Математическая Теория Игр и её Приложения, т.8, в.4, с. 14–29

УДК 519.2
ББК 22.18

ЭВОЛЮЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ УСТОЙЧИВЫМ РАЗВИТИЕМ АКТИВНЫХ СИСТЕМ*

Григорий И. Белявский
Наталья В. Данилова
Геннадий А. Угольницкий
Институт математики, механики и компьютерных наук
им. И.И. Воровича Южного федерального университета
344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а
e-mail: gbelyavski@sfedu.ru, danilova198686@mail.ru, ougoln@mail.ru

В статье рассматривается применение эволюционного моделирования к решению задач управления устойчивым развитием сложных систем. Описываются различные информационные структуры иерархических дифференциальных игр, формализующих задачи управления устойчивым развитием. Получен результат, обеспечивающий возможность использования генетических алгоритмов для решения указанных задач. Изложение иллюстрируется модельным примером.

Ключевые слова: дифференциальные игры, управление устойчивым развитием, эволюционное моделирование.

---

* Работа выполнена при финансовой поддержке Южного федерального университета, проект № 213.01-07.2014/07-ПЧВГ.

1. Введение

Математическая формализация задач управления устойчивым развитием активных систем [9] приводит к сложным дифференциально-игровым моделям [11], нахождение решений которых требует специального анализа и разработки эффективных вычислительных методов. В последние десятилетия постоянное внимание привлекают методы эволюционного моделирования ([2], [3]). Основной замысел работы состоит в использовании генетических алгоритмов при решении иерархических дифференциальных игр с различными информационными регламентами. Этот подход перекликается с методами эволюционных игр [13].

Оставшаяся часть статьи организована следующим образом. В разделе 1 описываются информационные регламенты дифференциально-игровых моделей управления устойчивым развитием активных систем и специфика их имитационного моделирования. В разделе 2 обсуждается предлагаемый подход в применении эволюционного моделирования в дифференциально-игровых моделях для одного из указанных информационных регламентов, основанный на полученном теоретическом результате. В разделе 3 приводится пример применения предлагаемой методики. В Заключении описываются итоги работы и перспективы дальнейших исследований.

2. Информационные регламенты дифференциально-игровых моделей управления устойчивым развитием активных систем

Для анализа задач управления устойчивым развитием активных систем целесообразно рассматривать базовый вариант древовидной структуры иерархически управляемой динамической системы [9], включающей Центр и нескольких активных агентов. При математической формализации это дает иерархическую дифференциальную игру лидера (leader) с несколькими ведомыми (followers). Для построения классификации информационных структур в таких играх можно использовать три признака, характеризующие стратегию лидера (в частности, способ обеспечения устойчивого развития):

1) отсутствие/наличие обратной связи стратегии лидера по состоянию управляемой динамической системы. Этот признак принимает

два основных значения: программные стратегии (open-loop, OL), которые зависят только от текущего момента времени t, и позиционные стратегии (closed-loop, CL), зависящие от игровой позиции $t, x(t)$ ([12]);

2) отсутствие/наличие обратной связи стратегии лидера по стратегиям ведомых. В первом случае возникают игры Штакельберга, в то время как игры второго типа естественно назвать играми Гермейера ([4–6], [8]);

3) методы иерархического управления. Здесь различаются принуждение, при котором лидер воздействует на множества допустимых стратегий ведомых, и побуждение, означающее воздействие лидера на функционалы выигрыша ведомых ([12]).

В свою очередь, на нижнем уровне возможен один из трех режимов поведения (которые надо учитывать при реализации устойчивого развития):

(а) изоляция, когда ведомые действуют независимо и приходят в своей игре в нормальной форме к равновесию Нэша;

(б) кооперация, при которой они объединяют ресурсы и путем совместных действий максимизируют суммарный функционал выигрыша;

(в) сотрудничество, означающее добровольную максимизацию ведомыми функционала выигрыша лидера.

