Математическая Теория Игр и её Приложения, т.9, в.1, с. 27–44

УДК 519.83
ББК 22.18

ТЕОРЕТИКО-ИГРОВАЯ МОДЕЛЬ СОГЛАШЕНИЯ ОБ ОГРАНИЧЕНИИ ЗАГРЯЗНЕНИЯ АТМОСФЕРЫ

Александр А. Васин*
Анастасия Г. Дивцова
МГУ им. М.В. Ломоносова
119991, Москва, СП-1, Ленинские горы, факультет ВМК
e-mail: vasin@cs.msu.su, nastyakislaeva@gmail.com

В данной статье рассмотрена модель анализа соглашений в области трансграничных загрязнений атмосферы выбросами промышленного производства. Взаимодействие стран описано в виде повторяющейся игры с побочными платежами. Целью работы является определение условий, при которых существует совершенное подыгровое равновесие, реализующее Парето-оптимальный исход в каждом повторении игры.

Ключевые слова: повторяющаяся игра, равновесие Нэша, совершенное подыгровое равновесие, Парето-оптимальная ситуация.

1. Введение

В настоящее время уделяется значительное внимание проблеме загрязнения атмосферы. Основными загрязняющими атмосферу веществами являются оксид углерода, оксиды азота, диоксид серы, углеводороды и аммиак. Диоксид серы, оксиды азота и аммиак участвуют в формировании кислотных дождей: эти вещества находятся в атмосфере сравнительно недолгое время, переносятся ветром и выпадают на землю вместе с дождем. Кислотный дождь загрязняет водоемы и оседает на растениях, нанося ущерб природным ресурсам.

---

* Работа поддержана грантом РФФИ 16-01-00353

Диоксид серы образуется в процессе сгорания серосодержащих ископаемых видов топлива, в основном угля, а также при переработке сернистых руд. Оксиды азота образуются при всех процессах горения и при производстве азотных удобрений и нитросоединений. Аммиак является побочным продуктом животноводства. Таким образом, основной источник этих веществ в атмосфере – выбросы побочных продуктов промышленного производства.

Первым шагом международных совместных действий в решении данной проблемы стала разработанная Европейской экономической комиссией (ЕЭК) ООН Конвенция о трансграничном загрязнении атмосферного воздуха. Конвенция является одним из основополагающих международных соглашений, обеспечивающих координацию усилий в области исследований и мониторинга загрязнения атмосферного воздуха на региональном уровне, а также разработки стратегий сокращения выбросов. Данный документ положил основу по ограничению выбросов конкретных загрязнителей путем разработки протоколов, обладающих обязательной юридической силой. Первым глобальным соглашением об охране атмосферы, основанным на применении теоретико-игровых методов, стал Киотский протокол, определяющий механизм международной торговли квотами на выбросы парниковых газов. Важное значение имеет изучение принципов формирования таких соглашений и анализ их устойчивости с помощью теоретико-игровых моделей.

Наиболее универсальным показателем, характеризующим интересы отдельной страны в эколого-экономическом взаимодействии с другими странами, является ее общественное благосостояние. Эта величина включает полезность потребления за вычетом затрат на производство и сокращение загрязнения среды, а также ущерба от загрязнения. В условиях развитой международной торговли благосостояние может перераспределяться с помощью побочных платежей.

Глобальные экологические проблемы рассматривались с точки зрения теории игр в ряде исследований [5-9,11]. В работе [11] показано, что кооперация стран ведет к уменьшению суммарного загрязнения и увеличению суммарного выигрыша. В работе [6] игроки минимизируют сумму затрат на очистку и ущербов от загрязнения, функция ущерба предполагается квадратичной. Однако, в данных работах не обсуждается метод распределения суммарного ущерба между участниками кооперации. В работе [9] суммарные затраты кооперации распределяются между участниками по вектору Шепли. Для данного метода показано, что возможно создать такой механизм распределения суммарных затрат в течение времени, что первоначальное соглашение остается взаимовыгодным в течение всей игры, то есть является динамически устойчивым (см. [3]). Модель построена для веществ, находящихся в атмосфере длительное время, например, оксида углерода, поэтому учитывает накопление загрязнения.

В настоящей работе в качестве модели взаимодействия рассматривается повторяющаяся игра с конечными скользящими горизонтами планирования: принимая решения об объеме производства и затратах на очистку в очередной период, каждая страна стремится максимизировать суммарное благосостояние за время до своего горизонта планирования (например, за предстоящие 5 периодов). При этом она планирует свои действия и строит прогноз относительно действий других участников. Такая постановка представляет интерес, поскольку в разных странах отличаются характерные горизонты планирования лиц, принимающих решения в связи с разным ожидаемым временем пребывания у власти. Подобные модели рассматривались также в [4,10]. Наряду с объективными факторами они отражают также ограниченную рациональность участников. Рассматриваемая модель относится к динамическим стратегическим играм. Побочные платежи являются элементами стратегий игроков.

В данной работе нас интересует возможность заключения устойчивых соглашений об ограничении выбросов загрязнителей. Формально устойчивость описывается понятием совершенного подыгрового равновесия (subgame perfect equilibrium [12], далее – СПР, см. [2, стр. 149]): стратегия, соответствующая выполнению соглашения, оптимальна для каждой страны при его соблюдении другими странами; возможность нарушения соглашения отдельной страной предусматривается в его рамках, при этом соблюдение соглашения оптимально для каждой из оставшихся стран, а отклонившаяся страна проигрывает в результате нарушения. Определение СПР соответствует принципу динамической устойчивости применительно к индивидуальным отклонениям игроков. В модели учитывается реальная асимметрия стран как с точки зрения объемов загрязнения, так и с точки зрения его влияния на благосостояние каждой страны. Мы определяем минимальные горизонты планирования, при которых возможно соглашение, обеспечивающее устойчивую реализацию Парето-оптимального исхода.

