Математическая Теория Игр и её Приложения, т.9, в.1, с. 95–107

УДК 519.833.2
ББК 22.18

ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ИГРЫ В ДИСКРЕТНОМ ВРЕМЕНИ

Владимир В. Мазалов*
Анна Н. Реттиева**
Институт прикладных математических исследований
Карельского научного центра РАН
185910, Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11
e-mail: vmazalov@krc.karelia.ru, annaret@krc.karelia.ru

Константин Е. Авраченков
INRIA Sophia-Antipolis Mediterranee
2004 route des Lucioles, 06902 Sophia-Antipolis, France
e-mail: k.avrachenkov@inria.fr

Теоретико-игровая модель экологического менеджмента в дискретном времени рассматривается как потенциальная игра. В игре участвуют игроки (страны или фирмы), эксплуатирующие общий ресурс на бесконечном промежутке времени. Целью работы является определение потенциала в линейно-квадратичных играх такого типа. Определен класс игр, в которых возможно построение потенциала в виде квадратичной формы. Построены потенциалы в случае идентичных участников и несимметричном варианте в динамической игре управления возобновляемыми ресурсами.

Ключевые слова: динамическая игра, потенциал, задача управления возобновляемыми ресурсами.

* Поддержано грантами РФФИ № 16-01-00183_а, 16-41-100062 р_а и РГНФ № 15-02-00352_а.

** Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №17-11-01079).

1. Введение

В статье исследованы теоретико-игровые модели экологического менеджмента в дискретном времени [1] как потенциальные игры. В игре участвуют игроки (страны или фирмы), эксплуатирующие общий ресурс на бесконечном промежутке времени. Целью работы является определение потенциала в линейно-квадратичных играх такого типа.

Потенциальные игры в статическом варианте появились в работе Мондерера, Шепли [6]. Игра n лиц в нормальной форме $\Gamma =< N, \{X_i\}_{i\in N}, \{u_i\}_{i\in N} >$ называется **потенциальной**, если существует такая функция $P : \prod_{i=1}^{n} X_i \to R$, такая что для любого $i \in N$ выполняется

$$H_i(x_{-i}, x_i') - H_i(x_{-i}, x_i) = P(x_{-i}, x_i') - P(x_{-i}, x_i)$$

для произвольных $x_{-i} \in X_1 \times \ldots \times X_{i-1} \times X_{i+1} \times \ldots \times X_n$ и любых стратегий $x_i, x_i' \in X_i$. Если такая функция существует, она называется **потенциалом** в игре Γ.

Например, игра двух лиц с функциями выигрыша

$$H_1(x_1, x_2) = x_1(p - cx_2), \quad H_2(x_1, x_2) = x_2(p - cx_1),$$

является потенциальной с потенциалом вида

$$P(x_1, x_2) = p(x_1 + x_2) - cx_1x_2.$$

Преимущество использования потенциала в теоретико-игровых задачах заключается в существовании равновесия в чистых стратегиях и в гарантированной сходимости «best response» динамики.

2. Потенциальные динамические игры

Эффективность использования потенциала в динамических играх также, как и в статических играх, заключается в более простом способе построения равновесия по Нэшу. Потенциал дает возможность найти равновесие в динамической игре как решение задачи оптимального управления со многими переменными в отличие от стандартного способа решения множества связанных задач оптимального управления с одной управляемой переменной. Впервые динамические потенциальные игры были исследованы в работах W.D. Dechert

[3,4], где для решения использовалось уравнение Эйлера-Лагранжа. В случае непрерывного времени используется принцип максимума, и потенциалы строятся в гамильтоновой форме [5]. В работах [6], [7] рассматривался стохастический вариант динамической потенциальной игры. В данной работе методом решения как игровой задачи, так и задачи оптимального управления для потенциала, выступает принцип Беллмана. Его использование в случае бесконечного горизонта планирования дает возможность получать решение в аналитическом виде.

Рассмотрим динамическую игру в дискретном времени с бесконечным горизонтом планирования. В игре участвуют $N = \{1, \ldots, n\}$ игроков, которые могут воздействовать на некоторую систему. Динамическая система развивается по следующему закону:

$$x_{t+1} = f(x_t, u_t)\,, \;\; x_0 = x\,, \tag{2.1}$$

где $x_t \in X$ – состояние управляемой системы в момент времени t, $u_t = (u_{1t}, \ldots, u_{nt}) \in U$ – вектор стратегий (управлений) игроков, $u_i \in U_i$, $U_1 \times \ldots \times U_n = U$.