Рассмотрим для определенности следующую теоретико-игровую модель:

$$J = \int_0^T \exp(-\rho t) g(y(t)) dt + \exp(-\rho T) G(x(T)) \to \max \tag{2.1}$$

$$p(t) \in P, q(t) \in Q; \tag{2.2}$$

$$J_i = \int_0^T \exp(-\rho t) g_i(y(t)) dt + \exp(-\rho T) G_i(x(T)) \to \max \tag{2.3}$$

$$u_i(t) \in U_i(q_i(t)), i \in N; \tag{2.4}$$

$$\dot{x} = f(x(t), u(t)), x(0) = x_0; \tag{2.5}$$

$$x(t) \in X^*, 0 \le t \le T. \tag{2.6}$$

Здесь J и J_i, g и g_i – интегральные и текущие функционалы выигрыша лидера и ведомых соответственно; T – продолжительность игры (которая может быть бесконечной, тогда терминальный член не используется); ρ – коэффициент дисконтирования; $y(t) = (q(t), p(t), u(t), x(t))$; $q(t)$ – вектор управляющих переменных принуждения; $p(t)$ – вектор управляющих переменных побуждения; $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_n(t))$ – вектор управлений ведомых (той же размерности, что и $q(t)$); $N = \{1, \ldots, n\}$ – множество ведомых; $x(t)$ – вектор состояния УДС; X^* – множество состояний, удовлетворяющих требованиям устойчивого развития; соотношения (2.5) описывают динамику управляемой системы; условия (2.6) формулируют требования устойчивого развития. Предполагается, что Q, P, U – компактные подмножества соответствующих метрических пространств; J и J_i непрерывны по своим аргументам; вектор-функция f из (2.5) удовлетворяет условиям Каратеодори. Таким образом, (2.1)–(2.6) – иерархическая дифференциальная игра с фазовыми ограничениями.

Для объяснения предложенной классификации используем следующие три таблицы (пояснения в тексте).

Таблица 1. Базовые информационные структуры в иерархических дифференциальных играх

	Без обратной связи по управлениям ведомых (игры Штакельберга)	С обратной связью по управлениям ведомых (игры Гермейера)
Без обратной связи по состоянию УДС (игры в программных стратегиях)	Игра Штакельберга в программных стратегиях Γ_{1t}	Игра Гермейера в программных стратегиях Γ_{2t}
С обратной связью по состоянию УДС (игры в позиционных стратегиях)	Игра Штакельберга в позиционных стратегиях Γ_{1x}	Игра Гермейера в позиционных стратегиях Γ_{2x}

В табл. 1 показаны типы стратегий лидера с использованием обозначений из работы [8]. В игре Γ_{1t} лидер в процессе игры не получает информации ни о действиях ведомых, ни о состоянии УДС. Поэтому лидер выбирает и сообщает ведомым программную стратегию $z(t), 0 \leq t \leq T$. В игре Γ_{2t} лидер до начала игры знает о выбранных ведомыми программных управлениях, поэтому его стратегия представляет собой оператор $z(t, u(t))$, ставящий в соответствие каждому набору функций $z(t)$ программную стратегию $u(t)$. В игре Γ_{1x}

лидер выбирает и сообщает ведомым набор позиционных стратегий $z(t, x(t))$. Наконец, в игре Γ_{2x} лидер до начала игры узнает выбранные ведомыми позиционные стратегии $z(t, x(t))$, поэтому он выбирает и сообщает им позиционную зависимость $z(t, x(t), u(t, x(t)))$.

Таким образом, в играх Γ_{2t} и Γ_{2x} присутствует обратная связь по управлениям ведомых, а в играх Γ_{1t} и Γ_{1x} – по состоянию УДС. Регламенты Γ_{1t} и Γ_{2t} определяют игры Штакельберга в программных и позиционных стратегиях соответственно, регламенты Γ_{1x} и Γ_{2x} – аналогичные игры Гермейера.

