Математическая Теория Игр и её Приложения, т.9, в.2, с. 105–120

УДК 517.977
ББК 22.16

ИГРА «ЛЕВ И ЧЕЛОВЕК» И ОТОБРАЖЕНИЯ БЕЗ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК

Ольга О. Юферева*
Институт математики и механики
имени Н.Н. Красовского
620990, Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, 16
e-mail: yufereva12@gmail.com

Работа посвящена игре преследования-убегания, в которой оба игрока (Лев и Человек) перемещаются в метрическом пространстве, обладают одинаковыми максимальными скоростями и «видят» друг друга. Под уклонением от поимки понимается существование некоторых начальных положений игроков, для которых найдется положительное число p и неупреждающая стратегия убегающего, гарантирующая, что расстояние между игроками всегда больше этого числа p. Рассматриваются достаточные условия уклонения от поимки, связанные с такими свойствами фазового пространства как поведение геодезических и наличие нерастягивающих отображений без неподвижных точек.

Ключевые слова: игра преследования–убегания, игра сближения–уклонения, лев и человек, неподвижные точки, замкнутая геодезическая.

---

* Работа выполнена при поддержке РНФ, грант №17-11-01093

1. Введение

Основы теории игр были заложены в первой половине XX-го века, это были пошаговые и матричные игры [9], позже появились дифференциальные игры, изучаемые теперь в самых разных постановках (см. [5-7,13-17,27,28]). Более общим случаем дифференциальных игр можно считать динамические игры (см., например, [12,21]). Одной из первых была опубликована постановка игры «Лев и Человек» (см. [29]), предложенная Р. Радо, которая заключалась в вопросе: «Лев и Человек, находящиеся на огороженной круглой арене, имеют одинаковую максимальную скорость. Какой стратегии должен придерживаться лев, чтобы быть уверенным в своей трапезе?». А.С. Безиковичем было показано (но опубликовано только в [29]), что убегающий (человек) может гарантировать несовпадение положений игроков (то есть отсутствие точной поимки); в последующих работах для данной содержательной задачи использовались модели теории дифференциальных игр.

Заметим, что неточная поимка вполне естественна для прикладных задач, в частности для робототехники (см. например [26,33]), поскольку реальные объекты имеют некоторый размер, и поимка – соприкосновение с границей. Другой подход к целям игроков предполагается в играх с терминальным множеством (например [18]), и в их важном частном случае, предложенном Л.А. Петросяном – в играх с линией жизни (см. [11,12,14]). Имеются также постановки с неполной информацией или с запаздыванием информации ([2,8,12,20,21]), связанные, например, с задержкой реагирования реального оборудования. Тем не менее, во многих постановках разумно исследовать дифференциальную игру с точной поимкой. Так, в статье Б.Н. Пшеничного [19] основной результат касается группы преследователей и одного убегающего, и заключается в том, что поимка происходит тогда и только тогда, когда начальная позиция убегающего принадлежит внутренности выпуклой оболочки начальных позиций преследователей. Подобные постановки встречаются в работах Н.Н. Петрова, в том числе в квазилинейных играх с дополнительными ограничениями (см. [1,10]). Подробный обзор игр преследования-убегания многих лиц имеется в [28].

В настоящей работе предполагается, что игроки всегда знают текущее положение друг друга; кроме того, в отличие от [3], в настоящей работе нет цели изучить оптимальность движений – вопрос состоит в достаточных условиях убегания при довольно слабых требованиях к пространству, на котором происходит игра (например, не требуется евклидовость метрики).

Игры преследования-убегания могут быть рассмотрены в контексте геометрических свойств пространства, в котором находятся игроки. Важную роль играет поведение геодезических: существование неограниченной геодезической приводит к убеганию, единственность геодезической между любыми двумя точками позволяет находить «наилучший» путь. Так, в [4] геодезические используются для построения аналога П-стратегии в игре на сфере, как на частном случае поверхности с положительной гауссовой кривизной. В работе [30] А.А. Меликяном используются свойства геодезических на гиперболических двумерных поверхностях. В пространствах Александрова ограниченной кривизны (CAT(k)-пространствах) имеются теоремы как для поимки (неточной) [22], так и для убегания [25]. Так, в [22] показано, что стратегия простого преследования является выигрышной (для преследователя) на компактном множестве CAT(0)-пространства; при этом используется неположительность кривизны и единственность геодезической между любой парой точек пространства. Позже в [34] было показано, что для выигрыша преследователя в произвольном метрическом пространстве достаточно компактности этого пространства и единственности геодезических. В [25] для CAT(k)-пространств (пространств с кривизной не превосходящей некоторого положительного k), вводится понятие «стабильной» петли и показывается возможность убегания вдоль такой петли. В отличие от [25], в настоящей работе показано убегание в условиях иных свойств фазового пространства, в частности без использования кривизны.

