Математическая Теория Игр и её Приложения, т.9, в.1, с. 45–61

УДК 519.83
ББК 22.18

О МОДЕЛЯХ НАИЛУЧШЕГО ДВУСТОРОННЕГО ДВУХЭТАПНОГО ВЗАИМНОГО ВЫБОРА

Сергей И. Доценко
Киевский национальный университет им. Т. Шевченко
Факультет компьютерных наук и кибернетики
03187, Украина, Киев, пр-кт Глушкова, 4д
e-mail: sergei204@ukr.net

Анна А. Ивашко*
Институт прикладных математических исследований
Карельского научного центра РАН
185910, Россия, Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11
e-mail: aivashko@krc.karelia.ru

Построена и исследована теоретико-игровая модель взаимного выбора, в которой агенты разделены на две группы (типа) и каждый агент стремится найти партнера из противоположной группы и создать пару с ним. При этом, в отличие от классических задач выбора, пара создается только при обоюдном желании агентов, т. е. имеет место взаимный выбор. Рассматриваются две постановки – стихийное скрещивание (каждый из агентов действует, исходя из личных интересов) и селекция (разбиение на пары осуществляется насильственно с целью максимизации среднего значения качества образованных пар). В первом случае найдено равновесие по Нэшу, во втором – построена процедура оптимального скрещивания. Рассмотрены

* Работа поддержана грантом РФФИ, проект 16-51-55006_Китай_а и грантом РГНФ, проект 15-02-00352

варианты задачи с различного вида функциями выигрыша, а также задача с неполной информацией.

Ключевые слова: взаимный выбор, популяция, стихийное скрещивание, селекция, равновесие по Нэшу.

1. Введение

В задачах наилучшего выбора, рассматривавшихся ранее, как правило, решение принимала одна сторона, а вторая всегда была согласна с выбором. Такие модели являются обоснованными, если осуществляется выбор неодушевленных предметов или в случае, если выбираемые объекты индифферентны к процедуре выбора. В данной статье рассмотрены модели двустороннего взаимного выбора, когда для осуществления взаимного выбора (или, другими словами, создания пары) требуется взаимное согласие. Такие задачи имеют приложения в социологии, биологии и экономике, например, при поиске брачного партнера, поиске работы, купле-продаже товаров или услуг.

Приведем постановку задачи двустороннего выбора. Пусть индивиды из двух групп (например, мужчины и женщины или работники и работодатели) хотят выбрать партнера (супруга, бизнес-партнера) из противоположной группы, т. е. создать пару. Индивиды выбирают друг друга в зависимости от показателя качества (например, уровень доходов или привлекательность, если это брачное партнерство, уровень квалификации и условия труда, если это деловое партнерство). Каждый индивид заинтересован в выборе партнера с наибольшим значением качества, при этом значение собственного качества остается неизвестным. Если один из партнеров согласен принять другого, то второй может и не согласиться, поэтому правило выбора должно касаться обоих партнеров. Далее будут рассмотрены двухшаговые игры, в которых индивиды из разных групп (игроки) случайно попарно встречаются на каждом шаге. Пусть на первом шаге каждый из игроков встречает партнера, качество которого представляет собой случайную величину, равномерно распределенную на отрезке $[0;1]$. Если игроки принимают друг друга, то они создают пару и покидают игру. При этом выигрыш каждого игрока равен значению качества выбранного партнера. Оставшиеся игроки переходят на следующий шаг. Поскольку на каждом шаге игроки выбывают из игры, то распределение качества игроков на каждом шаге меняется. На последнем шаге игроки вынуждены принять партнеров с любым качеством, иначе они останутся без пары и их выигрыш будет равен нулю. Каждый игрок стремится максимизировать свой ожидаемый выигрыш.

Задачи одностороннего наилучшего выбора известны также под названием «задача о секретаре», «задача о продаже недвижимости», «задача о разборчивой невесте» и т. д. Различные постановки задачи одностороннего наилучшего выбора как с отсутствием информации о значении качества партнера, так и с полной информацией были рассмотрены в работах [1–4, 7, 10, 14]. В отличие от задач наилучшего выбора, в которых выбор осуществляется только одной стороной, в данной работе рассмотрены постановки, где осуществляется взаимный или двусторонний выбор партнеров. В литературе такие задачи носят название «задача поиска работы» ([13]) или «задача выбора супруга» ([5, 9]). Задачи взаимного наилучшего выбора с полной информацией о качествах партнеров изучены в работах [5, 12]. Задача взаимного наилучшего выбора с отсутствием информации о качествах партнеров была рассмотрена в работе [8]. Другие постановки задачи двухстороннего выбора исследованы в работах [6, 9, 11, 15].

