

УДК 519.83

ББК 22.18

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ БОНДАРЕВОЙ-ШЕПЛИ I. НЕПУСТОТА ЯДРА НЕЧЕТКОЙ ИГРЫ

ВАЛЕРИЙ А. ВАСИЛЬЕВ*

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

630090, Новосибирск, пр. ак. Коптюга, 4

Новосибирский государственный университет

630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 2

e-mail: vasilev@math.nsc.ru

В работе устанавливается аналог известной теоремы Бондаревой-Шепли [1,9] для нечетких кооперативных игр, когда возможности блокирования расширяются за счет так называемых нечетких коалиций [5,6]. Основу предлагаемого подхода составляет распространение классического понятия сбалансированного семейства на случай нечетких коалиций, что позволяет ввести естественное обобщение сбалансированности для рассматриваемых нечетких игр. Установлено, что указанная обобщенная сбалансированность является необходимым и достаточным условием непустоты ядра нечеткой кооперативной игры. Приводятся уточнения критерия непустоты ядра, основанные на использовании классической теоремы Хелли о пересечении выпуклых множеств. Изучается так называемое S^* -представление нечеткой игры, облегчающее в ряде случаев анализ условий существования неблокируемых дележей этой игры.

Ключевые слова: нечеткая кооперативная игра, сбалансированное семейство нечетких коалиций, V -сбалансированность, ядро нечеткой кооперативной игры.

1. Введение

Имеющиеся в литературе общие результаты о существовании неблокируемых дележей в нечетких кооперативных играх исчерпываются, насколько известно автору, теоремой Обэна о непустоте ядра нечеткой суперлинейной липшицевой игры [6] и предварительными публикациями на эту тему в малодоступных изданиях [2,10]. Настоящая работа посвящена подробному изложению аналога известной теоремы Бондаревой-Шепли о ядре [1,9] для нечетких TU кооперативных игр с побочными платежами самого общего вида. Показано, что расширение возможностей блокирования за счет так называемых нечетких коалиций [5,6] не препятствует использованию методов линейного программирования, доказавших свою эффективность для обычных кооперативных игр [1]. Основу предлагаемого подхода составляет распространение классического понятия сбалансированного семейства на случай нечетких коалиций, что позволяет ввести естественное обобщение сбалансированности для рассматриваемых нечетких игр. Установлено, что указанная обобщенная сбалансированность является необходимым и достаточным условием непустоты ядра нечеткой кооперативной игры. Приводятся уточнения критерия непустоты ядра, основанные на использовании известной теоремы Хелли о пересечении выпуклых множеств [4]. Вводится понятие S^* -представления нечеткой кооперативной игры v и дается анализ некоторых свойств этого представления, полезных для исследования ядра игры v .

Основное содержание работы разбито на четыре раздела. Первый (пункт 2) содержит необходимые в дальнейшем обозначения и определения. Второй (пункт 3) посвящен установлению основного результата – аналога теоремы Бондаревой - Шепли о критерии непустоты ядра для нечетких TU кооперативных игр. В третьем разделе (пункт 4) излагаются уточнения основного результата, полученные на основе упоминавшейся теоремы Хелли. Последний, четвертый раздел (пункт 5), посвящен изучению некоторых свойств S^* -представления нечеткой кооперативной игры v , позволяющего в ряде

случаев упрощать исследование ядра этой игры.

2. Основные определения

Всюду далее будем считать, что совокупность игроков составляет n -элементное множество $N = \{1, \dots, n\}$. Напомним определение нечеткой коалиции в кооперативной игре n лиц. Обозначим через I^N единичный гиперкуб: $I^N = \{\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) \in \mathbf{R}^N \mid \tau_i \in [0, 1], i \in N\}$. Согласно [5,6] совокупность σ_F нечетких коалиций, определенных на множестве N , задается формулой $\sigma_F = I^N \setminus \{0\}$. Компонента τ_i нечеткой коалиции $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$ указывает степень участия игрока i в «большой коалиции» N (см., например, [5]). Напомним также [6], что каждая стандартная коалиция $S \subseteq N$ отождествляется с ее индикаторной функцией $e_S \in I^N$, определяемой по формуле: $(e_S)_i = 1$ для $i \in S$, и $(e_S)_i = 0$ для $i \in N \setminus S$. Далее, для каждой $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) \in \sigma_F$ через $N(\tau)$ будем обозначать носитель нечеткой коалиции τ : $N(\tau) = \{i \in N \mid \tau_i > 0\}$. Как обычно, для вектора $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^N$ и множества $S \subseteq N$ через $x_S \in \mathbf{R}^S$ обозначается сужение x на S : $(x_S)_i = x_i, i \in S$. Для сужения нечеткой коалиции τ на ее носитель $N(\tau)$ будем использовать сокращение $\tau^+ := \tau_{N(\tau)}$. Следуя [6], будем применять обозначение $\mathbf{R}^\tau := \mathbf{R}^{N(\tau)}$. Наконец, через $x \cdot y$, как обычно, обозначается скалярное произведение векторов x, y .

В указанных обозначениях рассматриваемые далее игры определяются следующим образом (ср. с [6]).

Определение 2.1. *Нечеткой TU кооперативной игрой n лиц, порождаемой обобщенной характеристической функцией $v : \sigma_F \rightarrow \mathbf{R}$, будем называть многозначное отображение $\tau \mapsto G_v(\tau)$, сопоставляющее каждой нечеткой коалиции τ множество достижимых ею дележей, определяемое формулой*

$$G_v(\tau) = \{x \in \mathbf{R}^\tau \mid \tau^+ \cdot x \leq v(\tau)\}.$$

В дальнейшем нечеткие TU кооперативные игры G_v будем отождествлять с их характеристическими функциями v ¹. Кроме того, элементы множеств $G_v(\tau)$ будем называть *дележами* соответствующих

¹По аналогии с обычными играми, функция v доопределяется в начале координат соотношением $v(0) = 0$.

коалиций; при этом дележи «большой коалиции» e_N будем называть, для краткости, *дележами игры* v . Напомним еще, что в литературе нечеткие TU кооперативные игры называются также нечеткими кооперативными играми с побочными платежами.

Итак, согласно определению 2.1 и терминологии, принятой в [2,6], нечеткая кооперативная игра v является нечеткой NTU игрой специального вида, когда множества дележей, достижимых коалициями τ , представляют собой некоторые полупространства с нормальными τ^+ в соответствующих пространствах \mathbf{R}^τ .

Введем важную характеристику нечеткой игры v , позволяющую сформулировать естественный аналог стандартного понятия сбалансированной кооперативной игры с обычными коалициями $S \subseteq N$. С этой целью, следуя [2], перенесем сначала понятие сбалансированного семейства обычных коалиций на случай нечетких коалиций: конечное семейство $\{\tau_k\}_{k \in K} \subseteq \sigma_F$ называется F -сбалансированным семейством, если существуют числа $\lambda_k \geq 0$, $k \in K$, такие, что выполняется равенство

$$\sum_{k \in K} \lambda_k \tau_k = e_N. \quad (2.1)$$

По аналогии с классическим определением из [1], неотрицательные числа λ_k , фигурирующие в равенстве (2.1), будем называть (*балансирующими*) *весами*, отвечающими семейству $\{\tau_k\}_{k \in K}$. Совокупность всех F -сбалансированных семейств нечетких коалиций обозначим через Σ_F .