Таблица 2. Стратегии лидера для различных информационных структур

	Γ_{1t}	Γ_{1x}	Γ_{2t}	Γ_{2x}
Принуждение	$q(t)$	$q(t, u(t))$	$q(t, x(t))$	$q(t, x(t), u(t, x(t)))$
Побуждение	$p(t)$	$p(t, u(t))$	$p(t, x(t))$	$p(t, x(t), u(t, x(t)))$

Таблица 3. Максимальные гарантированные выигрыши лидера в играх с несколькими ведомыми для различных информационных структур

Лидер / Ведомые	Бездей ствие (p-const q-const)	Принуждение p-const		Побуждение q-const	
		Γ_{1t}, Γ_{1x} (ST)	Γ_{2t}, Γ_{2x} (GER)	Γ_{1t}, Γ_{1x} (ST)	Γ_{2t}, Γ_{2x} (GER)
Изо ля ция (NE)	J_{NE}^{0}	$J_{NE}^{COMP-ST}$	$J_{NE}^{COMP-GER}$	J_{NE}^{IMP-ST}	$J_{NE}^{IMP-GER}$
Коопе ра ция (C)	J_{C}^{0}	$J_{C}^{COMP-ST}$	$J_{C}^{COMP-GER}$	J_{C}^{IMP-ST}	$J_{C}^{IMP-GER}$
Сот руд ниче ство (max)	$J_{\max}^{0}$	$J_{\max}^{COMP-ST}$	$J_{\max}^{COMP-GER}$	$J_{\max}^{IMP-ST}$	$J_{\max}^{IMP-GER}$

Табл. 2 конкретизирует вид стратегии лидера z. При принуждении лидер распоряжается вектором управлений q (p считается фиксированным); при побуждении, наоборот, q фиксирован, а лидер выбирает p (для соответствующих регламентов). Надо отметить, что в работах А.Ф. Кононенко с соавторами изучался случай одного ведомого, поэтому максимальный гарантированный результат лидера в рассматриваемой игре для различных режимов поведения ведомых определяется далее.

В иерархических дифференциальных играх в качестве принципа оптимальности принимается выбор лидером максимальной гарантирующей стратегии с учетом оптимальной реакции ведомых (принцип гарантированного результата). В табл. 3 показаны соответствующие гарантированные выигрыши лидера для перечисленных информационных структур. В случае изоляции предполагается, что оптимальные ответы ведомых описываются множеством равновесий Нэша NE в их игре в нормальной форме. При кооперации оптимальная реакция ведомых – это множество C точек максимума их суммарного функционала выигрыша. Наконец, при сотрудничестве оптимальная реакция ведомых отождествляется с максимизацией функционала выигрыша лидера.

В случае принуждения лидер выбирает вектор стратегий $q(p-\texttt{const})$ в режимах Γ_{1t}, Γ_{1x} (игры Штакельберга) или Γ_{2t}, Γ_{2x} (игры Гермейера). Стратегии могут быть программными (OL) (регламенты Γ_{1t}, Γ_{2t}) или позиционными (CL) (регламенты Γ_{1x}, Γ_{2x}). Аналогично, при побуждении лидер выбирает вектор стратегий $p(q-\texttt{const})$ для тех же регламентов. В вырожденном случае бездействия p и q постоянны (управление лидера отсутствует).

Теперь можно строго определить выигрыши лидера для указанных информационных регламентов (т.е. решения соответствующих игр), основываясь на ПГР. При бездействии $J^0_{NE} = \inf\limits_{u\in NE} J(u)$, $J^0_C = \inf\limits_{u\in C} J(u)$, $J^0_{\max} = \inf\limits_{u\in U} J(u)$. В случае принуждения для игр Штакельберга получаем:

$$J_{NE}^{COMP-ST} = \sup_{q\in Q} \inf_{u\in NE(q)} J(q,u), \tag{2.7}$$

$$J_{C}^{COMP-ST} = \sup_{q\in Q} \inf_{u\in C(q)} J(q,u), \tag{2.8}$$

$$J_{\max}^{COMP-ST} = \sup_{q \in Q} \inf_{u \in U(q)} J(q, u), \tag{2.9}$$

а для игр Гермейера

$$J_{NE}^{COMP-GER} = \sup_{\tilde{q} \in \tilde{Q}} \inf_{u \in NE(\tilde{q})} J(\pi(\tilde{q}, u)), \tag{2.10}$$

$$J_{C}^{COMP-ST} = \sup_{\tilde{q} \in \tilde{Q}} \inf_{u \in C(\tilde{q})} J(\pi(\tilde{q}, u)), \tag{2.11}$$

$$J_{\max}^{COMP-ST} = \sup_{\tilde{q} \in \tilde{Q}} \inf_{u \in U(\tilde{q})} J(\pi(\tilde{q}, u)), \tag{2.12}$$

$$\tilde{Q} = \{\tilde{q} : U \to Q\}, \pi : \tilde{Q} \times U \to Q \times U.$$

Решения для побуждения строятся аналогично.