В недавней работе [23] рассматриваются подобные вопросы в общих топологических пространствах. При этом существование выигрышной стратегии одного из игроков связывается с такими свойствами, как линейная связность, хаусдорфовость, гомотопическая эквивалентность другому пространству. В силу того, что метрическая структура не используется, под допустимыми траекториями понимаются любые непрерывные кривые, а под поимкой – совпадение позиций игроков. При этом оказывается, например, что на окружности каждый игрок обладает выигрышной неупреждающей стратегией (квазистратегией). Существование пространств, в которых у каждого игрока есть выигрышная квазистратегия, рассматривалось ранее в [24]; в настоящей статье такая ситуация невозможна в силу требований к стратегиям и целям игроков.

Данная работа построена следующим образом. Раздел 2 задает возможности игроков, Раздел 3 обсуждает выбор классов стратегий игроков и задает условие убегания. Далее, в разделе 4 формулируются достаточные условия убегания (теорема 4.1), носящие «глобальный» характер, а именно использующие свойства всего фазового пространства и нерастягивающих отображений этого пространства в себя. В разделе 5 формулируется теорема 5.1, также предлагающая достаточные условия убегания, но уже «локального» характера: используется наличие замкнутой геодезической и ретракции некоторой ее окрестности. В разделе 6 приведены примеры, иллюстрирующие теоремы 4.1 и 5.1.

2. Постановка задачи

Пусть (K,ρ) – метрическое пространство. Пусть на K есть две подвижные точки, соответствующие двум игрокам: точка L – преследователю, M – убегающему. Во время игры и преследователь, и убегающий знают положения друг друга в каждый текущий момент времени, и, кроме того – помнят «историю». Далее будем полагать, что в начальный момент времени игроки находятся в различных точках. Оба игрока могут двигаться в K произвольно с единственным условием: траектории игроков должны быть 1-липшицевыми кривыми.

Определение 2.1. *Множеством допустимых траекторий преследователя называется множество*

$$U = \{L\colon \mathbb{R}^+ \to K \ \mid \forall t_1, t_2 \geq 0 \quad \rho\big(L(t_1), L(t_2)\big) \leq |t_1 - t_2|\},$$

а множеством допустимых траекторий убегающего называется *множество*

$$V = \{M\colon \mathbb{R}^+ \to K \ \mid \forall t_1, t_2 \geq 0 \quad \rho\big(M(t_1), M(t_2)\big) \leq |t_1 - t_2|\}.$$

Здесь и далее под $\mathbb{R}^+$ понимается $[0, +\infty)$. Под неточной поимкой подразумевается равенство

$$\inf_{t>0} \rho(L(t), M(t)) = 0, \tag{2.1}$$

и соответственно цель убегающего – не допустить поимки вне зависимости от действий соперника; строгое определение уклонения от поимки и допустимые стратегии вводятся в следующем разделе.

3. Стратегии игроков

Естественно считать, что действие убегающего в текущий момент времени зависит только от той части траектории преследователя, которая известна убегающему. Этому описанию соответствуют неупреждающие стратегии (квазистратегии), введенные еще в [31,32].

Определение 3.1. *Неупреждающей стратегией для убегающего называется такое отображение $\alpha\colon U \to V$, что для любых траекторий $u_1, u_2 \in U$ и любого момента $T \geq 0$ справедлива импликация*

$$u_1(t) = u_2(t) \ \ \forall t \in [0, T] \quad \Longrightarrow \quad (\alpha(u_1))(t) = (\alpha(u_2))(t) \ \ \forall t \in [0, T].$$

Неупреждающая стратегия преследователя определяется аналогично.

Однако, в [24] рассмотрен пример игры (с точной поимкой), в которой использование неупреждающих стратегий приводит к абсурдному результату: каждый из игроков может выиграть с помощью выбора подходящей неупреждающей стратегии. Там же (а ранее фактически в [13,15]) показано, что избежать этого можно в рамках пошаговой процедуры, в частности в случае, если один из игроков использует стратегию с задержкой.