Определение 2.2. *Нечеткую кооперативную игру $v : \sigma_F \rightarrow \mathbf{R}$ будем называть V -сбалансированной, если для любого F -сбалансированного семейства нечетких коалиций $\{\tau_k\}_{k \in K}$ и отвечающих этому семейству весов λ_k , $k \in K$, выполняется неравенство*

$$\sum_{k \in K} \lambda_k v(\tau_k) \leq v(e_N). \quad (2.2)$$

Критерий V -сбалансированности, позволяющий ограничивать проверку неравенства (2.2) лишь n -элементными семействами нечетких коалиций, устанавливается далее, в пункте 4. Этот критерий основан на известной теореме Хелли о пересечении выпуклых множеств

[4]. Для монотонных игр² он формулируется следующим образом: нечеткая монотонная кооперативная игра v , удовлетворяющая условию $v(e_{\{i\}}) = 0, i \in N$, является V -сбалансированной тогда и только тогда, когда для любого семейства $\{\tau_k\}_{k=1}^n \subseteq \sigma_F$ такого, что $|N(\tau_k)| \geq 2, k = 1, \dots, n$, и при этом $\sum_{k=1}^n \lambda_k \tau_k \leq e_N$ для некоторых $\lambda_k \geq 0, k = 1, \dots, n$, выполняется неравенство $\sum_{k=1}^n \lambda_k v(\tau_k) \leq v(e_N)$.

3. Аналог теоремы Бондаревой-Шепли для нечетких игр

Введем основные понятия работы – определение блокирования в нечеткой игре v и понятие ядра этой игры.

Определение 3.1. Будем говорить, что нечеткая коалиция τ блокирует дележ $x \in G_v(e_N)$, если существует дележ $y \in G_v(\tau)$ такой, что $y_i > x_i$ для всех $i \in N(\tau)$.

Определение 3.2. Ядром нечеткой кооперативной игры v будем называть совокупность всех дележей этой игры, не блокируемых никакой коалицией $\tau \in \sigma_F$. Ядро игры v будем обозначать через $C(v)$.

Описание блокирования в развернутой форме имеет следующий вид: нечеткая коалиция $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$ блокирует дележ $x = (x_1, \dots, x_n) \in G_v(e_N)$, если существует вектор $y = (y_i)_{i \in N(\tau)} \in \mathbf{R}^\tau$ такой, что

$$(b.1) \quad \sum_{i \in N(\tau)} \tau_i y_i \leq v(\tau);$$

$$(b.2) \quad y_i > x_i, i \in N(\tau).$$

Замечание 3.1. Как уже отмечалось в разделе 2, нечеткая TU кооперативная игра трактуется в работе как нечеткая NTU игра специального вида, в которой вместо бинарного отношения доминирования для выделения дележей, приемлемых для каждой из коалиций, берутся не максимальные в смысле доминирования, а неблокируемые дележи. Именно, определение ядра нечеткой игры дается в терминах блокирования и для обычных NTU игр совпадает с определением 11.4.2 из монографии [8]. Вопрос о соотношении неблокируемых и

²Как обычно, нечеткая игра v называется монотонной, если $v(\tau) \leq v(\tilde{\tau})$ при $\tau \leq \tilde{\tau}$.

максимальных в смысле доминирования дележей игры G_v выходит за рамки настоящей работы.

Используя соотношения (b.1) и (b.2), нетрудно убедиться, что справедлив следующий аналог описания ядра классической кооперативной игры.

Предложение 3.1. *Ядро $C(v)$ нечеткой кооперативной игры v совпадает с множеством решений бесконечной системы линейных неравенств:*

$$C(v) = \{x \in \mathbf{R}^N \mid e_N \cdot x = v(e_N), \tau \cdot x \geq v(\tau), \tau \in \sigma_F\}. \quad (3.1)$$

Доказательство. Пусть v – произвольная нечеткая кооперативная игра. Положим

$$D(v) = \{x \in \mathbf{R}^N \mid e_N \cdot x = v(e_N), \tau \cdot x \geq v(\tau), \tau \in \sigma_F\} \quad (3.2)$$

и докажем, что ядро $C(v)$ игры v совпадает с множеством $D(v)$.

Рассмотрим произвольный элемент $x \in D(v)$. Ясно, что согласно формуле (3.2) имеем: $e_N \cdot x \leq v(e_N)$. Следовательно, x принадлежит множеству $G_v(e_N)$. Покажем, что дележ x не блокируется никакой нечеткой коалицией. От противного. Допуская, что какая-либо нечеткая коалиция τ блокирует дележ x , имеем, согласно условиям (b.1), (b.2) : существует вектор $y \in \mathbf{R}^\tau$ такой, что $\sum_{i \in N(\tau)} \tau_i y_i \leq v(\tau)$ и, кроме того, выполняются строгие неравенства: $y_i > x_i$ для всех $i \in N(\tau)$. Умножая эти неравенства на соответствующие компоненты τ_i вектора τ и суммируя по $i \in N(\tau)$, получаем: $\sum_{i \in N(\tau)} \tau_i y_i > \sum_{i \in N(\tau)} \tau_i x_i$.

Отсюда, ввиду принадлежности $x \in D(v)$, вытекают соотношения

$$\sum_{i \in N(\tau)} \tau_i y_i > \tau \cdot x \geq v(\tau).$$

Но вытекающее из этих соотношений неравенство $\sum_{i \in N(\tau)} \tau_i y_i > v(\tau)$ противоречит требованию (b.1), наложенному на вектор y . Полученное противоречие доказывает вложение $D(v) \subseteq C(v)$.

Убедимся в справедливости противоположного вложения $C(v) \subseteq D(v)$. Пусть x – произвольный элемент ядра $C(v)$ игры v .

Предположим, что $\tau \cdot x < v(\tau)$ для какой-нибудь нечеткой коалиции τ . Тогда для вектора $y \in \mathbf{R}^T$, определяемого формулой

$$y_i = x_i + \delta, \quad i \in N(\tau),$$

где $\delta = [v(\tau) - \tau \cdot x] / \sum_{i \in N(\tau)} \tau_i$, справедливы соотношения

$$\sum_{i \in N(\tau)} \tau_i y_i = \tau \cdot x + \left(\sum_{i \in N(\tau)} \tau_i \right) \delta = v(\tau).$$

Кроме того, ввиду положительности числа δ , выполняются неравенства: $y_i > x_i$, для всех $i \in N(\tau)$. Следовательно, для коалиции τ и вектора y выполняются условия (b.1) и (b.2), означающие, что коалиция τ блокирует дележ x . Полученное противоречие с предположением $x \in C(v)$ доказывает, что $\tau \cdot x \geq v(\tau)$ для всех $\tau \in \sigma_F$. Что касается случая $\tau = e_N$, то здесь, наряду с неравенством $e_N \cdot x \geq v(e_N)$, имеем: $e_N \cdot x \leq v(e_N)$ (ввиду включения $x \in G_v(e_N)$). Поэтому для «большой коалиции» e_N выполняется равенство $e_N \cdot x = v(e_N)$. Итак, в силу вышесказанного и на основании произвольности выбора $x \in C(v)$ имеем $C(v) \subseteq D(v)$, что и завершает доказательство равенства (3.1). \square

В дальнейшем используются следующие сокращения: «одноэлементные» коалиции $e_{\{i\}}$ будем обозначать через e_i , а отвечающие им значения характеристической функции $v(e_{\{i\}})$ – через v_i . В указанных обозначениях множество $I(v)$ индивидуально и коллективно рациональных дележей игры v [3] определяется формулой:

$$I(v) := \{x \in \mathbf{R}^N \mid e_N \cdot x = v(e_N), x_i \geq v_i, \quad i \in N\}. \quad (3.3)$$

Применяя предложение 3.1, теорему двойственности линейного программирования и используя компактность множества $I(v)$, получаем следующий аналог теоремы Бондаревой-Шепли [1,9], дающий критерий непустоты ядра нечеткой кооперативной игры с побочными платежами.