В разделе 2 дается описание взаимодействия в данный период времени в форме одношаговой игры. Изучаются задачи вычисления равновесия Нэша и Парето-оптимальной ситуации. Доказано, что любая разумная (недоминируемая) стратегия однозначно определяется объемом загрязнения, производимого данным игроком. В разделе 3 процесс взаимодействия стран описан в виде повторяющейся игры с побочными платежами и скользящими горизонтами планирования. Выясняются условия существования Парето-оптимального СПР, в котором Парето-оптимальная ситуация реализуется в каждом повторении. Раздел 4 содержит основные выводы из данной статьи.

2. Модель однократного взаимодействия.

Рассмотрим игру Г в нормальной форме, описывающую взаимодействие стран при трансграничном загрязнении. Множество игроков $I = \{1, \ldots, n\}$ представляет собой n стран, осуществляющих производственную деятельность. В заданный период времени стратегией каждого игрока является пара вида $s_i = (q_i, r_i)$, где $q_i \geq 0$ – объем выпуска, а $r_i \geq 0$ – затраты на очистку. Данной стратегии страны i соответствует объем загрязнения $z_i = p_i(q_i, r_i)$, выбрасываемый в атмосферу.

Обозначим через $u_i(q_i)$ полезность, которую получает страна от производства товара в объеме q_i, а через $C_i(q_i)$ – затраты на производство. Тогда величина $u_i(q_i) - C_i(q_i)$ характеризует общее благосостояние страны i без учета загрязнения. Суммарное загрязнение, получаемое страной i от всех стран, составляет $\hat{z} = \sum\limits_{j=1}^{n} \pi_{ji} z_j$, где π_{ji} обозначает переносимую на страну i долю загрязнения, выбрасываемого страной j. Тогда функция $H_i(\hat{z})$ описывает ущерб стране i от загрязнения. Предположим, что каждая страна стремится максимизировать свое благосостояние с учетом экономической прибыли, ущерба от загрязнения и затрат на очистку. Функция выигрыша игрока i имеет вид $F_i(\vec{s}) = u_i(q_i) - C_i(q_i) - H_i(\sum\limits_{j=1}^{n} \pi_{ji} p_j(q_j, r_j)) - r_i$.

Таким образом, мы определили игру в нормальной форме, соответствующую описанному взаимодействию. Согласно известному определению ([1]), ситуация s^* является равновесием Нэша, если каждому игроку невыгодно менять свою стратегию поведения в одиночку при фиксированных стратегиях других игроков, то есть

$$\max_{s_i} F_i(s^* || s_i) = F_i(s^*), i = 1, \ldots, n. \tag{2.1}$$

Далее предполагается, что игроки могут перераспределять выигрыши с помощью побочных платежей. В этом случае ситуация $(\bar{s}_i, i \in I)$ называется оптимальной по Парето, если в ней реализуется максимум суммарной функции выигрыша:

$$(\bar{q}_i, \bar{r}_i, i \in I) \to \max_{\vec{s}} \sum_{i=1}^{n} F_i(\vec{s}). \tag{2.2}$$

Опишем свойства функций, используемых в этой модели. Они соответствуют обычным для экономико-математических моделей предположениям. Функция полезности $u_i(q)$ предполагается монотонно возрастающей и вогнутой. Функция ущерба $H_i(\hat{z})$ – выпуклая и возрастающая. Выпуклой и возрастающей также является функция издержек $C_i(q)$, причем $C_i' \to \infty$ при $q_i \to \infty$. Функция $p_i(q_i, r_i)$ возрастает и выпукла по q_i, убывает и выпукла по r_i.

Рассмотрим задачи вычисления равновесия Нэша и Парето – оптимальной ситуации для данной модели. Покажем, что в качестве стратегий игроков можно рассматривать значения z_i. Обозначим $\hat{q}_i$ решение задачи максимизации прибыли без учета загрязнения: $u(q_i) - C(q_i) \to \max\limits_{q_i}$. Пусть $\hat{z}_i = p_i(\hat{q}_i, 0)$. Покажем, что всякая стратегия $s_i = (q_i, r_i)$, где $q_i > \hat{q}_i$, строго доминируется стратегией $\hat{s}_i = (\hat{q}_i, r_i)$. Действительно, $u_i(\hat{q}_i) - C_i(\hat{q}_i) - H_i(\sum\limits_{j=1}^{n} \pi_{ji} p_j(\hat{q}_j, r_j)) - r_i >$ $> u_i(q_i) - C_i(q_i) - H_i(\sum\limits_{j=1}^{n} \pi_{ji} p_j(q_j, r_j)) - r_i$ при $q_i > \hat{q}_i$, так как максимум функции $u_i(q_i) - C_i(q_i)$ достигается в $\hat{q}_i$, а функция ущерба $H_i(\hat{z})$ является выпуклой и возрастающей. Очевидно, что выигрыши других игроков также возрастают при замене s_i на $\hat{s}_i$. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2.1. *Решения* $(q_i^*, r_i^*, i = 1, \ldots, n)$ *и* $(\bar{q}_i, \bar{r}_i, i = 1, \ldots, n)$ *задач (2.1) и (2.2) удовлетворяют условиям* $p_i(q_i^*, r_i^*) \leq \hat{z}_i$, $p_i(\bar{q}_i, \bar{r}_i) \leq \leq \hat{z}_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Для каждых i, $z_i \in (0, \hat{z}_i)$ рассмотрим задачу:

$$\begin{cases} u_i(q) - C_i(q) - r_i \to \max\limits_{q_i, r_i}, \\ p_i(q, r) \leq z_i. \end{cases} \tag{2.3}$$