Определение 3.2. *Неупреждающей стратегией с задержкой для убегающего называется такое отображение $\alpha\colon U \to V$, что для некоторого $\tau > 0$, для любых траекторий $u_1, u_2 \in U$ и любого момента $T \geq 0$ справедлива импликация*

$$u_1(t) = u_2(t) \ \ \forall t \in [0, T] \implies (\alpha(u_1))(t) = (\alpha(u_2))(t) \ \ \forall t \in [0, T + \tau].$$

Поскольку стратегия с задержкой – частный случай неупреждающей стратегии, то существование выигрышной стратегии с задержкой для убегающего – в общем случае более сильное условие, чем существование выигрышной неупреждающей стратегии убегающего. Однако, если убегающий с помощью некоторой неупреждающей стратегии может гарантировать, что расстояние между игроками всегда больше некоторой положительной константы p, то существование такой неупреждающей выигрышной стратегии эквивалентно существованию выигрышной стратегии с задержкой. Действительно, для использования стратегии с задержкой убегающему достаточно оставаться в начальной точке до момента $p/2$, а затем применять неупреждающую стратегией без задержки, принимая за преследователя не $L(t)$, а более раннее (и известное) положение преследователя $L(t-p/2)$ – тогда расстояние между игроками всегда будет больше $p/2$. Таким образом, сформулируем определение уклонения от поимки так, чтобы быть уверенными в корректности игры, но тем не менее использовать неупреждающие стратегии.

Определение 3.3. *Будем говорить, что убегающий уклоняется от поимки, если для некоторых начальных положений $L_0, M_0 \in K$ найдется неупреждающая стратегия убегающего $\alpha\colon U \to V$ и число $p > 0$ такие, что*

$$\inf_{L\in U, L(0)=L_0} \inf_{t>0} \rho\big(L(t), (\alpha(L))(t)\big) > p.$$

Другими словами, уклонение означает, что преследователь не может оказаться ближе, чем на расстояние p к убегающему, и в частности это значит, что условие (2.1) не будет выполнено.

4. Убегание и отсутствие неподвижной точки

Теорема 4.1. *Пусть K – компакт, и существует непрерывное отображение $H\colon K \to K$, удовлетворяющее условиям*

$$\rho(x,y) \ge \rho(H(x), H(y)) \qquad \forall x, y \in K, \tag{4.1}$$

$$x \neq H(x) \qquad \forall x \in K \tag{4.2}$$

(нерастягиваемости и отсутствия неподвижной точки), тогда убегающий уклоняется от поимки в смысле определения 3.3.

Доказательство. Из компактности K, непрерывности H и (4.2) следует, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого x из K выполняется $\rho(x, H(x)) > \varepsilon$. Выберем точки L_0 и M_0 так, что $M_0 = H(L_0)$, тогда $\rho(L_0, M_0) = \rho(L_0, H(L_0)) > \varepsilon$. Зададим движение убегающего, используя задержку в $\frac{\varepsilon}{2}$, следующим образом:

$$M(t) = \begin{cases} M_0, \quad \text{при } t \in [0, \frac{\varepsilon}{2}] \\ H\big(L(t - \frac{\varepsilon}{2})\big), \quad \text{при } t > \frac{\varepsilon}{2}. \end{cases}$$

Проверим допустимость:

- если моменты времени $t_1, t_2 \le \frac{\varepsilon}{2}$, то

$$\rho\big(M(t_1), M(t_2)\big) = \rho\big(M_0, M_0\big) = 0 \le |t_1 - t_2|,$$

- если (без ограничения общности) $t_1 \le \frac{\varepsilon}{2}$, а $t_2 > \frac{\varepsilon}{2}$, то из (4.1) и допустимости L

$$\rho\big(M(t_1), M(t_2)\big) \le \rho\big(M(t_1), M(\frac{\varepsilon}{2})\big) + \rho\big(M(\frac{\varepsilon}{2}), M(t_2)\big) =$$
$$= 0 + \rho\big(H(0), H\left(L(t_2 - \frac{\varepsilon}{2})\right)\big) \le \rho\big(L(0), L(t_2 - \frac{\varepsilon}{2})\big) \le$$
$$\le |t_2 - \frac{\varepsilon}{2}| \le |t_2 - t_1|,$$

- для $t_1, t_2 > \frac{\varepsilon}{2}$ аналогично следует

$$\rho\big(M(t_1), M(t_2)\big) = \rho\big(H\left(L(t_1 - \frac{\varepsilon}{2})\right), H\left(L(t_2 - \frac{\varepsilon}{2})\right)\big) \le$$
$$\le \rho\big(L(t_1 - \frac{\varepsilon}{2}), L(t_2 - \frac{\varepsilon}{2})\big) \le |t_1 - t_2|.$$