Введем стандартное обозначение $u_{-it} = (u_{1t}, \ldots, u_{i-1t}, u_{i+1t}, \ldots, u_{nt})$. Тогда запишем вектор стратегий как $u_t = (u_{it}, u_{-it})$.

Каждый игрок заинтересован в максимизации бесконечной суммы своих дисконтированных выигрышей

$$J_i = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t g_i(x_t, u_t)\,, \;\; i \in N\,, \tag{2.2}$$

где $0 < \delta < 1$ – общий коэффициент дисконтирования, $g_i(x_t, u_t)$ – выигрыш игрока i в момент времени t, $i \in N$.

Определение 2.1. *Задача (2.1)-(2.2) называется динамической потенциальной игрой, если существует функция $P : X \times U \times N \to R$, называемая потенциалом, которая удовлетворяет следующим условиям:*

$$\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \Big(g_i(x_t, u_{it}, u_{-it}) - g_i(x_t, v_{it}, u_{-it}) \Big) =$$

$$= \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \Big(P(x_t, u_{it}, u_{-it}) - P(x_t, v_{it}, u_{-it}) \Big)\,, \;\; \forall u_{it}, v_{it} \in U_i, \;\; i \in N\,. \tag{2.3}$$

Необходимым условием существования потенциала в динамической игре является выполнение равенств [9]

$$\frac{\partial g_i(x_t,u_t)}{\partial x_t}=\frac{\partial P(x_t,u_t)}{\partial x_t}\,,$$
$$\frac{\partial g_i(x_t,u_t)}{\partial u_{it}}=\frac{\partial P(x_t,u_t)}{\partial u_{it}}\,,\ i\in N\,. \tag{2.4}$$

Существует ряд динамических игр, в которых потенциал можно построить простым способом. Это игры с функциями выигрышей игроков следующего вида:

$$g_i(x_t,u_{it},u_{-it})=P(x_t,u_{it},u_{-it})+M(u_{-it})\,,$$

т.е. когда возможно выделить общую для всех игроков функцию $P(x_t,u_{it},u_{-it})$, и при этом оставшаяся часть функции выигрыша каждого игрока не зависит от действий этого игрока. Тогда потенциалом и является эта общая часть.

В случае же когда нельзя разделить переменные в функциях выигрыша подобным образом потенциал может быть найден как [9]

$$P(x_t,u_t)=\int_0^1\sum_{i=1}^n\Big(\frac{\partial g_i(\nu(\lambda),u_t)}{\partial x_t}\frac{d\nu(\lambda)}{d\lambda}+\frac{\partial g_i(x_t,\xi(\lambda))}{\partial u_{it}}\frac{d\xi_i(\lambda)}{d\lambda}\Big)d\lambda\,,$$

где $\xi(\lambda)=(\xi_1(\lambda),\ldots,\xi_n(\lambda))$, $\nu(0)$, $\xi(0)$ соответствуют начальным данным, $\nu(1)=x_t$, $\xi(1)=u_t$.

Целью данной работы является построение потенциала в линейно-квадратичных дискретных динамических играх с бесконечным горизонтом планирования. При этом оптимальные стратегии игроков строятся в виде функций с обратной связью, т.е. $u_{it}=u_i(x_t)$, а для решения используется принцип Беллмана. Нашей задачей является определение класса игр, в которых существует потенциал в виде квадратичной по управлению форме.

3. Потенциал в линейно-квадратичной модели

Рассмотрим динамическую игру в дискретном времени. Пусть два игрока (страны или фирмы) эксплуатируют ресурс на протяжении бесконечного горизонта планирования. Динамика развития возобновляемого ресурса имеет вид

$$x_{t+1}=\varepsilon x_t-u_{1t}-u_{2t}\,,\ \ x_0=x\,, \tag{3.1}$$

где $x_t \geq 0$ – размер ресурса в момент времени t, $\varepsilon \geq 1$ – коэффициент естественной выживаемости, $u_{it} \geq 0$ – стратегия (интенсивность эксплуатации) игрока i, $i = 1, 2$.

