Математическая Теория Игр и её Приложения, т.9, в.1, с. 62–94

УДК 519.833.2; 517.977.2
ББК 91 АД; 49.Л35

РАВНОВЕСИЕ ПО БЕРЖУ И ПО НЭШУ В ОДНОЙ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ

Владислав И. Жуковский
Антон С. Горбатов
МГУ им. М.В. Ломоносова
119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, факультет ВМК
e-mail: zhkvlad@yandex.ru, gorbatovanton@gmail.com

Константин Н. Кудрявцев
Южно-Уральский государственный университет (НИУ)
454080, Челябинск, пр-кт Ленина, 76
e-mail: kudrkn@gmail.com

Для дифференциальной линейно-квадратичной бескоалиционной позиционной игры с малым влиянием одного из игроков на скорость изменения фазового вектора найдены коэффициентные критерии существования и способ построения равновесия по Бержу и по Нэшу, базирующиеся на объединении методов динамического программирования и малого параметра.

Ключевые слова: дифференциальная линейно-квадратичная бескоалиционная позиционная игра, равновесия по Бержу и по Нэшу, динамическое программирование, метод малого параметра.

1. Введение

Тот, кто занимался теорией устойчивости по Ляпунову, безусловно помнит раздел: коэффициентные критерии устойчивости. Суть их в том, что, не решая дифференциальных уравнений, по знакам коэффициентов и(или) соотношениям между ними можно сразу судить об устойчивости невозмущенного движения. В этой статье мы попытались применить такой же подход, но уже для выбора концепций равновесия в классе бескоалиционных дифференциальных линейно-квадратичных игр двух лиц. Именно, по знакоопределенности квадратичных форм, входящих в функции выигрыша игроков, дать ответ на два вопроса:
во-первых, существуют (или нет) ситуации равновесия по Бержу и (или) по Нэшу,
во-вторых, как их найти?

По существу ответы на них «прячутся» (с учетом метода динамического программирования) в возможности судить о существовании продолжимого на временной интервал игры решения системы из двух обыкновенных матричных дифференциальных уравнений типа Риккати. Для утвердительного ответа на эту задачу мы привлекаем метод малого параметра и теорему Пуанкаре об аналитичности решения по параметру.

2. Математическая модель

2.1. Предварительные сведения

Рассмотрим бескоалиционную дифференциальную позиционную линейно-квадратичную игру двух лиц:

$$\Gamma_2 =< \{1,2\}, \Sigma, \{\mathfrak{U}_i\}_{i=1,2}, \{\mathcal{J}_i(U,t_0,x_0)\}_{i=1,2} > .$$

Здесь $\{1,2\}$ – множество порядковых номеров игроков; изменение во времени t фазового n-вектора $x \in \mathbb{R}^n$ (состояние системы Σ) описывается линейным векторным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = A(t)x + u_1 + \varepsilon u_2, \quad x(t_0) = x_0, \tag{2.1}$$

где время $t \in [t_0, \vartheta]$, причем фиксирован момент окончания игры $\vartheta > t_0 \geqslant 0$; позицию игры Γ_2 в момент t образует пара $(t,x) \in [t_0,\vartheta]\times\mathbb{R}^n$,

(t_0, x_0) – начальная позиция; элементы $n \times n$-матрицы $A(t)$ предполагаем непрерывными на $[0, \vartheta]$ (обозначаем $A(\cdot) \in C^{n\times n}[0, \vartheta]$); $u_i \in \mathbb{R}^n$ – управляющее воздействие i-ого игрока; $\varepsilon > 0$ малый параметр и поэтому Γ_2 представляет собой дифференциальную позиционную игру с малым влиянием второго игрока на скорость $\dot{x}(t)$ изменения фазового вектора $x(t)$.

Стратегию i-ого игрока U_i будем отождествлять с n-вектор-функцией $u_i(t, x)$ вида $Q_i(t)x$, $Q_i(\cdot) \in C^{n\times n}[0, \vartheta]$ (обозначаем этот факт $U_i \div u_i(t, x) = Q_i(t)x$), множеством таких стратегий тогда будет

$$\mathfrak{U}_i = \left\{U_i \div Q_i(t)x \ \ \forall Q_i(\cdot) \in C^{n\times n}[0, \vartheta]\right\},$$

ситуацией игры Γ_2 является пара $U = (U_1, U_2) \in \mathfrak{U} = \mathfrak{U}_1 \times \mathfrak{U}_2$; итак, выбор стратегии i-ым игроком сводится к выбору непрерывной на $[0, \vartheta]$ матрицы $Q_i(t)$ $(i = 1, 2)$.

Партия игры Γ_2 происходит следующим образом. Каждый из игроков, исходя из «своих соображений» (см. ниже функцию выигрыша $\mathcal{J}_i(U, t_0, x_0)$) выбирает и использует свою стратегию $U_i^* \div u_i^* = Q_i^*(t)x$ $(i = 1, 2)$. В результате система (2.1) принимает вид

$$\dot{x} = \left[A(t) + Q_1^*(t) + \varepsilon Q_2^*(t)\right] x, \quad x(t_0) = x_0.$$

Такая однородная линейная (по x) система с непрерывными (по t) коэффициентами имеет единственное непрерывное решение $x^*(t)$, продолжимое на $[t_0, \vartheta]$ $\forall t_0 \in [0, \vartheta)$. По полученному $x^*(t)$ построим *реализации* $u_i^*[t] = u_i^*(t, x^*(t)) = Q_i^*(t)x^*(t)$ выбранных игроками стратегий $U_i^* \div Q_i^*(t)x$ $(i = 1, 2)$. На такой непрерывной тройке $\{x^*(t), u_1^*[t], u_2^*[t] | t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta\}$ определена априори *функция выигрыша i-ого игрока*, заданная квадратичным функционалом

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_i(U_1^* U_2^*, t_0, x_0) &= [x^*(\vartheta)]' C_i x^*(\vartheta) + \\ &+ \int_{t_0}^{\vartheta} \left\{(u_1^*[t])' D_{i1} u_1^*[t] + (u_2^*[t])' D_{i2} u_2^*[t]\right\} dt \quad (i = 1, 2),\end{aligned} \tag{2.2}$$

значение (2.2) называется *выигрышем* i-ого игрока. В (2.2) штрих сверху означает операцию транспонирования, постоянные $n \times n$-матрицы C_i, D_{ij}, не ограничивая общности, считаем симметричными. Далее используем вектор-столбцы: $u_i = (u_i^{(1)}, \ldots, u_i^{(n)}) \in \mathbb{R}^n$ $(i = 1, 2)$,

0_n – ноль-вектор, $V = (V_1, V_2)$, единичную $n \times n$-матрицу E_n и нулевую $n \times n$-матрицу $O_{n\times n}$; для постоянной симметричной матрицы $D > 0$ $(< 0,\ \leqslant 0)$ означает, что квадратичная форма $u_i' D u_i$ определенно положительна (отрицательна, постоянно не положительна); для скалярной функции $W(t, x, u_i)$

$$\max_{u_i} W(t, x, u_i) = Idem\{u_i \to u_i(t, x)\}$$

означает, что

$$\max_{u_i} W(t, x, u_i) = W(t, x, u_i(t, x)) \quad \forall t \in [0, \vartheta], x \in \mathbb{R}^n, \tag{2.3}$$

причем тождество (2.3) имеет место, если

$$\left.\frac{\partial W(t, x, u_i)}{\partial u_i}\right|_{u_i(t,x)} = 0_n, \quad \left.\frac{\partial^2 W(t, x, u_i)}{\partial u_i^2}\right|_{u_i(t,x)} < 0. \tag{2.4}$$

2.2. Явный вид решения одного матричного дифференциального уравнения типа Риккати

Утверждение 2.1. *Пусть $n \times n$-матрица $A(\cdot) \in C^{n\times n}[0, \vartheta]$, постоянные симметричные $n \times n$-матрицы*

$$C < 0, D < 0.$$

Тогда решение $\Theta(t)$ матричного дифференциального уравнения типа Риккати

$$\dot{\Theta} + \Theta A(t) + A(t)'\Theta - \Theta D^{-1}\Theta = O_{n\times n}, \quad \Theta(\vartheta) = C, \tag{2.5}$$

имеет вид

$$\Theta(t) = [X^{-1}(t)]' \left\{ C^{-1} + \int_t^{\vartheta} X^{-1}(\tau) D^{-1} [X^{-1}(\tau)]' d\tau \right\}^{-1} X^{-1}(t), \tag{2.6}$$

где $X(t)$, $0 \leq t \leq \vartheta$ – решение матричной системы

$$\dot{X} = A(t)X, \quad X(\vartheta) = E_n. \tag{2.7}$$

Доказательство можно найти, например, в [16].

Замечание 2.1. Уравнение (2.5) появляется при применении метода динамического программирования для построения седловой точки $U^0 = (U_1^0, U_2^0) \in \mathfrak{U}$:

$$\mathcal{J}(U_1, U_2^0, t_0, x_0) \leq \mathcal{J}(U_1^0, U_2^0, t_0, x_0) \leq \mathcal{J}(U_1^0, U_2, t_0, x_0)$$

$\forall (t_0, x_0) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^n$, $U_i \in \mathfrak{U}_i$ $(i = 1, 2)$, в случае антагонистического варианта Γ_2 (т.е. если в Γ_2 имеет место $C = C_1 = -C_2$, $D = D_{11} = -D_{22}$, $D_{12} = D_{21} = O_{n\times n}$, $\mathcal{J} = \mathcal{J}_1 = -\mathcal{J}_2$). Имеются несколько различных видов решения $\Theta(t)$, $t \in [0, \vartheta]$, уравнения (2.5), сводящихся одно к другому (ибо решение $\Theta(t)$ единственно). Мы ограничились лишь (2.6), так как (2.6) наиболее удобно для применения метода малого параметра.

Утверждение 2.2. *Пусть $A(\cdot)$, $B(\cdot) \in C^{n\times n}[0, \vartheta]$, тогда решение матричного дифференциального уравнения*

$$\dot{\Theta} + \Theta A(t) + A'(t)\Theta + B(t) = O_{n\times n}, \quad \Theta(\vartheta) = C, \tag{2.8}$$

имеет вид

$$\Theta(t) = [X^{-1}(t)]' \left\{ C + \int\limits_t^{\vartheta} X'(\tau) B(\tau) X(\tau) d\tau \right\} X^{-1}(t), \tag{2.9}$$

здесь $X(t)$ – фундаментальная матрица решений $\dot{x} = A(t)x$, $X(\vartheta) = E_n$.

2.3. Отсутствие максимумов в Γ_2

Установим утверждение, благодаря которому удается заведомо «отметать» те линейно-квадратичные дифференциальные игры вида Γ_2, в которых не существует равновесия по Бержу и (или) Нэшу в зависимости от определенной положительности квадратичных форм, входящих в подынтегральное выражение функций выигрыша игроков (2.2).

Лемма 2.1. *Пусть в (2.2) при $i = 1$ квадратичная форма $u_1' D_{11} u_1$ определенно положительная, тогда для любой ситуации $U^* = (U_1^*, U_2^*) \in \mathfrak{U}$, $U_i^* \div Q_i^*(t)x$ $(i = 1, 2)$, $Q_i^*(\cdot) \in C^{n\times n}[0, \vartheta]$ и любой* *начальной позиции* $(t_0, x_0) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^n$, $x_0 \neq 0_n$, *а также при любых постоянных и симметричных матрицах* C_1, D_{12} *существует стратегия первого игрока* $\tilde{U}_1 \in \mathfrak{U}_1$, $\tilde{U}_1 \div \tilde{Q}_1(t)x$ *такая, что*

$$\mathcal{J}_1(\tilde{U}_1, U_2^*) > \mathcal{J}_1(U_1^*, U_2^*). \tag{2.10}$$

Доказательство. Пусть $U^* = (U_1^*, U_2^*) \div (Q_1^*(t)x, Q_2^*(t)x)$, $Q_i^*(\cdot) \in \in C^{n\times n}[0, \vartheta]$ $(i = 1, 2)$ и $(t_0, x_0) \in [0, \vartheta) \times [\mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}]$ некоторые «замороженные» ситуация из $\mathfrak{U}$ и начальная позиция соответственно.