Из неравенства треугольника следует, что расстояние между игроками в произвольный момент времени t не меньше $\frac{\varepsilon}{2}$: при $t \le \frac{\varepsilon}{2}$ это следует из того, что $\rho(L(0), M(0)) > \varepsilon$, а при $t > \frac{\varepsilon}{2}$ справедливы следующие неравенства

$$\rho\big(L(t), M(t)\big) = \rho\big(L(t), H\big(L(t - \frac{\varepsilon}{2})\big)\big) \ge$$
$$\ge \rho\big(L(t), H\big(L(t)\big)\big) - \rho\big(H\big(L(t)\big), H\big(L(t - \frac{\varepsilon}{2})\big)\big) \ge$$
$$\ge \rho\big(L(t), H\big(L(t)\big)\big) - \frac{\varepsilon}{2} \ge \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким образом, убегающий будет уклоняться от поимки в смысле определения 3.3. □

5. Убегание вдоль геодезической петли

Определение 5.1. *Замкутая кривая* Γ *называется петлей, если она является непрерывным отображением окружности* $S^1 = \{e^{2\pi it} \mid t \in [0,1)\}$.

Определение 5.2. *Петля* Γ *называется геодезической петлей, если она допускает натуральную параметризацию, и для всех точек* $x, y \in \Gamma$ *длина кратчайшей дуги между ними равна* $\rho(x,y)$.

Определение 5.3. *Отображение* $F\colon K \to K$ *называется нерастягивающим на* $X \subset K$*, если*

$$\rho\big(F(x_1), F(x_2)\big) \le \rho(x_1, x_2) \quad \forall x_1, y_2 \in X, \tag{5.1}$$

а если выполняется

$$\exists \kappa \in (0,1) \quad \rho\big(F(z_1), F(z_2)\big) < \kappa\rho(z_1, z_2) \quad \forall z_1, z_2 \in Z, \tag{5.2}$$

то отображение называется сжимающим на $Z \subset K$*, при этом число* κ *называется коэффициентом сжатия.*

Определение 5.4. *Непрерывное отображение* $F\colon K \to X$ *называется ретракцией из* K *на* X*, если* $X \subset K$ *и* $F(x) = x$ *для любого* $x \in X$.

Будем обозначать замыкание множества X через $\overline{X}$, а внутренность через $int(X)$.

Теорема 5.1. *Убегающий уклоняется от поимки в смысле определения 3.3, если компактное метрическое пространство* (K,ρ) *содержит геодезическую петлю* Γ*, ее замкнутые окрестности* X *и* Y*, и существует нерастягивающая ретракция* F *из* X *на* Γ*, которая является сжимающей на множестве* $Z = X \backslash Y$*, где*

$$\Gamma \subset int(Y) \subset int(X),$$
$$\inf\{\rho(x,y) \mid x \in Y,\ y \in K \backslash X\} > 0.$$

Доказательство. Длину геодезической петли Γ будем обозначать l_Γ. Исходя из определения геодезической петли, построим натуральную параметризацию петли Γ как отображение $G\colon [\frac{-l_\Gamma}{2}, \frac{l_\Gamma}{2}) \to \Gamma$. Эта параметризация позволит убегающему передвигаться вдоль петли в направлении от преследователя. Так, если в некоторый момент убегающий находится в точке $M(\tau) = G(0)$, а преследователь в точке $L(\tau) = G(a)$, где $a \in (\frac{-l_\Gamma}{2}, 0)$, то движение вдоль Γ от точки $L(\tau)$ в течении малого промежутка времени может быть задано как $G(t-\tau)$; для $L(\tau) = G(a)$ при $a \in (\frac{l_\Gamma}{2}, 0)$ следует использовать закон $G(-t+\tau)$. Для описания движения в случае $M(\tau) \neq G(0)$ введем функцию «поворота»: изометричное отображение $\Phi_x\colon \Gamma \to \Gamma$, переводящее фиксированную точку $x \in \Gamma$ в точку $G(0) \in \Gamma$:

$$\Phi_x(y) = \begin{cases} G\big(G^{-1}(x) - G^{-1}(y)\big), & \text{если } G^{-1}(x) - G^{-1}(y) \in [\frac{-l_\Gamma}{2}, \frac{l_\Gamma}{2}), \\ G\big(-l_\Gamma + G^{-1}(x) - G^{-1}(y)\big), & \text{если } G^{-1}(x) - G^{-1}(y) \geq \frac{l_\Gamma}{2}, \\ G\big(l_\Gamma + G^{-1}(x) - G^{-1}(y)\big), & \text{если } G^{-1}(x) - G^{-1}(y) < -\frac{l_\Gamma}{2}. \end{cases}$$