Теорема 3.1. *Ядро $C(v)$ нечеткой кооперативной игры v с побочными платежами непусто тогда и только тогда, когда характеристическая функция v является V -сбалансированной.*

Доказательство. Пусть $C(v) \neq \emptyset$. Покажем, что игра v является V -сбалансированной. Как и ранее, через Σ_F будем обозначать совокупность всех F -сбалансированных семейств нечетких коалиций. Для каждого σ из Σ_F определим множество

$$C_\sigma(v) := \{x \in \mathbf{R}^N \mid e_N \cdot x = v(e_N), \tau \cdot x \geq v(\tau), \tau \in \sigma\}. \quad (3.4)$$

Напомним, что в силу предложения 3.1 ядро $C(v)$ имеет следующий вид:

$$C(v) = \{x \in I(v) \mid \tau \cdot x \geq v(\tau), \tau \in \sigma_F\}. \quad (3.5)$$

Отсюда, в силу формул (3.3) и (3.4) вытекают очевидные вложения: $C(v) \subseteq C_\sigma(v)$ для каждого семейства $\sigma \in \Sigma_F$. Поэтому, на основании сделанного предположения о непустоте $C(v)$ получаем

$$C_\sigma(v) \neq \emptyset, \quad \sigma \in \Sigma_F. \quad (3.6)$$

Пусть теперь $\sigma = \{\tau_k\}_{k \in K}$ – произвольное F -сбалансированное семейство, а $\mu = \{\mu_k\}_{k \in K}$ – некоторые балансирующие веса этого семейства. Ввиду произвольности выбора семейств σ и μ для доказательства V -сбалансированности игры v достаточно установить неравенство

$$\sum_{k \in K} \mu_k v(\tau_k) \leq v(e_N).$$

С этой целью рассмотрим следующую задачу линейного программирования:

$$\begin{aligned} e_N \cdot x &\rightarrow \min \\ \tau_k \cdot x &\geq v(\tau_k), \quad k \in K. \end{aligned} \quad (A_\sigma)$$

Отвечающая ей двойственная задача имеет вид

$$\begin{aligned} \sum_{k \in K} \lambda_k v(\tau_k) &\rightarrow \max \\ \sum_{k \in K} \lambda_k \tau_k &= e_N, \quad \lambda_k \geq 0, \quad k \in K. \end{aligned} \quad (A_\sigma^*)$$

Ясно, что задачи (A_σ) и (A_σ^*) имеют допустимые решения (в частности, одним из допустимых решений задачи (A_σ^*) является упомянутый выше вектор балансирующих весов $\{\mu_k\}_{k \in K}$ рассматриваемого F -сбалансированного семейства $\sigma = \{\tau_k\}_{k \in K}$; наличие допустимых решений в задаче (A_σ) вытекает из соотношений (3.6)). Поэтому, согласно теореме двойственности линейного программирования, обе задачи имеют оптимальные решения, и их оптимальные значения совпадают. Обозначая это общее оптимальное значение через v_σ^* , отметим, что в силу непустоты множества $C_\sigma(v)$ существует допустимое решение x задачи (A_σ) , для которого выполняется равенство $e_N \cdot x = v(e_N)$. Значит, для оптимального значения справедливо неравенство $v_\sigma^* \leq v(e_N)$. Отсюда (ввиду того, что для весов $\mu = \{\mu_k\}_{k \in K}$, образующих допустимое решение двойственной задачи A_σ^* , должно выполняться соотношение $\sum_{k \in K} \mu_k v(\tau_k) \leq v_\sigma^*$) получаем искомое неравенство $\sum_{k \in K} \mu_k v(\tau_k) \leq v(e_N)$. Таким образом, ввиду произвольности F -сбалансированного семейства σ и отвечающих ему балансирующих весов μ , имеем: нечеткая кооперативная игра v с непустым ядром $C(v)$ является V -сбалансированной.

Докажем теперь, что V -сбалансированность нечеткой кооперативной игры v гарантирует разрешимость системы

$$e_N \cdot x = v(e_N), \quad \tau \cdot x \geq v(\tau), \quad \tau \in \sigma_F, \quad (3.7)$$

решения которой, согласно (3.5), составляют множество $C(v)$. Обозначая через σ_0 семейство всех «одноэлементных» коалиций игры v

$$\sigma_0 = \{e_i \mid i \in N\},$$

выделим те конечные подмножества семейства σ_F , которые содержат семейство σ_0 :

$$\widehat{\Sigma}_F := \{\sigma \subseteq \sigma_F \mid \sigma_0 \subseteq \sigma, |\sigma| < \infty\}.$$

Ясно, что всякое конечное надсемейство F -сбалансированного семейства само является F -сбалансированным семейством. Поскольку, очевидно, семейство σ_0 принадлежит Σ_F , справедливо вложение $\widehat{\Sigma}_F \subseteq \Sigma_F$. Далее, в силу V -сбалансированности игры v , множества

$C_\sigma(v)$, определяемые формулой (3.4), являются непустыми и компактными при всех $\sigma \in \widehat{\Sigma}_F$. Действительно, в силу F -сбалансированности семейства σ_0 и V -сбалансированности игры v имеем: множество индивидуально и коллективно рациональных дележей $I(v)$, определенное формулой (3.3), является, очевидно, непустым (ввиду неравенства $\sum_{i \in N} v_i \leq v(e_N)$), замкнутым и ограниченным (в силу соотношений

$$v_i \leq x_i \leq v(e_N) - \sum_{j \in N \setminus \{i\}} v_j, \quad i \in N,$$

выполняющихся для любого $x \in I(v)$). Поэтому все множества $C_\sigma(v)$, $\sigma \in \widehat{\Sigma}_F$, будучи замкнутыми подмножествами $I(v)$, являются компактными. Кроме того, учитывая F -сбалансированность семейств $\sigma \in \widehat{\Sigma}_F$, получаем: $C_\sigma(v) \neq \emptyset$ для каждого $\sigma \in \widehat{\Sigma}_F$. Чтобы убедиться в последнем утверждении, рассмотрим какое-либо σ из $\widehat{\Sigma}_F$ и построим для этого семейства пару упоминавшихся ранее задач (A_σ) и (A_σ^*) . В силу определения $\widehat{\Sigma}_F$ и на основании V -сбалансированности игры v имеем: допустимые решения задачи (A_σ^*) существуют и значения целевой функции на этих решениях ограничены сверху величиной $v(e_N)$. Но тогда, по теореме двойственности линейного программирования, в прямой задаче (A_σ) существует оптимальное решение x^* , и при этом для оптимального значения $v^* = e_N \cdot x^*$ выполняется неравенство $v^* \leq v(e_N)$. Рассмотрим вектор $\bar{x} = x^* + y$, где y – произвольный элемент из \mathbf{R}_+^N , удовлетворяющий равенству $e_N \cdot y = v(e_N) - v^*$. Ясно, что по построению \bar{x} выполняются соотношения: $e_N \cdot \bar{x} = e_N \cdot x^* + e_N \cdot y = v(e_N)$ и $\tau \cdot \bar{x} = \tau \cdot x^* + \tau \cdot y \geq v(\tau)$ для каждого $\tau \in \sigma$. Следовательно, \bar{x} принадлежит $C_\sigma(v)$ и, значит, $C_\sigma(v) \neq \emptyset$.