Определим $q_i(z_i)$ и $r_i(z_i)$ как решение задачи (2.3). Пусть $r_i(q, z)$ – решение уравнения $p_i(q, r) = z$, если $p_i(q, 0) \geq z$, иначе $r_i(q, z) = 0$. Отметим, что $u_i(q) - C_i(q)$ – вогнутая функция. Далее предположим, что $u_i(q) - C_i(q) - r_i(q, z)$ также вогнутая функция. Для этого достаточно, чтобы функция $\dfrac{dr_i}{dq} = -(p_i(q, r_i(q, z)))'_q / (p_i(q, r_i(q, z)))'_r$ возрастала по q. Смысл этого условия в том, что с ростом выпуска одинаковые его приращения требуют больших или равных затрат на очистку, чтобы поддерживать заданную величину выброса загрязнения. Для упрощения технических деталей предположим, что значение $u'_i(0)$ велико, поэтому $q_i(z_i) \neq 0$.

Лемма 2.1. *В данных условиях значения* $q_i(z_i)$ *и* $r_i(z_i)$ *однозначно определяются в зависимости от* z_i *и удовлетворяют системе:*

$$\begin{cases} u'_i(q) - C'_i(q) + \dfrac{(p_i(q, r))'_q}{(p_i(q, r))'_r} = 0, \\ p_i(q, r) = z_i. \end{cases} \tag{2.4}$$

Доказательство. Отметим, что для $z_i \in [0, \hat{z}_i]$ решение (2.3) всегда удовлетворяет второму условию как равенству. Значение $r_i(q, z)$ определяется однозначно из этого уравнения. Поэтому задачу (2.3) можно переписать в виде: $u_i(q) - C_i(q) - r_i(q, z) \to \max\limits_{q_i \geq 0}$. Согласно данным выше условиям, оптимизируемая функция вогнута по q, и поскольку $q_i^* \neq 0$, то в точке максимума выполнено условие первого порядка из (2.4). $\square$

Определим, исходя из Леммы 2.1, функцию полезности в зависимости от $z_i : v_i(z_i) = u_i(q_i(z_i)) - C_i(q_i(z_i)) - r_i(z_i)$. Выясним ее свойства при некоторых условиях на функцию $p(q, r)$. Рассмотрим 2 случая:

a) Пусть $p(q,r) = \phi(q) - kr$, $\phi(q)$ – монотонно возрастающая выпуклая функция, характеризующая объем загрязнения в зависимости от объема производства, k – постоянная в данном случае эффективность затрат на очистку. Обозначим $\bar{v}(q) = u(q) - C(q)$, тогда задача (2.3) принимает вид: $\bar{v}(q) - \dfrac{\phi(q) - z}{k} \to \max\limits_{q \le \hat{q}}$.

Эта функция вогнута по q, поэтому оптимальное значение удовлетворяет условию первого порядка $\bar{v}'(q^*) = (\phi'(q^*))/k$. Определим из этого условия q^*, а $r^*(z) = \max[0; (\phi(q^*) - z)/k]$. Таким образом, $v(z) = \bar{v}(q^*) - \max[0; (\phi(q^*) - z)/k]$ – вогнутая функция.

b) В более общем случае $p(q,r) = \phi(q) - K(r)$, где эффективность очистки характеризуется вогнутой возрастающей функцией $K(r)$, поскольку предельная эффективность очистки не возрастает с увеличением r. Тогда задача (2.3), исходя из Леммы 2.1, принимает вид:

$$\Phi(z,q) = \bar{v}(q) - K^{-1}(\phi(q) - z) \to \max_{g \le \hat{q}}. \tag{2.5}$$

Лемма 2.2. *В указанных условиях (2.5) является задачей выпуклого программирования и оптимальное значение $q^*(z)$ удовлетворяет условию первого порядка: $\bar{v}'(q) - (K^{-1})'(\phi(q) - z)\phi'(q) = 0$. Оптимальное значение благосостояния $\Phi(z) = \bar{v}(q^*(z)) - K^{-1}(\phi(q^*(z)) - z)$ является вогнутой функцией переменной z.*

Доказательство. $\phi(q)$ – монотонно возрастающая выпуклая функция, $K(r)$ – возрастающая вогнутая функция, $\bar{v}(q)$ – вогнутая, тогда функция $\bar{v}(q) - K^{-1}(\phi(q) - z)$ является вогнутой функцией по q, поскольку ее вторая производная имеет вид $\bar{v}''(q) - (K^{-1})''(\phi(q) - z)\phi'(q) - (K^{-1})'(\phi(q) - z)\phi''(q)$. Поэтому в точке максимума выполняется условие первого порядка, и оптимальное значение $q^*(z)$ находится из него: $\bar{v}'(q) - (K^{-1})'(\phi(q) - z)\phi'(q) = 0$. Поскольку $\dfrac{d\Phi(z, q^*(z))}{dz} = \dfrac{\partial\Phi(z, q^*(z))}{\partial q}\dfrac{dq^*(z)}{dz} + \dfrac{\partial\Phi(z, q^*(z))}{\partial z}$ и $\dfrac{\partial\Phi(z, q^*(z))}{\partial q}$ в оптимальной точке обращается в ноль, получаем $\dfrac{d\Phi(z, q^*(z))}{dz} = (K^{-1})'(\phi(q^*(z)) - z)$. Покажем, что эта функция является убывающей по z, что и докажет вогнутость оптимального значения благосостояния.