В данной работе рассмотрены различные постановки задачи двустороннего двухэтапного выбора. Сначала приведена постановка и решение задачи двустороннего выбора с бесконечным числом игроков, предложенной в работе [5]. В работе [12] было найдено решение для обобщения данной задачи на несколько шагов. В разделе 3 был исследован вариант этой задачи, в котором число игроков в каждой группе конечно. При этом, в обоих вариантах выигрышем каждого игрока является значение качества выбранного партнера. Далее в разделе 4 рассмотрены задачи двустороннего выбора, в которых выигрышем каждого игрока является произведение качеств обоих партнеров. При этом рассматриваются две постановки: с участием третьего лица (селекционера) и стихийное скрещивание. И в заключительном разделе предложена игра двустороннего выбора с неполной информацией «быстрое свидание». Для всех рассмотренных задач были найдены оптимальные стратегии игроков.

2. Решение задачи наилучшего взаимного выбора

Рассмотрим популяцию, состоящую из двух групп – мужчин и женщин. Пусть количество индивидов в группах одинаково и их качества равномерно распределены на отрезке [0;1]. Обозначим качество женщин через x, мужчин через y, $(x, y \in [0;1])$, а соответствующие группы – X и Y. Рассмотрим двухшаговую игру, в которой на каждом шаге моделируются случайные встречи всех индивидов (игроков) из двух групп. Будем искать равновесие в данной игре среди пороговых стратегий. Предположим, что каждый из игроков имеет некий порог для качества партнера, ниже которого он не желает создавать с ним пары. Если по крайней мере один из партнеров не согласен, пара не создается и возвращается в популяцию. Если оба партнера согласны, пара создается и покидает популяцию. При этом выигрыш каждого игрока равен значению качества выбранного партнера. Оставшиеся игроки переходят на следующий шаг. Таким образом, после первого шага число индивидов с высоким качеством становится меньше, поскольку некоторая их часть образует пары и выбывает из игры. На втором шаге оставшиеся игроки опять случайным образом встречаются друг с другом и независимо от качеств партнера создают пару. Каждый игрок стремится максимизировать свой ожидаемый выигрыш.

Найдем оптимальное поведение игроков. Будем предполагать, что в каждой группе все игроки используют одну и ту же пороговую стратегию (для X и Y пороги могут отличаться). В двухшаговой модели каждый игрок из группы $Y(X)$ использует пороговое правило w_y (w_x), где $0 \le w_x, w_y \le 1$. Пороговое правило со значением порога w_y (w_x) состоит в том, что на первом шаге каждый из индивидов предлагает индивиду из противоположной группы создать пару, если значение признака последнего не меньше, чем заданное значение w_y (w_x). В силу симметрии равновесие по Нэшу будет достигаться среди правил с одним и тем же порогом $w_x = w_y = w$. Если встретившийся на первом шаге партнер имеет качество меньшее, чем w, он отвергается, и игроки переходят ко второму шагу. Если качества обоих больше или равно w, создается пара, и игроки покидают игру. Тогда, если на первом шаге распределение игроков одного пола по качеству было равномерным на отрезке $[0;1]$, то после первого шага оно изменится, поскольку игроки с качеством, большим w частично покинут популяцию. Найдем распределение игроков по качеству на втором шаге, например для x.