Доказательство Леммы 2.1 проведем в два этапа, на первом установим существование квадратичной формы $V(t, x) = x'\Theta(t)x$, для которой

$$\mathcal{J}_1(U_1^*, U_2^*, t_0, x_0) = V(t_0, x_0),$$

на втором уже докажем наличие стратегии первого игрока $\tilde{U}_1 \in \mathfrak{U}_1$ такой, что имеет место (2.10).

Первый этап. Составим скалярную функцию

$$W(t, x, u_1, u_2, V) = \frac{\partial V}{\partial t} + \left[\frac{\partial V}{\partial x}\right]' (A(t)x + u_1 + \varepsilon u_2) + u_1' D_{11} u_1 + u_2' D_{12} u_2. \tag{2.11}$$

Тогда при $u_i = Q_i^*(t)x$ $(i = 1, 2)$ будет

$$\begin{aligned} W[t, x, V] = W(t, x, u_1 = Q_1^*(t)x, u_2 = Q_2^*(t)x, V) = \\ = \frac{\partial V}{\partial t} + \left[\frac{\partial V}{\partial x}\right]' (A(t)x + Q_1^*(t)x + \varepsilon Q_2^*(t)x) + \\ + [Q_1^*(t)x]' D_{11} Q_1^*(t)x + [Q_2^*(t)x]' D_{12} Q_2^*(t)x. \end{aligned}$$

Найдем решение $V = V(t, x)$ уравнения с частными производными

$$W[t, x, V] = 0, \quad V(\vartheta, x) = x' C_1 x. \tag{2.12}$$

Ищем его в виде квадратичной формы $V(t, x) = x\Theta(t)x$, где $n\times n-$ - матрица $\Theta(\cdot) \in C^{n\times n}[0, \vartheta]$.

Подставляя $V(t, x) = x'\Theta(t)x$ в (2.12) и группируя слагаемые при одинаковых компонентах n-вектора $x \in \mathbb{R}$, получим

$$\begin{aligned} W[t, x, V(t, x) = x'\Theta(t)x] = x' \Big\{ \frac{d\Theta(t)}{dt} + \\ + [\Theta(t)]'[A(t) + Q_1^*(t) + \varepsilon Q_2^*(t)] + [A'(t) + (Q_1^*(t))' + \varepsilon (Q_2^*(t))']\Theta(t) + \\ + [Q_1^*(t)]' D_{11} Q_1^*(t) + [Q_2^*(t)]' D_{12} Q_2^*(t) \Big\} x = 0, \end{aligned}$$

$$x'\Theta(\vartheta)x = x'C_1x.$$

Эти оба тождества имеют место, если $n \times n$-матрица $\Theta(t)$ является $\forall(t,x) \in [0,\vartheta] \times \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$ решением линейного неоднородного матричного дифференциального уравнения с непрерывными по t элементами

$$\dot{\Theta}+\Theta'[A(t)+Q_1^*(t)+\varepsilon Q_2^*(t)]+[A'(t)+(Q_1^*(t))'+\varepsilon(Q_2^*(t))']\Theta+B(t) = O_{n\times n} \tag{2.13}$$

с граничным условием

$$\Theta(\vartheta) = C_1, \tag{2.14}$$

где непрерывная симметричная матрица

$$B(t) = [Q_1^*(t)]'D_{11}Q_1^*(t) + [Q_2^*(t)]'D_{12}Q_2^*(t). \tag{2.15}$$

В силу Утверждения 2.2, система (2.13), (2.14) имеет единственное непрерывно дифференцируемое решение $\Theta = \Theta^*(t)$, продолжимое на любой интервал $[t_0, \vartheta] \subset [0, \vartheta]$. Заметим, что согласно симметричности матриц $C, B(t)$ из (2.15) и явного вида $\Theta^*(t)$ из (2.9), матрица $\Theta^*(t)$ симметрична $\forall t \in [t, \vartheta]$.

Теперь построим реализации «замороженных» выше стратегий $U_i^* \div u_i^*(t,x) = Q_i^*(t)x$ на решении $x^*(t)$ векторного уравнения (2.1), то есть построим $u_i^*[t] = Q_i^*(t)x^*(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$ $(i = 1, 2)$, где

$$\frac{dx^*(t)}{dt} = A(t)x^*(t) + Q_1^*(t)x^*(t) + \varepsilon Q_2^*(t)x^*(t), \quad x^*(t_0) = x_0.$$

Тогда, с учетом (2.12),

$$W[t, x^*(t), V(t, x^*(t)) = [x^*(t)]'\Theta^*(t)x^*(t)] = W^*[t] = 0 \tag{2.16}$$

$\forall t \in [t_0, \vartheta]$, в силу (2.13), (2.14) и (2.1). Интегрируя обе части (2.16) в пределах от t_0 до ϑ с учетом, что в силу (2.14) имеем $V(\vartheta, x^*(\vartheta)) = [x^*(\vartheta)]'C_1x^*(\vartheta)$, приходим к

$$0=\int\limits_{t_0}^{\vartheta} W^*[t]dt=\int\limits_{t_0}^{\vartheta}\Big\{\frac{\partial V(t,x)}{\partial t}+[\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}]'[A(t)x+Q_1^*(t)x+\varepsilon Q_2^*(t)x]+$$

$$+[Q_1^*(t)]'D_{11}Q_1^*(t)+[Q_2^*(t)]'D_{12}Q_2^*(t)\Big\}\Big|_{x=x^*(t)}dt=$$

$$=\int\limits_{t_0}^{\vartheta}\frac{dV^*(t,x^*(t))}{dt}dt+\int\limits_{t_0}^{\vartheta}\{(u_1^*[t])'D_{11}u_1^*[t]+(u_2^*[t])'D_{12}u_2^*[t]\}\,dt=$$

$$=V(\vartheta,x^*(\vartheta))-V(t_0,x_0)+\int\limits_{t_0}^{\vartheta}\{(u_1^*[t])'D_{11}u_1^*[t]+(u_2^*[t])'D_{12}u_2^*[t]\}\,dt=$$

$$=[x^*(\vartheta)]'C_1x^*(\vartheta)+\int\limits_{t_0}^{\vartheta}\{(u_1^*[t])'D_{11}u_1^*[t]+(u_2^*[t])'D_{12}u_2^*[t]\}\,dt-V(t_0,x_0)=$$

$$=\mathcal{J}_1(U_1^*,U_2^*,t_0,x_0)-V(t_0,x_0).$$

Отсюда как раз и следует равенство

$$V(t_0,x_0)=x_0'\Theta^*(t_0)x_0=\mathcal{J}_1(U^*,t_0,x_0).$$

Второй этап. Рассмотрим стратегию первого игрока $\tilde{U}_1\div\tilde{u}_1(t,x)=$ $=\beta e_n'x$, где e_n – вектор-столбец из $\mathbb{R}^n$, все компоненты которого равны единице, а величину числового параметра $\beta>0$ определим ниже. Вследствие симметричности матрицы D_{11} и дополнительно $D_{11}>0$ имеет место

$$u_1'D_{11}u_1\geq\lambda_1||u_1||^2=\lambda_1u_1'u_1\quad\forall u_1\in\mathbb{R}^n.\tag{2.17}$$

Здесь $||\cdot||$ – евклидова норма и $\lambda_1>0$ – наименьший корень характеристического уравнения $\det[D_{11}-\lambda E_n]=0$ [10, с.89, 109].

Далее будем использовать $n\times n$ - матрицу $\Theta^*(t),\ t\in[0,\vartheta]$, полученную на первом этапе решения (2.13), (2.14) (отметим, что элементы $\Theta^*(t)$ непрерывно дифференцируемы по t). Кроме того, применим используемую на первом этапе стратегию $U_2^*\div Q_2^*(t)x$ второго игрока и, наконец, имеем ввиду неравенство (2.17).

Следуя (2.11), составим, с учетом (2.17),

$$\tilde{W}[t,x] = W(t,x,\tilde{u}_1(t,x)=\beta x, u_2^*(t,x)=Q_2^*(t)x, V(t,x)=x'\Theta^*(t)x)=$$
$$= \frac{\partial V(t,x)}{\partial t} + [\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}]'[A(t)x + \tilde{u}_1(t,x) + \varepsilon u_2^*(t,x)]+$$
$$+ [\tilde{u}_1(t,x)]' D_{11}\tilde{u}_1(t,x) + [u_2^*(t,x)]' D_{12} u_2^*(t,x) \geq$$
$$\geq x' \frac{d\Theta^*(t)}{dt} x + 2x'\Theta^*(t)[A(t) + \beta E_n + \varepsilon Q_2^*(t)]x + x'\lambda_1\beta^2 e_n' E_n e_n x+$$
$$+ x'[Q_2^*(t)]' D_{12} Q_2^*(t) x = x' \Big\{ \frac{d\Theta^*(t)}{dt} + \Theta^*(t)[A(t) + \beta E_n + \varepsilon Q_2^*(t)]+$$
$$+ [A'(t) + \beta E_n + \varepsilon [Q_2^*(t)]']\Theta^*(t) + \lambda_1 \beta^2 e_n' e_n E_n + [Q_2^*(t)]' D_{12} Q_2^*(t) \Big\} x =$$
$$= x' M(t,\beta) x.$$

Стоящая здесь в фигурных скобках $n \times n$-матрица $M(t,\beta)$ симметрична и имеет следующий вид (с учетом $e_n' e_n = n$)

$$M(t,\beta) = \lambda_1 \beta^2 n E_n + 2\beta\Theta(t) + K(t),$$

здесь $n \times n$-матрица

$$K(t) = \Theta(t) + 2\Theta[A(t) + \varepsilon Q_2^*(t)] + [Q_2^*(t)]' D_{12} Q_2^*(t).$$

Элементы матрицы $M(t,\beta)$ непрерывны по $t \in [0,\vartheta]$ и, следовательно, равномерно ограничены на компакте $[0,\vartheta]$, множитель β^2 входит только в диагональные элементы матрицы $M(t,\beta)$; напомним, что $\lambda_1 > 0$ является наименьшим корнем характеристического уравнения $\det[D_{11} - \lambda E_n] = 0$, а E_n – единичная $n \times n$-матрица.

Поэтому постоянную $\beta = \beta(U_1^*) > 0$ можно выбрать настолько большой, чтобы все ведущие миноры матрицы $M(t,\beta)$ стали положительными $\forall t \in [0,\vartheta]$ и $\forall \beta > \beta(U_1^*)$. Согласно критерию Сильвестра [10, с.88] тогда квадратичная форма $x'M(t,\beta)x$ будет определенно положительной для всех $t \in [0,\vartheta]$ и постоянных $\beta > \beta(U_1^*)$ (так как знак $x'M(t,\beta)x$ определяется знаком квадратичной формы $\beta^2\lambda_1 n x'x$).

