состоящий из реберного остова правильного многогранника, будем обозначать тем же символом, что и сам многогранник.

## 2. Основной результат

**Теорема 2.1.** $N(\mathbf{\Sigma}^d){=}N(\mathbf{K}_*^d){=}2;\quad N(\mathbf{K}^d){=}[d/2]{+}1,$ *где* $[a]$ – *целая часть числа* $a$.

Доказательство будем проводить отдельно для каждого случая.

### 2.1. Случай $d$-мерного симплекса $\mathbf{\Sigma}^d$

Достаточно показать, что две точки $P_1,\ P_2$ в состоянии поймать точку $Q$. Для этого предпишем преследователю $P_1$ вначале занять одну из вершин $\mathbf{\Sigma}^d$, а $P_2$ – преследовать $Q$, заставляя ее пройти через какую-то из вершин. Пусть это произойдет в момент времени $t = \tau,\ \tau \ge 0$. Легко заметить, что $\tau \le 2{}^1\!/_2$ . Без потери общности можно считать $P_1(\tau) = e_1$, $Q(\tau) = e_2$. Обозначим через $\Pi$ гиперплоскость, проходящую через середину ребра $[e_1, e_2]$ перпендикулярно к этому ребру. Ее уравнение имеет вид

$$\langle x - \frac{e_1 + e_2}{2},\ e_1 - e_2\rangle = 0, \tag{2.1}$$

где $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ – скалярное произведение векторов. Очевидно, что $\Pi$ проходит через остальные вершины $e_3, e_4, \dots, e_{d+1}$ и является гиперплоскостью симметрии для $\mathbf{\Sigma}^d$.

Начиная с момента времени $t = \tau$ предпишем $P_1$ двигаться симметрично $Q$ относительно $\Pi$, в то время как $P_2$ – продолжить ее преследование. $\mathbf{\Sigma}^d \setminus \Pi$ состоит из двух компонент, являющихся звездами с узловыми вершинами $e_1, e_2$ соответственно. $\mathbf{Z}(v)$– звезда вершины $v$, т.е. подграф, составленный из всех ребер, выходящих из $v$. Удаляя из $\mathbf{Z}(v)$ все вершины, за исключением $v$, получаем открытую звезду $\mathbf{Z}(v)$. Если $Q$ останется в пределах открытой звезды вершины $e_2$, то $P_2(\bar{t}) = Q(\bar{t})$, при некотором $\bar{t} \in [\tau,\ 4\frac{1}{2}\ ]$. Если же $Q$ при некотором $\bar{t} \in [\tau,\ 4\frac{1}{2}\ ]$ попадет на $\Pi$, то $P_1(\bar{t}) = Q(\bar{t})$.

Для гарантированного времени завершения преследования $T(\mathbf{\Sigma}^d)$ имеет место оценка

**Следствие 2.1.** $T(\mathbf{\Sigma}^d) \le 4\frac{1}{2}$ .

### 2.2. Случай $d$-мерного кокуба $\mathbf{K}_*^d$

Доказательство во многом совпадает с тем, что проведено для симплекса – если в случае симплекса все вершины смежные и потому было неважно, на какую вершину загонять точку $Q$, то теперь преследователям $P_1$ и $P_2$ в начале предписывается сперва занять антиподальные вершины, например, $e_1$ и $-e_1$, соответственно. В таком случае остальные $2d-2$ вершины $\mathbf{K}_*^d$ расположатся на гиперплоскости $x_1 = 0$, образуя там кокуб $\mathbf{K}_*^{d-1}$. При этом все вершины последнего будут смежными как с вершиной $e_1$, так и с вершиной $-e_1$. Поэтому, если $P_2$ начнет преследовать $Q$, то в некоторый момент времени $\tau$, $0 \le \tau \le 3\frac{1}{2}$ , точка $Q$ либо столкнется с $P_2$, либо попадет в одну из вершин $\mathbf{K}_*^{d-1}$. Без потери общности можно считать $Q(\tau) = e_2$. Через середину ребра $[e_1, e_2]$ проведем гиперплоскость $\Pi$ перпендикулярно к этому ребру. Ее уравнение имеет вид