Пусть в начале игры мощность множества X равна 1. После первого шага останутся все игроки с качеством ниже w и доля $(1-w)w$ игроков с качеством выше w, а $(1-w)^2$ (от общего числа) игроков с качеством выше w покинут игру. Таким образом, на второй шаг перейдет всего $w+(1-w)w$ игроков каждого пола. Тогда плотность распределения игроков по качеству на втором шаге примет вид

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{w+(1-w)w},\ x\in[0;w);\\ \dfrac{w}{w+(1-w)w},\ x\in[w;1].\end{cases}\tag{2.1}$$

Следовательно, если какой-то из игроков не создает пары на первом шаге, то на втором шаге его ожидает такое среднее качество партнеров противоположного пола:

$$\begin{gathered}v_2(w)=\int\limits_0^1 xf(x)dx=\\ =\frac{1}{w(2-w)}w\frac{w}{2}+\frac{w}{w(2-w)}(1-w)\frac{w+1}{2}=\frac{1+w-w^2}{2(2-w)}.\end{gathered}\tag{2.2}$$

Вернемся к первому шагу игры. Игрок с качеством y решает выбрать партнера с качеством x (и наоборот), если качество x больше или равно среднему качеству $v_2(w)$ на следующем шаге. Таким образом, оптимальный порог на первом шаге должен удовлетворять уравнению

$$w=\frac{1+w-w^2}{2(2-w)}.\tag{2.3}$$

Его решение $w=\frac{3-\sqrt{5}}{2}\approx 0.382$ равно длине меньшего отрезка в золотом сечении. Оптимальная стратегия с порогом w дает равновесие по Нэшу. При этом средний выигрыш игроков v_1 в двухшаговой игре составит

$$v_1=(1-w)^2\frac{1+w}{2}+\big(1-(1-w)^2\big)\cdot w=\frac{1}{2}.$$

То, что средний выигрыш составляет $\frac{1}{2}$, легко понять и из других соображений. Поскольку качество каждого индивида равномерно распределено на отрезке $[0;1]$, то среднее значение равно $\frac{1}{2}$. Поскольку все индивиды так или иначе достаются индивидам противоположного пола, то выигрыш, усредненный по всем индивидам, также составляет $\frac{1}{2}$.

Можно уточнить распределение среднего выигрыша в зависимости от качества индивида. Так, индивиды с качеством, большим w желанны для всех представителей противоположного пола в обоих турах, поэтому их средний выигрыш составляет $(1-w)\dfrac{1+w}{2}+w\cdot w \approx$ ≈ 0.573, а индивиды, с качеством, меньшим w будут отвергнуты в первом туре, и их средний выигрыш во втором туре составит $w \approx\ 0.382$.

Заметим, что возможное знание некоторым индивидом своего качества не влияет на его стратегию, а значит и на средний выигрыш.

Посмотрим, как меняется средний выигрыш игрока при отклонении от оптимальной стратегии при условии, что остальные игроки придерживаются своих оптимальных стратегий. Итак, пусть все игроки кроме одного применяют найденную выше пороговую стратегию с порогом w, а некий игрок, не зная оптимального значения порога, применяет пороговую стратегию с порогом t. Если его качество ниже w, то он в любом случае в первом туре будет отвергнут, а его средний выигрыш во втором туре составит w, а если качество выше w, то в первом туре любой встретившийся партнер противоположного пола предложит создать пару, и в этом случае средний выигрыш составит $(1-t)\dfrac{t+1}{2}+tw=-\dfrac{1}{2}t^2+wt+\dfrac{1}{2}$.

Таким образом, средний выигрыш на первом шаге (обозначим его $v_1(t)$) составляет

$$v_1(t)=w^2+(1-w)\left(-\frac{1}{2}t^2+wt+\frac{1}{2}\right).$$

Как и следовало ожидать, данное выражение достигает максимума при $t=w$ и равно $\frac{1}{2}$. Заметим, что оптимальное значение порога w было получено в результате нетривиальных выкладок. Если бы авторам статьи было бы предложено сыграть в такую игру, не проделывая таких выкладок, то, по-видимому, они руководствовались такими эвристическими рассуждениями. При двухэтапном одностороннем выборе следует применять пороговую стратегию со значением порога $\frac{1}{2}$. Поскольку выбор является двусторонним, то значение порога следует несколько снизить, скажем, до 0.4 или 0.35.

Таблица 1. Значения среднего выигрыша $v_1(t)$
для различных значений t

t	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$v_1(t)$	0.454	0.475	0.490	0.498	0.500	0.496	0.485	0.469	0.446	0.417	0.382

Как показывает табл. 1, незначительные отклонения от оптимальной стратегии ведут к незначительному уменьшению величины среднего выигрыша. Так что стратегия с пороговым значением 0.4 или 0.35 оказывается вполне приемлемой.