Фиксируем какую-либо постоянную $\beta^* > \beta(U_1^*)$ и тогда

$$\tilde{W}[t,x] = x'M(t,\beta^*)x > 0 \quad \forall t \in [0,\vartheta], \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}. \tag{2.18}$$

Обозначим через $\tilde{x}(t)$ решение (при $t \in [0,\vartheta]$) векторного уравнения

$$\dot{x} = A(t)x + \beta^* x + \varepsilon Q_2^*(t)x, \quad x(t_0) = x_0.$$

Так как $[x_0 \neq 0_n] \Rightarrow [\tilde{x}(t) \neq 0_n \ \forall t \in [t_0, \vartheta]]$, то согласно (2.18) будет

$$\tilde{W}[t, \tilde{x}(t)] > 0 \quad \forall t \in [t_0, \vartheta].$$

Отсюда, интегрируя обе части последнего неравенства в пределах от t_0 до ϑ и учитывая граничное условие $\Theta^*(\vartheta) = C_1$ из (2.14), $\tilde{u}^*[t] = \beta\tilde{x}(t)$, получаем

$$0 < \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \tilde{W}[t, \tilde{x}(t)] dt = \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \Big\{ \tfrac{\partial V(t,x)}{\partial t} + [\tfrac{\partial V(t,x)}{\partial x}]'[A(t)x + \beta^* E_n x + \varepsilon Q_2^*(t)x] \Big\}_{x=\tilde{x}(t)} dt +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \{x'\beta^* D_{11}\beta^* x + [Q_2^*(t)]' D_{12} Q_2^*(t)x\}_{x=\tilde{x}(t)} \, dt =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \left\{ \frac{dV(t, \tilde{x}(t))}{dt} \right\} dt + \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \{[\tilde{u}_1^*[t]]' D_{11} \tilde{u}_1^*[t] + [u_2^*[t]]' D_{12} u_2^*[t]\} \, dt =$$

$$= \tilde{x}'(\vartheta) C_1 \tilde{x}(\vartheta) + \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \{[\tilde{u}_1^*[t]]' D_{11} \tilde{u}_1^*[t] + [u_2^*[t]]' D_{12} u_2^*[t]\} \, dt - V(t_0, x_0) =$$

$$= \mathcal{J}_1(\tilde{U}_1, U_2^*, t_0, x_0) - V(t_0, x_0).$$

Отсюда и из $\mathcal{J}_1(U_1^*, U_2^*, t_0, x_0) = V(t_0, x_0)$ сразу следует справедливость Леммы 2.1. □

Замечание 2.2. Рассмотрим внутреннюю оптимизационную задачу в игре Γ_2: найти $\max\limits_{U_1 \in \mathfrak{U}_1} \mathcal{J}_1(U_1, U_2^*, t_0, x_0)$ при ограничении (2.1), фиксированной стратегии $U_2^* \in \mathfrak{U}_2$ второго игрока и любых $(t_0, x_0) \in [0, \vartheta] \times [\mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}]$. Фактически Лемма 2.1 утверждает, что при $D_{11} > 0$ и $x_0 \neq 0_n$ эта задача максимизации не имеет решения. В самом деле, какую бы стратегию $U_1^* \in \mathfrak{U}_1$ первый игрок не выбрал, всегда существует стратегия $\tilde{U}_1 \in \mathfrak{U}_1$ этого игрока такая, что

$$\mathcal{J}_1(\tilde{U}_1, U_2^*) > \mathcal{J}_1(U_1^*, U_2^*)$$

$\forall (t_0, x_0) \in [0, \vartheta) \times [\mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}]$. Такой результат позволяет сразу «отметать» те концепции принятия равновесных решений игровых задач вида Γ_2, в условиях которых фигурирует максимизация функции выигрыша первого игрока (например, не применять при $D_{11} > 0$ концепцию равновесия по Нэшу в качестве принципа выбора решения в

Γ_2; аналогично Лемме 2.1 доказывается, что при $D_{12} > 0$ в игре Γ_2 не существует ситуации равновесия по Бержу (см. раздел 3) и поэтому игрокам не стоит применять равновесную по Бержу ситуацию (в игре Γ_2 при $D_{12} > 0$)).

3. Формализация равновесий и достаточные условия

3.1. Определения

Определение 3.1. *Ситуация* $U^e = (U_1^e, U_2^e) \in \mathfrak{U}$ *равновесна по Нэшу в игре* Γ_2, *если при любом выборе начальной позиции* $(t_0, x_0) \in \in [0, \vartheta) \times [\mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}]$ *выполнены*

$$\begin{aligned} \max_{U_1 \in \mathfrak{U}_1} \mathcal{J}_1(U_1, U_2^e, t_0, x_0) &= \mathcal{J}_1(U^e, t_0, x_0), \\ \max_{U_2 \in \mathfrak{U}_2} \mathcal{J}_2(U_1^e, U_2, t_0, x_0) &= \mathcal{J}_2(U^e, t_0, x_0). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Определение 3.2. *Ситуация* $U^B = (U_1^B, U_2^B) \in \mathfrak{U}$ *равновесна по Бержу в игре* Γ_2, *если при любом выборе начальной позиции* $(t_0, x_0) \in \in [0, \vartheta) \times [\mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}]$ *выполнены*

$$\begin{aligned} \max_{U_2 \in \mathfrak{U}_2} \mathcal{J}_1(U_1^B, U_2, t_0, x_0) &= \mathcal{J}_1(U^B, t_0, x_0), \\ \max_{U_1 \in \mathfrak{U}_1} \mathcal{J}_2(U_1, U_2^B, t_0, x_0) &= \mathcal{J}_2(U^B, t_0, x_0). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Замечание 3.1. Несмотря на внешнее сходство этих двух понятий, между ними имеется глубокое различие. Если в Определении 3.1 ярко выражается «эгоистический» характер каждого участника игры – он стремится увеличить лишь свой выигрыш, то Определение 3.2 подчеркивает альтруизм игрока – он следует *Золотому правилу нравственности:* относится к партнеру так, как бы хотел, чтобы партнер относился к нему.

3.2. Аспекты истории

Определение 3.1 формализовал в 1949 году [20] аспирант Принстонского университета Джон Форбс Нэш, которому на тот момент был 21 год. Почти через полвека в 1994 году он (совместно с Джоном Харсаньи и Райнхардом Зельтеном) получил за эту работу Нобелевскую премию с формулировкой: «За фундаментальный анализ равновесия в теории некооперативных игр». Фактически Нэш в 20 лет предвосхитил теоретические основы научного метода, который сыграл огромную роль в развитии мировой экономики. Концепция и идеи равновесия по Нэшу получили широкое применение в экономике, социологии, военных науках и других областях человеческой деятельности. Открывая любой журнал по теории игр, исследованию операций, системному анализу, автоматическому управлению, почти всегда встречаешь статью, связанную с равновесием по Нэшу. Однако «и на солнце есть пятна». Кроме указанного выше «эгоистического характера» сюда можно отнести «внутреннюю неустойчивость» множества ситуаций равновесия по Нэшу, их «улучшаемость», а также факт, что имеются игровые задачи, где ситуация равновесия по Нэшу вообще не существует (см. Замечание 2.2 и результирующую Таблицу 1 в конце настоящей статьи). Естественно возникает желание формализовать новое понятие решения, свободное от указанных негативных свойств. К этому имеет прямое отношение равновесие по Бержу, которое появилось в 1994 году в России во время критического обсуждения книги Клода Бержа «Общая теория игр нескольких лиц» [18], опубликованной в Париже в 1957 году (и переведенной на русский язык в 1961 году). Поэтому мы и назвали это равновесие «Равновесием по Бержу» (РБ). Значительную роль в становлении этого понятия сыграл Константин Семенович Вайсман, тогда аспирант В.И. Жуковского. В 1995 году в Санкт-Петербургском университете К.С. Вайсман защитил на факультете ПМиПУ кандидатскую диссертацию «Равновесие по Бержу» [4], в которой он

1. формализовал и выявил свойства РБ, а также построил пример игры, в которой для РБ не выполняется свойство индивидуальной рациональности [1,2,5,8,9],

2. положил начало исследованиям РБ при неопределенности как для бескоалиционных игр [13,22,23,26-29], так и для кооперативных, рассмотрев арбитражную схему Нэша при неопределенности [6],

3. высказал идею о гибридном равновесии, где каждый игрок может следовать своей концепции равновесия, которые для разных игроков могут не совпадать,

4. выделил классы игр, в которых существует равновесие по Бержу, но отсутствует равновесие по Нэшу.

После скоропостижной смерти К.С. Вайсмана в 1998 году (он не дожил и до 36 лет) эти исследования частично продолжили Е.Н. Оплетаева, Ю.А. Бельских , В.В. Золотарев (тогда аспиранты В.И. Жуковского). Но все-таки судьба РБ несчастлива. Во-первых, неожиданная смерть К.С. Вайсмана, во-вторых, отрицательная рецензия Мартина Шубика [21] на книгу Бержа, в которой, по мнению М. Шубика «...материал представлен в весьма абстрактном виде, никакого внимания не уделено приложению к экономике...книга мало интересна для экономистов». По нашему мнению эта рецензия «отпугнула» экономистов от книги Бержа. К настоящему времени РБ получило «второе дыхание»: РБ посвящено две книги [11,13] и обзор [19], также доказано существование РБ в смешанных стратегиях (аналог теоремы Гликсберга для Нэша) и установлены достаточные условия, сводящие построение РБ к нахождению седловой точки специальной гермейеровской свертки функции выигрыша игроков [14]. Наблюдается переход к РБ в теории дифференциальных игр ([15] и настоящая статья).

3.3. Достаточные условия

Предлагаемые достаточные условия существования равновесия по Нэшу и равновесия по Бержу представляют собой применение метода динамического программирования к Определениям 3.1 и 3.2 соответственно (доказательство таких условий можно найти в книге [16, с.112,124].

Предварительно введем две скалярные функции:

$$W_i(t,x,u_1,u_2,V) = \frac{\partial V_i}{\partial t} + \left[\frac{\partial V_i}{\partial x}\right]' (A(t)x+ \\ +u_1+\varepsilon u_2) + u_1' D_{i1} u_1 + u_2' D_{i2} u_2 \quad (i=1,2), \tag{3.3}$$

где $V = (V_1, V_2) \in \mathbb{R}^2$.

Равновесие по Нэшу

Утверждение 3.1. *Пусть удалось найти единственные непрерывно дифференцируемые скалярные функции $V_i^e(t,x)$ $(i=1,2)$ такие, что*

1^0
$$V_i^e(\vartheta, x) = x'C_i x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n; \tag{3.4}$$

2^0 *построить также две вектор-функции* $u_i^e(t, x, V^e)$ $(i = 1, 2)$, *для которых*

$$\max_{u_1} \{W_1(t, x, u_1, u_2^e(t, x, V^e), V^e)\} = Idem\{u_1 \to u_1^e(t, x, V^e)\},$$
$$\max_{u_2} \{W_2(t, x, u_1^e(t, x, V^e), u_2, V^e)\} = Idem\{u_2 \to u_2^e(t, x, V^e)\} \tag{3.5}$$

при всех $(t, x) \in [0, \vartheta] \times [\mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}]$, $V^e = (V_1^e, V_2^e) \in \mathbb{R}^2$;

3^0 *функции* $V_i^e(t, x)$ $(i = 1, 2)$ *являются решением системы из двух уравнений с частными производными*

$$W_i(t, x, u_1^e(t, x, V^e), u_2^e(t, x, V^e), V^e) = 0 \quad (i = 1, 2) \tag{3.6}$$

с граничными условиями (3.4) *при всех* $(t, x) \in [0, \vartheta] \times [\mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}]$;

4^0 *стратегии* $U_i^e \div u_i^e(t, x, V^e(t, x)) = u_i^e[t, x]$ *таковы, что* $U_i^e \in \mathfrak{U}_i$ $(i = 1, 2)$.

Тогда

a) ситуация $U^e = (U_1^e, U_2^e)$ *равновесна по Нэшу в игре* Γ_2 (*Определение* 3.1),

b) при этом равновесные по Нэшу выигрыши

$$\mathcal{J}_i(U^e, t_0, x_0) = V_i^e(t_0, x_0) \quad (i = 1, 2). \tag{3.7}$$

Замечание 3.2. При практическом построении ситуации равновесия по Нэшу следует, построив скалярные функции $W_i(t, x, u_1, u_2, V^e)$ по формулам (3.3), «двигаться» по пунктам $1^0 - 4^0$ утверждения 3.1 с соответствующим порядком шагов. Именно, выбрав в качестве $V_i^e(t, x) = x'\Theta_i^e(t)x$, $[\Theta_i^e(t)]' = \Theta_i^e(t)$ $(i = 1, 2)$,
Шаг 1: с помощью (3.4) найти $\Theta_i^e(\vartheta) = C_i$ $(i = 1, 2)$;
Шаг 2: на основании (3.5) и (2.3)-(2.4) построить $u_i^e(t, x, V^e)$ $(i = 1, 2)$;
Шаг 3: найти решение $V_i^e(t, x)$ $(i = 1, 2)$ системы из двух уравнений

с частными производными (3.6) и с граничными условиями (3.4);
Шаг 4: проверить, что $u_i^e[t,x] = u_i(t,x,V^e(t,x)) = Q_i^e(t)x$, $Q_i^e(\cdot) \in \in C^{n\times n}[0,\vartheta]$ $(i=1,2)$.