Игроки стремятся максимизировать бесконечную дисконтированную сумму «мгновенных выигрышей»:

$$J_i = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t g_i(u_{1t}, u_{2t})\,, \; i = 1, 2\,, \tag{3.2}$$

где $0 < \delta < 1$ – общий коэффициент дисконтирования. Предполагается, что функции $g_i(u_{1t}, u_{2t})$ неотрицательны и квадратичны по стратегиям обоих игроков.

Обозначим равновесие по Нэшу в игре (3.1)–(3.2) как $u_t^N = (u_{1t}^N, u_{2t}^N)$. Известно, что в линейно-квадратичных играх оптимальные по Нэшу стратегии являются линейными по x функциями [2], т.е.

$$u_{it}^N = \gamma_i x_t + \phi_i\,, \; i = 1, 2\,. \tag{3.3}$$

Будем искать потенциал в данной игре в следующем виде:

$$P(u_{1t}, u_{2t}) = \alpha u_{1t}^2 + \beta u_{1t} u_{2t} + k u_{2t}^2 + l u_{1t} + n u_{2t} + m\,. \tag{3.4}$$

Решим задачу оптимального управления для потенциала, т.е. динамика задана уравнением (3.1), а функционал как

$$\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t P(u_{1t}, u_{2t}) \to \max_{u_{1t}, u_{2t}}\,.$$

Применяя принцип Беллмана, получим, что оптимальные управления имеют вид

$$u_{it} = a_i x_t + b_i\,, \; i = 1, 2\,, \tag{3.5}$$

где

$$a_1 = \frac{(\delta\varepsilon^2 - 1)(\beta - 2k)}{2\varepsilon\delta(\beta - \alpha - k)}\,, \quad a_2 = \frac{(\delta\varepsilon^2 - 1)(\beta - 2\alpha)}{2\varepsilon\delta(\beta - \alpha - k)}\,,$$

$$b_1 = \frac{\beta^2(\delta\varepsilon^2(l-n) - n - l + 2\delta\varepsilon n) + 2\beta(1-\delta\varepsilon)(nk + n\alpha + 2kl)}{2\delta\varepsilon(\beta - \alpha - k)(\varepsilon - 1)(\beta^2 - 4k\alpha)} + \\ + \frac{4\alpha(\delta\varepsilon^2 k(n-l) + k(\delta\varepsilon l - n)) + 4k^2 l(\delta\varepsilon - 1)}{2\delta\varepsilon(\beta - \alpha - k)(\varepsilon - 1)(\beta^2 - 4k\alpha)}\,,$$

$$b_2 = \frac{\beta^2(\delta\varepsilon^2(n-1) - n - l + 2\delta\varepsilon l) + 2\beta(1-\delta\varepsilon)(lk + l\alpha + 2n\alpha)}{2\delta\varepsilon(\beta - \alpha - k)(\varepsilon - 1)(\beta^2 - 4k\alpha)} + \\ + \frac{4\alpha(\delta\varepsilon^2 k(n-l) + k(\delta\varepsilon l - k)) + 4k^2 l(\delta\varepsilon - 1)}{2\delta\varepsilon(\beta - \alpha - k)(\varepsilon - 1)(\beta^2 - 4k\alpha)}\,. \quad (3.6)$$

Для того, чтобы решение задачи оптимального управления для потенциала совпадало с равновесием по Нэшу в игре (3.1)–(3.2) необходимо выполнение равенств

$$a_i = \gamma_i\,, i = 1, 2\,, \tag{3.7}$$

$$b_i = \phi_i\,, i = 1, 2\,. \tag{3.8}$$

Из первого уравнения системы (3.7) получаем

$$\beta = \frac{2(k(1 - \delta\varepsilon^2) + \gamma_1\delta\varepsilon(k + \alpha))}{1 - \delta\varepsilon^2 + 2\gamma_1\delta\varepsilon}\,,$$

подставляя во второе уравнение системы (3.7), получим

$$\gamma_2 = \frac{\delta\varepsilon^2 - 1 - \delta\varepsilon\gamma_1}{\delta\varepsilon}\,. \tag{3.9}$$

Или из второго уравнения системы (3.7) получаем

$$\beta = \frac{2(\alpha(1 - \delta\varepsilon^2) + \gamma_2\delta\varepsilon(k + \alpha))}{1 - \delta\varepsilon^2 + 2\gamma_2\delta\varepsilon}\,,$$