3. Игра в малой популяции

В приведенных выше рассуждениях предполагалось, что размер каждой группы в популяции достаточно велик, и таким образом, для игроков, не создавших пары в первом туре найдутся игроки противоположного пола, также не создавшие пары в первом туре. Рассмотрим теперь модель, в которой есть $k \geq 2$ индивидов каждого пола и возможна ситуация, что некие два индивида не создали пару в первом туре, в то время как все остальные создали. Пусть в этой ситуации индивиды, не создавшие пару, не могут создавать ту же пару второй раз (например, из-за чувства взаимной обиды), таким образом, они остаются ни с чем и их выигрыш равен нулю. Качество каждого индивида в каждой группе равномерно распределено на отрезке $[0;1]$. Пусть количество пар в первом туре равно $k \geq 2$, и как и в предыдущей модели, все индивиды ищут равновесную стратегию в виде пороговой, только значение порога в данном случае будет отличаться от найденного ранее. В силу симметрии равновесие по Нэшу будет достигаться среди правил с одним и тем же порогом, обозначим его w. Тогда каждая отдельно взятая пара создается с вероятностью $(1-w)^2$, а функция распределения качества индивида, не создавшего пары в первом туре имеет вид (2.1), и ожидаемый выигрыш игрока на втором шаге по такому распределению составляет $\dfrac{1+w-w^2}{2(2-w)}$. Вероятность того, что будут образованы $k-1$ пар из данных $k-1$ (т.е. для каждого из данной пары игроков, встретившихся в первом туре, не найдется пары во втором туре) равна $(1-w)^{2(k-1)}$, тогда пороговое значение w должно удовлетворять уравнению

$$w = \left(1 - (1-w)^{2(k-1)}\right) \frac{1 + w - w^2}{2(2-w)}. \tag{3.1}$$

При любом значении k уравнение (3.1) имеет корень $w = 0$. Это, очевидно, равновесная ситуация, когда все игроки решили создать пару в первом туре, тогда оставшемуся игроку ничего не остается, как тоже создавать пару в первом туре, иначе он останется ни с чем.

Оказывается, что при $k = 2$ и 3 $w = 0$ является единственным корнем уравнения (3.1). При $k \geq 4$ существует и другое равновесное пороговое значение, которое с ростом k стремится к найденному ранее порогу $\frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0.382$. Если для некоторого k найдено w – пороговое значение в равновесной ситуации, то величина выигрыша в данной игре, согласно формуле полного среднего, равна

$$v_1 = (1-w)^2 \frac{1+w}{2} + \left(1 - (1-w)^2\right)\left(1 - (1-w)^{2(k-1)}\right) \frac{1 + w - w^2}{2(2-w)}.$$

Значения w и v_1 для различных k приведены в табл. 2.

Таблица 2. Значения оптимального порога w и среднего выигрыша v_1 для различных значений k

k	4	5	6	7	8	≥ 9
w	0.336	0.368	0.377	0.380	0.381	0.382
v_1	0.482	0.494	0.498	0.499	0.500	0.500

4. Селекция или подконтрольное скрещивание

Рассмотрим теперь модель двустороннего выбора с участием селекционера. Пусть имеются две группы индивидов. Предположим, что результатом скрещивания двух индивидов с качествами x и y является некий полезный продукт (например, совместно заработанные деньги при деловом сотрудничестве или потомство, рожденное в браке), и мера полезности скрещивания равна xy (возможно, с точностью до множителя, что не влияет на ход дальнейших рассуждений). Предположим также, что x и y равномерно распределены на отрезке $[0; 1]$.

В дальнейшем величину xy будем называть полезностью скрещивания или просто полезностью.

При вычислении средней полезности скрещивания во всех ситуациях используются две базовые теоремы теории вероятностей:

1) Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий (неважно, зависимых или нет).

2) Математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий.

Найдем и сравним среднюю полезность скрещивания в таких ситуациях:

1) **Одноэтапное стихийное скрещивание** (скрещиваются индивиды, случайно встретившие друг друга).

В этом случае средняя полезность скрещивания в силу упомянутых выше теорем равна произведению средних качеств скрещиваемых индивидов, т. е. $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

2) **Одноэтапное скрещивание под полным контролем селекционера.**

Пусть имеется N пар каждого пола. Селекционер, наблюдая качества индивидов из каждой группы, решает, кому с кем следует скрещиваться, а индивиды не имеют никакого права выбора. При этом критерием, которым руководствуется селекционер, подбирая пары, является максимизация среднего значения полезности скрещивания.