3. Эволюционное моделирование

Для описания вычислительного метода остановимся на игре Штакельберга при побуждении и программной стратегии лидера:

$$J_L = \int_0^T \exp(-\rho t) g_L(p(t), u(t), x(t)) dt + \exp(-\rho T) S_L(x(T)) \to \max,$$
$$p(t) \in P,$$
$$J_F = \int_0^T \exp(-\rho t) g_F(p(t), u(t), x(t)) dt + \exp(-\rho T) S_F(x(T)) \to \max,$$
$$u(t) \in U,$$
$$\dot{x} = f(x(t), u(t)),\ x(0) = x_0.$$

Здесь L – лидер, F – ведомый.

Далее описываются два варианта применения генетического алгоритма.

Смешанный вариант. Рассмотрим регламент Γ_1^t при следующих условиях:
а) стратегия лидера p удовлетворяет условию Липшица на интервале $[0, T]$:

$$|p(t) - p(s)| \leq \alpha |t - s|; \tag{3.1}$$

б) существует эффективный алгоритм решения редуцированной задачи. Последнее условие, которое будет конкретизировано позже, подчеркивает, что основная вычислительная сложность задачи состоит в нахождении оптимальной стратегии лидера. Остановимся на первом условии, которое означает, что существует такая положительная константа α, для которой при $\forall t \in [0,T]$ выполняется неравенство (3.1), утверждающее, что возможности лидера ограничены. Определим кусочно-постоянную траекторию. Для этого рассмотрим равномерное разбиение интервала $[0,T]$ с шагом разбиения $h = \dfrac{T}{N}$. Кусочно-постоянная траектория определяется рекуррентно равенствами:

$$p_N(x,\Delta,t) = x, t \in [0,t_1], p_N(x,\Delta,t) = p_N(x,\Delta,t_k) + \alpha h \Delta_{k-1}, \quad (3.2)$$
$$t \in (t_k, t_{k+1}], k = 1,\ldots,N-1.$$

В (3.2) $\Delta = (\delta_i)_{i=1}^{N-2}, \delta_i \in \{-1,0,1\}$. Для дальнейшего нам понадобится следующий результат.

Утверждение 3.1. *Для любого положительного числа ε существуют такие N^*, x^* и Δ^*, что* $\sup\limits_{t\in[0,T]} |p(t) - p_N(x^*,\Delta^*,t)| \le \varepsilon$.

Доказательство. Докажем, что $\inf\limits_{\Delta,x} \sup\limits_{[0,T]} |p(t) - p_N(x,\Delta,t)| \le 2\alpha h$. Доказательство проведем методом математической индукции. Для интервала $[0,t_1]$ $\inf\limits_{x} \sup\limits_{[0,h]} |p(t) - x| \le \sup\limits_{[0,h]} |p(t) - p(0)| \le \alpha h < 2\alpha h$. Допустим, что неравенство справедливо для интервала $[0,t_k]$: $\inf\limits_{\Delta^k} \sup\limits_{[0,t_k]} |p(t) - p(p(0),\Delta^k,t)| \le 2\alpha h$, где $\Delta_k = (\delta_i)_{i=1}^{k-1}$. Обозначим через Δ^{k^*} набор, на котором достигается наименьшее значение. Рассмотрим $\inf\limits_{\Delta^{k+1}} \sup\limits_{[0,t_{k+1}]} |p(t) - p_{k+1}(p(0),\Delta^{k+1},t)| = \inf\limits_{\Delta^k,\delta_k} \max(\sup\limits_{[0,t_k]} |p(t) - p(p(0),\Delta^k,t)|, \sup\limits_{(t_k,t_{k+1}]} |p(t) - p(p(0),\Delta^k,t_k) - \alpha h \delta_k|)$.