$$\left\langle x - \frac{e_1 + e_2}{2}, e_1 - e_2 \right\rangle = 0.$$

Легко проверить, что $\Pi$ проходит также через середину противоположного ребра с вершинами $-e_1, -e_2$ и содержит все оставшиеся вершины $e_{\pm 3}, e_{\pm 4}, \ldots, e_{\pm d}$. Отсюда следует, что множество $\mathbf{K}_*^d \setminus \Pi$ состоит из компонент $\mathbf{K}_1$ и $\mathbf{K}_2$, каждая из которых является деревом (открытым в топологии $\mathbf{K}_*^d$) с узловыми вершинами $e_1, -e_2$ и $e_2, -e_1$, соответственно, а другие концы всех ребер, кроме $[e_1, -e_2], [e_2, -e_1]$, лежат на $\Pi$. Диаметр каждый компоненты равен $2\frac{1}{2}$ (на рис. 1 строение $\mathbf{K}_*^d \setminus \Pi$ показано для $d = 4$).

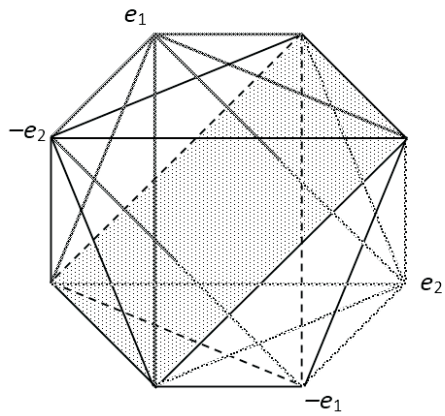


Рисунок 1. Деревья $\mathbf{K}_1$ и $\mathbf{K}_2$ выделены крапчатыми линиями, а октаэдр $\mathbf{K}_*^{d-1}$ – тонкими линиями

Начиная с момента времени $\tau$ точке $P_1$ предпишем двигаться симметрично $Q$ относительно гиперплоскости $\Pi$, а точке $P_2$ – продолжить преследование $Q$. Поскольку и $Q(\tau)$ и $P_2(\tau)$ принадлежат $\mathbf{K}_2$, то в некоторый момент времени $\bar{t}$ будет иметь место либо $Q(\bar{t}) = P_2(\bar{t})$, либо $Q(\bar{t}) \in \Pi$, при этом во втором случае, согласно построению $Q(\bar{t}) = P_1(\bar{t})$. Нетрудно заметить, что $\bar{t} \in [\tau, 6]$.

**Следствие 2.2.** $T(\mathbf{K}_*^d) \leq 6$.

### 2.3. Случай $d$-мерного куба $\mathbf{K}^d$

Это наиболее сложный и поэтому наиболее интересный случай, так как на этот раз по мере увеличения размерности пространства число $N(\mathbf{K}^d)$ растет линейно:

$$N(\mathbf{K}^d) = \left[\frac{d}{2}\right] + 1.$$

Поскольку случай $d = 3$ разобран в [1], будем предполагать $d \geq 4$.

Начнем со случая, когда число преследователей $n$ не больше $[d/2]$ и покажем, что игра является выигрышной для $Q$. Заметим, что каждая вершина куба $\mathbf{K}^d$ имеет степень $d$ (т.е. из каждой вершины выходят ровно $d$ ребер). Убегающему предпишем выбрать в качестве начального положения $Q(0)$ вершину $A$ куба $\mathbf{K}^d$, чтобы она была отлична от точек $P_1(0), P_2(0), \ldots, P_n(0)$. Достаточно доказать, что точка $Q$ может оставаться на месте или сможет перейти на одну из смежных с $A$ вершин $B_1, B_2, \ldots, B_d$, избегая поимки.