В этом случае селекционер должен принять во внимание перестановочное неравенство (или неравенство об одномонотонных последовательностях, или «транс-неравенство»), которое утверждает, что скалярное произведение двух наборов чисел является максимально возможным, если наборы одномонотонны (то есть оба одновременно неубывающие или одновременно невозрастающие), и минимально возможным, если наборы противоположной монотонности (то есть один неубывающий, другой невозрастающий). Таким образом, селекционеру нужно скрещивать наихудшего индивида с наихудшим, второго после наихудшего с таким же индивидом противоположного пола, и т.д., наилучшего с наилучшим.

Примем во внимание, что в вариационном ряде, составленном из n независимых, равномерно распределенных на $[0; 1]$ величин, среднее значение k-й порядковой статистики (считая минимальное значение первой статистикой) равно $\frac{k}{n+1}$. Воспользуемся формулой суммы квадратов первых n чисел $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

При одномонотонном скрещивании N пар (т.е. наихудший с наихудшим, и т.д., наилучший с наилучшим) средняя ожидаемая полезность равна

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{k}{N+1}\right)^2 = \frac{2N+1}{6(N+1)} = \frac{1}{3} - \frac{1}{6(N+1)}.$$

При больших значениях N значение этого выражения стремится к 1/3.

3) **Двухэтапное скрещивание под частичным контролем селекционера.**

Рассмотрим случай, который отличается от предыдущего тем, что скрещивание происходит в два шага, и по-прежнему критерием образования пар является максимизация среднего значения произведений их признаков, но селекционер имеет меньший контроль над процессом скрещивания. Его целью, как и в предыдущем пункте, является максимизация среднего значения полезности скрещивания.

Пусть количество индивидов каждого пола равно N. В первом туре индивиды случайным образом разбиваются на пары. Селекционер имеет право разрешить или запретить каждой образованной паре скрещивание. Индивиды обоих полов, которым было запрещено скрещивание в первом туре, случайным образом образуют пару с индивидом противоположного пола, и во втором туре скрещивание происходит уже без вмешательства селекционера.

В этом случае стратегия селекционера состоит в следующем. На декартовом квадрате $\Omega = [0;1] \times [0;1]$ следует найти некоторую подобласть D. Если точка, задающая качества (x, y) пары, образованной в первом туре, принадлежит этой области, то скрестить эту пару в первом туре, в противном случае, участники пары переходят во второй тур и образуют новые пары случайным образом.

Найдем эту область D путем добавления в нее бесконечно малых прямоугольников $[x, x+dx] \times [y, y+dy]$. Пусть вначале эта область пуста. Выделим на ней участок $[x, x+dx] \times [y, y+dy]$ и разрешим скрещивание только тем парам, чьи качества принадлежат этому прямоугольнику. Вероятность того, что качества какой-либо пары, образовавшейся в первом туре, будут лежать в этом прямоугольнике, равна $N \cdot dx \cdot dy$. Эта пара, скрестившись в перовом туре создает полезность xy. Если бы она не скрестилась в первом туре, то каждый из индивидов создал бы пару во втором туре и ожидаемая полезность от создания пар была бы равна $x\bar{y} + y\bar{x}$, где $\bar{x}$, $\bar{y}$ – средние значения качеств индивидов в области $\Omega \backslash D$. Однако при этом во втором туре не образовалась бы еще одна пара, средняя полезность которой составила бы $\bar{x}\bar{y}$. Таким образом, ожидаемый прирост качества от включения участка $[x, x+dx] \times [y, y+dy]$ в область D составляет $(xy - \bar{x}y - y\bar{x} + \bar{x}\bar{y})dx \cdot dy$. В самом начале область D пустая, поэтому $\Omega \backslash D = [0;1] \times [0;1]$, и, таким образом, $\bar{x} = \bar{y} = \frac{1}{2}$. Найдем на Ω точки, обеспечивающие положительный прирост:

$$xy - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right).$$

$\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right) \geq 0$ внутри двух квадратов

$$\left[0; \frac{1}{2}\right] \times \left[0; \frac{1}{2}\right] \bigcup \left[\frac{1}{2}; 1\right] \times \left[\frac{1}{2}; 1\right].$$