Полученная в результате пара $U^e = (U_1^e, U_2^e)$ и является ситуацией равновесия по Нэшу в игре Γ_2, а выигрыши обоих игроков при этом $J_i(U^e, t_0, x_0) = V_i^e(t_0, x_0)$ $(i=1,2)$.

Равновесие по Бержу

Утверждение 3.2. *Пусть удалось найти единственные непрерывно дифференцируемые скалярные функции* $V_i^B(t,x)$ $(i=1,2)$ *такие, что*

1^0

$$V_i^B(\vartheta, x) = x'C_i x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n; \tag{3.8}$$

2^0 *построить также две вектор-функции* $u_i^B(t,x,V^B)$ $(i=1,2)$, *для которых*

$$\begin{gathered}\max_{u_2}\left\{W_1(t,x,u_1^B(t,x,V^B),u_2,V^B)\right\} = Idem\{u_2 \to u_2^B(t,x,V^B)\},\\ \max_{u_1}\left\{W_2(t,x,u_1,u_2^B(t,x,V^B),V^B)\right\} = Idem\{u_1 \to u_1^B(t,x,V^B)\}\end{gathered} \tag{3.9}$$

при всех $(t,x) \in [0,\vartheta]\times[\mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}]$, $V^B = (V_1^B, V_2^B) \in \mathbb{R}^2$;

3^0 *функции* $V_i^B(t,x)$ $(i=1,2)$ *являются решением системы из двух уравнений с частными производными*

$$W_i(t,x,u_1^B(t,x,V^B),u_2^B(t,x,V^B),V^B) = 0 \quad (i=1,2) \tag{3.10}$$

с граничными условиями (3.8) *при всех* $(t,x) \in [0,\vartheta]\times[\mathbb{R}^n\setminus\{0_n\}]$;

4^0 *стратегии* $U_i^B \div u_i^B(t,x,V^B(t,x)) = u_i^B[t,x]$ *таковы, что* $U_i^B \in \in \mathfrak{U}_i$ $(i=1,2)$.

Тогда

a) *ситуация* $U^B = (U_1^B, U_2^B)$ *равновесна по Бержу в игре* Γ_2 (*Определение* 3.2),

b) *при этом равновесные по Бержу выигрыши*

$$\mathcal{J}_i(U^B, t_0, x_0) = V_i^B(t_0, x_0) \quad (i=1,2). \tag{3.11}$$

Замечание 3.3. Как и в случае равновесия по Нэшу для нахождения равновесий по Бержу, следует использовать Утверждение 3.2, осуществляя построения в четыре шага (соответствующие пунктам $1^0 - 4^0$ Утверждения 3.2). При этом в качестве функций $V_i^B(t,x)$ можно снова использовать квадратичную форму $V_i^B(t,x) = x'\Theta_i^B(t)x$, $[\Theta_i^B(t)]' = \Theta_i^B(t)$ $\forall t \in [0,\vartheta]$ $(i = 1,2)$.

4. Явный вид равновесий

Равновесие по Нэшу

Утверждение 4.1. *Пусть в игре* Γ_2 *матрицы*

$$D_{11} < 0,\ D_{22} < 0, C_1 < 0. \tag{4.1}$$

Тогда, если система матричных уравнений типа Риккати

$$\begin{cases} \dot\Theta_1^e + \Theta_1^e A(t) + A'(t)\Theta_1^e - \Theta_1^e D_{11}\Theta_1^e - \varepsilon^2[\Theta_1^e D_{22}^{-1}\Theta_2^e + \Theta_2^e D_{22}^{-1}\Theta_1^e] - \\ -\varepsilon^2\Theta_2^e D_{22}^{-1} D_{12} D_{22}^{-1}\Theta_2^e = O_{n\times n}, \quad \Theta_1^e(\vartheta,\varepsilon) = C_1, \\ \dot\Theta_2^e + \Theta_2^e[A(t) - D_{11}^{-1}\Theta_1^e] + [A'(t) - \Theta_1^e D_{11}^{-1}]\Theta_2^e + \\ +\Theta_1^e D_{11}^{-1} D_{12} D_{11}^{-1}\Theta_1^e - \varepsilon^2\Theta_2^e D_{22}^{-1}\Theta_2^e = O_{n\times n}, \quad \Theta_2^e(\vartheta,\varepsilon) = C_2, \end{cases} \tag{4.2}$$

имеет продолжимое на $[0,\vartheta]$ *решение* (Θ_1^e, Θ_2^e), *то в игре* Γ_2

a) ситуация равновесия по Нэшу имеет вид

$$U^e = (U_1^e, U_2^e) \div (-D_{11}^{-1}\Theta_1^e(t,\varepsilon)x, -\varepsilon D_{22}^{-1}\Theta_2^e(t,\varepsilon)x), \tag{4.3}$$

b) выигрыши игроков при этом

$$\mathcal{J}_i(U^e, t_0, x_0) = x_0'\Theta_i^e(t_0,\varepsilon)x_0 \quad (i = 1,2). \tag{4.4}$$

Доказательство. Следуя Замечанию 3.2 составим

$$\begin{gathered} W_i^e(t,x,u_1,u_2,V) = \frac{\partial V_i}{\partial t} + \left[\frac{\partial V_i}{\partial x}\right]'(A(t)x + \\ +u_1 + \varepsilon u_2) + u_1'D_{i1}u_1 + u_2'D_{i2}u_2 \quad (i = 1,2). \end{gathered} \tag{4.5}$$

Шаг 1. Согласно (3.4) и $V_i^e(t,x) = x'\Theta_i^e(t)x$ будет

$$V_i^e(\vartheta,x) = x'\Theta_i^e(\vartheta,\varepsilon)x = x'C_ix \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}, \tag{4.6}$$

отсюда

$$\Theta_i^e(\vartheta,\varepsilon) = C_i \quad (i = 1,2). \tag{4.7}$$

Шаг 2. На основании (3.5)

$$\max_{u_1}\{W_1(t,x,u_1,u_2^e(t,x,V^e),V^e)\} = Idem\{u_1 \to u_1^e(t,x,V^e)\}$$

Это равенство имеет место, если, согласно (2.3)-(2.4), выполняются условия

$$\left.\frac{\partial W_1(t,x,u_1,u_2^e(t,x,V^e),V^e)}{\partial u_1}\right|_{u_1(t,x,V^e)} = \frac{\partial V_1}{\partial x} + 2D_{11}u_1^e(t,x,V^e) = 0_n,$$
$$\left.\frac{\partial^2 W_1(t,x,u_1,u_2^e(t,x,V^e),V^e)}{\partial u_1^2}\right|_{u_1(t,x,V^e)} = 2D_{11} < 0,$$

аналогично

$$\left.\frac{\partial W_2(t,x,u_1^e(t,x,V^e),u_2,V^e)}{\partial u_2}\right|_{u_2(t,x,V^e)} = \varepsilon\frac{\partial V_2}{\partial x} + 2D_{22}u_2^e(t,x,V^e) = 0_n,$$
$$\left.\frac{\partial^2 W_2(t,x,u_1^e(t,x,V^e),u_2,V^e)}{\partial u_2^2}\right|_{u_2(t,x,V^e)} = 2D_{22} < 0,$$

при любых $(t,x) \in [0,\vartheta] \times [\mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}]$ и $V^B = (V_1^B, V_2^B) \in \mathbb{R}^2$.

Второе и четвертое соотношение имеют место согласно (4.1), а из первого и третьего находим

$$u_1^e(t,x,V^e) = -\frac{1}{2}D_{11}^{-1}\frac{\partial V_1}{\partial x}, \quad u_2^e(t,x,V^e) = -\frac{\varepsilon}{2}D_{22}^{-1}\frac{\partial V_2}{\partial x}. \tag{4.8}$$

Шаг 3. Составим два уравнения с частными производными (3.6) с граничными условиями (4.7) для нахождения двух скалярным функций $V_i^e(t,x)$ $(i=1,2)$

$$\begin{aligned}
&0=W_1^e[t,x,V^e]=W_1(t,x,u_1^e(t,x,V^e),u_2^e(t,x,V^e),V^e)=\\
=&\frac{\partial V_1^e}{\partial t}+\left[\frac{\partial V_1^e}{\partial x}\right]'[A(t)x-\frac{1}{2}D_{11}^{-1}\frac{\partial V_1^e}{\partial x}]-\frac{\varepsilon^2}{2}\left[\frac{\partial V_1^e}{\partial x}\right]'D_{22}^{-1}\frac{\partial V_2^e}{\partial x}+\\
&+\frac{1}{4}\left[\frac{\partial V_1^e}{\partial x}\right]'D_{11}^{-1}\frac{\partial V_1^e}{\partial x}+\frac{\varepsilon^2}{4}\left[\frac{\partial V_2^e}{\partial x}\right]'D_{22}^{-1}D_{12}D_{22}^{-1}\frac{\partial V_2^e}{\partial x}=\\
&=\frac{\partial V_1^e}{\partial t}+\left[\frac{\partial V_1^e}{\partial x}\right]'A(t)x-\frac{\varepsilon^2}{2}\left[\frac{\partial V_1^e}{\partial x}\right]'D_{22}^{-1}\frac{\partial V_2^e}{\partial x}-\\
&-\frac{1}{4}\left[\frac{\partial V_1^e}{\partial x}\right]'D_{11}^{-1}\frac{\partial V_1^e}{\partial x}+\frac{\varepsilon^2}{4}\left[\frac{\partial V_2^e}{\partial x}\right]'D_{22}^{-1}D_{12}D_{22}^{-1}\frac{\partial V_2^e}{\partial x},\\
&W_2^e[t,x,V^e]=W_2(t,x,u_1^e(t,x,V^e),u_2^e(t,x,V^e),V^e)=\\
=&\frac{\partial V_2^e}{\partial t}+\left[\frac{\partial V_2^e}{\partial x}\right]'[A(t)x-\frac{1}{2}D_{11}^{-1}\frac{\partial V_1^e}{\partial x}-\frac{\varepsilon^2}{2}D_{22}^{-1}\frac{\partial V_2^e}{\partial x}]+\\
&+\frac{1}{4}\left[\frac{\partial V_1^e}{\partial x}\right]'D_{11}^{-1}D_{21}D_{11}^{-1}\frac{\partial V_1^e}{\partial x}-\frac{\varepsilon^2}{4}\left[\frac{\partial V_2^e}{\partial x}\right]'D_{22}^{-1}\frac{\partial V_2^e}{\partial x}=0.
\end{aligned}\tag{4.9}$$

С учетом $V_i^e(t,x)=x_i'\Theta_i^e x$ получаем для градиентов $\frac{\partial V_i^e}{\partial x}=2\Theta_i^e x$, а для $\frac{\partial V_i^e}{\partial t}=x'\frac{d\Theta_i^e}{dt}x$. Подставим эти $\frac{\partial V_i^e}{\partial x}$ и $\frac{\partial V_i^e}{\partial t}$ в (4.9) и, группируя слагаемые при одинаковых попарных произведениях компонент n-вектора x, приходим к

$$\begin{aligned}
&W_1^e[t,x,V^e]=x'\Big\{\frac{d\Theta_1^e}{dt}+\Theta_1^eA(t)+A'(t)\Theta_1^e-\Theta_1^eD_{11}^{-1}\Theta_1^e+\\
&+\varepsilon^2[-\Theta_1^eD_{22}^{-1}\Theta_2^e-\Theta_2^eD_{22}^{-1}\Theta_1^e+\Theta_2^eD_{22}^{-1}D_{12}D_{22}^{-1}\Theta_2^e]\Big\}x=0,\\
&W_2^e[t,x,V^e]=x'\Big\{\frac{d\Theta_2^e}{dt}+\Theta_2^eA(t)+A'(t)\Theta_2^e+\Theta_1^eD_{11}^{-1}D_{21}D_{11}^{-1}\Theta_1^e-\\
&-\Theta_2^eD_{11}^{-1}\Theta_1^e-\varepsilon^2\Theta_2^eD_{22}^{-1}\Theta_2^e\Big\}x=0
\end{aligned}$$

с граничными условиями

$$V_i(\vartheta,x)=x'\Theta_i^e(\vartheta,\varepsilon)x=x'C_ix\quad(i=1,2).$$

Тождества $W_i^e[t,x,V^e(t,x)]=0\ \forall(t,x)\in[0,\vartheta]\times[\mathbb{R}^n\setminus\{0_n\}]$ $(i=1,2)$

имеют место, если система матричных уравнений типа Риккати

$$\begin{cases} \dot{\Theta}_1^e + \Theta_1^e A(t) + A'(t)\Theta_1^e - \Theta_1^e D_{11}\Theta_1^e + \varepsilon^2[-\Theta_1^e D_{22}^{-1}\Theta_2^e - \\ - \Theta_2^e D_{22}^{-1}\Theta_1^e + \Theta_2^e D_{22}^{-1} D_{12} D_{22}^{-1}\Theta_2^e] = O_{n\times n}, \quad \Theta_1^e(\vartheta,\varepsilon) = C_1, \\ \dot{\Theta}_2^e + \Theta_2^e A(t) + A'(t)\Theta_2^e - \Theta_2^e D_{11}^{-1}\Theta_1^e - \Theta_1^e D_{11}^{-1}\Theta_2^e + \\ + \Theta_1^e D_{11}^{-1} D_{21} D_{11}^{-1}\Theta_1^e - \varepsilon^2\Theta_2^e D_{22}^{-1}\Theta_2^e = O_{n\times n}, \quad \Theta_2^e(\vartheta,\varepsilon) = C_2 \end{cases} \tag{4.10}$$

имеет продолжимое на интервал $[0,\vartheta]$ решение $(\Theta_1^e(t,\varepsilon), \Theta_2^e(t,\varepsilon))$.