По построению мы получаем, что $\Phi_x(x) = G(0)$, кроме того $\Phi_x \circ G$ также является натуральной параметризацией петли Γ. Движение убегающего при $M(\tau) \neq G(0)$ будет получено аналогично предыдущим рассуждениям, если для любого такого $M(\tau)$ будет известно x, при котором $(\Phi_x \circ G)(0) = M(\tau)$. Проверим, что таким x будет само $M(\tau)$. Для этого напрямую вычислим $\Phi_x(G(0))$:

$$\Phi_x(G(0)) = \begin{cases} G\big(G^{-1}(x) - G^{-1}(G(0))\big), \\ \qquad \text{если } G^{-1}(x) - G^{-1}(G(0)) \in [\frac{-l_\Gamma}{2}, \frac{l_\Gamma}{2}), \\ G\big(-l_\Gamma + G^{-1}(x) - G^{-1}(G(0))\big), \\ \qquad \text{если } G^{-1}(x) - G^{-1}(G(0)) \geq \frac{l_\Gamma}{2}, \\ G\big(l_\Gamma + G^{-1}(x) - G^{-1}(G(0))\big), \\ \qquad \text{если } G^{-1}(x) - G^{-1}(G(0)) < -\frac{l_\Gamma}{2} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} G\big(G^{-1}(x) - 0\big), & \text{если } \; G^{-1}(x) - 0 \in [\frac{-l_\Gamma}{2}, \frac{l_\Gamma}{2}), \\ G\big(-l_\Gamma + G^{-1}(x) - 0\big), & \text{если } \; G^{-1}(x) - 0 \geq \frac{l_\Gamma}{2}, \\ G\big(l_\Gamma + G^{-1}(x) - 0\big), & \text{если } \; G^{-1}(x) - 0 < -\frac{l_\Gamma}{2} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} x, & \text{если } \; G^{-1}(x) \in [\frac{-l_\Gamma}{2}, \frac{l_\Gamma}{2}), \\ G\big(-l_\Gamma + G^{-1}(x)\big), & \text{если } \; G^{-1}(x) \geq \frac{l_\Gamma}{2}, \\ G\big(l_\Gamma + G^{-1}(x)\big), & \text{если } \; G^{-1}(x) < -\frac{l_\Gamma}{2} \end{cases} =$$

$$= x.$$

Значит $(\Phi_{M(\tau)} \circ G)(0) = M(\tau)$.

Пусть убегающий использует пошаговую стратегию, меняя управление только в моменты $\tau_i = ih$, где $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, а шаг h выбран так, что

$$\begin{aligned} h &\in \left(0,\ \frac{1}{10}\min\left\{\frac{l_\Gamma}{2}, \varepsilon, \xi\right\}\right), \text{ где} \\ \varepsilon &= \sup\{\varepsilon_0 > 0 \mid \forall g \in \Gamma\ \exists x \in X \quad \rho(x,g) = \varepsilon_0\}, \\ \xi &= \inf\{\rho(k,y) \mid k \in K \backslash X,\ y \in Y\}, \end{aligned}$$

заметим, что из условий теоремы следуют неравенства $\varepsilon > 0$ и $\xi > 0$, и значит $h > 0$. Для каждого $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ траектория убегающего при $t \in (\tau_i, \tau_{i+1}]$ может быть задана по правилу:

$$M(t) = \begin{cases} M(\tau_i), \text{ если } L(\tau_i) \notin X, \\ \Phi_{M(\tau_i)} \circ G(t - \tau_i), \text{ если } L(\tau_i) \in X,\ G^{-1} \circ \Phi_{M(\tau_i)} F(L(\tau_i)) < 0, \\ \Phi_{M(\tau_i)} \circ G(\tau_i - t), \text{ если } L(\tau_i) \in X,\ G^{-1} \circ \Phi_{M(\tau_i)} F(L(\tau_i)) \geq 0. \end{cases}$$

Аналогично рассуждениям выше, каждый шаг $(\tau_i, \tau_{i+1}]$ убегающий двигается по геодезической Γ в направлении от $F(L(\tau_i))$, значит пока $L(t) \in X$ расстояние между $M(t)$ и $F(L(t))$ не убывает.