Без потери общности можно считать, что $A = 0$. Пусть $\mathbf{Z}(B_k)$ – звезда вершины $B_k = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, $k = 1, 2, \ldots, d$. Из следующего перечня концевых вершин звезды $\mathbf{Z}(B_k)$

$$
\begin{aligned}
A &= (0, 0, \ldots, 0),\\
E_{1,k} &= (1, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0),\\
E_{2,k} &= (0, 1, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
E_{k-1,k} &= (0, 0, \ldots, 1, 1, 0, \ldots, 0),\\
E_{k+1,k} &= (0, 0, \ldots, 0, 1, 1, \ldots, 0),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
E_{d,k} &= (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 1)
\end{aligned}
$$

($k$-ая и $l$-ая координаты вершины $E_{lk}$, равны 1, $l = 1, 2, \ldots, d$) видно, что любая пара звезд $\mathbf{Z}(B_k)$ и $\mathbf{Z}(B_l)$, $k \neq l$, имеет лишь две общие точки – это $A$ и $E_{kl}$.

Если при $t = 0$ точки $P_1, P_2, \ldots, P_n$ находятся вне замкнутой $\frac{1}{2}$-окрестности вершины $A$, то $Q$ предпишем оставаться на месте, пока хотя бы один из преследователей не окажется на расстоянии не больше $\frac{1}{2}$ от вершины $A$ (всюду расстояния измеряются в метрике графа $\mathbf{K}^d$).

Пусть в некоторый момент времени $\tau$ (возможно $\tau = 0$) точка $P_1$ оказалось в замкнутой $\frac{1}{2}$-окрестности вершины $A$, например, на ребре $AB_1$. Тогда расстояния от $P_1$ до вершин $B_2, B_3, \ldots, B_d$ будут больше 1. Далее, каждая из точек $P_2, P_3, \ldots, P_n$ может принадлежать не более чем двум из звезд $\mathbf{Z}(B_2), \mathbf{Z}(B_3), \ldots, \mathbf{Z}(B_d)$, а точка $P_1$ лежит на звезде $\mathbf{Z}(B_1)$. Так как $n \leq [d/2]$ и $d \geq 4$, то в момент времени $\tau$ по крайней мере одна из звезд $\mathbf{Z}(B_2), \mathbf{Z}(B_3), \ldots, \mathbf{Z}(B_d)$ свободна от преследователей. Если это выполнено для звезды $\mathbf{Z}(B_k)$, $k \in \{2, 3, \ldots, d\}$, то точка $Q$ может пройти к вершине $B_k$, избегая поимки. Ясно, что такой переход можно повторить бесконечное число раз, если хотя бы одна из точек $P_1, P_2, \ldots, P_n$ будет преследовать $Q$.

Приступим теперь к доказательству второй части теоремы. В действительности установим более точное утверждение: в игре на графе

$\mathbf{K}^d$, состоящем из реберного остова куба $\mathbf{K}^d$, группа из $n(d) = [d/2]+1$ преследователей в состоянии поймать $Q$ за время, не превосходящее

$$T_d = \begin{cases} \frac{17\cdot 3^{(d-1)/2}-2d-21}{4}, & \text{если } \ d - \text{нечетно}, \\ \frac{11\cdot 3^{d/2}-2d-21}{4}, & \text{если } \ d - \text{четно}. \end{cases} \tag{2.2}$$

В первую очередь заметим, что утверждение верно для $d = 2$ (т.е. для квадрата) – два преследователя поймают $Q$ за время, не превосходящее $T_2 = 2$. В части I настоящей статьи было показано, что при $d = 3$ два преследователя могут поймать $Q$ за время не больше $T_3 = 6$. Эти два случая будут служить основой индукции.

Предположим теперь, что утверждение верно для графа $\mathbf{K}^d$, $d \geq 2$, и рассмотрим игру на $\mathbf{K}^{d+2}$. Таким образом, группа преследователей состоит из точек $P_1, P_2, \ldots, P_{n(d)+1}$. Движения этих точек определим поэтапно. С этой целью представим граф $\mathbf{K}^{d+2}$ как реберный остов произведения $\mathbf{K}^{d+2} = \mathbf{K}^d \times \mathbf{K}^2$ и положим

$$\mathbf{K}^d_{ij} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_d, i, j)|\ 0 \leq x_l \leq 1,\ 1 \leq l \leq d\}, \quad i, j \in \{0, 1\}. \tag{2.3}$$