подставляя во второе уравнение системы (3.7), получим

$$\gamma_1 = \frac{\delta\varepsilon^2 - 1 - \delta\varepsilon\gamma_2}{\delta\varepsilon}\,. \tag{3.10}$$

Таким образом, построение потенциала в виде квадратичной формы возможно только для класса линейно-квадратичных игр, в которых оптимальные по Нэшу стратегии связаны как (3.9) или (3.10), т.е.

$$\gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\delta\varepsilon^2 - 1}{\delta\varepsilon}\,. \tag{3.11}$$

Используя первый вариант (3.9), из системы (3.8) получим, что параметры потенциала имеют вид

$$\alpha = \frac{2\delta^2\varepsilon^4 k\phi - \delta^2\varepsilon^3(2k\phi(1+\gamma_1)-n) + \delta\varepsilon^2(2\gamma_1^2\delta k\phi + 2\gamma_1\delta(k\phi+n)+n-2k\phi)}{2\gamma_1\delta\varepsilon(\delta\varepsilon\gamma_1\phi - \phi_1(\delta\varepsilon-1))} + \\ + \frac{2\gamma_1\delta\varepsilon(\phi_1 k - n) + 2\delta\varepsilon k\phi + n(\delta\varepsilon - 1)}{2\gamma_1\delta\varepsilon(\delta\varepsilon\gamma_1\phi - \phi_1(\delta\varepsilon-1))},$$

$$l = \frac{-2\delta^2\varepsilon^4 k\phi + \delta^2\varepsilon^3(2k\phi^2\gamma_1 + \phi_1(2k\phi+n)) + \gamma_1\delta\varepsilon n(2\phi_1+\phi_2)}{2\gamma_1\delta\varepsilon(\delta\varepsilon\gamma_1\phi - \phi_1(\delta\varepsilon-1))} + \\ + \frac{\delta\varepsilon^2(\delta n\phi - \gamma_1\delta(\phi^2+n(2\phi_1+\phi_2)) + \phi_1(2k\phi-n)) + \phi_1(n(1-\delta\varepsilon) - 2\delta\varepsilon k\phi - 1)}{2\gamma_1\delta\varepsilon(\delta\varepsilon\gamma_1\phi - \phi_1(\delta\varepsilon-1))},$$

а k, n, m могут быть произвольными, $\phi = \phi_1 + \phi_2$.

Используя второй вариант (3.10), из системы (3.8) получим, что параметры потенциала имеют вид

$$k = \frac{2\delta^2\varepsilon^4 \alpha\phi - \delta^2\varepsilon^3(2\alpha\phi(1+\gamma_2)-l) + \delta\varepsilon^2(2\gamma_2^2\delta\alpha\phi + 2\gamma_2\delta(\alpha\phi+l)+l-2\alpha\phi)}{2\gamma_2\delta\varepsilon(\delta\varepsilon\gamma_2\phi - \phi_1(\delta\varepsilon-1))} + \\ + \frac{2\gamma_2\delta\varepsilon(\phi_1\alpha - l) + 2\delta\varepsilon\alpha\phi + l(\delta\varepsilon - 1)}{2\gamma_2\delta\varepsilon(\delta\varepsilon\gamma_2\phi - \phi_1(\delta\varepsilon-1))},$$

$$n = \frac{-2\delta^2\varepsilon^4 \alpha\phi + \delta^2\varepsilon^3(2\alpha\phi^2\gamma_2 + \phi_1(2\alpha\phi+l)) + \gamma_2\delta\varepsilon l(2\phi_1+\phi_2)}{2\gamma_2\delta\varepsilon(\delta\varepsilon\gamma_2\phi - \phi_1(\delta\varepsilon-1))} + \\ + \frac{\delta\varepsilon^2(\delta l\phi - \gamma_2\delta(\phi^2+l(2\phi_1+\phi_2)) + \phi_1(2\alpha\phi-l)) + \phi_1(l(1-\delta\varepsilon) - 2\delta\varepsilon\alpha\phi - 1)}{2\gamma_2\delta\varepsilon(\delta\varepsilon\gamma_2\phi - \phi_1(\delta\varepsilon-1))},$$

а α, l, m могут быть произвольными.