Шаг 4. С помощью найденных решений $(\Theta_1^e(t,\varepsilon), \Theta_2^e(t,\varepsilon))$ и (4.8) найдем две n-вектор-функции

$$\begin{aligned} u_1^e[t,x] &= u_1(t,x,V^e(t,x)) = -D_{11}^{-1}\Theta_1^e(t,\varepsilon)x, \\ u_2^e[t,x] &= u_2(t,x,V^e(t,x)) = -\varepsilon D_{22}^{-1}\Theta_2^e(t,\varepsilon)x. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Так как $D_{11}^{-1}\Theta_1^e(\cdot,\varepsilon), \varepsilon D_{22}^{-1}\Theta_2^e(\cdot,\varepsilon) \in C^{n\times n}[0,\vartheta]$, то равновесная по Нэшу ситуация игры Γ_2 будет иметь вид (4.3), а выигрыши игроков в такой ситуации определяются равенствами (4.4). $\square$

Замечание 4.1. При $D_{11} > 0$ и (или) $D_{22} > 0$ в силу Леммы 3.1, для любых $x_0 \neq 0_n$ хотя бы один из двух максимумов из Определения 3.1 не достигается. В самом деле, если бы, например, при $D_{11} > 0$ существовала бы стратегия первого игрока, которая $\hat{U}_1 \in \mathfrak{U}_1$, такая, что при $x_0 \neq 0_n$

$$\max_{U_1\in\mathfrak{U}_1} \mathcal{J}_1(U_1, U_2^e, t_0, x_0) = \mathcal{J}_1(\hat{U}_1, U_2^e, t_0, x_0),$$

то по Лемме 2.1 при указанной начальной позиции $(t_0, x_0) \in [0,\vartheta) \times \times[\mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}]$ нашлась бы стратегия $\tilde{U}_1 \in \mathfrak{U}_1$, для которой

$$\mathcal{J}_1(\tilde{U}_1, U_2^*) > \mathcal{J}_1(\hat{U}_1^*, U_2^*),$$

что противоречит смыслу операции $\max\limits_{U_1\in\mathfrak{U}_1}$. Таким образом, приходим к утверждению: если $D_{11} > 0$ и (или) $D_{22} > 0$, то в игре Γ_2 не существует равновесной по Нэшу ситуации (при любой начальной позиции $(t_0, x_0) \in [0,\vartheta) \times [\mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}]$).

Равновесие по Бержу

Здесь уже используем Замечание 3.3, повторяя шаги $1^0 - 4^0$ из Замечания 3.2 с «диктуемыми» Утверждением 3.2. изменениями.

Утверждение 4.2. *Пусть в игре* Γ_2 *матрицы*

$$D_{12} < 0,\ \ D_{21} < 0, C_2 < 0. \tag{4.12}$$

Тогда, если система матричных уравнений типа Риккати

$$\begin{cases} \dot{\Theta}_1^B + \Theta_1^B[A(t) - D_{21}^{-1}\Theta_2^B] + [A'(t) - \Theta_2^B D_{21}^{-1}]\Theta_1^B + \\ + \Theta_2^B D_{21}^{-1} D_{11} D_{21}^{-1}\Theta_2^B - \varepsilon^2 \Theta_1^B D_{12}^{-1}\Theta_1^B = O_{n\times n}, \quad \Theta_1^B(\vartheta,\varepsilon) = C_1, \\ \dot{\Theta}_2^B + \Theta_2^B A(t) + A'(t)\Theta_2^B - \Theta_2^B D_{21}\Theta_2^B + \varepsilon^2[-\Theta_2^B D_{12}^{-1}\Theta_1^B - \\ - \Theta_1^B D_{12}^{-1}\Theta_2^B + \Theta_1^B D_{12}^{-1} D_{22} D_{12}^{-1}\Theta_1^B] = O_{n\times n}, \quad \Theta_2^B(\vartheta,\varepsilon) = C_2, \end{cases} \tag{4.13}$$

имеет продолжимое на $[0,\vartheta]$ *решение* $(\Theta_1^B(t,\varepsilon), \Theta_2^B(t,\varepsilon))$, *то в игре* Γ_2

a) *ситуация равновесия по Бержу имеет вид*

$$U^B = (U_1^B, U_2^B) \div (-D_{21}^{-1}\Theta_2^B(t,\varepsilon)x, -\varepsilon D_{12}^{-1}\Theta_1^B(t,\varepsilon)x), \tag{4.14}$$

b) *выигрыши игроков при этом*

$$\mathcal{J}_i(U^B, t_0, x_0) = x_0'\Theta_i^B(t_0,\varepsilon)x_0 \quad (i = 1,2). \tag{4.15}$$

Доказательство. Следуя Замечанию 3.3, составим две скалярные функции (4.5).

Шаг 1. Согласно (3.8) получаем из $V_i^B(t,x) = x'\Theta_i^B(t)x$ граничные условия

$$\Theta_i^B(\vartheta,\varepsilon) = C_i \ \ (i = 1,2). \tag{4.16}$$

Шаг 2. На основании (3.9), применяя (2.3) – (2.4), находим

$$\left.\frac{\partial W_1(t,x,u_1^B(t,x,V^B),u_2,V^B)}{\partial u_2}\right|_{u_2(t,x,V^B)} = \varepsilon\frac{\partial V_1}{\partial x} + 2D_{12}u_2^B(t,x,V^B) = 0_n,$$

$$\left.\frac{\partial^2 W_1(t,x,u_1^B(t,x,V^B),u_2,V^B)}{\partial u_2^2}\right|_{u_2(t,x,V^B)} = 2D_{12} < 0,$$

$$\left.\frac{\partial W_2(t,x,u_1,u_2^B(t,x,V^B),V^B)}{\partial u_1}\right|_{u_1(t,x,V^B)} = \frac{\partial V_2}{\partial x} + 2D_{21}u_1^B(t,x,V^B) = 0_n,$$

$$\left.\frac{\partial^2 W_2(t,x,u_1,u_2^B(t,x,V^B),V^B)}{\partial u_1^2}\right|_{u_1(t,x,V^B)} = 2D_{21} < 0,$$

при любых $(t,x) \in [0,\vartheta] \times [\mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}]$ и $V^B = (V_1^B, V_2^B) \in \mathbb{R}^2$.

Второе и четвертое соотношение имеют место согласно (4.12), а из первого и третьего находим

$$u_1^B(t,x,V^B) = -\frac{1}{2}D_{21}^{-1}\frac{\partial V_2}{\partial x}, \quad u_2^B(t,x,V^B) = -\frac{\varepsilon}{2}D_{12}^{-1}\frac{\partial V_1}{\partial x}. \qquad (4.17)$$

Шаг 3. Подставим (4.17) в (3.10), тогда приходим к системе из двух уравнений с частными производными и граничными условиями (3.8), именно

$$\begin{aligned}
&0 = W_1^B[t,x,V^B] = W_1(t,x,u_1^B(t,x,V^B),u_2^B(t,x,V^B),V^B) = \\
&= \frac{\partial V_1^B}{\partial t} + \left[\frac{\partial V_1^B}{\partial x}\right]'[A(t)x - \frac{1}{2}D_{21}^{-1}\frac{\partial V_2^B}{\partial x} - \frac{\varepsilon^2}{2}D_{12}^{-1}\frac{\partial V_1^B}{\partial x}] + \\
&\quad + \frac{1}{4}\left[\frac{\partial V_2^B}{\partial x}\right]' D_{21}^{-1}D_{11}D_{21}^{-1}\frac{\partial V_2^B}{\partial x} + \frac{\varepsilon^2}{4}\left[\frac{\partial V_1^B}{\partial x}\right]' D_{12}^{-1}\frac{\partial V_1^B}{\partial x} = \\
&\quad = \frac{\partial V_1^B}{\partial t} + \left[\frac{\partial V_1^B}{\partial x}\right]' A(t)x + \frac{1}{4}\left[\frac{\partial V_2^B}{\partial x}\right]' D_{21}^{-1}D_{11}D_{21}^{-1}\frac{\partial V_2^B}{\partial x} - \\
&\quad - \frac{1}{2}\left[\frac{\partial V_1^B}{\partial x}\right]' D_{21}^{-1}\frac{\partial V_2^B}{\partial x} - \frac{\varepsilon^2}{4}\left[\frac{\partial V_1^B}{\partial x}\right]' D_{12}^{-1}\frac{\partial V_1^B}{\partial x}, \\
&0 = W_2^B[t,x,V^B] = W_2(t,x,u_1^B(t,x,V^B),u_2^B(t,x,V^B),V^B) = \\
&= \frac{\partial V_2^B}{\partial t} + \left[\frac{\partial V_2^B}{\partial x}\right]'[A(t)x - \frac{1}{2}D_{21}^{-1}\frac{\partial V_2^B}{\partial x} - \frac{\varepsilon^2}{2}D_{12}^{-1}\frac{\partial V_1^B}{\partial x}] + \\
&\quad + \frac{1}{4}\left[\frac{\partial V_2^B}{\partial x}\right]' D_{21}^{-1}\frac{\partial V_2^B}{\partial x} + \frac{\varepsilon^2}{4}\left[\frac{\partial V_1^B}{\partial x}\right]' D_{12}^{-1}D_{22}D_{12}^{-1}\frac{\partial V_1^B}{\partial x} = \frac{\partial V_2^B}{\partial t} + \\
&\quad + \left[\frac{\partial V_2^B}{\partial x}\right]' A(t)x - \frac{1}{4}\left[\frac{\partial V_2^B}{\partial x}\right]' D_{21}^{-1}\frac{\partial V_2^B}{\partial x} + \\
&\quad + \frac{\varepsilon^2}{4}\left[\frac{\partial V_1^B}{\partial x}\right]' D_{12}^{-1}D_{22}D_{12}^{-1}\frac{\partial V_1^B}{\partial x} - \frac{\varepsilon^2}{2}\left[\frac{\partial V_2^B}{\partial x}\right]' D_{12}^{-1}\frac{\partial V_1^B}{\partial x}.
\end{aligned}$$

Положив в полученных равенствах $V_i^B(t,x) = x'\Theta_i^B x$ и $\frac{\partial V_i^B}{\partial x} = 2\Theta_i^B x$, получаем, что с учетом (4.16) предыдущие равенства имеют место, если $\Theta_i^B(t,\varepsilon)$ $(i=1,2)$ являются решениями системы (4.13). С помощью найденного решения $(\Theta_1^B(t,\varepsilon), \Theta_2^B(t,\varepsilon))$ системы (4.13), вида функций $V_i^B(t,x) = x'\Theta_i^B x$, а также $\frac{\partial V_i^B}{\partial x} = 2\Theta_i^B x$ и включениям $D_{21}^{-1}\Theta_2^e(\cdot,\varepsilon), \varepsilon D_{12}^{-1}\Theta_1^e(\cdot,\varepsilon) \in C^{n\times n}[0,\vartheta]$ приходим к справедливости (4.17). Наконец, согласно (3.11) имеют место (4.15). $\square$

Замечание 4.2. Аналогично Замечанию 4.1 устанавливается справедливость следующего утверждения: если $D_{12} > 0$ и (или) $D_{21} > 0$, то в игре Γ_2 не существует равновесной по Бержу ситуации (при любой начальной позиции $(t_0, x_0) \in [0, \vartheta) \times [\mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}]$).