Положим $\Delta^{k+1} = (\Delta^{k^*}, \mathtt{sign}(p(t_k) - p_k(p(0),\Delta^{k^*},t_k)))$, имеем:
$\inf\limits_{\Delta^{k+1}} \sup\limits_{[0,t_{k+1}]} |p(t) - p_{k+1}(p(0),\Delta^{k+1},t)| \le \max(2\alpha h, \sup\limits_{(t_k,t_{k+1}]} |p(t) - p(t_k)| +$
$|p(t_k) - p_k(p(0),\Delta^{k^*},t) - \alpha h \mathtt{sign}(p(t_k) - p_k(p(0),\Delta^{k^*},t_k))|) \le$
$\max(2\alpha h, \sup\limits_{(t_k,t_{k+1}]} |p(t) - p(t_k)| + ||p(t_k) - p_k(p(0),\Delta^{k^*},t_k)| - \alpha h|) = 2\alpha h.$

При выводе использована функция $\mathtt{sign}(x)$, которую определим следующим образом:

$$\mathtt{sign}(x) = \begin{cases} -1 & \text{при } x < 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ 1 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Таким образом: $x^* = p(0), N^* = \dfrac{2\alpha T}{\varepsilon}, \delta_1^* = \mathtt{sign}(p(t_1) - p(0)),$
$\delta_k^* = \mathtt{sign}(p(t_k) - p_k(p(0), \Delta^{k^*}, t_k)), k = 2, \dots, N-1.$ □

Пример аппроксимации приведен на рис. 1.

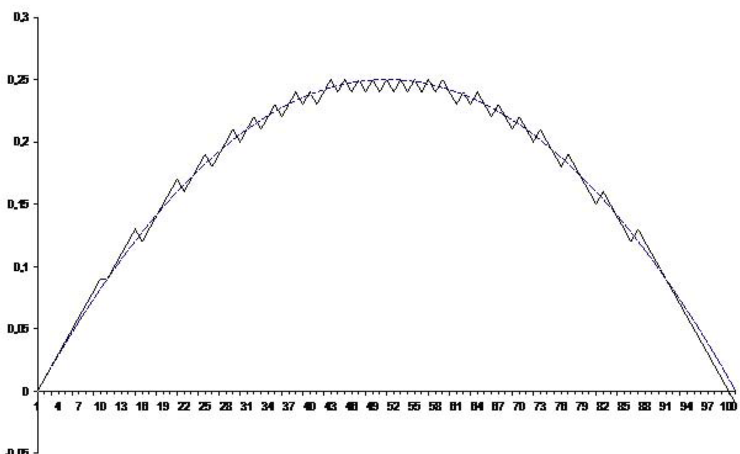

Рисунок 1. Аппроксимация функции $x(1-x)$ на интервале $[0,1]$

Доказанное утверждение в сочетании с условием Липшица для функции $g_F(x,y,z)$ по переменной y позволяет рассмотреть приближенную задачу:

$$J_L = \int_0^T \exp(-\rho t) g_L(p_N(x,\Delta,t), u(t), x(t))dt+$$

$$+\exp(-\rho T)S_L(x(T)) \to \max_{x,\Delta}; \tag{3.3}$$

$$J_F = \int_0^T \exp(-\rho t) g_F(p_N(x,\Delta,t), u(t), x(t))dt+$$

$$+\exp(-\rho T)S_F(x(T)) \to \max_{u(t)\in U}.$$

$$\dot{x} = f(x(t), u(t)), x(0) = x_0.$$

Характер вектора Δ позволяет использовать генетический алгоритм для решения задачи (3.3):

1. Формирование случайным образом начальной популяции $\Pi = (\Delta_i)_{i=1}^{M}$. Вычисление здоровья каждой особи.

2. Начало цикла.

3. Размножение.

4. Мутирование.

5. Вычисление здоровья каждой новой особи.

6. Формирование новой популяции (селекция).

7. Если выполняются условия остановки, то конец цикла, иначе на начало цикла.