Покажем, что это и есть искомая область D. Включим в область D некоторую точку (x, y) вместе с окрестностью, которая обеспечивает положительный прирост. Однако положительный прирост обеспечивают также и точки (y, x), $(1-x, 1-y)$ и $(1-y, 1-x)$. Включим и их в область D с окрестностями такого же размера. Повторяя данную операцию многократно, заметим, что на каждом шаге средние значения признаков x и y по области $\Omega \backslash D$ (или другими словами координаты центра масс фигуры $\Omega \backslash D$) неизменно остаются равными $\frac{1}{2}$. Таким образом, находим, что $D = \left[0; \frac{1}{2}\right] \times \left[0; \frac{1}{2}\right] \bigcup \left[\frac{1}{2}; 1\right] \times \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

По сути это означает, что двухэтапное скрещивание происходит по такому сценарию. В первом туре происходит случайное разбиение на пары. При этом селекционер скрещивает пары, у которых значение признаков индивидов либо одновременно меньше, либо одновременно больше $\frac{1}{2}$, остальные индивиды переходят во второй тур и обязательно образуют пару со случайно встреченным партнером.

Найдем среднюю полезность, получаемую от такого двухэтапного скрещивания. Доля пар (x, y), таких, что $x \in [0; \frac{1}{2}]$, $y \in [0; \frac{1}{2}]$ составляет $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ от общего числа пар, а среднее значение полезности по этой группе равно $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$, а доля пар $x \in [\frac{1}{2}; 1]$, $y \in [\frac{1}{2}; 1]$ тоже $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, а среднее значение полезности по группе – $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$. Заметим, что во второй тур переходит половина индивидов каждого типа и что распределение признаков остается неизменным, т. е. равномерным на $[0; 1]$. Действительно, независимо от значения признака, каждый из индивидов с вероятностью $\frac{1}{2}$ образует пару и с вероятностью $\frac{1}{2}$ переходит во второй тур. Средняя внутригрупповая полезность во втором туре равна $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, а средняя полезность по всем парам равна $\overline{Q} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{32} \approx 0.281$.

4) **Стихийное двухэтапное скрещивание.** Рассмотрим вариант скрещивания в два тура, в котором отсутствует селекционер, а каждый из индивидов руководствуется собственными эгоистичными интересами – образовать пару наилучшего качества с индивидом из противоположной группы (предполагается, что именно они заинтересованы в ее наибольшем качестве, которое, как было описано ранее, равно произведению признаков образующих ее индивидов).

Пусть в первом туре происходит образование пар по взаимному согласию встретившихся индивидов. Индивиды, не образовавшие пару в первом туре, переходят во второй тур и образуют пару со случайно встреченным индивидом. Ситуация аналогична рассмотренной в разделе 2 задаче двухэтапного взаимного выбора, поскольку в этом случае каждый индивид, независимо от собственного качества, максимизирует среднее качество индивида, с которым собирается создать пару, поскольку качество образуемой пары равно произведению качества индивида, с которым создается пара и своего собственного качества (которое является фиксированным). Это значит, что каждый из индивидов будет предлагать встреченному в первом туре индивиду противоположного пола образовать пару, если значение признака встреченного индивида не менее, чем пороговое значение $w = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0.382$, являющееся корнем уравнения (2.3). Доля пар, создаваемых в первом туре, составляет $f_1 = (1-w)^2$, а среднее значение признака по этой группе равно $\rho_1 = \dfrac{1+w}{2}$. Доля пар, переходящих во второй тур, равна $f_2 = 1 - (1-w)^2 = w(2-w)$, а среднее значение признака, согласно (2.2) равно $\rho_2 = \dfrac{1+w-w^2}{2(2-w)}$, значит, среднее значение качества пар по всей совокупности равно

$$\overline{Q} = f_1\rho_1^2 + f_2\rho_2^2 = (1-w)^2\left(\frac{1+w}{2}\right)^2 + w(2-w)\left(\frac{1+w-w^2}{2(2-w)}\right)^2.$$

При $w = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0.382$ $\quad\overline{Q} \approx 0.273$.