Заключительная часть доказательства теоремы 3.1 опирается на следующий известный факт, вытекающий непосредственно из определения компактности: всякое центрированное семейство компактных множеств имеет непустое пересечение (напомним, что семейство множеств называется центрированным, если всякое его конечное подсемейство имеет непустое пересечение). Как уже было установлено, множество $C_\sigma(v)$ – непустой компакт для каждого семейства $\sigma \in \widehat{\Sigma}_F$. Поэтому, в силу упомянутой теоремы о пересечении центрированных семейств для завершения доказательства разрешимости системы

(3.7) остается убедиться, что семейство множеств $\widehat{C} = \{C_\sigma(v)\}_{\sigma \in \widehat{\Sigma}_F}$ удовлетворяет следующим условиям:

(C.1) \widehat{C} является центрированной системой,

(C.2) $\bigcap_{\sigma \in \widehat{\Sigma}_F} C_\sigma(v) = C(v)$.

Отметим, что центрированность системы \widehat{C} вытекает из того, что для любого конечного набора семейств $\sigma_k \in \widehat{\Sigma}_F$, $k = 1, \dots, m$, справедливо очевидное равенство

$$\bigcap_{k=1}^m C_{\sigma_k}(v) = C_{\widehat{\sigma}}(v), \quad (3.8)$$

где $\widehat{\sigma} = \bigcup_{k=1}^m \sigma_k$. Поскольку, как уже отмечалось, V -сбалансированность игры v влечет непустоту всех множеств $C_\sigma(v)$, $\sigma \in \widehat{\Sigma}_F$, на основании (3.8) получаем: каждое конечное подсемейство семейства \widehat{C} имеет непустую общую часть: $\bigcap_{k=1}^m C_{\sigma_k}(v) \neq \emptyset$ для любого конечного набора семейств $\sigma_k \in \widehat{\Sigma}_F$, $k = 1, \dots, m$.

Таким образом, семейство \widehat{C} удовлетворяет условию (C.1). Учитывая уже отмечавшуюся непустоту и компактность элементов этого семейства, для завершения доказательства теоремы 3.1 остается убедиться в справедливости соотношения (C.2). А для этого, в свою очередь, достаточно показать, что любой элемент $\tau \in \sigma_F \setminus \sigma_0$ принадлежит некоторому семейству $\sigma \in \widehat{\Sigma}_F$. Ясно, что в качестве такого семейства можно выбрать $\sigma = \sigma_0 \cup \{\tau\}$. \square

4. Некоторые уточнения условия V -сбалансированности

Переходя к рассмотрению уточнения теоремы 3.1, связанного с ограничением мощности семейств σ , используемых для проверки условия V -сбалансированности, введем в рассмотрение следующее подсемейство семейства $\widehat{\Sigma}_F$:

$$\widehat{\Sigma}_F^{2n} := \{\sigma \in \widehat{\Sigma}_F \mid |\sigma| = 2n\}.$$

По определению, семейства σ из $\widehat{\Sigma}_F^{2n}$ имеют следующий вид:

$$\sigma = \sigma_0 \cup \{\tau_1, \dots, \tau_n\}, \quad (4.1)$$

где τ_1, \dots, τ_n – произвольные нечеткие коалиции из $\sigma_F \setminus \sigma_0$ (как видно, всякое семейство $\sigma \in \widehat{\Sigma}_F^{2n}$ наполовину состоит из одноэлементных коалиций, и лишь другая половина содержит n «нетривиальных» нечетких коалиций). Как и ранее, системой балансирующих весов, отвечающих системе $\sigma \in \widehat{\Sigma}_F^{2n}$, будем называть семейство неотрицательных чисел $\{\lambda_\tau\}_{\tau \in \sigma}$ таких, что $\sum_{\tau \in \sigma} \lambda_\tau \tau = e_N$.

Приводимая ниже теорема 4.1, основанная на известной теореме Хелли о пересечении выпуклых множеств [4], позволяет при проверке V -сбалансированности игры v ограничиться $2n$ -элементными семействами коалиций из $\widehat{\Sigma}_F$, имеющими специальный вид (4.1).

Теорема 4.1. *Нечеткая кооперативная игра v имеет непустое ядро $C(v)$ тогда и только тогда, когда для нее выполняется условие V^{2n} -сбалансированности: для любой системы $\{\tau_k\}_{k=1}^{2n} \in \widehat{\Sigma}_F^{2n}$ и отвечающей ей системы весов $\{\lambda_k\}_{k=1}^{2n}$ выполняется неравенство $\sum_{k=1}^{2n} \lambda_k v(\tau_k) \leq v(e_N)$.*

Доказательство. Необходимость вытекает из теоремы 3.1. Для доказательства достаточности рассмотрим какую-либо V^{2n} -сбалансированную игру v и определим семейство множеств

$$C_\tau(v) = \{x \in I(v) \mid \tau \cdot x \geq v(\tau)\}, \quad \tau \in \sigma_F \setminus \sigma_0.$$

Поскольку справедливо равенство $C(v) = \bigcap_{\tau \in \sigma_F \setminus \sigma_0} C_\tau(v)$, доказательство непустоты ядра игры v редуцируется к проверке того, что все множества $C_\tau(v)$ имеют непустую общую часть. Повторяя соответствующие рассуждения из доказательства теоремы 3.1, нетрудно убедиться, что любое n -элементное подсемейство $\{C_{\tau_1}, \dots, C_{\tau_n}\}$ семейства

$$\widehat{C}_1 = \{C_\tau(v)\}_{\tau \in \sigma_F \setminus \sigma_0}$$

имеет непустое пересечение. Действительно, по определению множеств $C_\tau(v)$ имеем: $\bigcap_{k=1}^n C_{\tau_k}(v) = C_\sigma^r(v)$, где $\sigma = \sigma_0 \cup \{\tau_1, \dots, \tau_n\}$, а множество $C_\sigma^r(v)$ определяется формулой

$$C_\sigma^r(v) = \{x \in I(v) \mid \tau \cdot x \geq v(\tau), \quad \tau \in \sigma \setminus \sigma_0\}.$$

Поэтому, используя аргументацию доказательства достаточности в теореме 3.1, получаем: в силу V^{2n} -сбалансированности игры v все множества вида $C_\sigma^r(v)$, $\sigma \in \widehat{\Sigma}_F^{2n}$, непусты и, следовательно, все n -элементные подсемейства семейства \widehat{C}_1 имеют непустую общую часть. Последнее утверждение, вместе с компактностью и выпуклостью множеств $C_\tau(v)$, $\tau \in \sigma_F \setminus \sigma_0$, означает, что семейство \widehat{C}_1 удовлетворяет всем условиям известной теоремы Хелли о пересечении выпуклых множеств (см., например, [4]). Следует лишь подчеркнуть, что семейство \widehat{C}_1 лежит в аффинном многообразии $\{x \in \mathbf{R}^N \mid e_N \cdot x = v(e_N)\}$ размерности $n - 1$, чем и объясняется рассмотрение n -элементных подсемейств $\{C_{\tau_1}, \dots, C_{\tau_n}\}$ семейства \widehat{C}_1 . Применяя теорему Хелли к семейству \widehat{C}_1 , имеем: $\bigcap_{\tau \in \sigma_F \setminus \sigma_0} C_\tau(v) \neq \emptyset$. Последний факт, в силу уже упоминавшегося равенства $C(v) = \bigcap_{\tau \in \sigma_F \setminus \sigma_0} C_\tau(v)$, и означает справедливость искомого соотношения $C(v) \neq \emptyset$. \square

В заключение этого пункта приведем еще один, более сжатый вариант критерия непустоты ядра $C(v)$. Этот вариант, фактически, уже содержится в формулировке теоремы 4.1. Однако предлагаемая ниже версия устанавливается для некоторого специального класса игр и допускает несколько иное, чем в теореме 4.1 обоснование, представляющее и самостоятельный интерес. Указанный специальный класс игр представляет собой естественный аналог 0-нормализованных стандартных монотонных кооперативных игр.