4. Задача управления возобновляемыми ресурсами

Рассмотрим теоретико-игровую задачу управления возобновляемыми ресурсами (вылов рыбы). Два игрока (страны или фирмы) эксплуатируют ресурс на протяжении бесконечного горизонта планирования. Динамика развития возобновляемого ресурса имеет вид

$$x_{t+1} = \varepsilon x_t - u_{1t} - u_{2t}\,, \;\; x_0 = x\,, \tag{4.1}$$

где $x_t \geq 0$ – размер популяции в момент времени t, $\varepsilon \geq 1$ – коэффициент естественного роста, $u_{it} \geq 0$ – стратегия (вылов) игрока i, $i = 1, 2$ в момент времени t. Предполагаем, что $\delta\varepsilon \geq 1$.

Игроки имеют две цели – это максимизация прибыли от продажи ресурса и минимизация затрат на эксплуатацию. В случае симметричных игроков, предполагаем, что цена продажи единицы ресурса и затраты одинаковы для игроков. При этом предполагается, что затраты пропорциональны промысловым усилиям обоих игроков. Таким образом, выигрыши игроков на бесконечном горизонте планирования имеют вид

$$J_i = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t [p u_{it} - c u_{1t} u_{2t}]\,,\; i = 1,2\,, \tag{4.2}$$

где $p \geq 0$ – цена продажи единицы ресурса, $c \geq 0$ – затраты на эксплуатацию, $\delta \in (0,1)$ – общий коэффициент дисконтирования.

В случае несимметричных игроков предполагаем, что цена продажи единицы ресурса и затраты различаются. Тогда, выигрыши игроков на бесконечном горизонте планирования имеют вид

$$J_i = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t [p_i u_{it} - c_i u_{1t} u_{2t}]\,,\; i = 1,2\,, \tag{4.3}$$

где $p_i \geq 0$ – цена продажи единицы ресурса для игрока i, $c \geq 0$ затраты на эксплуатацию игрока i, $\delta \in (0,1)$ – общий коэффициент дисконтирования, $i = 1,2$.

4.1. Симметричные участники

Равновесие по Нэшу в игре (4.1)–(4.2) имеет вид

$$u_{1t}^N = u_{2t}^N = \frac{\delta\varepsilon^2 - 1}{2\delta\varepsilon} x_t - \frac{p(1 - 2\varepsilon + \delta\varepsilon^2)}{2c\delta\varepsilon^2(\varepsilon - 1)}\,. \tag{4.4}$$

Заметим, что условие (3.11) выполняется, поэтому возможно построение потенциала в виде квадратичной формы.

Воспользуемся методом построения, описанным в разделе 3, и будем искать потенциал в следующем виде:

$$P(u_1, u_2) = k(u_1^2 + u_2^2) + \beta u_1 u_2 + n(u_1 + u_2).$$

Решим задачу

$$\sum_{t=0}^{n} \delta^t P(u_{1t}, u_{2t}) \to \max_{u_{1t}, u_{2t}}\,.$$

при условии

$$x_{t+1} = \varepsilon x_t - u_{1t} - u_{2t}\,, \ \ x_0 = x\,.$$

Уравнение оптимальности имеет вид

$$V(x) = \max_{u_1,u_2} \left\{ k(u_1^2 + u_2^2) + \beta u_1 u_2 + n(u_1 + u_2) + \delta V(\varepsilon x - u_1 - u_2) \right\}$$

Представим функцию Беллмана в квадратичном виде $V(x) = Ax^2 + Bx + D$. Для существования максимума выражения в скобках необходимо и достаточно выполнения условий

$$k + \delta A < 0, \quad 4(k + \delta A)^2 - (\beta + 2A\delta)^2 > 0. \qquad (4.5)$$

Если эти условия выполняются, оптимальные управления имеют вид

$$u_1(x) = u_2(x) = \frac{2A\delta\varepsilon}{2k + \beta + 4A\delta} x + \frac{B\delta - n}{2k + \beta + 4A\delta}.$$

Из уравнения Беллмана находим значения коэффициентов A, B, C:

$$A = \frac{(2k+\beta)(\delta\varepsilon^2 - 1)}{4\delta}, B = \frac{n(\delta\varepsilon^2 - 1)}{\delta(\varepsilon - 1)}, C = \frac{n^2(\delta\varepsilon - 1)^2}{\delta(\delta - 1)(\varepsilon - 1)^2(2k + \beta)}.$$