Остановимся на пункте 5. Для того, чтобы вычислить здоровье особи Δ, необходимо решить следующую редуцированную задачу:

$$J_L = \int_0^T \exp(-\rho t) g_L(p_N(x, \Delta, t), u(t), x(t))dt +$$

$$+ \exp(-\rho T) S_L(x(T)) \to \max_x; \tag{3.4}$$

$$J_F = \int_0^T \exp(-\rho t) g_F(p_N(x, \Delta, t), u(t), x(t))dt +$$

$$+ \exp(-\rho T) S_F(x(T)) \to \max_{u(t)\in U};$$

$$\dot{x} = f(x(t), u(t));\ x(0) = x_0.$$

Редукция заключается в том, что задача лидера становится одномерной. Ранее было приведено условие – для редуцированной задачи существует эффективный способ ее решения. Если это условие не выполняется, то при дополнительных предположениях о том, что функция $u(t)$ удовлетворяет условию Липшица и функция $g_F(x, y, z)$ удовлетворяет условию Липшица по переменной y, задача ведомого заменяется на приближенную:

$$J_F = \int_0^T \exp(-\rho t) g_F(p_N(x, \Delta, t), u_{\bar{N}}(\bar{x}, t, \bar{\Delta}), x(t))dt +$$
$$+ \exp(-\rho T) S_F(x(T)) \to \max_{\bar{x}, \bar{\Delta}};$$

и генетический алгоритм можно применить для задачи ведомого. Такой вычислительный метод, при котором генетический алгоритм применяется последовательно как для задачи лидера, так и для задачи ведомого, естественно назвать **общим генетическим алгоритмом**.

К основным достоинствам генетического алгоритма относится прежде всего то, что для его применения не требуется каких либо особых свойств целевого функционала. Недостаток алгоритма – это медленная скорость сходимости, как и для всякого случайного поиска. Поэтому смешанный алгоритм, в котором случайный поиск сочетается с традиционными вычислительными методами, выглядит более перспективным по сравнению с общим генетическим алгоритмом ([1]). В генетическом алгоритме на каждой итерации получается более здоровая популяция, поскольку отсеиваются нездоровые особи, что приводит в зависимости от задачи к увеличению или уменьшению функционала на каждом шаге. Поэтому эволюционное моделирование выглядит предпочтительней по сравнению с имитационным при большом числе сценариев.

4. Модельный пример

Рассмотрим следующий иллюстративный пример, основанный на работе [14]. Пусть динамика некоторой эксплуатируемой популяции описывается моделью Мальтуса: $\dot{x} = (a(x) - u(t))x(t)$, где $x(t)$ – биомасса популяции; $u(t) \in [0, 1]$ – доля биомассы, собираемой в урожай, $a(x)$ – убывающая функция. Устойчивость развития характеризуется величиной $\Phi(|x(t) - x_0|)$, где $\Phi(x)$ – возрастающая неотрицательная функция.

Функционал лидера – $\displaystyle\int_0^T [ku(t)x(t) - cq^2(t) - \Phi(|x(t) - x_0|)]dt.$

Функционал ведомого – $J_F = \displaystyle\int_0^T u(t)x(t)dt.$

Игра Штакельберга на основе принуждения записывается как

$$J_L = \int_0^T [ku(t)x(t) - cq^2(t) - \Phi(|x(t) - x_0|)]dt \to \max_{0 \le q \le 1},$$

$$J_F = \int_0^T u(t)x(t)dt \to \max_u, \tag{4.1}$$

$$\dot{x} = (a(x) - u(t))x(t), x(0) = x_0, 0 \le u(t) \le 1 - q(t).$$

Оптимальное решение задачи ведомого при фиксированном q: $u^* = 1 - q$. В результате задача лидера имеет вид

$$J_L = \int_0^T [k(1-q(t))x(t) - c(1-q(t))^2 - \Phi(|x(t) - x_0|)]dt \to \max_{0 \le q \le 1}, \quad (4.2)$$

$$\dot{x} = (a(x) - 1 + q(t))x(t), x(0) = x_0.$$

Применение генетического алгоритма предполагает решение одномерной редуцированной задачи:

$$J_L^{\Delta}(y) = \int_0^T [k(1 - q(y, \Delta, t))x_N(y, \Delta, t) - \quad (4.3)$$

$$-c(1 - q(y, \Delta, t))^2 - \Phi(|x_N(y, \Delta, t) - x_0|)]dt \to \max_{y \in D_\Delta};$$

$$\dot{x}_N(y, \Delta, t) = (a(x_N(y, \Delta, t)) - 1 + q_N(y, \Delta, t))x_N(y, \Delta, t),$$
$$x_N(y, \Delta, 0) = x_0.$$