Пусть в начальный момент времени убегающий находится в точке $M_0 = G(0) \in \Gamma$, а преследователь в $L_0 = G(-\frac{l_\Gamma}{2}) \in \Gamma$. Зададим число $p = (1-\kappa)h$, где κ – коэффициент сжатия отображения F на множестве Z. Считая известными траектории игроков L и M, определим функции $R, S \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} R(t) &= \inf\{\rho(x, L(t)) \mid x \in \Gamma\}, \\ S(t) &= \begin{cases} \rho\big(M(t), F(L(t))\big), & \text{если } L(t) \in X, \\ +\infty, & \text{иначе.} \end{cases} \end{aligned}$$

Заметим, что если в некоторый момент $t^* \geq 0$ выполняется

$$\rho\big(L(t^*), M(t^*)\big) < p < h < \varepsilon,$$

тогда

$$R(t^*) = \inf\{\rho(x, L(t^*)) \mid x \in \Gamma\} \leq \rho\big(L(t^*), M(t^*)\big) < p, \tag{5.3}$$

$$\begin{aligned} S(t^*) &= \rho\big(M(t^*), F(L(t^*))\big) = \\ &= \rho\big(F(M(t^*)), F(L(t^*))\big) \leq \rho\big(M(t^*), L(t^*)\big) < p, \end{aligned} \tag{5.4}$$

то есть для того, чтобы показать убегание, достаточно показать, что неравенства (5.3) и (5.4) не могут быть выполнены одновременно. Для этого покажем, что введенная функция S обладает следующими свойствами:

$$L(t) \in X \quad \forall t \in [t_1, t_2] \quad \Longrightarrow \quad S(t) \geq S(t_1) \quad \forall t \in [t_1, t_2], \tag{5.5}$$

$$L(t) \in Z \quad \forall t \in [\tau_i, \tau_{i+1}] \quad \Longrightarrow \quad S(\tau_{i+1}) \geq p. \tag{5.6}$$

Действительно, из определений функции S и стратегии убегающего, если $L(t) \in X$ для $t \in [t_1, t_2]$, то

$$S(t) = \rho\big(M(t), F(L(t))\big) \geq \rho\big(M(t_1), F(L(t_1))\big) = S(t_1),$$

и свойство (5.5) имеет место. Покажем, что (5.6) справедливо, используя сжимаемость F на множестве Z и вид константы p: если без ограничения общности предположить, что направление движения убегающего задано по правилу $\Phi_{M(\tau_i)} \circ G(t-\tau_i)$, тогда $M(\tau_{i+1}) = \Phi_{M(\tau_i)} \circ G(h)$. Из-за сжимаемости точка $F(L(\tau_{i+1}))$ не может быть дальше, чем на κh от точки $F(L(\tau_i))$; формально точка $F(L(\tau_i))$, перемещенная в направлении к $M(\tau_{i+1})$ на расстояние на κh, принадлежит отрезку $[F(L(\tau_{i+1})), M(\tau_{i+1})]$, то есть

$$\Phi_{F(L(\tau_i))} \circ G(\kappa h) \in [F(L(\tau_{i+1})), M(\tau_{i+1})] = [F(L(\tau_{i+1})), \Phi_{M(\tau_i)} \circ G(h))],$$

и значит

$$\begin{aligned} S(\tau_{i+1}) = \rho(F(L(\tau_{i+1})), M(\tau_{i+1})) = \rho(F(L(\tau_{i+1})),\ \Phi_{M(\tau_i)} \circ G(h)) \geq \\ \geq \rho(\Phi_{F(L(\tau_i))} \circ G(\kappa h),\ \Phi_{M(\tau_i)} \circ G(h)) = \rho(F(L(\tau_i)), M(\tau_i)) + h - \kappa h \geq \\ \geq h - \kappa h = p. \end{aligned}$$

Теперь, пользуясь полученными свойствами функции S, покажем, что поимка невозможна. Предположим противное: в некоторый момент T выполнено и (5.3), и (5.4). Условие (5.3) в частности означает, что $L(T) \in Y \subset X$. Значит существует

$$t_* = \inf\{t^* \geq 0 \mid \forall t \in [t^*, T]\ L(t) \in X\}.$$

Если $t_* = 0$, то в силу выбора начальных положений игроков

$$S(t_*) = S(0) = \rho(L_0, M_0) = l_\Gamma/2 > h > p,$$

и тогда из (5.5) следует $S(T) \geq S(t_*) > p$, что противоречит предположенному (5.4). Тогда пусть $t_* \neq 0$, и значит в некоторый момент преследователь находился вне X. Тогда $L(t_*) \in X \backslash Y$ – в силу замкнутости X и условия $Y \subset int(X)$. Заметим, что шаг был выбран так, что $2h < \inf\{\rho(k, y) \mid k \in K \backslash X,\ y \in Y\}$, и значит найдется момент τ_i (момент смены управления) такой, что