Из условия первого порядка $\phi(q^*(z)) - z = (K^{-1})'^{-1}\dfrac{\bar{v}'(q^*(z))}{\bar{\phi}'(q^*(z))}$ и является убывающей функцией от z, в то время как

$(K^{-1})'(\phi(q(z)) - z)$ является возрастающей функцией от убывающей, то есть убывает по z. $\square$

Полученные результаты означают следующее. Принимая решения (индивидуальные или коллективные) об экономических стратегиях, игроки могут рассматривать уровни загрязнения как основные переменные. Для каждой страны оптимальные объем производства и затраты на очистку однозначно определяются по z_i согласно Лемме 2.1 независимо от уровней $z_j, j \in I \backslash i$. Таким образом, можно рассматривать $z_i \in [0, \hat{z}_i]$ как стратегию страны i. Функция выигрыша с учетом ущерба от загрязнения принимает вид $F_i(z) = v_i(z_i) - H_i(\sum\limits_{j=1}^{n} \pi_{ji} z_j)$. Рассмотрим игру G с этими функциями и множествами стратегий $Z_i = [0, \hat{z}_i], i = 1, \ldots, n$. Исходя из исследованных примеров, полагаем, что $v_i(z_i)$ – вогнутая функция.

Утверждение 2.2. *Пусть $s^* = (q_i^*, r_i^*, i \in I)$ – равновесие Нэша в игре Г, тогда ситуация $z^* = (p_i(q_i^*, r_i^*), i \in I)$ является равновесием Нэша игры G. И наоборот, если z^* – равновесие Нэша игры G, то $s^* = (q_i(z^*), r_i(z^*), i \in I)$ – равновесие в исходной игре Г.*

Доказательство. Пусть $s^* = (q_i^*, r_i^*, i \in I)$ является решением задачи (2.1). Тогда однозначно определяются величины $z_i^* = p_i(q_i^*, r_i^*)$, $i \in I$. По Лемме 2.1, используя значения z_i^*, однозначно находятся величины $q_i^* = q_i(z_i^*)$ и $r_i^* = r_i(z_i^*)$, максимизирующие функцию $u_i(q) - C_i(q) - r_i$. Тогда $v_i(z_i) - H_i(\sum\limits_{j=1}^{n} \pi_{ji} z_j) = u_i(q_i(z_i)) - C_i(q_i(z_i)) - H_i(\sum\limits_{j=1}^{n} \pi_{ji} p_j(q_j, r_j)) - r_i(z_i) \le u_i(q_i^*) - C_i(q_i^*) - H_i(\sum\limits_{j=1}^{n} \pi_{ji} z_j) - r_i^* = v_i(z_i^*) - H_i(\sum\limits_{j=1}^{n} \pi_{ji} z_j)$, $\forall i \in I$. Следовательно, $z^* = (p_i(q_i^*, r_i^*), i \in I)$ – равновесие Нэша игры G. В обратную сторону доказывается аналогично. $\square$

Соответствующее игре G условие первого порядка

$$v_i'(z_i) - H_i'(\sum_{j=1}^{n} \pi_{ji} z_j) \pi_{ii} = 0, i \in I,$$

позволяет в общем случае вычислить равновесие Нэша. Задача поиска точки $\bar{z}$, оптимальной по Парето, имеет вид:

$$\sum_{k=1}^{n}(v_i(z_k) - H_k(\sum_{j=1}^{n}\pi_{jk}z_j)) \to \max_z.$$

Поскольку данная функция вогнута по z, то условие первого порядка

$$v_i'(z_i) - \sum_{k=1}^{n}(H_i'(\sum_{j=1}^{n}\pi_{ji}z_j)\pi_{ik}) = 0, i \in I,$$

позволяет в общем случае вычислить точку, оптимальную по Парето.

Обсудим вопрос существования и единственности равновесия Нэша.

Утверждение 2.3. *В игре G существует равновесие Нэша.*

Доказательство. По лемме 2.2 функция $v_i(z_i)$ вогнута по z_i, а функция ущерба $H_i(\sum_{j=1}^{n}\pi_{ji}z_j)$ является выпуклой по предположению. Таким образом, функция выигрыша $F_i(z) = v_i(z_i) - H_i(\sum_{j=1}^{n}\pi_{ji}z_j)$ является вогнутой по z_i функцией для $i \in I$. То есть выполнены условия теоремы существования равновесия Нэша ([2]). □

Исследуем, при каких условиях равновесная ситуация z^* единственна и как она может быть вычислена. Рассмотрим два случая.

1) $\pi_{ii} = 0$. Этот случай связан с тем, что каждая страна, оптимизируя производство, будет стараться не загрязнять себя. Из УПП получаем: $v_i'(z_i^*) = 0, i \in I$. Таким образом, равновесная стратегия для строго вогнутой v_i единственна и $z_i^* = \hat{z}_i$.

2) H_i – линейная функция. Тогда $H_i' = const$ и УПП имеет вид: $v_i'(z_i) = const \cdot \pi_{ii}, i \in I$. В этом случае z_i^* не зависит от остальных компонент и находится из данного уравнения.

В общем случае равновесие не всегда будет единственным даже для двух стран. Напомним, что функции наилучших ответов (см. [2, стр. 142]) для игры двух лиц с непрерывными функциями выигрыша $F_1(z_1, z_2)$, $F_2(z_1, z_2)$ определяются как: $br_1(z_2) = Arg\max_{z_1} F_1(z)$, $br_2(z_1) = Arg\max_{z_2} F_2(z)$. Всякая равновесная стратегия (z_1^*, z_2^*) является решением системы: $br_1(z_2^*) = z_1^*$,$br_2(z_1^*) = z_2^*$. Поиск равновесий сводится к нахождению точек пересечения графиков наилучшего ответа первого и второго игроков. Для того, чтобы равновесие было единственным, достаточно, чтобы углы наклона графиков наилучшего ответа первого и второго игроков в каждой точке пересечения (z_1^0, z_2^0) удовлетворяли условию:

$$|\frac{dbr_1(z_2^0)}{dz_2}||\frac{dbr_2(z_1^0)}{dz_1}| < 1. \tag{2.6}$$

Вычислим эти величины из УПП. Рассмотрим условия первого порядка для двух стран:

$$\begin{aligned} v_1'(z_1) &= H_1'(\pi_{11}z_1 + \pi_{21}z_2)\pi_{11}, \\ v_2'(z_2) &= H_2'(\pi_{12}z_1 + \pi_{22}z_2)\pi_{22}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Решением первого уравнения будет функция наилучшего ответа первого игрока, а решением второго уравнения – второго. Из уравнений (2.7), используя теорему о дифференцировании неявной функции, найдем величины $\dfrac{dbr_1(z_2)}{dz_2}$ и $\dfrac{dbr_2(z_1)}{dz_1}$:

$$\frac{dbr_1(z_2)}{dz_2} = \frac{H_1''(\pi_{11}z_1 + \pi_{21}z_2)\pi_{11}\pi_{21}}{v_1''(z_1) - \pi_{11}^2 H_1''(\pi_{11}z_1 + \pi_{21}z_2)},$$

$$\frac{dbr_2(z_1)}{dz_1} = \frac{H_2''(\pi_{12}z_1 + \pi_{12}z_2)\pi_{22}\pi_{12}}{v_2''(z_2) - \pi_{22}^2 H_2''(\pi_{12}z_1 + \pi_{22}z_2)}.$$

Утверждение 2.4. *Для того, чтобы в игре G для случая 2 стран равновесие Нэша (z_1^*, z_2^*) было единственным, достаточно выполнения условия:* $\pi_{11}\pi_{22} > \pi_{12}\pi_{21}$.

Доказательство. Поскольку $H_1(\hat{z})$ и $H_2(\hat{z})$ – выпуклые функции, а $v_1(z_1)$ и $v_2(z_2)$ – вогнутые, то $|\dfrac{dbr_1(z_2)}{dz_2}||\dfrac{dbr_2(z_1)}{dz_1}| =$

$$= |\frac{H_1''(\pi_{11}z_1 + \pi_{21}z_2)\pi_{11}\pi_{21}}{v_1''(z_1) - \pi_{11}^2 H_1''(\pi_{11}z_1 + \pi_{21}z_2)}||\frac{H_2''(\pi_{12}z_1 + \pi_{12}z_2)\pi_{22}\pi_{12}}{v_2''(z_2) - \pi_{22}^2 H_2''(\pi_{12}z_1 + \pi_{22}z_2)}| <$$

$$< \frac{H_1''(\pi_{11}z_1 + \pi_{21}z_2)\pi_{11}\pi_{21}H_2''(\pi_{12}z_1 + \pi_{12}z_2)\pi_{22}\pi_{12}}{\pi_{11}^2 H_1''(\pi_{11}z_1 + \pi_{21}z_2)\pi_{22}^2 H_2''(\pi_{12}z_1 + \pi_{12}z_2)} = \frac{\pi_{21}\pi_{12}}{\pi_{11}\pi_{22}} < 1. \qquad \square$$

Обозначим далее $z^* = (z_1^*, \ldots, z_n^*)$ – равновесие по Нэшу, $\bar{z} = (\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n)$ - ситуацию, оптимальную по Парето, а для каждой рассматриваемой функции $f_i(z), i \in I, f_i^* := f_i(z^*), \bar{f}_i := f_i(\bar{z})$, $f_\Sigma(z) := \sum\limits_{i \in I} f_i(z)$.

У некоторых стран выигрыш в Парето-оптимальной ситуации может оказаться меньше, чем в ситуации равновесия Нэша. Чтобы заинтересовать в участии в кооперации такие страны, можно ввести побочные платежи. Основываясь на работе [6], определим их величину следующим образом:

$$y_i = (F_i^* - \bar{F}_i) + \mu_i(\bar{F}_\Sigma - F_\Sigma^*), i = 1, \ldots, n,$$
$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i = 1, \mu_i \in [0; 1], i = 1, \ldots, n. \tag{2.8}$$

Введенные побочные платежи уравновешены, то есть $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i = 0$. Обозначим выигрыш i-й страны с учетом побочных платежей $\bar{F}_i^P = \bar{F}_i + y_i$. Убедимся, что при введении указанной системы платежей при любых допустимых μ_i всем странам будет выгодна кооперация. Действительно, $\forall i = 1, \ldots, n$

$$\bar{F}_i^P - F_i^* = \bar{F}_i - F_i^* + (F_i^* - \bar{F}_i) + \mu_i(\bar{F}_\Sigma - F_\Sigma^*) = \mu_i(\bar{F}_\Sigma - F_\Sigma^*) \geq 0.$$

Это условие является необходимым, но недостаточным для устойчивой кооперации всех стран. Чтобы выяснить достаточные условия, нужно рассмотреть повторяющуюся игру.

3. Повторяющаяся игра с побочными платежами

Исследуем возможность устойчивой реализации Парето-оптимальной ситуации. В реальности рассматриваемое взаимодействие соседних стран многократно повторяется в примерно одинаковых начальных условиях. В отличие от работы [9] мы рассматриваем загрязнения, которые распадаются за один период, то есть характерное время, на которое принимаются решения относительно объемов производства и оцениваются объемы выбросов в странах-партнерах. Предположим, что выплата компенсаций странам, сокращающим выброс загрязнения в ущерб собственному благосостоянию, производится после подтверждения факта сокращения выбросов. Интересы лиц, принимающих решение по данному вопросу, в каждый период связаны с конечным интервалом времени в будущем. Для упрощения формулировок допустим, что размер этого интервала (горизонт планирования T_i) для каждой страны i остается постоянным. Более общая постановка проблемы обсуждается ниже в Замечании 3.2.