Определение 4.1. *Нечеткая кооперативная игра v называется 0-нормализованной, если $v(e_i) = 0$ для всех $i \in N$.*

Нетрудно убедиться, что вопрос о непустоте ядра $C(v)$ нечеткой кооперативной игры v может быть редуцирован к вопросу о непустоте ядра 0-нормализованной игры $v_{(0)}$, которая определяется следующим образом:

$$v_{(0)}(\tau) = v(\tau) - v_{(1)}(\tau), \quad \tau \in \sigma_F,$$

где

$$v_{(1)}(\tau) = \sum_{i \in N} v_i \tau_i, \quad \tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) \in \sigma_F,$$

а величины v_i , как и ранее, представляют собой выигрыши одноэлементных коалиций игры $v : v_i = v(e_{\{i\}})$, $i \in N$. Действительно, по определению $v_{(0)}$ имеем: $v_{(0)}(e_i) = 0$ для всех $i \in N$, что и означает 0-нормализованность игры $v_{(0)}$. Далее, в силу равенства $v = v_{(0)} + v_{(1)}$ и непосредственно из задания игры $v_{(1)}$ вытекает соотношение

$$C(v) = \hat{v}_{(1)} + C(v_{(0)}), \quad (4.2)$$

где $\hat{v}_{(1)}$ – вектор из \mathbf{R}^N , имеющий вид: $\hat{v}_{(1)} = (v_1, \dots, v_n)$. Для проверки формулы (4.2) рассмотрим произвольный дележ x из $C(v_{(0)})$. Имеем: $e_N \cdot x = v_{(0)}(e_N) = v(e_N) - v_{(1)}(e_N)$. Поэтому для вектора $y = \hat{v}_{(1)} + x$ выполняется равенство $e_N \cdot y = v(e_N)$, вытекающее из соотношений

$$e_N \cdot y = e_N \cdot \hat{v}_{(1)} + e_N \cdot x = v_{(1)}(e_N) + v_{(0)}(e_N) = v_{(1)}(e_N) + (v - v_{(1)})(e_N).$$

Далее, для произвольной нечеткой коалиции $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$ в силу определения y и $v_{(1)}$ получаем

$$\tau \cdot y = \sum_{i \in N} v_i \tau_i + \tau \cdot x \geq v_{(1)}(\tau) + v_{(0)}(\tau) = v(\tau).$$

Следовательно, с учетом вышеуказанного равенства $e_N \cdot y = v(e_N)$, имеем: каждый элемент множества $\hat{v}_{(1)} + C(v_{(0)})$ принадлежит ядру $C(v)$. Для завершения доказательства равенства (4.2) остается заметить, что для любого $x \in C(v)$ справедливо включение $x - \hat{v}_{(1)} \in C(v_{(0)})$. Действительно, полагая $z = x - \hat{v}_{(1)}$, получаем

$$e_N \cdot z = e_N \cdot x - e_N \cdot \hat{v}_{(1)} = v(e_N) - v_{(1)}(e_N) = v_{(0)}(e_N).$$

Далее, для произвольной коалиции $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) \in \sigma_F$ по построению игр $v_{(0)}$ и $v_{(1)}$, а также в силу включения $x \in C(v)$, выполняются соотношения

$$\tau \cdot z = \tau \cdot x - \tau \cdot \hat{v}_{(1)} \geq v(\tau) - v_{(1)}(\tau) = v_{(0)}(\tau).$$

Поэтому, с учетом уже установленного равенства $e_N \cdot z = v_{(0)}(e_N)$, получаем требуемое включение: $z \in C(v_{(0)})$.

Называя игру $v_{(0)}$ 0-нормализацией игры v и суммируя вышесказанное, получаем следующее утверждение.

Предложение 4.1. *Нечеткая кооперативная игра v имеет непустое ядро $C(v)$ тогда и только тогда, когда непустое ядро имеет 0-нормализация $v_{(0)}$ этой игры. При этом $C(v)$ получается сдвигом ядра $C(v_{(0)})$ на вектор $\hat{v}_{(1)} = (v_1, \dots, v_n)$ индивидуальных выигрышей участников игры $v : C(v) = \hat{v}_{(1)} + C(v_{(0)})$.*

Итак, согласно предложению 4.1, при анализе условий существования неблокируемых дележей достаточно ограничиться рассмотрением 0-нормализованных нечетких кооперативных игр. Приведем вариант теоремы 4.1 для 0-нормализованных игр, примечательный тем, что для проверки соответствующего условия непустоты ядра таких игр достаточно ограничиться рассмотрением n -элементных семейств нечетких коалиций. Положим

$$\Sigma_F^n := \{\sigma \in \sigma_F \mid |\sigma| = n \text{ и } \sigma \cap \sigma_0 = \emptyset\}.$$

Семейство чисел $\{\lambda_\tau\}_{\tau \in \sigma}$ будем называть 0-балансирующим семейством весов для $\sigma \in \Sigma_F^n$, если $\lambda_\tau \geq 0$ для всех $\tau \in \sigma$, и при этом выполняется неравенство $\sum_{\tau \in \sigma} \lambda_\tau \tau \leq e_N$.

Теорема 4.2. *Ядро 0-нормализованной нечеткой кооперативной игры v непусто тогда и только тогда, когда для любого семейства $\{\tau_k\}_{k=1}^n$ из Σ_F^n и отвечающего ему семейства 0-балансирующих весов $\{\lambda_k\}_{k=1}^n$ выполняется неравенство $\sum_{k=1}^n \lambda_k v(\tau_k) \leq v(e_N)$.*

Доказательство. Ясно, что когда ядро $C(v)$ 0-нормализованной игры v непусто, то для любого семейства $\sigma \in \Sigma_F^n$ задача

$$\begin{aligned} e_N \cdot x &\rightarrow \min \\ \tau \cdot x &\geq v(\tau), \quad \tau \in \sigma, \\ x_i &\geq 0, \quad i \in N, \end{aligned} \tag{C_\sigma}$$

и двойственная к ней

$$\begin{aligned} \sum_{\tau \in \sigma} \lambda_\tau v(\tau) &\rightarrow \max \\ \sum_{\tau \in \sigma} \lambda_\tau \tau &\leq e_N, \end{aligned}$$

$$\lambda_\tau \geq 0, \quad \tau \in \sigma, \quad (C_\sigma^*)$$

разрешимы и их общее оптимальное значение v^* удовлетворяет неравенству $v^* \leq v(e_N)$. Поэтому для любого семейства $\sigma \in \Sigma_F^n$ и отвечающего ему семейства 0-балансирующих весов $\{\mu_\tau\}_\tau \in \sigma$ выполняется требуемое неравенство $\sum_{\tau \in \sigma} \mu_\tau v(\tau) \leq v^* \leq v(e_N)$ (ввиду того, что каждое 0-балансирующее семейство $\{\mu_\tau\}_\tau \in \sigma$ является допустимым решением задачи (C_σ^*)).