$$L(t) \in Z = X \backslash Y \quad \forall t \in [\tau_i, \tau_{i+1}].$$

Тогда, применив (5.6), получаем, что $S(\tau_{i+1}) \geq p$, и значит из (5.5) следует, что $S(T) \geq S(\tau_{i+1}) \geq p$, и противное предположение неверно. Таким образом, одновременно выполнение условий (5.3) и (5.4) действительно невозможно, следовательно убегающий уклоняется от поимки в смысле определения 3.3. $\square$

6. Примеры

Доказанные утверждения не только сообщают достаточные для убегания условия на пространство, но и явно задают способ убегания. Приведем простые примеры, на которых эти теоремы применимы.

Пример 1. K – подмножество сферы вида

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq -0.8\}.$$

Заметим, что применять условия теоремы 4.1 невозможно, поскольку любое непрерывное (и в том числе нерастягивающее) отображение $H\colon K \to K$ имеет неподвижную точку: более того, это справедливо для любого множества, гомеоморфного кругу B^2. В противном случае с помощью гомеоморфизма $F\colon K \to B^2$ можно было бы построить непрерывное отображение $F \circ H \circ F^{-1}$, являющееся непрерывным отображением круга в себя, что невозможно по теореме Брауэра. Тем не менее, по теореме 5.1 убегание возможно вдоль окружности

$$S = K \cap \{(x, y, z) \mid z = -0.8\} =$$
$$= \{(0.6 \cos\varphi,\ 0.6 \sin\varphi,\ -0.8) \mid \varphi \in [0, 2\pi)\},$$

являющейся замкнутой геодезической; то есть теорема 5.1 применяется для

$$\begin{aligned}\Gamma &= K \cap \{(x, y, z) \mid z = -0.8\},\\ X &= K \cap \{(x, y, z) \mid z \le -0.1\},\\ Y &= K \cap \{(x, y, z) \mid z \le -0.2\},\\ F\colon (x, y, z) &\mapsto \left(\frac{0.6x}{x^2+y^2}, \frac{0.6y}{x^2+y^2}, -0.8\right),\end{aligned}$$

несложно проверить, что X, Y, F удовлетворяют всем требуемым свойствам.

Пример 2. K — сфера, с центром в нуле и единичным радиусом:

$$K \quad = \quad \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Чтобы применить теорему 4.1, построим отображение

$$H\colon (x, y, z) \in K \to (-x, -y, -z) \in K.$$

Легко проверить, что оно является нерастягивающим и не имеет неподвижной точки, и значит по теореме 4.1 убегание возможно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Благодатских А.И., Петров Н.Н. *Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов* // Ижевск: Удмуртский университет, 2009.

2. Зеликин М.И. *Об одной дифференциальной игре с неполной информацией* // Докл. АН СССР. 1972. Т. 202. № 5. С. 998–1000.

3. Иванов Р.П., Ледяев Ю.С. *Оптимальность времени преследования в дифференциальной игре многих объектов с простым движением* // Труды Математического института имени В.А. Стеклова. 1981. Т. 158. № 0. С. 87–97.

4. Ковшов А.М. *Стратегии параллельного сближения в игре простого преследования на сфере. Геодезическое сближение* // Математическая теория игр и ее приложения. 2009. Т. 1, вып. 4. С. 41–62.