При заключении соглашения о реализации Парето-оптимальной ситуации нарушения возможны как в отношении объемов загрязнения, так и в отношении выплат компенсационных платежей. Возможны различные варианты реакции на нарушение (например, введение экономических санкций). Далее рассматривается лишь «мягкий» вариант, когда со следующего после нарушения периода все участники переходят к равновесным по Нэшу стратегиям.

Формальной моделью взаимодействия служит повторяющаяся игра со скользящими горизонтами планирования. Взаимодействие повторяется в периоды $t = 1, 2, \ldots$, каждый из которых делится на 2 этапа. На этапе $t1$ происходит выбор объемов загрязнения $z_i^t, i \in I$, которые определяют выигрыши $F_i^t = F_i(z^t), i \in I$, с учетом потребления, затрат на очистку и ущерба от загрязнения. На этапе $t2$ игроки получают побочные платежи $y_i^t, i \in I, \sum\limits_i y_i^t = 0$, и определяются итоговые выигрыши $\bar{F}_i^t(z^t, y^t) = F_i(z^t) + y_i^t, i \in I$, за период t. На этапе $t2$ действуют лишь страны, для которых $y_i^t < 0$. Распределение выплачиваемых ими денег осуществляется независимым фондом, который действует строго по правилам, т.е. не является игроком. Если кто-то из игроков отклоняется на этом этапе, то выплата платежей фактически не производится. Каждый игрок принимает решение на текущем этапе, исходя из полной информации о действиях всех игроков в предыдущее время. При этом игрок стремится максимизировать свой суммарный выигрыш за $T_i + 1$ периодов, начиная с текущего.

Последовательность действий игроков $h^{t-1} = (z^\tau, y^\tau)_{\tau=1}^{t-1}$ называется историей игры до этапа $t1$. К этапу $t2$ к истории добавляется значение z^t. Стратегия игрока i в каждый период t определяет выбор z_i^t, а затем y_i^t, в зависимости от истории. Формально стратегия задается функциями $z_i^t = \mu_i^1(h^{t-1}), y_i^t = \mu_i^2(h^{t-1}, z^t)$, определенными на множестве возможных историй. Набор стратегий $\mu = (\mu_i^1, \mu_i^2, i \in I)$ определяет последовательность действий игроков $h(\mu) = (z^\tau(\mu), y^\tau(\mu))_{\tau=1}^{\infty}$ и значения их выигрышей в каждый период. Набор μ^* называется равновесием Нэша данной повторяющейся игры, если $\forall t, i$

$$\mu_i^* = arg \max_{\mu_i : h^{t-1}(\mu^* || \mu_i) = h^{t-1}(\mu^*)} \sum_{\tau=t}^{t+T_i} \bar{F}_i(z^\tau(\mu^* || \mu_i), y^\tau(\mu^* || \mu_i)).$$

Для многошаговых игр обычно рассматривают более сильные условия оптимальности, поскольку в данном определении не накладывается условий рациональности поведения игроков в случае отклонения кого-либо от равновесия. Поэтому равновесие может достигаться за счет угрозы наказания, реализация которого сомнительна, поскольку оно наносит вред не только отклонившемуся игроку, но и остальным игрокам.

Понятие совершенного подыгрового равновесия исключает подобные случаи. Ситуация μ^* является СПР, если выполняется:

$$\forall h, \forall t \ \mu_i^* = arg \max_{\mu_i} \sum_{\tau=t}^{t+T_i} \bar{F}_i(z^\tau(h^{t-1}, \mu^*||\mu_i), y^\tau(h^{t-1}, \mu^*||\mu_i)), \qquad (3.1)$$

то есть какова бы ни была предшествующая история до периода t, выбор стратегии μ_i^* с этого периода является оптимальным, если остальные игроки будут применять стратегии $\mu_j^*, j \in I, j \neq i$.

Далее нас интересует существование СПР, для которого в каждом повторении реализуется Парето-оптимальная ситуация $\bar{z}$. Простейшая конструкция такого равновесия основана на следующей идее: в случае отклонения какого-то игрока на некотором этапе остальные игроки, начиная со следующего этапа, переходят к реализации равновесия Нэша z^*. Побочные платежи, естественно, прекращаются. Такие стратегии применяются до тех пор, пока для отклонившегося игрока суммарный ущерб не превысит выигрыша, полученного в результате отклонения. После этого возможно возвращение к реализации кооперативного исхода. Отметим, что во время наказания условие (3.1) для СПР выполняется автоматически, поскольку в каждый период реализуется равновесие Нэша. Выясним, при каких ограничениях это условие выполняется и во время реализации кооперативного исхода.

Формально для данного вектора побочных платежей $\bar{y}$, удовлетворяющего (2.8), мы рассматриваем ситуацию повторяющейся игры, в которой стратегия μ_i игрока $i \in I$ определяется следующим образом: если все игроки придерживаются кооперативного поведения, то

$$\mu_i^1(h^{t-1}) = \bar{z}_i, \ \mu_i^2(h^{t-1}, z^t) = y_i, \qquad (3.2)$$

если же кто-либо отклоняется, то

$$\mu_i^1(h^{t-1}) = z_i^*, \ \mu_i^2(h^{t-1}, z^t) = 0. \qquad (3.3)$$

Далее рассмотрим случай, когда оптимальное отклонение от $\bar{z}$ для игрока i состоит в реализации z_i^* (см. случаи 1), 2) в разделе 2). Следующий результат показывает, при каких горизонтах планирования ситуация вида (3.2)-(3.3) является СПР. Вектор побочных платежей выбирается так, чтобы обеспечить невыгодность отклонения, если это возможно.