5. Двухэтапная игра взаимного выбора с неполной информацией (или игра в «быстрое свидание»)

В последнее время среди молодежи приобретает популярность форма знакомства «speed dating» (быстрое свидание). Эта игра была придумана неким израильским раввином. Он обосновывал свое новшество тем, что молодежь из ортодоксальных семей слишком закрепощена, стеснена множеством моральных ограничений, мало общается со сверстниками и, таким образом, имеет проблемы в выборе пары. Очень быстро данный метод приобрел популярность во всем мире, преодолев национальные и религиозные ограничения и став популярным коммерческим проектом. Суть метода заключается в следующем.

Участники проекта платят организаторам определенную сумму. Как правило, свидания проходят в ресторанной обстановке. Свидание состоит из нескольких туров. Перед началом тура согласно жеребьевке участники проекта разбиваются на пары. Длительность каждого тура составляет несколько (как правило, семь) минут. Во время короткой беседы запрещено говорить о своей профессиональной деятельности, социальном статусе, обмениваться контактными данными. Разрешено: говорить о своих увлечениях, обсуждать новости и сплетни, шутить, флиртовать. Сразу после окончания краткосрочного свидания каждый из участников должен принять решение, понравился ли ему другой участник. Если симпатия оказалась взаимной, пара считается образовавшейся и покидает проект. Если хотя бы один из пары не выразил симпатии, то участники переходят в следующий тур, и мужчины случайным образом пересаживаются за другие столики.

Рассмотрим упрощенную математическую модель данной игры. Как и в задаче двухэтапного взаимного выбора полагается, что если игроки принимают друг друга на первом этапе, то они создают пару и покидают игру. При этом выигрыш каждого игрока равен значению качества выбранного партнера. Оставшиеся игроки переходят на следующий шаг. На втором шаге игроки вынуждены принять партнеров с любым качеством. Каждый игрок стремится максимизировать свой ожидаемый выигрыш. *Отличием от рассмотренных ранее моделей является то, что поскольку свидания проходят быстро и не позволяют точно оценить качества другого индивида, то качество оценивается неточно.*

Пусть наблюдаемое качество женщины состоит из двух слагаемых $x + a$, где x – полезные качества (внешние данные, умение говорить, интеллектуальный уровень и т.д.), а второе слагаемое a отвечает за умение произвести первое впечатление и может быть отнесено к бесполезным качествам. Предположим, что x и a независимы и равномерно распределены на отрезке $[0; 1]$. Соответствующие качества для мужчины обозначим через y и b соответственно. В данной игре выигрыш каждого игрока равен значению полезного качества выбранного партнера. Будем искать равновесие среди пороговых стратегий следующего вида – принимать в первом туре индивида противоположного пола, если сумма признаков (обозначим ее через S) не менее некоторого порогового значения t и отвергать в противном случае.

Не теряя общности, начнем рассуждения с точки зрения женщин. Среднее значение S, наблюдаемое на первом этапе, равно $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Если все индивиды на первом этапе придерживаются пороговой стратегии t, то при любом значении t значение суммы признаков, наблюдаемое на втором этапе, не возрастет, и, таким образом, будет не больше 1, поэтому для искомого порогового значения следует предположить, что $t \leq 1$.

Пусть t – искомое пороговое значение, и пусть $x + a \geq t$, тогда такая женщина образует пару в первом туре, если только она встретит мужчину, для которого $y + b \geq t$, т.е. с вероятностью $1 - \frac{t^2}{2}$, а с дополнительной вероятностью $\frac{t^2}{2}$ она не образует пары и перейдет во второй тур.

Внутригрупповое среднее значение признака y по группе индивидов, для которых $y + b \geq t$, составляет

$$G_1(t) = \frac{1}{1 - \frac{t^2}{2}} \left(\int_0^t x(1 - t + x)dx + \int_t^1 x\,dx \right) = \frac{1 - \frac{t^3}{3}}{2 - t^2},$$

а для группы, где $y + b < t$, соответствующая величина равна

$$G_2(t) = \frac{1}{\frac{t^2}{2}} \int_0^t x(t - x)dx = \frac{1}{3}t.$$

Во втором туре мощности групп, где $y + b \geq t$ и $y + b < t$, равны $P_1(t) = \left(1 - \frac{t^2}{2}\right) \frac{t^2}{2}$ и $P_2(t) = \frac{t^2}{2}$ соответственно. Тогда среднее значение признака y во втором туре составит

$$G_3(t) = \frac{G_1(t)P_1(t) + G_2(t)P_2(t)}{P_1(t) + P_2(t)}.$$

Если в первом туре встретился мужчина с наблюдаемым признаком t, то вследствие одинакового распределения слагаемых y и b, среднее значение признака y равно $\frac{t}{2}$.