В (4.3) $D_\Delta = \{y : 0 \le q_N(y, \Delta, t) \le 1\}$. Если $D_\Delta = \varnothing$, то соответствующей особи присваивается значение здоровья, равное $-\infty$. Рассмотрим дифференциальное уравнение в задаче (4.2) в предположении, что $a(x)$ удовлетворяет условию Липшица. Это предположение позволяет получить приближенное решение уравнения. Определим последовательность $x_N^i(y, \Delta, t)$ при помощи рекуррентных уравнений:

$$x_N^0(y, \Delta, t_0) = x_0, x_N^i(y, \Delta, t) =$$

$$= x_{N-1}^i(y, \Delta, t_i) \exp((A_{i-1} - 1 + y + B_{i-1})(t - t_i)), \quad (4.4)$$
$$i = 1, \dots, N.$$

В (4.4) использованы следующие обозначения: $A_j = a(x_N^j(y, \Delta, t_j))$, $B_j = \alpha h \sum_{i=1}^{j} \delta_i$. Приближенное решение дифференциального уравнения выражается через данную последовательность следующим образом:

$$x_N(t) = x_N^i(y, \Delta, t), t \in [t_i, t_{i+1}], i = 0, \dots, N - 1. \quad (4.5)$$

Функционал лидера для приближенного решения дифференциального уравнения выглядит следующим образом:

$$J_L^{\Delta}(y) =$$
$$= \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{k(1-y-B_{i-1})x_N^{i-1}(y,\Delta,t_i)[\exp((A_{i-1}-1+y+B_{i-1})h-1)]}{A_{i-1}-1+y+B_{i-1}} \right] +$$
$$+h\left[\Phi(|x_N^i(y,\Delta,t_i)-x_0|)-c(1-y-B_{i-1})^2\right].$$

В модельном примере параметры приведены в табл. 4.

Таблица 4.

T	1
$a(x)$	$a_0 - a_1 x$
x_0	1
$\Phi(\|x\|)$	$M\|x\|$

На рис. 2 приведен результат расчета.

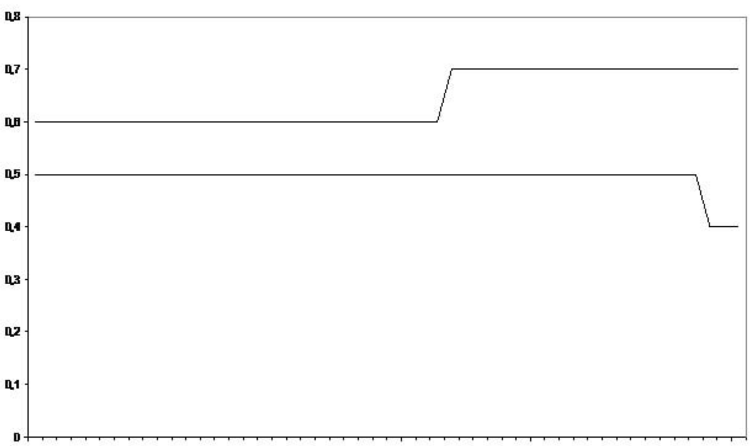

Рисунок 2. Результаты расчета (верхняя линия соответствует значениям: $a_0 = 0.5, a_1 = 0.1, M = 5$; нижняя линия – $a_0 = 0.5, a_1 = 0.01, M = 10$; в первом случае значение целевого функционала лидера – 0.46, во втором – 0.48)

Вычисления выполнены при $k = 1, c = 0.1$.