Теорема 3.1. *СПР вида (3.2)-(3.3) существует, если и только если*

$$\sum_{i\in I}((H_i^* - \bar{H}_i)/(1+T_i)) \leq \bar{F}_\Sigma - F_\Sigma^*. \tag{3.4}$$

При этом условии побочные платежи можно определить как $y_i = v_i^* - \bar{v}_i - (H_i^* - \bar{H}_i)\lambda T_i/(1+\lambda T_i)$, *где* $\lambda \leq 1$ *– корень уравнения* $\sum\limits_{i\in I}((H_i^* - \bar{H}_i)/(1+\lambda T_i)) = \bar{F}_\Sigma - F_\Sigma^*$.

Доказательство. Пусть игрок i отклонился от указанной ситуации (3.2)-(3.3) в некоторый период. Обозначим через $\triangle\omega_i^+$ максимальную прибыль, которую он получит в текущем периоде от отклонения, а через $\triangle\omega_i^-$ – его минимальные потери, которые он понесет в каждом следующем периоде (при реализации z^*):

$$\triangle\omega_i^+(\bar{y}) = v_i^* - \bar{v}_i - y_i,$$

$$\triangle\omega_i^-(\bar{y}) = H_i^* - \bar{H}_i + \bar{v}_i - v_i^* + y_i.$$

Отклонение для игрока i с горизонтом планирования T_i будет невыгодным, если и только если

$$\triangle\omega_i^+(\bar{y}) \leq T_i \triangle \omega_i^-(\bar{y}). \tag{3.5}$$

Критерий существования $\bar{y}$, для которого никому не выгодно отклоняться, запишем в виде $\min\limits_{\bar{y}} \max\limits_{i} \lambda_i(\bar{y}) \leq 1$, где $\lambda_i(\bar{y}) = \dfrac{\triangle\omega_i^+(\bar{y})}{T_i \triangle \omega_i^-(\bar{y})}$. Для задачи оптимизации в левой части выполнен принцип уравнивания Гермейера [1], то есть минимум достигается при $\lambda_i \equiv \lambda$. Отсюда

$$\frac{H_i^* - \bar{H}_i}{v_i^* - \bar{v}_i - y_i} = 1 + \frac{1}{T_i\lambda} \Leftrightarrow \mu_i = \frac{H_i^* - \bar{H}_i}{(\bar{F}_\Sigma - F_\Sigma^*)(1+T_i\lambda)},\ i \in I.$$

Из условия $\sum\limits_{i=1}^{n}\mu_i = 1$ получаем:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{H_i^* - \bar{H}_i}{1+T_i\lambda} = \bar{F}_\Sigma - F_\Sigma^*. \tag{3.6}$$

Побочные платежи можно определить как $y_i = v_i^* - \bar{v}_i - (H_i^* - \bar{H}_i)\lambda T_i/(1+\lambda T_i)$.

Покажем, что найдется единственное $\bar{\lambda} \in [0;\infty]$, являющееся корнем уравнения (3.6). Правая часть убывает по λ, так как $\mu_i \geq 0$. При $\lambda = 0$ левая часть (3.6) больше либо равна правой части (3.6), так как $\bar{F}_\Sigma - F_\Sigma^* = \bar{v}_\Sigma - v_\Sigma^* - \bar{H}_\Sigma + H_\Sigma^*$, а величина $\bar{v}_\Sigma - v_\Sigma^* \leq 0$. При $\lambda = \infty$ $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{H_\Sigma^* - \bar{H}_\Sigma}{1+T_i\lambda} = 0$, а $\bar{F}_\Sigma - F_\Sigma^* \geq 0$. Требуемое утверждение следует из теоремы о промежуточных значениях непрерывной функции. Условие (3.5) эквивалентно неравенству $\bar{\lambda} \leq 1$ и условию (3.4). □

Замечание 3.1. Если $T_i \equiv T$, то минимальный необходимый горизонт планирования $T_{min} = [(v_\Sigma^* - \bar{v}_\Sigma)/(\bar{F}_\Sigma - F_\Sigma^*)] + 1$, при этом $y_i = v_i^* - \bar{v}_i - (H_i^* - \bar{H}_i)T_{min}/(1+T_{min})$.

Доказательство. В случае, когда $T_i \equiv T$ из условия (3.4) получаем $\dfrac{v_\Sigma^* - \bar{v}_\Sigma}{\bar{F}_\Sigma - F_\Sigma^*} \leq T$ и $T_{min} = [(v_\Sigma^* - \bar{v}_\Sigma)/(\bar{F}_\Sigma - F_\Sigma^*)] + 1$. □

Замечание 3.2. Теорема 3.1 допускает следующее обобщение для модели, в которой горизонты планирования $T_i(t)$ зависят от времени. Для существования указанного СПР достаточно, чтобы условие (3.4) выполнялось для $T_i = \min\limits_t T_i(t)$. Однако, это условие не является необходимым в общем случае. Другое обобщение связано с повторяющимися играми с переменным дисконтированием, в которых игрок i в период t стремится максимизировать приведенный будущий выигрыш $\sum\limits_{\tau=t}^{\infty} d_{\tau t}^i W_i(\tau)$, где $W_i(\tau)$ – его выигрыш в период τ, $d_{\tau t}^i$ – коэффициент приведения к текущему периоду, $d_{tt}^i = 1$. Указанное достаточное условие остается справедливым, если положить $T_i(t) = \sum\limits_{\tau=t+1}^{\infty} d_{\tau t}^i$.