5. Красовский Н.Н. *Игровые задачи о встрече движений.* 1970.
6. Красовский Н.Н., Субботин А.И. *Позиционные дифференциальные игры.* 1974.
7. Красовский Н.Н. *Управление динамической системой.* 1985.
8. Локуциевский Л.В. *Оптимальный вероятностный поиск* // Математический сборник. 2011. Т. 202. № 5. С. 77–100.
9. Нейман Д., Моргенштерн О. *Теория игр и экономическое поведение.* Москва: Наука, 1970.
10. Петров Н.Н. *Квазилинейные конфликтно-управляемые процессы с дополнительными ограничениями* // Прикладная математика и механика. 1993. Т. 57. № 6. С. 61–68.
11. Петросян Л.А. *Дифференциальные игры на выживание со многими участниками* // Докл. АН СССР. 1965. Т. 161. № 2. С. 285–287.
12. Петросян Л.А., Томский Г.В. *Динамические игры с полной информацией и их приложения к играм с неполной информацией* // Дифференциальные уравнения. 1982. Т. 18. № 4. С. 593–599.
13. Понтрягин Л.С., Мищенко Е.Ф. *Задача об убегании одного управляемого объекта от другого* // Докл. АН СССР. 1969. Т. 189. № 4. С. 721–723.
14. Понтрягин Л.С. *Линейные дифференциальные игры убегания* // Труды Математического института имени В.А. Стеклова. 1971. Т. 112. С. 30–63.
15. Понтрягин Л.С. *Математическая теория оптимальных процессов и дифференциальные игры* // Труды Математического института имени В.А. Стеклова. 1985. Т. 169. № 0. С. 119–158.
16. Пшеничный Б.Н. *О задаче преследования.* Москва: Кибернетика, 1967.
17. Пшеничный Б.Н. *Структура дифференциальных игр* // Докл. АН СССР. 1969. Т. 184. № 2. С. 285–287.

18. Пшеничный Б.Н., Чикрий А.А. *Задача об уклонении от встречи в дифференциальных играх* // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1974. Т. 14. № 6. С. 1416–1426.

19. Пшеничный Б.Н. *Простое преследование несколькими объектами.* Москва: Кибернетика, 1976.

20. Черноусько Ф.Л. *О дифференциальных играх с запаздыванием информации* // Докл. АН СССР. 1969. Т. 188. № 4. С. 766–769.

21. Черноусько Ф.Л., Меликян А.А. *Игровые задачи управления и поиска.* Москва: Наука, 1978.

22. Alexander S., Bishop R., Ghrist R. *Total curvature and simple pursuit on domains of curvature bounded above* // Geometriae Dedicata. 2010. V. 149. N 1. P. 275–290.

23. Barmak J.A. *Lion and man in non-metric spaces* // arXiv preprint arXiv:1703.01480. 2017.

24. Bollobas B., Leader I., Walters M. *Lion and man – can both win?* // Israel Journal of Mathematics. 2012. V. 189. N 1. P. 267–286.

25. Bramson M., Burdzy K., Kendall W.S. *Rubber bands, pursuit games and shy couplings* // Proceedings of the London Mathematical Society. 2014. P. 121–160.

26. Chung T.H., Hollinger G.A., Isler V. *Search and pursuit-evasion in mobile robotics* // Autonomous robots. 2011. V. 31. N 4. P. 299–316.

27. Isaacs R. *Differential games: a mathematical theory with applications to warfare and pursuit, control and optimization.* Courier Corporation, 1999.

28. Kumkov S.S., Le Menec S., Patsko V.S. *Zero-Sum Pursuit-Evasion Differential Games with Many Objects: Survey of Publications* // Dynamic Games and Applications. 2016. P. 1–25.

29. Littlewood J.E. *A mathematician's miscellany.* London : Methuen, 1953.

30. Melikyan A.A. *The Structure of the Value Function in Pursuit-Evasion Games on Surfaces of Revolution* // Cybernetics and Systems Analysis. 2002. V. 38. N 3. P. 444–452.

31. Roxin E. *Axiomatic approach in differential games* // Journal of Optimization Theory and Applications. 1969. V. 3. N 3. P. 153–163.

32. Ryll-Nardzewski C. *A theory of pursuit and evasion* // Advances in game theory. 1962. P. 113–126.

33. Tovar B., LaValle S.M. *Visibility-based pursuit—evasion with bounded speed* // The International Journal of Robotics Research. 2008. V. 27. N 11–12. P. 1350–1360.

34. Yufereva O. *Lion and Man Game in Compact Spaces* // arXiv preprint arXiv:1609.01897. 2016.

LION AND MAN GAME AND FIXED POINT FREE MAPS

Olga O. Yufereva, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics (yufereva12@gmail.com).

Abstract: This work is related with pursuit-evasion game where Lion is the pursuer and Man is the evader. We suppose that both players move in a metric space, have equal maximum speeds and complete information about the location of each other. We say that Man wins if he can escape a capture with non-zero radius; more precisely if there exists a positive number p and a non-anticipative strategy for some players' initial positions, that let him always be out of Lion's p-neighbourhood. We study sufficient conditions of the existence of Man's winning strategy. In this way we use the metric properties of space (mainly geodesics' behavior and fixed-point free maps). The technique requires neither convexity nor finite dimension of a space.

Keywords: pursuit-evasion game, lion and man game, fixed point, geodesic loop.