$\mathbf{K}^d_{ij}$ является $d$-мерным кубом. Таким образом граф $\mathbf{K}^{d+2}$ будет состоять из 4 реберных остовов $\mathbf{K}^d_{00}, \mathbf{K}^d_{01}, \mathbf{K}^d_{10}, \mathbf{K}^d_{11}$ соответствующих кубов (2.3) размерности $d$, а также из ребер, соединяющих соответствующие вершины $\mathbf{K}^d_{00}$ с $\mathbf{K}^d_{01}$, $\mathbf{K}^d_{01}$ с $\mathbf{K}^d_{11}$, $\mathbf{K}^d_{11}$ с $\mathbf{K}^d_{10}$, $\mathbf{K}^d_{10}$ с $\mathbf{K}^d_{00}$ (на рис. 3 это продемонстрировано для $d = 3$, для наглядности длины ребер взяты неравными).

Каждое положение $(y_1, y_2, \ldots, y_{d+2})$ точки $Q$ отбрасывает 4 тени на графах $\mathbf{K}^d_{ij}$, а именно, $Q_{ij} = (y_1, y_2, \ldots, y_d, i, j), \quad i, j \in \{0, 1\}$. Вектор скорости тени $Q_{ij}$ есть проекция вектора скорости $Q$ на плоскость размерности $d$, задаваемую уравнениями $z_{d+1} = i,\ z_{d+2} = j$, поэтому при движении $Q$ ее тени перемещаются со скоростью, не превосходящей 1. При этом соблюдается условие $Q_{ij}(t) \in \mathbf{K}^d_{ij}$ при всех $t \geq 0$ $(i, j \in \{0, 1\})$.

<u>Этап I.</u> Сначала предпишем всем преследователям перейти на подграф $\mathbf{K}^d_{00}$. Если $t_1$ – соответствующий момент времени, то $t_1 \leq 2^1\!/\!_2$ (наихудшая ситуация для преследователей – в момент времени $t = 0$ по крайней мере один из них находится на середине некоторого ребра подграфа $\mathbf{K}^d_{11}$. В этом случае те преследователи, которые находятся в подграфе $\mathbf{K}^d_{11}$, сначала добираются до ближайших вершин $\mathbf{K}^d_{11}$, потом переходят вдоль ребер $\mathbf{K}^{d+2}$ на соседние вершины

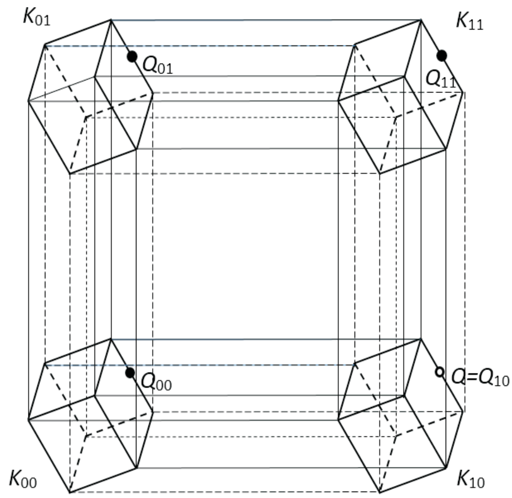


Рисунок 2. $\mathbf{K}^5 = \mathbf{K}^3 \times \mathbf{K}^2$

$\mathbf{K}^d_{01}$, после этого – на соседние вершины $\mathbf{K}^d_{00}$). При $t \geq t_1$ предпишем точкам $P_2, P_3, \ldots, P_{n+1}$ преследовать «тень» $Q_{00}$ вдоль $\mathbf{K}^d_{00}$. По предположению индукции в какой-то момент времени $t_2$ окажется $P_k(t_2) = Q_{00}(t_2)$ хотя бы для одного $k \in \{2, 3, \ldots, n+1\}$, притом $t_2 - t_1 \leq T_d$. Здесь и в дальнейшем $n = n(d)$. Для определенности примем $k = n+1$. Таким образом