Пусть теперь для нечеткой 0-нормализованной кооперативной игры v выполняются неравенства $\sum_{\tau \in \sigma} \lambda_\tau v(\tau) \leq v(e_N)$ при любом выборе $\sigma \in \Sigma_F^n$ и отвечающих σ 0-балансирующих весов $\{\lambda_\tau\}_{\tau \in \sigma}$. Отсюда вытекает, что вышеуказанная задача (C_σ^*) разрешима при любом выборе семейства $\sigma \in \Sigma_F^n$ (ввиду неравенства $\sum_{\tau \in \sigma} \lambda_\tau v(\tau) \leq v(e_N)$ целевая функция в задаче (C_σ^*) ограничена сверху величиной $v(e_N)$). Следовательно, при любом $\sigma \in \Sigma_F^n$ разрешима и прямая задача (C_σ) , а ее оптимальное значение v^* не превышает величины $v(e_N)$. Рассуждая так же, как и при установлении аналогичного факта в доказательстве теоремы 3.1, получаем: при любом $\sigma \in \Sigma_F^n$ множество

$$C_\sigma^+(v) = \{x \in \mathbf{R}_+^N \mid e_N \cdot x = v(e_N), \tau \cdot x \geq v(\tau), \tau \in \sigma\},$$

непусто. Поскольку $C_\sigma^+(v) = \bigcap_{\tau \in \sigma} C_\tau^+(v)$, где

$$C_\tau^+(v) = \{x \in \mathbf{R}_+^N \mid e_N \cdot x = v(e_N), \tau \cdot x \geq v(\tau)\}, \quad \tau \in \sigma_F \setminus \sigma_0,$$

то на основании вышесказанного получаем: для любого семейства $\sigma \in \Sigma_F^n$ отвечающее ему n -элементное семейство выпуклых компактов $C_\tau^+(v)$, $\tau \in \sigma$, имеет непустое пересечение. Поскольку все множества $C_\tau^+(v)$ лежат в $n - 1$ -мерном аффинном многообразии $\{x \in \mathbf{R}^N \mid e_N \cdot x = v(e_N)\}$, для семейства $C^+ = \{C_\tau^+(v)\}_{\tau \in \sigma_F \setminus \sigma_0}$ выполняются все условия известной теоремы Хелли о пересечении выпуклых множеств. Следовательно, указанное семейство имеет непустое пересечение: $\bigcap_{\tau \in \sigma_F \setminus \sigma_0} C_\tau^+(v) \neq \emptyset$. Но, согласно предложению 3.1, общая часть всех множеств $C_\tau^+(v)$, $\tau \in \sigma_F \setminus \sigma_0$, совпадает с ядром $C(v)$ 0-нормализованной игры v . Отсюда и вытекает требуемое соотношение: $C(v) \neq \emptyset$. \square

Напомним, что кооперативная игра v называется монотонной, если $v(\tau) \leq v(\tilde{\tau})$ для всех нечетких коалиций $\tau, \tilde{\tau}$ таких, что $\tau \leq \tilde{\tau}$.

Следствие 4.1. *Ядро нечеткой 0-нормализованной монотонной кооперативной игры v непусто тогда и только тогда, когда для любого n -элементного семейства нечетких коалиций $\{\tau_k\}_{k=1}^n$ таких, что*

$$(c.1) \quad |N(\tau_k)| \geq 2, \quad k = 1, \dots, n,$$

$$(c.2) \quad \sum_{k=1}^n \lambda_k \tau_k \leq e_N \text{ для некоторых } \lambda_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, n,$$

выполняется неравенство $\sum_{k=1}^n \lambda_k v(\tau_k) \leq v(e_N)$.

5. Об S^* -представлении нечеткой кооперативной игры

Для облегчения исследования ядра игры v в ряде случаев полезно рассмотрение вводимого ниже S^* -представления v^* этой игры, определенного на симплексе $S^* := \{\tau \in \mathbf{R}_+^N \mid \sum_{i \in N} \tau_i = 1\}$. Ясно, что $S^* = \sigma_F^*$, где $\sigma_F^* := \{\tau \in \sigma_F \mid \sum_{i \in N} \tau_i = 1\}$. Указанное S^* -представление v^* обобщенной характеристической функции v задается формулой

$$v^*(\tau^*) := \sup \left\{ v(t\tau^*)/t \mid t \in \left(0, \frac{1}{\|\tau^*\|_\infty}\right] \right\}, \quad \tau^* \in \sigma_F^*, \quad (5.1)$$

где $\|\tau\|_\infty = \max\{|\tau_i| \mid i \in N\}$ для любого $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$.

Замечание 5.1. Как видно из определения, функция v^* задана на симплексе, имеющем размерность на единицу меньше, чем гиперкуб I^N . Это понижение размерности может в ряде случаев облегчить анализ исходной функции v . Так будет, например, когда игра v является *однородной* (то есть, для всех $t > 0$ и $\tau \in \sigma_F$ выполняется равенство $v(t\tau) = tv(\tau)$ при условии, что $t\tau \in \sigma_F$). В этом случае S^* -представление игры v совпадает с ее сужением на S^* : $v^*(\tau^*) = v(\tau^*)$, $\tau^* \in S^*$ (ясно, что в общем случае гарантируются лишь соотношения $v^*(\tau^*) \geq v(\tau^*)$, $\tau^* \in S^*$). Конечно, не меньший интерес представляют неоднородные нечеткие игры, такие, например, как мультилинейное расширение Оуэна [3,7].

В дальнейшем основное внимание уделяется важному классу S^* -регулярных нечетких кооперативных игр.

Определение 5.1. *Игра v называется S^* -регулярной, если ее S^* -представление v^* удовлетворяет следующим условиям:*

($S^*.1$) $v^*(\tau^*) < \infty$ для каждого $\tau^* \in \sigma_F^*$,

($S^*.2$) $v^*(e_N/n) \leq v(e_N)/n$.

Покажем, что S^* -регулярность игры v является необходимым условием непустоты ее ядра.

Предложение 5.1. *Если нечеткая TU кооперативная игра v имеет непустое ядро, то она является S^* -регулярной.*

Доказательство. Допустим, что нечеткая игра v имеет непустое ядро, и в то же время для некоторого $\tau^* \in \sigma_F^*$ выполняется соотношение $v^*(\tau^*) = \infty$. Зафиксируем какой-либо элемент $x \in C(v)$ и покажем, что он блокируется коалицией $t\tau^*$ при некотором $t > 0$ таком, что $t\tau^*$ принадлежит σ_F . Положим $a = \|x\|_\infty = \max \{|x_i| \mid i \in N\}$. Ввиду равенства $v^*(\tau^*) = \infty$ согласно формуле (5.1) существует число $t > 0$ такое, что $t\tau^* \in \sigma_F$, и при этом выполняется соотношение

$$v(t\tau^*)/t > a. \quad (5.2)$$

Положим теперь $\tau = t\tau^*$, $b = v(\tau)/t$ и покажем, что вектор $y \in \mathbb{R}^T$ с компонентами $y_i = b$, $i \in N(\tau)$, принадлежит $G_v(\tau)$, и при этом коалиция τ блокирует x с помощью дележа y . Действительно, равенства

$$t \sum_{i \in N(\tau)} y_i \tau_i^* = v(t\tau^*) \sum_{i \in N(t\tau^*)} \tau_i^* = v(\tau),$$

вытекающие из построения y и τ , доказывают включение $y \in G_v(\tau)$. Далее, из неравенства (5.2) следуют соотношения $y_i = v(\tau)/t > a$, $i \in N(\tau)$. Значит, вектор y принадлежит множеству $G_v(t\tau^*)$ и, кроме того, выполняются неравенства $y_i > a \geq x_i$, $i \in N(t\tau^*)$. Итак, мы установили, что x блокируется коалицией $\tau = t\tau^*$ (посредством дележа y). Но это противоречит предположению $x \in C(v)$. Полученное противоречие доказывает справедливость соотношения ($S^*.1$).

