Математическая Теория Игр и её Приложения, т.9, в.2, с. 39–61

УДК 519.83
ББК 22.18

СИЛЬНО ПОЗИЦИОННО СОСТОЯТЕЛЬНОЕ C-ЯДРО В СТОХАСТИЧЕСКИХ ИГРАХ*

Елена М. Парилина
Леон А. Петросян
Санкт-Петербургский государственный университет
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9
e-mail: e.parilina@spbu.ru, l.petrosyan@spbu.ru

В работе изучаются стохастические игры, заданные на конечных графах. В каждой вершине графа определена неантагонистическая игра n лиц. Переход в следующую вершину графа является случайным и зависит от ситуации, реализовавшейся в текущей вершине. Для построения кооперативного варианта игры решается задача максимизации суммарного ожидаемого выигрыша игроков. В качестве решения игры рассматривается c-ядро. Вводится понятие сильной позиционной состоятельности (сильной динамической устойчивости) c-ядра. Предлагается метод построения кооперативной процедуры распределения дележа из c-ядра, позволяющий гарантировать его сильную позиционную состоятельность.

Ключевые слова: стохастическая игра, сильная позиционная состоятельность, сильная динамическая устойчивость, c-ядро.

---

* Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №17-11-01079).

1. Введение

В статье рассматриваются стохастические игры, заданные на конечных древовидных графах (деревьях). В каждой вершине дерева задана одновременная игра n лиц. Переход из вершины в вершину является случайным и зависит от того, какая ситуация реализуется в текущей одновременной игре. Под выигрышем игрока понимается математическое ожидание его выигрыша. Некооперативные стохастические игры двух лиц впервые были рассмотрены в работе [17], где было доказано существование ситуации равновесия. В данной работе делается предположение о том, что игроки могут кооперироваться и стремятся максимизировать суммарный выигрыш во всей игре [16]. Вершины, которые могут реализоваться с положительной вероятностью при кооперативном поведении игроков, образуют кооперативное поддерево (аналог кооперативной траектории в играх, в которых переходы из состояния в состояние являются детерминированными). Для каждой вершины кооперативного поддерева можно определить так называемый принцип оптимальности, содержащий множество дележей подыгры, начинающейся из этой вершины. Для нахождения принципов оптимальности можно пользоваться определениями дележей из классической кооперативной теории игр [11]. К сожалению, большинство таких принципов оптимальности не является динамически устойчивыми (или позиционно состоятельными для игр, заданных на графах), что не позволяет реализовать кооперацию в динамике [3]. Процедура перераспределения выплат игрокам в каждой вершине кооперативного поддерева, позволяющая строить новые динамически устойчивые принципы оптимальности на основе классических динамически неустойчивых, была предложена в статье [7]. В работе [6] был построен динамически устойчивый вектор Шепли для многошаговых стохастических игр со случайной продолжительностью.

Проблема динамической неустойчивости кооперативных принципов оптимальности в стохастических играх, заданных на графах, была впервые изучена в [16]. Стоит отметить, что стохастические игры, рассматриваемые в нашей работе, являются обобщением игр, заданных на так называемых «деревьях событий», где переход из одной вершины дерева в другую является случайным, но не зависит от выбранных игроками стратегий [15].

Позднее, в работе [9] помимо свойства динамической устойчивости, были рассмотрены свойства стратегической устойчивости и защиты от иррационального поведения. Все эти свойства были сформулированы как принципы устойчивой кооперации. Эти принципы были адаптированы для случая стохастических игр с бесконечной продолжительностью и конечным множеством состояний стохастической игры [2]. В статье [13] также была исследована проблема динамической устойчивости кооперативного решения, но для класса линейно-квадратичных стохастических дискретных игр со случайной продолжительностью.

Данная работа посвящена проблеме сильной позиционной состоятельности (или динамической устойчивости) множественного принципа оптимальности такого, как c-ядро. Впервые эта проблема была сформулирована для дифференциальных игр [4], а далее для многокритериальных задач оптимального управления [5,8]. Классические множественные принципы оптимальности, как c-ядро [14], не обладают этим свойством, что не позволяет в полной мере применять их в динамике. Мы предлагаем достаточное условие сильной позиционной состоятельности дележа из c-ядра при некоторых дополнительных ограничениях на игру. В последнее время появилось множество работ, посвященных проблеме сильной позиционной состоятельности c-ядра в различных классах игр. Достаточные условия существования сильной динамически устойчивого дележа из c-ядра для конечной многошаговой игры получены в [12]. В статье [1] рассматривается проблема построения сильно динамически устойчивого кооперативного решения для дифференциальных игр двух лиц. Подмножество c-ядра, обладающее свойством сильной динамической устойчивости, строится в работе [10] для класса кооперативных дифференциальных играх с предписанной продолжительностью.