Подставив в выражения для оптимальных управлений, получим

$$u_1 = u_2 = \frac{\delta\varepsilon^2 - 1}{2\delta\varepsilon} x + \frac{n(\delta\varepsilon - 1)}{\delta(\varepsilon - 1)\varepsilon(2k + \beta)}.$$

Выберем параметры k, β, m, входящие в выражение для потенциала так, чтобы

$$-\frac{p(1 - 2\varepsilon + \delta\varepsilon^2)}{2c\delta\varepsilon^2(\varepsilon - 1)} = \frac{n(\delta\varepsilon - 1)}{\delta(\varepsilon - 1)\varepsilon(2k + \beta)},$$

или

$$n = -\frac{p(1 - 2\varepsilon + \delta\varepsilon^2)}{2c\varepsilon(\delta\varepsilon - 1)}(\beta + 2k).$$

При таком выборе параметров оптимальные управления совпадут с равновесными по Нэшу стратегиями (4.4). Параметры k, β, m, входящие в выражение для потенциала, должны удовлетворять условиям (4.5), которые для найденных A, B, C примут вид

$$\beta < -2k\frac{\delta\varepsilon^2 + 1}{\delta\varepsilon^2 - 1}, \quad 4k^2 - \beta > 0.$$

Например, можно выбрать $k = -1$ и $\beta < \min\{4, 2\frac{\delta\varepsilon^2+1}{\delta\varepsilon^2-1}\}$. Тогда функция вида

$$P(u_1, u_2) = k(u_1^2 + u_2^2) + \beta u_1 u_2 - \frac{p(1 - 2\varepsilon + \delta\varepsilon^2)(\beta + 2k)}{2c\varepsilon(\delta\varepsilon - 1)}(u_1 + u_2)\,,$$

будет потенциалом в данной динамической игре и оптимальные управления будут иметь вид

$$u_{1t} = u_{2t} = \frac{\delta\varepsilon^2 - 1}{2\delta\varepsilon}x_t - \frac{p(1 - 2\varepsilon + \delta\varepsilon^2)}{2c\delta\varepsilon^2(\varepsilon - 1)}\,,$$

что соответствует равновесию по Нэшу.

4.2. Несимметричные игроки

Равновесие по Нэшу в игре (4.1), (4.3) имеет вид

$$\begin{aligned} u_{1t}^N &= \frac{\delta\varepsilon^2 - 1}{2\delta\varepsilon}x_t - \frac{p_2}{2c_2(\varepsilon - 1)} + \\ &+ \frac{\delta\varepsilon^3(c_2p_1 - c_1p_2)(\delta\varepsilon - 2) + (2\varepsilon - 1)(c_2p_1 + c_1p_2)}{4(\varepsilon - 1)\delta\varepsilon^2 c_1 c_2}\,, \\ u_{2t}^N &= \frac{\delta\varepsilon^2 - 1}{2\delta\varepsilon}x_t - \frac{p_1}{2c_1(\varepsilon - 1)} + \\ &+ \frac{\delta\varepsilon^3(c_1p_2 - c_2p_1)(\delta\varepsilon - 2) + (2\varepsilon - 1)(c_2p_1 + c_1p_2)}{4(\varepsilon - 1)\delta\varepsilon^2 c_1 c_2}\,. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Заметим, что условие (3.11) выполняется, поэтому возможно построение потенциала в виде квадратичной формы.

Пользуясь методом построения, описанным в разделе 3, получим потенциал следующего вида:

$$P(u_1,u_2) = ku_1^2 + \beta u_1 u_2 + ku_2^2 + \Big[\frac{\delta^2\varepsilon^4(c_2p_1 - c_1p_2)(\beta-2k)}{4\varepsilon c_1c_2(\varepsilon-1)(\delta\varepsilon-1)} + \\ + \frac{c_2p_1[4\delta\varepsilon^3(k-\beta) + 2\varepsilon^2\beta(2+\delta) + (\beta+2k)(1-4\varepsilon) + 4k\varepsilon]}{4\varepsilon c_1c_2(\varepsilon-1)(\delta\varepsilon-1)} + \\ + \frac{c_1p_2[2\delta\varepsilon^3(\beta-4k) + 4\varepsilon^2k(2+\delta) + (\beta+2k)(1-2\varepsilon)]}{4\varepsilon c_1c_2(\varepsilon-1)(\delta\varepsilon-1)}\Big]u_1 + \\ + \Big[\frac{\delta^2\varepsilon^4(c_1p_2 - c_2p_1)(\beta-2k)}{4\varepsilon c_1c_2(\varepsilon-1)(\delta\varepsilon-1)} + \\ + \frac{c_1p_2[4\delta\varepsilon^3(k-\beta) + 2\varepsilon^2\beta(2+\delta) + (\beta+2k)(1-4\varepsilon) + 4k\varepsilon]}{4\varepsilon c_1c_2(\varepsilon-1)(\delta\varepsilon-1)} + \\ + \frac{c_2p_1[2\delta\varepsilon^3(\beta-4k) + 4\varepsilon^2k(2+\delta) + (\beta+2k)(1-2\varepsilon)]}{4\varepsilon c_1c_2(\varepsilon-1)(\delta\varepsilon-1)}\Big]u_2 + m\,,$$