5. Применение метода малого параметра

5.1. Теорема Пуанкаре

Итак, Утверждения 4.1 и 4.2 показали, что наличие ситуаций равновесия по Бержу и (или) по Нэшу связано с существованием продолжимого на интервал игры $[0, \vartheta]$ решения соответствующих систем из двух обыкновенных дифференциальных матричных уравнений типа Риккати. Дело в том, что существование решений в малой левой окрестности $(\vartheta - \delta, \vartheta]$ точки $t = \vartheta$ гарантируется общими теоремами существования из теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Вопрос продолжимости таких решений на весь интервал игры $[0, \vartheta]$ при этом остается открытым. В настоящей статье мы попытаемся на него ответить с помощью метода малого параметра. Этот метод, возникший в связи с задачей трех тел в небесной механике, восходит к Ж. Д'Аламберу и интенсивно развивался с конца 19 века. В дальнейшем из многочисленных теоретических результатов по методу малого параметра [17], нами будет использована теорема Пуанкаре об аналитичности решений по параметру. Ее сформулируем для матричной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{\Theta} = \Xi(t, \Theta, \varepsilon), \quad \Theta(\vartheta, \varepsilon) = C. \tag{5.1}$$

Здесь Θ – $n \times n$-матрица; $\Xi(t, \Theta, \varepsilon)$ – $n \times n$-матрица, элементы которой являются функциями аргументов t, Θ, ε; ε - малый параметр, далее считается, что $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ и ε_0–малое число; C– постоянная $n \times n$-матрица; время $t \in [0, \vartheta]$; предполагаем, что элементы $\Xi(t, \Theta, \varepsilon)$ определены и непрерывны в области $G, \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$. Обозначим через $\Theta = \Theta(t, \varepsilon)$ – решение (5.1), удовлетворяющее граничному условию $\Theta(\vartheta, \varepsilon) = C, (\vartheta, \varepsilon) \in G$. Наряду с системой (5.1), рассмотрим систему

$$\dot{\Theta} = \Xi(t, \Theta, 0), \quad \Theta(\vartheta, \varepsilon) = C, \tag{5.2}$$

которая получается из (5.1) при $\varepsilon = 0$. Пусть $\Theta = \Theta^{(0)}(t)$ – решение (5.2) с тем же граничным условием $\Theta(\vartheta) = C$ и определенное на $t \in [0, \vartheta]$. При малом ε правые части систем являются близкими. Естественно поставить вопрос, как отличаются решения (5.1) и (5.2) на всем промежутке $[0, \vartheta]$. В силу теоремы о непрерывной зависимости решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений от параметра эти решения будут, вообще говоря, близки. Более того, если решение $\Theta^{(0)}(t)$ системы (5.2) существуют и единственно и элементы $\Xi(t, \Theta, \varepsilon)$ голоморфны (аналитические) при $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, $\Theta = \Theta^{(0)}(t)$, $t \in [0, \vartheta]$, то для достаточно малого ε решение (5.1) можно представить в виде ряда

$$\Theta(t, \varepsilon) = \Theta^{(0)}(t) + \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m \Theta^{(m)}(t), \tag{5.3}$$

равномерно сходящегося на всем отрезке $[0, \vartheta]$. Этот факт как раз и составляет содержание *теоремы Пуанкаре.*

И, наконец, из общих теорем теории дифференциальных уравнений будем применять и следующую теорему о непрерывной зависимости решений от параметра.

Теорема 5.1. *Если правая часть системы* (5.1) *в области G непрерывно дифференцируема по элементам матрицы Θ и непрерывна по ε, то при достаточно малом $\varepsilon > 0$ решение $\Theta(t, \varepsilon)$ системы* (5.1) *определено на том же промежутке $[0, \vartheta]$, что и решение системы* (5.2).

5.2. Равновесие по Нэшу

Здесь будет показано, что требование в Утверждении 4.1 о существовании продолжимого на $[0, \vartheta]$ решения $(\Theta_1^e(t, \varepsilon), \Theta_2^e(t, \varepsilon))$ системы (4.2) всегда выполнено при достаточно малом $\varepsilon > 0$ и поэтому является излишним (для малых $\varepsilon > 0$). Таким образом установим

Утверждение 5.1. *Пусть в игре Γ_2 матрицы*

$$D_{11} < 0, \;\; D_{22} < 0, C_1 < 0.$$

Тогда при достаточно малых $\varepsilon > 0$ в Γ_2 существует равновесная по Нэшу ситуация (4.3), *а выигрыши игроков при этом имеют вид* (4.4).

Доказательство. Утверждение 5.1 будет иметь место, если будет показано, что система (4.2) при достаточно малых $\varepsilon > 0$ имеет продолжимое на $[0,\vartheta]$ решение $(\Theta_1^e(t,\varepsilon), \Theta_2^e(t,\varepsilon))$, $t \in [0,\vartheta]$.

Воспользуемся теоремой 5.1. Построим для (4.2) нулевое приближение (при $\varepsilon = 0$), именно, при $\varepsilon = 0$ система (4.2) распадается на две подсистемы матричных обыкновенных дифференциальных уравнений: первое из них – матричное уравнение типа Риккати, второе – линейное относительно $\Theta_2^{(0)}$, именно,

$$\begin{cases} \dot{\Theta}_1^{(0)} + \Theta_1^{(0)} A(t) + A'(t)\Theta_1^{(0)} - \Theta_1^{(0)} D_{11}^{-1} \Theta_1^{(0)} = O_{n\times n}, \quad \Theta_1^{(0)}(\vartheta) = C_1, \\ \dot{\Theta}_2^{(0)} + \Theta_2^{(0)}[A(t) - D_{11}^{-1}\Theta_1^{(0)}] + [A'(t) - \Theta_1^{(0)} D_{11}^{-1}]\Theta_2^{(0)} + \\ + \Theta_1^{(0)} D_{11}^{-1} D_{12} D_{11}^{-1} \Theta_1^{(0)} = O_{n\times n}, \ \Theta_2^{(0)}(\vartheta) = C_2. \end{cases} \tag{5.4}$$

При $D_{11} < 0, C_1 < 0$ и $A(\cdot) \in C^{n\times n}[0,\vartheta]$ решение $\Theta_1^{(0)}(t)$ первой части системы (5.4) существует, непрерывно и продолжимо на $[0,\vartheta]$, симметрично, ибо $[\Theta_1^{(0)}(t)]' = \Theta_1^{(0)}(t)$, $\Theta_1^{(0)}(t) < 0$ для всех $t \in [0,\vartheta]$ и имеет вид

$$\Theta_1^{(0)}(t) = [X^{-1}]'\Big\{C_1^{-1} + \int_t^{\vartheta} X^{-1}(\tau) D_{11}^{-1} [X^{-1}(\tau)]' d\tau\Big\}^{-1} X^{-1}, \tag{5.5}$$

где $X(t)$–фундаментальная система решений $\dot{x} = A(t)x, X[\vartheta] = E_n$ (Утверждение 2.1). Положив затем во вторую часть полученную матрицу $\Theta_1^{(0)} = \Theta_1^{(0)}(t)$ приходим к матричному линейному неоднородному дифференциальному уравнению относительно $\Theta_2^{(0)}$

$$\begin{gathered} \dot{\Theta}_2^{(0)} + \Theta_2^{(0)}[A(t) - D_{11}^{-1}\Theta_1^{(0)}(t)] + [A'(t) - \Theta_1^{(0)}(t) D_{11}^{-1}]\Theta_2^{(0)} + \\ + \Theta_1^{(0)}(t) D_{11}^{-1} D_{12} D_{11}^{-1} \Theta_1^{(0)}(t) = O_{n\times n} \quad \Theta_1^{(0)}(\vartheta) = C_2. \end{gathered} \tag{5.6}$$

Так как $\Theta_1^{(0)}(\cdot), A(\cdot) \in C^{n\times n}[0,\vartheta]$, то при любой постоянной $n \times n-$ - матрице C_2 уравнение (5.6) имеет (Утверждение 2.2) продолжимое и непрерывное на $[0,\vartheta]$ решение вида

$$\Theta_2^{(0)}(t) = [X^{-1}]'\Big\{C_2 + \int_t^{\vartheta} X'(\tau) B_1(\tau) X(\tau) d\tau\Big\} X^{-1}, \tag{5.7}$$

где непрерывная и симметричная $n \times n$-матрица

$$B_1(t) = \Theta_1^{(0)}(t) D_{11}^{-1} D_{12} D_{11}^{-1} \Theta_1^{(0)}(t).$$

Из (5.7) и симметричности $C_2, B(t)$ также следует при любом $t \in [0, \vartheta]$ (здесь также, как в (5.5) использована фундаментальная матрица $X(t)$). Итак, при $\varepsilon = 0$ система (4.2) имеет продолжимое на $[0, \vartheta]$ непрерывное решение $(\Theta_1^{(0)}(t), \Theta_2^{(0)}(t))$. Поэтому по теореме 5.1 при достаточно малых $\varepsilon > 0$ и система (4.2) имеет продолжимое на $[0, \vartheta]$ решение $(\Theta_1^e(t, \varepsilon), \Theta_2^e(t, \varepsilon))$. Тогда из Утверждения 4.1 следует справедливость Утверждения 5.1. □

5.3. Равновесие по Бержу

Также, как и для равновесия по Нэшу, установим, что требование существования продолжимого на $[0, \vartheta]$ решения $(\Theta_1^B(t, \varepsilon), \Theta_2^B(t, \varepsilon))$ системы (4.13) можно в утверждении 4.2 заменить на требование малости параметра $\varepsilon > 0$.

Утверждение 5.2. *Пусть в игре* Γ_2 *матрицы*

$$D_{12} < 0, \;\; D_{21} < 0, C_2 < 0.$$

Тогда при достаточно малых $\varepsilon > 0$ *в* Γ_2 *существует равновесная по Бержу ситуация* (4.14)*, а выигрыши игроков при этом имеют вид* (4.15)*.*

Доказательство. Снова для доказательства продолжимости решения (4.13) на $[0, \vartheta]$ привлечем Теорему 5.1. Как и для Утверждения 5.1 построим нулевое приближение $(\tilde{\Theta}_1^{(0)}(t), \tilde{\Theta}_2^{(0)}(t))$, положив в (4.13) параметр $\varepsilon = 0$. Тогда система (4.13) разбивается на две подсистемы матричных нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\Theta}}_1^{(0)} + \tilde{\Theta}_1^{(0)}[A(t) - D_{21}^{-1}\tilde{\Theta}_2^{(0)}] + [A'(t) - \tilde{\Theta}_2^{(0)} D_{21}^{-1}]\tilde{\Theta}_1^{(0)} + \\ + \tilde{\Theta}_2^{(0)} D_{21}^{-1} D_{11} D_{21}^{-1} \tilde{\Theta}_2^{(0)} = O_{n\times n}, \quad \tilde{\Theta}_1^{(0)}(\vartheta) = C_1, \\ \dot{\tilde{\Theta}}_2^{(0)} + \tilde{\Theta}_2^{(0)} A(t) + A'(t)\tilde{\Theta}_2^{(0)} - \tilde{\Theta}_2^{(0)} D_{21}^{-1}\tilde{\Theta}_2^{(0)} = O_{n\times n}, \quad \tilde{\Theta}_2^{(0)}(\vartheta) = C_2. \end{cases} \tag{5.8}$$