$$t_2 \leq T_d + 2\tfrac{1}{2}\ .$$

<u>Этап II.</u> Начиная с момента времени $t_2$ предпишем точке $P_{n+1}$ двигаться вместе с $Q_{00}$, а точкам $P_1, P_2, \ldots, P_n$ – сначала перейти на куб $\mathbf{K}^d_{01}$ (на это требуется время не больше $1\tfrac{1}{2}$ ), затем преследовать «тень» $Q_{01}$ вдоль $\mathbf{K}^d_{01}$. Снова по предположению индукции преследователи $P_1, P_2, \ldots, P_n$ в некоторый момент времени $t_3$ в состоянии настичь $Q_{01}$. При этом

$$t_3 \leq t_2 + 1\tfrac{1}{2}\ + T_d \leq 2T_d + 4.$$

Не ограничивая общности будем считать $P_n(t_3) = Q_{01}(t_3)$.

<u>Этап III.</u> Начиная с момента времени $t_3$ преследователям $P_n$ и $P_{n+1}$ предпишем двигаться вместе с точками $Q_{01}$ и $Q_{00}$ соответственно, т.е. сохранять выполнение равенств $P_n(t) = Q_{01}(t)$ и $P_{n+1}(t) =$

$Q_{00}(t)$, а преследователям $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ – заставить точку $Q$ попасть на один из графов $\mathbf{K}^d_{ij}$, $i, j \in \{0, 1\}$. Пусть это событие произойдет в момент времени $t_4$. Если $Q(t_4) \in \mathbf{K}^d_{00}$, то $Q(t) = Q_{00}(t_4) = P_{n+1}(t_4)$. Аналогично, если $Q(t_4) \in \mathbf{K}^d_{01}$, то $Q(t) = Q_{01}(t_4) = P_n(t_4)$. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда $Q(t_4) \in \mathbf{K}^d_{10} \cup \mathbf{K}^d_{11}$.

Так как диаметр графа $\mathbf{K}^{d+2}$ равен $d + 2$, то

$$t_4 \leq t_3 + d + 2 \leq 2T_d + 4 + d + 2 \leq 2T_d + d + 6 \tag{2.4}$$

(наихудшая ситуация для для преследователей – $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ находятся на одной из вершин $\mathbf{K}^d_{01}$, а убегающий – вблизи вершины $\mathbf{K}^{d+2}$, противоположной к отмеченной вершине $\mathbf{K}^d_{01}$).

Для определенности будем считать $Q(t_4) \in \mathbf{K}^d_{11}$, так что $Q(t_4) = Q_{11}(t_4)$.

Пусть $\Pi$ – гиперплоскость симметрии куба $\mathbf{K}^{d+2}$, перпендикулярная к отрезку $Q_{00}Q_{11}$ (ее нормаль $(0, 0, \ldots, 0, 1, 1) \in \mathbb{R}^{d+2}$). $\Pi$ задается уравнением $z_{d+1} + z_{d+2} = 1$. (Если $Q(t_4) \in \mathbf{K}^d_{10}$, то уравнением $\Pi$ было бы $z_{d+1} - z_{d+2} = 0$.) Очевидно, $\mathbf{K}^d_{01} \subset \Pi$ и $\mathbf{K}^d_{10} \subset \Pi$. Кроме того, точки $P_{n+1}(t_4)(= Q_{00}(t_4))$ и $Q(t_4)(= Q_{11}(t_4))$ симметричны относительно гиперплоскости $\Pi$.

<u>Этап IV.</u> Начиная с момента времени $t_4$ преследователю $P_{n+1}$ предпишем двигаться симметрично к точке $Q$ относительно $\Pi$, а преследователям $P_1, P_2, \ldots, P_n$ – сначала добраться на $\mathbf{K}^d_{11}$ (на это требуется время не больше $2\frac{1}{2}$ ), а затем преследовать точку $Q_{11}$ вдоль $\mathbf{K}^d_{11}$. По предположению индукции, преследователи $P_1, P_2, \ldots, P_n$ в некоторый момент времени $t_5$ смогут поймать тень $Q_{11}$, так как $Q_{11} \in K^d_{11}$ при всех $t \geq 0$. При этом $t_5 - t_4 \leq T_d + 2\frac{1}{2}$ . С учетом (2.4) имеем

$$t_5 \leq t_4 + T_d + 2\tfrac{1}{2} \leq 2T_d + d + 6 + T_d + 2\tfrac{1}{2} = 3T_d + d + 8\tfrac{1}{2}\,.$$