Комментарий. При $M \to \infty, a_1 \to 0$ равновесное решение будет стремиться к $(1 - a_0, a_0)$ см. [14], что соответствует графику оптимального решения, полученного генетическим алгоритмом.

5. Заключение

Ключевую роль в использовании дифференциально-игровых моделей играют информационные регламенты игр. Это особенно важно в случае иерархических игр, допускающих различную структуру взаимодействия лидера и ведомых игроков. В работе дана классификация иерархических регламентов и выписаны соответствующие гарантированные результаты лидера. Предпринята попытка использования генетического алгоритма для решения иерархической дифференциальной игры. Доказано утверждение, позволяющее проводить дискретизацию исходной непрерывной модели. Приводится пример применения алгоритма.

В дальнейшем предполагается провести более широкую апробацию предложенного метода для различных информационных регламентов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белявский Г.И., Лила В.Б., Пучков Е.В. *Алгоритм и программная реализация гибридного метода обучения искусственных нейронных сетей* // Программные продукты и системы. 2012. № 4. С. 96–101.

2. Емельянов В.В., Курейчик В.В., Курейчик В.М. *Теория и практика эволюционного моделирования.* М., 2003.

3. Гладков Л.А., Курейчик В.В., Курейчик В.М. *Генетические алгоритмы.* М., 2006.

4. Горелов М.А., Кононенко А.Ф. *Динамические игры. I. Язык моделирования* // Автоматика и телемеханика. 2014. № 11. С. 127–149.

5. Горелов М.А., Кононенко А.Ф. *Динамические игры. II. Равновесия* // Автоматика и телемеханика. 2014. № 12. С. 56–77.

6. Горелов М.А., Кононенко А.Ф. *Динамические игры. III. Иерархические игры* // Автоматика и телемеханика. 2015. № 2. С. 89–106.

7. Кельтон Д.В., Лоу А.М. *Имитационное моделирование.* СПб., 2004.

8. Кононенко А.Ф. *О многошаговых конфликтах с обменом информацией* // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1977. Т. 17, вып. 4. С. 922–931.

9. Угольницкий Г.А. *Иерархическое управление устойчивым развитием.* М., 2010.

10. Угольницкий Г.А., Усов А.Б. *Исследование дифференциальных моделей иерархических систем управления путем их дискретизации* // Автоматика и телемеханика. 2013. № 2. С. 109–122.

11. Угольницкий Г.А., Усов А.Б. *Равновесия в моделях иерархически организованных динамических систем с учетом требований устойчивого развития* // Автоматика и телемеханика. 2014. № 6. С. 86–102.

12. Basar T., Olsder G.J. *Dynamic Noncooperative Game Theory.* Philadelphia, 1999.

13. Han Z., Niyato D., Saad W. et al. *Game Theory in Wireless and Communication Networks: Theory, Models, and Applications.*Cambridge University Press, 2012.

14. Kornienko S.A., Ougolnitsky G.A. *Dynamic Stackelberg Games with Requirements to the Controlled System as a Model of Sustainable Environmental Management* // Advances in Systems Science and Applications. 2014. V. 14(4). P. 325–345.

THE EVOLUTION MODELING IN THE PROBLEMS OF CONTROL OF STABLE DEVELOPMENT OF ACTIVE SYSTEMS

Grigory I. Belyavsky, «Operation research» of mathematic, mechanic and computer sciences institute of South Federal University, Dr.Sc., professor (gbelyavski@sfedu.ru),
Natalia V. Danilova, «Operation research» of mathematic, mechanic and computer sciences institute of South Federal University, Cand.Sc. (danilova198686@mail.ru),
Gennadii A. Ougolnitsky, «Operation research» of mathematic, mechanic and computer sciences institute of South Federal University, Dr.Sc., professor (ougoln@mail.ru)

Abstract: There is the applying of the evolution modeling for the decision of the problems of the control of the stable development of difficult systems. Different information structures of hierarchical differential games which formalize the problems of control of stable development are described. The result which provides possibility of using the genetic algorithms for the decision of these problems is obtained. The statement is illustrated by a model example.

Keywords: differential games, control of stable development, evolution modeling.