Покажем теперь, что непустота ядра игры v влечет выполнение условия ($S^*.2$). Допуская противное, получаем: $C(v) \neq \emptyset$, и при этом $v^*(e_N^*) > v(e_N)/n$. Последнее неравенство, в силу определения величины $v^*(e_N^*)$, означает, что существует число $t > 0$ такое, что te_N^*

принадлежит σ_F , и кроме того, выполняется неравенство

$$v(te_N^*)/t > v(e_N)/n. \quad (5.3)$$

Используя это неравенство, покажем, что коалиция te_N^* блокирует каждый дележ игры v . Действительно, пусть x – произвольный элемент множества $G_v(e_N)$. Не уменьшая общности, можно считать, что выполняется равенство $x \cdot e_N = v(e_N)$. Выберем число c так, чтобы для $\bar{c} = (c, \dots, c) \in \mathbb{R}^n$ вектор $x + \bar{c}$ удовлетворял условию

$$(x + \bar{c}) \cdot te_N^* = v(te_N^*). \quad (5.4)$$

Раскрывая скобки в левой части равенства (5.4), и используя равенство $x \cdot e_N = v(e_N)$, получаем

$$v(te_N^*) = x \cdot te_N^* + \bar{c} \cdot te_N^* = \frac{t}{n}v(e_N) + t\bar{c} \cdot e_N^*.$$

Отсюда вытекают следующие соотношения, характеризующие вектор \bar{c}

$$\bar{c} \cdot e_N^* = [v(te_N^*) - \frac{t}{n}v(e_N)]/t = v(te_N^*)/t - v(e_N)/n.$$

Применяя эти соотношения и неравенство (5.3) для определения знака числа c , получаем: $c = \bar{c} \cdot e_N^* = v(te_N^*)/t - v(e_N)/n > 0$. Следовательно, согласно (5.4), вектор $z = x + \bar{c}$ принадлежит множеству $G_v(te_N^*)$ и, в силу положительности числа c , удовлетворяет соотношениям $z_i = x_i + c > x_i$, $i \in N$. Значит, нечеткая коалиция te_N^* блокирует дележ $x \in G_v(e_N)$. Ввиду произвольности выбора x получаем: ядро $C(v)$ пусто. Полученное противоречие с допущением $C(v) \neq \emptyset$ доказывает, что всякая нечеткая игра с непустым ядром удовлетворяет условию $(S^*.2)$. \square

Замечание 5.2. Непосредственно из определения функции v^* вытекает, что $v^*(e_N^*) \geq v(ne_N^*)/n = v(e_N)/n$. Поэтому соотношение $(S^*.2)$ выполняется тогда и только тогда, когда имеет место равенство

$$v^*(e_N^*) = v(e_N)/n. \quad (5.5)$$

Во избежание недоразумений подчеркнем, что всюду в дальнейшем символ v^* используется для обозначения игры G_{v^*} , заданной на симплексе $S^* = \sigma_F^*$ формулой

$$G_{v^*}(\tau) := \{x \in \mathbf{R}^T \mid \sum_{i \in N(\tau)} \tau_i x_i \leq v^*(\tau)\}, \quad \tau \in S^*.$$

Согласно сказанному, будем говорить, что коалиция $\tau \in \sigma_F^*$ блокирует дележ $x \in G_{v^*}(e_N^*)$, если существует $y \in \mathbf{R}^T$ такой, что $\sum_{i \in N(\tau)} \tau_i y_i \leq v^*(\tau)$ и $y_i > x_i$ для каждого $i \in N(\tau)$. Дележ $x \in G_{v^*}(e_N^*)$, не блокируемый никакой коалицией $\tau \in \sigma_F^*$, называется *неблокируемым*. Множество всех неблокируемых дележей $x \in G_{v^*}(e_N^*)$ будем обозначать через $C(v^*)$ и называть ядром игры v^* . При необходимости подчеркнуть, что рассматриваемая игра определена на σ_F^* (независимо от способа порождения), в ее обозначении используется звездочка.

Как и для игр, определенных на гиперкубе I^N , получается следующее представление ядра $C(v^*)$ игры $v^* : \sigma_F^* \rightarrow \mathbb{R}$ (аналог предложения 3.1).

Предложение 5.2. *Ядро игры $v^* : \sigma_F^* \rightarrow \mathbb{R}$ имеет вид*

$$C(v^*) = \{x \in \mathbf{R}^N \mid e_N^* \cdot x = v^*(e_N^*), \tau^* \cdot x \geq v^*(\tau^*), \quad \tau^* \in \sigma_F^*\}.$$

Используя предложение 5.2 и аргументацию, подобную той, что применялась для доказательства теоремы 3.1, получаем ее аналог для игр, определенных на симплексе σ_F^* .

Теорема 5.1. *Ядро $C(v^*)$ нечеткой игры $v^* : \sigma_F^* \rightarrow \mathbb{R}$ непусто тогда и только тогда, когда для любого представления центра тяжести e_N/n симплекса σ_F^* в виде выпуклой комбинации его элементов*

$$e_N/n = \sum_{k \in K} \lambda_k^* \tau_k^*, \quad \tau_k^* \in \sigma_F^*, \quad k \in K,$$

выполняется неравенство

$$\sum_{k \in K} \lambda_k^* v^*(\tau_k^*) \leq v^*(e_N/n).$$

Доказательство. В силу предложения 5.2 можно использовать ту же аргументацию, что и при доказательстве теоремы 3.1. Поэтому

ограничимся рассмотрением критерия непустоты для множества

$$\{x \in \mathbb{R}^N \mid e_N^* \cdot x = v^*(e_N^*), \tau^* \cdot x \geq v^*(\tau^*), \tau^* \in \sigma_F^*\}$$

(с учетом специфики области определения функции v^*). Именно, рассуждая (с необходимыми уточнениями), как и при доказательстве теоремы 3.1, получаем: ядро $C(v^*)$ нечеткой игры $v^* : \sigma_F^* \rightarrow \mathbb{R}$ непусто тогда и только тогда, когда для любого конечного семейства нечетких коалиций $\{\tau_k^*\}_{k \in K} \subseteq \sigma_F^*$ с неотрицательными весами $\{\lambda_k^*\}_{k \in K}$, удовлетворяющими условию

$$\sum_{k \in K} \lambda_k^* \tau_k^* = e_N^*, \tag{5.6}$$

выполняется неравенство $\sum_{k \in K} \lambda_k^* v^*(\tau_k^*) \leq v^*(e_N/n)$. Суммируя левые и правые компоненты равенства (5.6), имеем: $\sum_{k \in K} \lambda_k^* \sum_{i \in N} (\tau_k^*)_i = 1, i \in N$. Принимая во внимание, что все точки τ_k^* принадлежат стандартному симплексу, получаем: $\sum_{k \in K} \lambda_k^* = 1$, что и означает, что сумма $\sum_{k \in K} \lambda_k^* \tau_k^*$ является выпуклой комбинацией элементов симплекса σ_F^* . Сказанное завершает доказательство теоремы 5.1. \square

Определение 5.2. *Нечеткая TU кооперативная игра $v^* : \sigma_F^* \rightarrow \mathbb{R}$ называется вогнутой относительно нечеткой коалиции $e_N^* = e_N/n$, если для любого представления этой коалиции в виде выпуклой комбинации $e_N^* = \sum_{k \in K} \lambda_k^* \tau_k^*$ элементов $\tau_k^* \in \sigma_F^*, k \in K$, выполняется неравенство*

$$\sum_{k \in K} \lambda_k^* v^*(\tau_k^*) \leq v^*(e_N^*).$$

Напомним, что игра $v^* : \sigma_F^* \rightarrow \mathbb{R}$ называется *вогнутой*, если для любых коалиций $\tau_1^*, \tau_2^* \in \sigma_F^*$ и неотрицательных чисел λ_1^*, λ_2^* таких, что $\lambda_1^* + \lambda_2^* = 1$ выполняется неравенство $v^*(\lambda_1^* \tau_1^* + \lambda_2^* \tau_2^*) \geq \lambda_1^* v^*(\tau_1^*) + \lambda_2^* v^*(\tau_2^*)$. Нетрудно убедиться, что всякая вогнутая игра является вогнутой относительно центра тяжести e_N^* симплекса σ_F^* . Отсюда, на основании теоремы 5.1 получаем следующее условие существования неблокируемых дележей нечетких игр (не предполагающее, в отличие от [6], никаких требований типа липшицевости v^*).