При $D_{21} < 0, C_2 < 0$ решение $\tilde{\Theta}_2^{(0)}(t)$ матричной системы дифференциальных уравнений типа Риккати (второе уравнение из (5.8)) непрерывно, продолжимо на $[0, \vartheta]$, симметрично и $\tilde{\Theta}_2^{(0)}(t) < 0$, ибо, согласно Утверждению 2.1, будет

$$\tilde{\Theta}_2^{(0)}(t) = [X^{-1}(t)]' \Big\{ C_2^{-1} + \int\limits_t^{\vartheta} X^{-1}(\tau) D_{21}^{-1} [X^{-1}(\tau)]' d\tau \Big\}^{-1} X^{-1}(t). \tag{5.9}$$

Положив в первую часть (5.8) решение $\tilde{\Theta}_2^{(0)} = \tilde{\Theta}_2^{(0)}(t)$, приходим к матричному линейному неоднородному обыкновенному дифференциальному уравнению относительно $\tilde{\Theta}_1^{(0)}$

$$\dot{\tilde{\Theta}}_1^{(0)} + \tilde{\Theta}_1^{(0)}[A(t) - D_{21}^{-1}\tilde{\Theta}_2^{(0)}(t)] + [A'(t) - \tilde{\Theta}_2^{(0)}(t)D_{21}^{-1}]\tilde{\Theta}_1^{(0)} + \\ + \tilde{\Theta}_2^{(0)}(t)D_{21}^{-1}D_{11}D_{21}^{-1}\tilde{\Theta}_2^{(0)}(t) = O_{n\times n}, \quad \tilde{\Theta}_1^{(0)}(\vartheta) = C_1.$$

Учитывая включение $\tilde{\Theta}_2^{(0)}(\cdot), A(\cdot) \in C^{n\times n}[0,\vartheta]$, и Утверждение 2.2, получаем явный вид решения

$$\tilde{\Theta}_1^{(0)}(t) = [X^{-1}(t)]'\Big\{C_1 + \int_t^{\vartheta} X'(\tau)B_2(\tau)X(\tau)d\tau\Big\}X^{-1}, \tag{5.10}$$

где непрерывная и симметричная $n \times n$-матрица

$$B_2(t) = \tilde{\Theta}_2^{(0)}(t)D_{21}^{-1}D_{11}D_{21}^{-1}\tilde{\Theta}_2^{(0)}(t).$$

Нетрудно заметить, что непрерывная $n \times n$-матрица $\tilde{\Theta}_1^{(0)}(t)$ определена при всех $t \in [0,\vartheta]$ и симметрична. Итак, получаем, что нулевое приближение (при $\varepsilon = 0$) $(\tilde{\Theta}_1^{(0)}(t), \tilde{\Theta}_2^{(0)}(t)|t \in [0,\vartheta])$ решения $(\Theta_1^B(t,\varepsilon), \Theta_2^B(t,\varepsilon)|t \in [0,\vartheta])$ системы (4.13) продолжимо на $[0,\vartheta]$. Поэтому по теореме 5.1 при достаточно малых $\varepsilon > 0$ и система (4.13) имеет продолжимое на $[0,\vartheta]$ решение $(\Theta_1^B(t,\varepsilon), \Theta_2^B(t,\varepsilon))$. Тогда из Утверждения 4.2 сразу следует справедливость Утверждения 5.2. □

6. Заключение

Настоящая статья посвящена коэффициентным критериям существования (и не существования!) равновесных по Нэшу (Определение 3.1) и (или) по Бержу (Определение 3.2) ситуаций в дифференциальной позиционной линейно-квадратичной игре Γ_2 с малым влиянием одного из игроков на скорость $\dot{x}(t)$ изменения фазового вектора $x(t)$. Игрокам (в бескоалиционном варианте игры Γ_2) требуется решить два вопроса:

1. Какой из концепций равновесия (по Нэшу или по Бержу) придерживаться?

2. Как эти равновесия построить?

Ответ на первый вопрос в следующей ниже табл. 1, где РН(РБ) – ситуации равновесия по Нэшу (соответственно, по Бержу), квантор $\exists$ ($\nexists$)–существования (не существования), $\forall$ – общности (для каждого, любого). Утверждения 5.1 и 5.2, а также Замечания 4.1 и 4.2 объединены приведенной ниже Таблицей 1, которая представляет собой коэффициентные критерии для выбора (или отказа) концепции равновесия (по Нэшу или (и) по Бержу) в игре Γ_2.

Например, если $D_{12} < 0, D_{12} < 0, C_2 < 0)$, то существует ситуация равновесия по Бержу, если же одновременно $D_{22} > 0$, то не существует ситуации равновесия по Нэшу (по 2-ой и 7-ой строкам таблицы).

Таблица 1. Коэффициентные критерии равновесности

	D_{11}	D_{12}	D_{21}	D_{22}	C_1	C_2	РН	РБ
1	$D_{11} < 0$	$\forall$	$\forall$	$D_{22} < 0$	$C_1 < 0$	$\forall$	$\exists$	
2	$\forall$	$D_{12} < 0$	$D_{21} < 0$	$\forall$	$\forall$	$C_2 < 0$		$\exists$
3	$D_{11} < 0$	$D_{12} < 0$	$D_{21} < 0$	$D_{22} < 0$	$C_1 < 0$	$C_2 < 0$	$\exists$	$\exists$
4	$D_{11} > 0$	$\forall$	$\forall$	$\forall$	$\forall$	$\forall$	$\nexists$	
5	$\forall$	$D_{12} > 0$	$\forall$	$\forall$	$\forall$	$\forall$		$\nexists$
6	$\forall$	$\forall$	$D_{21} > 0$	$\forall$	$\forall$	$\forall$		$\nexists$
7	$\forall$	$\forall$	$\forall$	$D_{22} > 0$	$\forall$	$\forall$	$\nexists$	

Ответ на второй вопрос базируется как раз на теореме Пуанкаре (см. начало раздела 5), именно в учете не только нулевого (при $\varepsilon = 0$ члена разложения $n \times n$-матрицы

$$\Theta(t, \varepsilon) = \Theta^{(0)}(t) + \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m \Theta^{(m)}(t),$$

но и последующих $\Theta^{(1)}(t), \Theta^{(2)}(t), \ldots$. Покажем это на примере игры Γ_2 при построении равновесия по Бержу, именно, при нахождении решения системы (4.13) и последующего построения стратегий (4.14) и соответствующих выигрышей (4.15).

С учетом $\Theta_1^B(t, \varepsilon) = \Theta_1^{(0)}(t) + \varepsilon^1 \Theta_1^{(1)}(t) + \varepsilon^2 \Theta_1^{(2)}(t) + \ldots$ и из вида (4.13) имеем

$$(\dot{\Theta}_1^{(0)} + \varepsilon^1 \dot{\Theta}_1^{(1)} + \varepsilon^2 \dot{\Theta}_1^{(2)} + \ldots) + (\Theta_1^{(0)} + \varepsilon^1 \Theta_1^{(1)} + \varepsilon^2 \Theta_1^{(2)} + \ldots)[A(t) -$$
$$- D_{21}^{-1}(\Theta_2^{(0)} + \varepsilon^1 \Theta_2^{(1)} + \varepsilon^2 \Theta_2^{(2)} + \ldots)] + [A'(t) -$$

$$
\begin{aligned}
&-(\Theta_2^{(0)}+\varepsilon^1\Theta_2^{(1)}+\varepsilon^2\Theta_2^{(2)}+\ldots)D_{21}^{-1}](\Theta_1^{(0)}+\varepsilon^1\Theta_1^{(1)}+\varepsilon^2\Theta_1^{(2)}+\ldots)+\\
&+(\Theta_2^{(0)}+\varepsilon^1\Theta_2^{(1)}+\varepsilon^2\Theta_2^{(2)}+\ldots)D_{21}^{-1}D_{11}D_{21}^{-1}(\Theta_2^{(0)}+\varepsilon^1\Theta_2^{(1)}+\\
&+\varepsilon^2\Theta_2^{(2)}+\ldots)-\varepsilon^2(\Theta_1^{(0)}+\varepsilon^1\Theta_1^{(1)}+\varepsilon^2\Theta_1^{(2)}+\ldots)D_{12}^{-1}(\Theta_1^{(0)}+\\
&+\varepsilon^1\Theta_1^{(1)}+\varepsilon^2\Theta_1^{(2)}+\ldots)=O_{n\times n},\\
&\quad(\Theta_1^{(0)}(\vartheta)+\varepsilon^1\Theta_1^{(1)}(\vartheta)+\varepsilon^2\Theta_1^{(2)}(\vartheta)+\ldots)=C_1,\\
&(\dot\Theta_2^{(0)}+\varepsilon^1\dot\Theta_2^{(1)}+\varepsilon^2\dot\Theta_2^{(2)}+\ldots)+(\Theta_2^{(0)}+\varepsilon^1\Theta_2^{(1)}+\varepsilon^2\Theta_2^{(2)}+\ldots)A(t)+\\
&+A'(t)(\Theta_2^{(0)}+\varepsilon^1\Theta_2^{(1)}+\varepsilon^2\Theta_2^{(2)}+\ldots)-\\
&-(\Theta_2^{(0)}+\varepsilon^1\Theta_2^{(1)}+\varepsilon^2\Theta_2^{(2)}+\ldots)D_{21}(\Theta_2^{(0)}+\varepsilon^1\Theta_2^{(1)}+\varepsilon^2\Theta_2^{(2)}+\ldots)+\\
&+\varepsilon^2[-(\Theta_2^{(0)}+\varepsilon^1\Theta_2^{(1)}+\varepsilon^2\Theta_2^{(2)}+\ldots)D_{12}^{-1}(\Theta_1^{(0)}+\varepsilon^1\Theta_1^{(1)}+\\
&+\varepsilon^2\Theta_1^{(2)}+\ldots)-(\Theta_1^{(0)}+\varepsilon^1\Theta_1^{(1)}+\varepsilon^2\Theta_1^{(2)}+\ldots)D_{12}^{-1}(\Theta_2^{(0)}+\varepsilon^1\Theta_2^{(1)}+\\
&+\varepsilon^2\Theta_2^{(2)}+\ldots)+(\Theta_1^{(0)}+\varepsilon^1\Theta_1^{(1)}+\varepsilon^2\Theta_1^{(2)}+\ldots)D_{12}^{-1}D_{22}D_{12}^{-1}(\Theta_1^{(0)}+\\
&+\varepsilon^1\Theta_1^{(1)}+\varepsilon^2\Theta_1^{(2)}+\ldots)]=O_{n\times n},\\
&\quad(\Theta_2^{(0)}(\vartheta)+\varepsilon^1\Theta_2^{(1)}(\vartheta)+\varepsilon^2\Theta_2^{(2)}(\vartheta)+\ldots)=C_2,
\end{aligned}
\tag{6.1}
$$

Как показано в доказательстве Утверждения 5.2, нулевые приближения $\Theta_i^{(0)}(t)$ $(i=1,2)$ удовлетворяют системе (5.8) и их явный вид представлен в (5.9) и (5.10), соответственно, где $\tilde\Theta_i^{(0)}(t)=\Theta_i^{(0)}(t)$ $\forall[0,\vartheta]$, $(i=1,2)$. Приравнивая в (6.1) слагаемые с множителем ε (в первой степени), получим, с учетом указанного явного вида $\Theta_i^{(0)}(t)$ систему из двух матричных линейных однородных дифференциальных уравнений с непрерывными по времени коэффициентами:

$$
\begin{cases}
\dot\Theta_1^{(1)}+\Theta_1^{(1)}[A(t)-D_{21}^{-1}\Theta_2^{(0)}(t)]+[A'(t)-\Theta_2^{(0)}(t)D_{21}^{-1}]\Theta_1^{(1)}+\\
\ +\Theta_2^{(1)}D_{21}^{-1}[D_{11}D_{21}^{-1}\Theta_2^{(0)}(t)-\Theta_1^{(0)}(t)]+[\Theta_2^{(0)}(t)D_{21}^{-1}D_{11}-\\
\ -\Theta_1^{(0)}(t)]D_{21}^{-1}\Theta_2^{(1)}=O_{n\times n},\quad \Theta_1^{(1)}(\vartheta)=O_{n\times n},\\
\dot\Theta_2^{(1)}+\Theta_2^{(1)}[A(t)-D_{21}^{-1}\Theta_2^{(0)}(t)]+[A'(t)-\Theta_2^{(0)}(t)D_{21}^{-1}]\Theta_2^{(1)}=O_{n\times n},\\
\Theta_2^{(1)}(\vartheta)=O_{n\times n}.
\end{cases}
$$