Рассмотрим пример расчета СПР для конкретной модели. Пусть $i = 1, 2, 3$. Функция ущерба i-го игрока: $H_i(z) = 1.5\sum\limits_{j\neq i} z_j$. Предельная полезность для всех игроков имеет вид:

$$v_i'(z_i) = \begin{cases} 4, \ 0 \le z_i \le z_I, \\ 2, \ z_I < z_i < z_{II}, \\ -1, \ z_i \ge z_{II}. \end{cases}$$

Исходя из условий первого порядка, для каждого игрока $\bar{z}_i = z_I$, $z_i^* = z_{II}$. Если $T_i = T$ одинаковы, то из Теоремы 3.1 $\bar{y} = 0$. Из (3.5) получается, что для существования СПР необходимо и достаточно выполнения неравенства: $\triangle v \le T(\triangle H - \triangle v)$, где $\triangle v = v_i^* - \bar{v}_i = 2(z_{II} - z_I)$, а $\triangle H = H_i^* - \bar{H}_i = 3(z_{II} - z_I)$, $i = 1, 2, 3$, то есть $T \ge 2$.

Рассмотрим случай, когда $T_1 = 1$, $T_2 = T_3 = 3$. Минимальный размер побочного платежа, который обеспечивает устойчивость соглашения относительно отклонения 1-го игрока (с самым коротким горизонтом планирования), определяется из равенства: $\triangle v - y_1 = T_1(\triangle H - \triangle v + y_1)$. При $T_1 = 1$ получаем: $y_1 = \dfrac{2 \triangle v - \triangle H}{2} = \dfrac{z_{II} - z_I}{2}$.

Поскольку $y_2 = y_3 = \dfrac{y_1}{2}$, из (3.5) для других игроков получаем неравенство: $T_i \ge \dfrac{\triangle v + y_1/2}{\triangle H - \triangle v - y_1/2} = 3$, где $i = 2, 3$. В этих условиях данные побочные платежи обеспечивают устойчивую реализацию Парето-оптимального исхода.

4. Заключение

В данной работе рассмотрена модель анализа соглашений по ограничению трансграничных загрязнений окружающей среды. Исследована возможность устойчивой реализации Парето-оптимального решения в повторяющейся игре. Для модели с n странами получены условия, при выполнении которых существует СПР, соответствующее Парето-оптимальному исходу. В отличие от кооперативных решений подобных динамических игр (см. [9]) в данной модели учтена возможность скрытого (в течение одного этапа игры) нарушения соглашения: игрок прекращает выполнять обязательство по сокращению выбросов или выплачивать другим оговоренную компенсацию, в то время как остальные следуют соглашению. Такая возможность усложняет задачу заключения устойчивого соглашения, особенно при коротких горизонтах планирования. Основной результат работы (Теорема 3.1) означает, что введение побочных платежей способно при определенных условиях сделать невыгодным внезапное нарушение отдельной страной условий международной кооперации. С другой стороны, мы упрощаем задачу по сравнению с кооперативной постановкой, поскольку не требуем устойчивости к отклонениям коалиций нескольких игроков. Последняя проблема требует дополнительного исследования, как и случай асинхронных колебаний горизонтов планирования игроков.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васин А.А., Краснощеков П.С., Морозов В.В. *Исследование операций.* Москва: «Академия», 2008.

2. Васин А.А., Морозов В.В. *Введение в теорию игр с приложениями к экономике.* Москва, 2003.

3. Петросян Л.А. *Устойчивость решений в дифференциальных играх со многими участниками* // Вестн. ЛГУ. 1977. Сер.1. Вып. 4. № 19. С.46–52.

4. Реттиева А.Н. *Задача управления биоресурсами с различными горизонтами планирования* // МТИиП. 2014. Т. 6, вып. 3. С. 54–75.

5. Chander P., Tulkens H. *The core of an economy with multilateral environmental externalities* // International Journal of Game Theory. 1997. V. 26. P. 372–401.

6. Halkos G.E., Hutton J.P. *Optimal acid rain abatement policy in Europe* // MPRA. 2011. No. 33943.

7. Kaitala V., Pohjola M., Tahvonen O. *Transboundary air pollution and soil acidification: A dynamic analysis of an acid rain game between Finland and the USSR* // Keskusteluaiheita, Discussion papers. 1990. P. 161–181.

8. Masoudi N., Santugini M., Zaccour G. *A Dynamic Game of Emissions Pollution with Uncertainty and Learning* // Centre interuniversitaire sur le risque, les politiques economiques et l'emploi. 2015.

9. Petrosjan L., Zaccour G. *Time-consistent Shapley Value of Pollution Cost Reduction* // Journal of Economic Dynamics and Control. 2003. P. 381–398.

10. Petrosian O. *Looking forward approach in cooperative differential games* // IGTR. 2016. V.18. issue 2. P. 1–14.

11. Ploeg F., Zeeuw A. *International aspects of pollution control* // European Association of Environmental and Resource Economics. 1992. V. 2. P. 117–139.

12. Selten R. *Reexamination of the perfectness concept for equilibrium points in extensive games* // International Journal of Game Theory. 1975. V. 3. P. 141–201.

GAME-TEORETIC MODEL OF AGREEMENT ON LIMITATION OF TRANSBOUNDARY ATMOSPHERIC POLLUTION

Alexandr A. Vasin, Lomonosov Moscow State University, Dr.Sc., prof. (vasin@cs.msu.su).
Anastasiya G. Divtsova, Lomonosov Moscow State University, PhD student (nastyakislaeva@gmail.com).

Abstract: In this article we consider a model of the agreements in the problem of transboundary atmospheric pollution by emissions of industrial production. Interaction of countries is described as a repeated game with side payments. The aim of this work is to find the conditions for existence of a subgame perfect equilibrium realizing Pareto-optimal situation in each period of the game.

Keywords: repeated game, Nash equilibrium, subgame perfect equilibrium, Pareto-optimal situation.