Следствие 5.1. *Если нечеткая игра $v^* : \sigma_F^* \rightarrow \mathbb{R}$ является вогнутой, то ее ядро $C(v^*)$ непусто.*

Приведем результат, позволяющий редуцировать анализ ядра нечеткой TU кооперативной игры $v : \sigma_F \rightarrow \mathbb{R}$ к рассмотрению ядра S^* -представления этой игры.

Теорема 5.2. *Если нечеткая кооперативная игра v удовлетворяет условию $(S^*.2)$, то ее ядро $C(v)$ непусто тогда и только тогда, когда непусто ядро ее S^* -представления v^* . При этом имеет место равенство $C(v) = C(v^*)$.*

Доказательство. Пусть $C(v) \neq \emptyset$. Установим вложение $C(v) \subseteq C(v^*)$. Пусть x – произвольный элемент множества $C(v)$. Зафиксируем какой-либо элемент $\tau^* \in \sigma_F^*$ и докажем неравенство $\tau^* \cdot x \geq v^*(\tau^*)$. С этой целью отметим, что из включения $x \in C(v)$ на основании предложения 3.1 имеем: $x \cdot t\tau^* \geq v(t\tau^*)$ для любого числа $t > 0$ такого, что $t\tau^*$ принадлежит σ_F . Значит, $x \cdot \tau^* \geq v(t\tau^*)/t$ для каждого $t \in (0, 1/\|\tau^*\|_\infty]$ и, следовательно, $x \cdot \tau^* \geq \sup\{v(t\tau^*)/t \mid t \in (0, 1/\|\tau^*\|_\infty]\} = v^*(\tau^*)$. Ввиду произвольности выбора нечеткой коалиции τ^* , на основании предложения 5.2 для завершения доказательства включения $x \in C(v^*)$ остается показать, что скалярное произведение $x \cdot e_N^*$ равно $v^*(e_N^*)$. Заметим, что в силу предложения 3.1 из допущения $x \in C(v)$ вытекает равенство $x \cdot e_N = v(e_N)$. Далее, ввиду принятого предположения о непустоте ядра $C(v)$, на основании предложения 5.1 и замечания 5.2 имеем: $v^*(e_N^*) = v(e_N)/n$. Комбинируя это равенство с предыдущим, получаем требуемое: $x \cdot e_N^* = x \cdot e_N/n = v(e_N)/n = v^*(e_N^*)$. Справедливость соотношения $C(v) \subseteq C(v^*)$ установлена.

Для доказательства противоположного вложения $C(v^*) \subseteq C(v)$ (при условиях $C(v^*) \neq \emptyset$ и $v^*(e_N^*) = v(e_N)/n$) рассмотрим какой-либо дележ $x \in C(v^*)$ и выберем произвольную нечеткую коалицию $\tau \in \sigma_F$. Для доказательства неравенства $x \cdot \tau \geq v(\tau)$ заметим, что согласно определению множеств σ_F и σ_F^* существует число $t > 0$ и коалиция $\tau^* \in \sigma_F^*$ такие, что $\tau = t\tau^*$. Далее, из включения $x \in C(v^*)$ согласно предложению 5.2 и определению v^* вытекают неравенства $x \cdot \tau^* \geq v^*(\tau^*) \geq v(t\tau^*)/t$. Отсюда получаем неравенство $x \cdot \tau^* \geq v(t\tau^*)/t$. Умножая обе части на число t , получаем требуемое: $x \cdot \tau \geq v(\tau)$. Что касается равенства $x \cdot e_N = v(e_N)$, то оно вытекает непосредственно из

соотношения $x \cdot e_N^* = v^*(e_N^*)$ и равенства (5.5), следующего из условия $(S^*.2)$.

В силу вышесказанного, при выполнении условия $(S^*.2)$ множество $C(v)$ непусто тогда и только тогда, когда непусто $C(v^*)$. При этом справедливо равенство $C(v) = C(v^*)$ (выполняющееся, очевидно, и в случае, когда ядро $C(v)$ пусто). \square

Следствие 5.2. *Если ядро $C(v)$ игры $v : \sigma_F \rightarrow \mathbb{R}$ непусто, то непусто и ядро $C(v^*)$ ее S^* -представления v^* . При этом имеет место равенство $C(v) = C(v^*)$.*

В заключение приведем еще одно следствие теоремы 5.1, относящееся к однородным играм (напомним, что нечеткая TU кооперативная игра $v : \sigma_F \rightarrow \mathbb{R}$ называется однородной, если для всех $t > 0$ и $\tau \in \sigma_F$ таких, что $t\tau \in \sigma_F$, выполняется равенство $v(t\tau) = tv(\tau)$). Именно, для однородных игр справедливо следующее уточнение условия V -сбалансированности.

Следствие 5.3. *Если нечеткая кооперативная игра $v : \sigma_F \rightarrow \mathbb{R}$ является однородной, то для непустоты ее ядра $C(v)$ необходимо и достаточно, чтобы сужение v на симплекс σ_F^* было вогнутой игрой относительно центра тяжести $e_N^* = e_N/n$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бондарева О.Н. Теория ядра для игры n лиц // Вестник ЛГУ, сер. мат., мех., астрон. 1962. Т. 13. № 3. С. 141–142.
2. Васильев В.А. Об одном обобщении теоремы Скарфа о непустоте ядра // Препринт Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН. 2012. № 283. 41 С.
3. Печерский С.Л., Яновская Е.Б. Кооперативные игры: решения и аксиомы. СПб.: Изд-во Европ. ун-та в С.-Петербурге, 2004.
4. Рокаффеллар Р.Т. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
5. Экланд И. Элементы математической экономики. М.: Мир, 1983.

6. Aubin J.-P. *Optima and equilibria*. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1993.
7. Owen G. *Multilinear extensions of games* // Journal of Management Sciences. 1972. V. 18, N 5. P. 64–79.
8. Peleg B., Sudhölter P. *Introduction to the theory of cooperative games*. Boston, Dordrecht, London: Kluwer Acad. Publ., 2003.
9. Shapley L.S. *On balanced sets and cores* // Naval Res. Logist. Quart. 1967. V. 14, N 4. P. 453–460.
10. Vasil'ev V.A. *A fuzzy-core extension of Scarf theorem and related topics* // Contributions to game theory and management, vol. VIII. Collected papers presented on the Eight International Conference Game Theory and Management / Editors L.A. Petrosyan, N.A. Zenkevich. 2015. SPb.: Saint Petersburg State University, P. 300–314.

AN ANALOG OF BONDAREVA-SHAPLEY THEOREM I. NON-EMPTINESS OF THE CORE OF FUZZY GAME

Valery A. Vasil'ev, Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of RAS, Dr.Sc., prof. (vasilev@math.nsc.ru).

Abstract: The paper deals with a generalization of the famous Bondareva-Shapley theorem on the core of TU cooperative game to the case of fuzzy blocking. The approach proposed is based on the concept of balanced collection of fuzzy coalitions. Introduced by the author, this extension of the classic notion of balanced collection of standard coalitions makes it possible to present a natural analog of balanced-ness for so-called fuzzy TU cooperative games. The main result of the paper states that similar to the standard games the new balanced-ness-like assumption is a necessary and sufficient condition for the non-emptiness of the core of fuzzy TU cooperative game.

Keywords: fuzzy cooperative game, balanced family of fuzzy coalitions, V-balanced-ness, the core of a fuzzy game.