Очевидно ее нулевое решение

$$\Theta_1^{(1)}(t)=\Theta_2^{(1)}(t)=O_{n\times n}\ \ \forall t\in[0,\vartheta]. \tag{6.2}$$

Теперь, приравняв в (6.1) слагаемые при ε^2 с учетом (6.2), для нахождения второго приближения $\Theta_1^{(2)}(t)$ и $\Theta_2^{(2)}(t)$ получаем также линейную неоднородную систему из двух дифференциальных уравнений с непрерывными коэффициентами:

$$\begin{cases} \dot\Theta_1^{(2)} + \Theta_1^{(2)}[A(t) - D_{21}^{-1}\Theta_2^{(0)}(t)] + [A'(t) - \Theta_2^{(0)}(t)D_{21}^{-1}]\Theta_1^{(2)} + \\ \ + \Theta_2^{(2)}D_{21}^{-1}[D_{11}D_{21}^{-1}\Theta_2^{(0)}(t) - \Theta_1^{(0)}(t)] + \\ \ + [\Theta_2^{(0)}(t)D_{21}^{-1}D_{11} - \Theta_1^{(0)}(t)]D_{21}^{-1}\Theta_2^{(2)} - \Theta_1^{(0)}(t)D_{12}^{-1}\Theta_1^{(0)}(t) = O_{n\times n}, \\ \Theta_1^{(2)}(\vartheta) = O_{n\times n}, \\ \dot\Theta_2^{(2)} + \Theta_2^{(2)}[A(t) - D_{21}^{-1}\Theta_2^{(0)}(t)] + [A'(t) - \Theta_2^{(0)}(t)D_{21}^{-1}]\Theta_1^{(2)} + \\ \ + \Theta_1^{(0)}(t)D_{12}^{-1}D_{22}D_{12}^{-1}\Theta_1^{(0)}(t) - \Theta_2^{(0)}(t)D_{12}^{-1}\Theta_1^{(0)}(t) - \\ \ - \Theta_1^{(0)}(t)D_{12}^{-1}\Theta_2^{(0)}(t) = O_{n\times n}, \quad \Theta_2^{(2)}(\vartheta) = O_{n\times n}. \end{cases} \tag{6.3}$$

Найдем явный вид решения системы (6.3). Начнем с построения решения $\Theta_2^{(2)}(t)$ второго матричного уравнения из (6.3) с помощью Утверждения 2.2. Для этого прежде всего найдем фундаментальную систему решений $Y(t)$ векторного дифференциального уравнения ($y \in \in \mathbb{R}^n$):

$$\dot y = [A(t) - D_{21}^{-1}\Theta_2^{(0)}(t)]y, \quad Y(\vartheta) = E_n.$$

Согласно Утверждению 2.2 тогда решение (6.4) примет вид

$$\Theta_2^{(2)}(t) = [Y^{-1}]'\Big\{\int\limits_t^{\vartheta} Y'(\tau)L(\tau)Y(\tau)d\tau\Big\}Y^{-1}(t),$$

где

$$L(t) = \Theta_1^{(0)}(t)D_{12}^{-1}D_{22}D_{12}^{-1}\Theta_1^{(0)}(t) - \Theta_2^{(0)}(t)D_{12}^{-1}\Theta_1^{(0)}(t) - \Theta_1^{(0)}(t)D_{12}^{-1}\Theta_2^{(0)}(t).$$

Подставляя затем приведенное $\Theta_2^{(2)} = \Theta_2^{(2)}(t)$ в (6.3), снова получим матричное линейное неоднородное дифференциальное уравнение с нулевым граничным условием, для построения явного вида решения $\Theta_1^{(2)}(t)$ которого, как и для второго уравнения из (6.3), можно снова применить Утверждение 2.2. Наконец, с учетом найденных $\Theta_i^{(j)}(t)$ ($j = 0, 1, 2;\ i = 1, 2$), (4.14) и (4.15), равновесное по Бержу решение Γ_2 с точностью до второго приближения будет

$$U^B = (U_1^B, U_2^B) \div (-D_{21}^{-1}[\Theta_2^{(0)}(t) + \varepsilon^2\Theta_2^{(2)}(t)]x, -\varepsilon D_{12}[\Theta_1^{(0)}(t) + \varepsilon^2\Theta_1^{(2)}(t)]x).$$

И выигрыши игроков при этом

$$\mathcal{J}_1(U^B, t_0, x_0) = x_0'[\Theta_1^{(0)}(t_0) + \varepsilon^2\Theta_1^{(2)}(t_0)]x_0,$$

$$\mathcal{J}_2(U^B, t_0, x_0) = x_0'[\Theta_2^{(0)}(t_0) + \varepsilon^2\Theta_2^{(2)}(t_0)]x_0.$$

В заключение статьи заметим, что решение любой игры, в частности Γ_2, по нашему мнению, логичнее определять парой

$$\big(U^S = (U_1^S, U_2^S), \mathcal{J}^S = (\mathcal{J}_1(U^S, t_0, x_0), \mathcal{J}_2(U^S, t_0, x_0))\big),$$

ибо в этом случае ситуация U^S определяет правила поведения участников конфликта, а $\mathcal{J}^S$ задает выигрыши игроков при таком поведении.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вайсман К.С. *Равновесие по Бержу в одной дифференциальной игре* // Сложные динамические системы.Сб.научн.тр. Псков. Псковский désinstitut. 1994. С. 58–63.

2. Вайсман К.С. *Равновесие по Бержу* // В кн. В.И. Жуковского, А.А. Чикрия «Линейно-квадратичные дифференциальные игры». Киев: Наукова Думка. 1994. С. 119–143.

3. Вайсман К.С.*Существование гарантированного равновесия по Бержу в одной дифференциальной игре* // Тезисы докладов ВМШ «Понтрягинские чтения - VI». Воронеж. 1995. С. 19.

4. Вайсман К.С. *Равновесие по Бержу* // Автореферат дисс... канд. физ.-мат. наук Санкт-Петербургский ун-т. 1995.

5. Вайсман К.С. *Об одном решении строго выпуклой бескоалиционной игры* // Сложные управляемые системы. Межвуз. сб. науч. тр. М.: РосЗИТЛП, 1996. С. 13-15.

6. Вайсман К.С. *Арбитражная схема Нэша при неопределенности* // В кн. В.И. Жуковского «Кооперативные игры при неопределенности и их применение». М.: Едиториал URSS. Изд. 2. 2010. С. 213–249.

7. Вайсман К.С., Аймуханов Н.Ж. *Равновесие по Бержу в дифференциально - разностной игре* // Сложные управляемые системы. Межвуз. сб. науч. тр. М.: РосЗИТЛП, 1996. С. 90-93.

8. Вайсман К.С., Жуковский В.И. *Свойства равновесия по Бержу* // Тезисы докладов V школы «Математические проблемы экологии». Чита. 1994. С. 27-28.

9. Вайсман К.С., Жуковский В.И. *Структура равновесных по Бержу решений* // Тезисы докладов ВМШ «Понтрягинские чтения - V». Воронеж. 1994. С. 29.

10. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. *Матрицы и вычисления.* М.: Наука, 1984.

11. Гусейнов А.А., Жуковский В.И., Кудрявцев К.Н. *Математические основы Золотого правила нравственности: Теория нового альтруистического уравновешивания конфликтов в противоположность «эгоистическому» равновесию по Нэшу.* М.: URSS, 2016.

12. Житомирский Г.И., Вайсман К.С. *О равновесии по Бержу* // Сложные динамические системы. Сб. научн. тр. Псков. Псковский пединститут. 1994. С. 52–57.

13. Жуковский В.И. *Введение в дифференциальные игры при неопределенности. Равновесие по Бержу-Вайсману.* М.:URSS, 2010.

14. Жуковский В.И., Кудрявцев К.Н. *Математические основы Золотого правила нравственности. I. Статический вариант* // Математическая теория игр и приложения. 2015. Т.7. №3. С. 16–47.

15. Жуковский В.И., Смирнова Л.В., Горбатов А.С. *Математические основы Золотого правила нравственности. II. Динамический вариант* // Математическая теория игр и приложения. 2016. Т.8. №1. С. 27–62.

16. Жуковский В.И., Чикрий А.А. *Линейно-квадратичные дифференциальные игры.* Киев: Наукова Думка, 1994.

17. *Математическая энциклопедия.* М.: Советская энциклопедия, 1982. Т.3. С. 498.

18. Berge C. *Théorie générale des jeux a n-personnes.* Paris: Gauthier Villars, 1957.

19. Larbani M., Zhukovskiy V.I. *Berge-Equilibrium in Normal Form Games: a literature review* // International Game theory review (in Press, 43p).

20. Nash J.F. *Non-Cooperative Games* // Ann. Math. 1951. 54. P. 286--295.

21. Shubik M. *Review: The General Theory of n-Person Games by Claude Berge* // Econometrica. 1961. Vol. 29. No. 4. P. 821.

22. Vaisman K.S. *The Berge Equilibrium for Linear-Quadratic Differential Game* // Abstracts of the third International Workshop «Multiple criteria problems under uncertainty». 1994. Orekhovo-Zuevo, Russia. P. 96.

23. Vaisman K.S. *About differential game under uncertainty* // Abstracts of the third International Workshop «Nonsmooth and Discontinuous Problems of Control and Optimization». St.-Petersburg. 1995. P. 45-48.

24. Vaisman K.S. *Nash equilibria routing and ring Networks* // Game Theory and Application, III. 1997. P.147-160.

25. Vaisman K.S. and Zhukovskiy, V.I. *The Berge Equilibrium under Uncertainty, Multiple Criteria Problems under Uncertainty* // Abstracts of The 3-d International Workshop, Orekhovo-Zuevo, Russia. 1994. P. 97-98.

26. Zhukovskiy V.I., Molostvov V.S. and Vaisman, K.S. *Non-Cooperative Games under Uncertainty* // Game Theory and Application. 1997. 3. P. 189-222.

27. Zhukovskiy V.I., Salukvadze M.E., Vaisman, K.S. *The Berge Equilibrium* // Preprint. Institute of Control Systems. Tbilisi, Georgia. 1994.

28. Zhukovskiy V.I., Vaisman K.S. *About one solution in noncooperative games* // The Theory and Economics. N.N. Vorob'ev Memorial Conference. St.-Petersburg. 1996. P. 77.

29. Zhukovskiy V.I., Vaisman K.S. *To a Problem about Berge Equilibrium* // Вестник Псковского Вольного ун-та. Математика и информатика. 1997. Вып. 1. С. 49–70

BERGE AND NASH EQUILIBRIUM IN A LINEAR-QUADRATIC DIFFERENTIAL GAME

Vladislav I. Zhukovskiy, Moscow State University, Dr.Sc., prof. (zhkvlad@yandex.ru).
Anton S. Gorbatov, Moscow State University, PhD student (gorbatovanton@gmail.com).
Konstantin N. Kudryavtsev, South Ural State University, Cand.Sc. (kudrkn@gmail.com).

Abstract: Everyone who was concerned with the theory of stability in Liapunov‘s sense can keep in mind the section: coefficient criteria of stability. The idea is in fact that without solving the differential equations and considering signs of coefficients and (or) relations among them one can judge at once about stability of nonperturbed motion. In this article we tried to apply the same approach but now with a view to choose the conceptions of equilibrium in the class of non-cooperation differential linear-quadratic games of two persons. We can answer two questions: first, are there situations of Berge equilibrium and (or) Nash equilibrium?; secondly, how we can finf them? Actually the answers «are hiding» (considering the method of dynamic programming) in possibility to judge about the existence of extendable on time interval game solution of system from two ordinary matrix differential equations Riccaty type. To answer this problem positively we had to attract the method of small parameter and theorem of Poincare on analyticity of parameter solution.

Keywords: non-cooperation differential linear-quadratic positional game, Berge and Nash equilibrium, dynamic programming, small parameter method.