Если t – пороговое значение для равновесной ситуации, то это значит, что если женщине в первом туре встретится мужчина с наблюдаемым признаком t, то среднее значение признака y у данного мужчины, и того, который гипотетически встретится во втором туре, если отвергнуть данного, должны быть одинаковыми, отсюда $G_3(t) = \frac{t}{2}$.

На отрезке $[0; 1]$ данное уравнение имеет единственный корень $t^* \approx 0.819$.

Значит, в равновесной ситуации игроки обоего пола должны в первом туре принимать партнера, если наблюдаемое значение признака не менее, чем 0.819, и отвергать в противном случае.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гусейн-Заде С.М. *Задача выбора и оптимальное правило остановки последовательности независимых испытаний* // ТВП. 1966. V. 11(3). C. 534–537.

2. Доценко С.И. *Задача выбора наилучшего объекта как игра двух лиц* // Кибернетика и Вычислительная техника. 2011. Вып. 164. С. 43–53.

3. Дынкин Е.Б., Юшкевич А.А. *Теоремы и задачи о процессах Маркова.* М.: Наука, 1967. С. 91–102.

4. Мазалов В.В. *Математическая теория игр и приложения.* СПб.: Изд-во «Лань», 2010.

5. Alpern S., Reyniers D. *Strategic mating with common preferences* // Journal of Theoretical Biology. 2005. V. 237. P. 337–354.

6. Alpern S., Katrantzi I., Ramsey, D. *Equilibrium population dynamics when mating is by mutual choice based on age* // Theoretical Population Biology. 2014. V. 94. P. 63–72.

7. Chow Y., Moriguti D., Robbins H., Samuels S. *Optimal selection based on relative rank (the "Secretary problem")* // Israel J. Math. 1964. V. 2. P. 81–90.

8. Eriksson K., Strimling P., Sjostrand J. *Optimal expected rank in a two-sided secretary problem* // Oper. Res. 2007. V. 55. N. 5. P. 921–931.

9. Gale D., Shapley L.S. *College Admissions and the Stability of Marriage* // The American Mathematical Monthly. 1962. V. 69(1). P. 9–15.

10. Gilbert J., Mosteller F. *Recognizing the maximum of a sequence* // J. of Amer. Stat. Assoc. 1966. V. 61. P. 35–73.

11. Ivashko A. A., Konovalchikova E.N. *Equilibrium strategies in two-sided mate choice problem with age preferences* // Contributions to Game Theory and Management. 2014. V. 7. P. 142–150

12. Mazalov V., Falko A. *Nash equilibrium in two-sided mate choice problem* // International Game Theory Review. 2008. V. 10(4). P. 421–435.

13. McNamara J., Collins E. *The job search problem as an employer-candidate game* // J.Appl. Prob. 1990. V. 28. P. 815–827.

14. Moser L. *On a problem of Cayley* // Scripta Math. 1956. V. 22. N. 5. P. 289–292.

15. Roth A. and Sotomayor M. *Two-sided matching: A study in game-theoretic modeling and analysis*. Cambridge University Press, 1992.

ON THE MODEL OF THE BEST BILATERAL TWO-STAGE MUTUAL CHOICE

Sergei I. Dotsenko, National Taras Shevchenko University of Kyiv, Faculty of Computer Science and Cybernetics, Cand.Sc. (sergei204@ukr.net).
Anna A. Ivashko, Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Center of RAS, Cand.Sc. (aivasko@krc.karelia.ru).

Abstract: A mutual choice model with two types of agents, who want to make a couple with opposite side agents is investigated. Unlike classical best-choice models two agents make a couple only by mutual agreement. Two statements are considered: natural mating and artificial selection. In the first case the Nash equilibrium is determined, in the second case the optimal selection routine is found. Several versions of the problem and incomplete information scenario are considered.

Keywords: mutual choice, population, natural mating, selection, Nash equilibrium.