где k, β, m могут быть произвольными.

Проверим, что построенные функции действительно соответствуют равновесию по Нэшу в игре (4.1), (4.3). Для этого решим задачу

$$\sum_{t=0}^{n} \delta^t P(u_{1t}, u_{2t}) \to \max_{u_{1t},u_{2t}}\,.$$

Представив функцию Беллмана в квадратичном виде $V(x) = Ax^2 + Bx + D$, получим, что оптимальные управления соответствуют равновесию по Нэшу (4.5).

5. Заключение

В статье исследованы линейно-квадратичные динамические игры, связанные с задачей эксплуатации общего ресурса на бесконечном промежутке планирования, в классе стратегий с обратной связью. Определен класс игр, которые являются потенциальными. Потенциал имеет квадратичную форму. Показано, что решение задачи оптимального управления с потенциальной функцией такого вида дает равновесное по Нэшу решение. Исследованы случаи симметричных и несимметричных игроков.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Реттиева А.Н. *Дискретная задача управления биоресурсами с асимметричными игроками* // Математическая теория игр и ее приложения. 2012. Т. 4. Вып. 4. С. 63–72.

2. Basar T., Olsder G.J. Dynamic noncooperative game theory. NY: Academic Press, 1982.

3. Dechert W.D. *Optimal control problems from second order difference equations* // J. Econ. Theory. 1978. V. 19. P. 50–63.

4. Dechert W.D. *Noncooperative dynamic games: a control theoretic approach.* University of Houston, 1997.

5. Dragone D., Lambertini L., Leitmann G., Palestini A. *Hamilton potential functions for differential games* // Proceeding of IFAC CAO. 2009. V. 9.

6. Gonzalez-Sanchez D., Hernandez-Lerma O. *Dynamic potential games: The discrete-time stochastic case* // Dynamic Games and Applications. 2014. V. 4.3. P. 309-328.

7. Gonzalez-Sanchez D., Hernandez-Lerma O. *Discrete–time stochastic control and dynamic potential games: the Euler–Equation approach.* Springer Science & Business Media, 2013.

8. Monderer D., Shapley L.S. *Potential games* // Games and Economic Behavior. 1996. V. 14. P. 124–143.

9. Zazo S., Macua S.V., Sanchez-Fernandes M., Zazo J. *Dynamic potential games with constraints: fundamentals and applications in communications* // IEEE Transactions on Signal Processing. 2015. V. 64(14).

LINEAR-QUADRATIC DISCRETE-TIMES DYNAMIC POTENTIAL GAMES

Vladimir V. Mazalov, Institute of Applied Mathematical Research Karelian Research Center of RAS, Dr.Sc., professor (vmazalov@krc.karelia.ru),
Anna N. Rettieva, Institute of Applied Mathematical Research Karelian Research Center of RAS, Dr.Sc., docent (annaret@krc.karelia.ru),
Konstantin E. Avrachenkov, INRIA Sophia-Antipolis Mediterranee, PhD (k.avrachenkov@inria.fr).

Abstract: Discrete-time game-theoretic models of resource exploitation are considered as dynamic potential games. The players (countries or firms) exploit the common stock during infinite time horizon. The main goal of a paper is to construct the potential in linea-quadratic games of this kind. The class of games where a potential can be constructed as quadratic form is obtained. As an example the dynamic game of bioresource extraction is considered. The potentials are constructed in the case of symmetric and asymmetric players.

Keywords: dynamic game, potential, bioresource management problem.