Итак, $Q_{11}(t_5) = P_k(t_5)$ для некоторого $k, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Теперь проследим за движением реального убегающего $Q$. Если до момента времени $t_5$ точка $Q$ попадет на $\Pi$, то она будет поймана точкой $P_{n+1}$ в силу симметричности их движения. Случай $Q(t_5) \in \mathbf{K}^d_{11}$ также можно исключать, потому что в противном случае $Q(t_5) = Q_{11}(t_5) = P_k(t_5)$.

В случае $Q(t_5) \neq Q_{11}(t_5)$ точка $Q(t_5)$ будет находится на некотором открытом ребре $\rho$, соединяющим какую-то вершину графа $\mathbf{K}^d_{11}$ с соответствующей вершиной $\mathbf{K}_{10}^d$ либо $\mathbf{K}_{01}^d$. При этом местоположение $P_k$ совпадает с тенью $Q_{11}$, т.е. на конце ребра $\rho$ и этот конец принадлежит $\mathbf{K}_{11}^d$, а другой конец $\rho$ принадлежит П. Следовательно, точка $P_k$, двигаясь по этому ребру, либо сама поймает $Q$, либо заставит $Q$ попасть на П, где ее встретит $P_{n+1}$ (на это требуется время не больше 1).

Для суммарного времени поимки имеем оценку

$$t_5 + 1 \leq 3T_d + d + 9\tfrac{1}{2} \, .$$

Таким образом, можно положить

$$T_{d+2} = 3T_d + d + 9\tfrac{1}{2} \, .$$

Отсюда, после элементарных преобразований и с учетом (2.3), получим

$$T_{d+2} = \begin{cases} \frac{17\cdot 3^{(d+1)/2} - 2(d+2) - 21}{4}, & \text{если} \quad d - \text{нечетно}, \\ \frac{11\cdot 3^{d/2+1} - 2(d+2) - 21}{4}, & \text{если} \quad d - \text{четно}. \end{cases}$$

Теорема доказана.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Азамов А.А., Кучкаров А.Ш., Холбоев А.Г. *Игра преследования-убегания на реберном остове правильных многогранников. I.* // Математическая Теория Игр и её Приложения. 2015. Т. 7, вып. 3. С. 3–15.

2. Берже М. *Геометрия.Т.1.* М.: Мир, 1984.

# THE PURSUIT-EVASION GAME ON THE 1-SKELETON GRAPH OF THE REGULAR POLYHEDRON. II

**Abdulla A. Azamov**, Institute of Mathematics of the National University of Uzbekistan, Dr.Sc., professor (abdulla.azamov@gmail.com),
**Atamurat Sh. Kucharov**, Institute of Mathematics of the National University of Uzbekistan and Tashkent institute of architecture and construction, Dr.Sc. (kuchkarov1@yandex.ru),
**Azamat G. Holboyev**, Tashkent institute of architecture and construction (azamatholboyev@gmail.com).

*Abstract*: It is considered a game between a group of $n$ pursuers and one evader moving with the same maximal speed along 1-skeleton of a given regular polyhedron. Purpose of the paper consists of finding an integer $N(\mathbf{M})$ possessing the following property: if $n \geq N(\mathbf{M})$ then the group of Pursuers wins the game and if $n < N(\mathbf{M})$ then Evader wins. Part I of the paper was devoted to the case of polyhedrons in the space $\mathbb{R}^3$. This part is devoted to the case of the simplex, kube and kokube in the space $\mathbb{R}^d$, $d \geq 3$.

*Keywords*: pursuit-evasion game, approach problem, evasion problem, positional strategy, counterstrategy, exact catch, regular polyhedron, one-dimensional skeleton, graph.