Статья организована следующим образом. Раздел 2 содержит описание некооперативной стохастической игры. Определение кооперативного варианта игры и метода задания характеристической функции содержится в Разделе 3. Определение сильной позиционной состоятельности c-ядра, процедуры распределения дележей из c-ядра, а также достаточные условия сильной позиционной состоятельности

c-ядра содержатся в Разделе 4. Пример стохастической игры, определенной на конечном древовидном графе, рассмотрен в Разделе 5. Работу завершает заключение с кратким описанием полученных результатов.

2. Стохастическая игра

Рассмотрим конечный древовидный граф $\Psi(z_0) = \langle Z, L\rangle$, где Z – конечное множество вершин $z \in Z$, и $L : Z \to Z$ – многозначное отображение, заданное на множестве вершин Z, $L(z)$ – множество вершин графа Γ, следующих за вершиной $z \in Z$, вершина z_0 – корень дерева. Обозначим через $\mathcal{P}(z)$ вершины единственного пути в дереве $\Psi(z_0)$, соединяющего корень z_0 с вершиной z, исключая вершину z. Предположим, что в каждой вершине графа z задана игра в нормальной форме

$$\Gamma(z) = \langle N, A_1^z, \ldots, A_n^z, K_1^z, \ldots, K_n^z\rangle,$$

где $N = \{1, \ldots, n\}$ – множество игроков, одинаковое для всех вершин $z \in Z$, A_i^z – конечное множество стратегий игрока $i \in N$. Множество ситуаций в игре $\Gamma(z)$ обозначим через $A^z = A_1^z \times \ldots \times A_n^z$ с элементами $a^z = (a_1^z, \ldots, a_n^z) \in A^z$. Пусть $K_i^z : A^z \to \mathbb{R}$ – конечная функция выигрыша игрока $i \in N$.

Для каждой вершины z и каждой ситуации a^z определим распределение вероятностей перехода в следующие вершины графа $\Psi(z_0)$, т.е. определим набор вероятностей $\{p(y|z, a^z)\}_{y\in L(z)}$ таких, что

$$p(y|z, a^z) \geqslant 0,$$
$$\sum_{y\in L(z)} p(y|z, a^z) = 1$$

для всех z, $a^z \in A^z$ и $y \in L(z)$. Здесь $p(y|z, a^z)$ – вероятность перехода из вершины z в вершину y при условии, что в игре $\Gamma(z)$ реализовалась ситуация a^z.

Предположим также, что продолжительность игры является случайной величиной. Определим вероятности q_k того, что игра закончится на шаге k. Причем, $0 \leqslant q_k \leqslant 1$, $k = 0, \ldots, l-1, q_l = 1$, где $l < \infty$ – длина игры (длиной игры будем называть число шагов в максимальной партии игры); шаг k в вершине $z \in Z$ в стохастической игре определяется из условия $z \in (L(z_0))^k$.

Определение 2.1. *Стохастической игрой со случайной продолжительностью $G(z_0)$ будем называть набор*

$$G(z_0) = \left\langle N, \Psi(z_0), \{\Gamma(z)\}_{z \in Z}, \{q_k\}_{k=0}^{l}, \{p(\cdot|z, a^z)\}_{z \in Z, a^z \in A^z} \right\rangle. \qquad (2.1)$$

Многошаговая стохастическая игра, определяемая на графе $\Psi(z_0)$ происходит следующим образом. Игра начинается с шага 0 из корня дерева, вершины z_0, в которой разыгрывается игра $\Gamma(z_0)$. Игроки одновременно и независимо выбирают стратегии $a_i^{z_0} \in A_i^{z_0}$, $i \in N$, реализуется ситуация a^{z_0}, игроки получают выигрыши $K_i(a^{z_0})$, $i \in N$. Игра заканчивается в вершине z_0 с вероятностью q_0, либо с вероятностью $(1 - q_0)$ продолжается и переходит в вершину $y \in L(z_0)$ с вероятностью $p(y|z_0, a^{z_0})$, в которой разыгрывается игра $\Gamma(y)$. Далее игра происходит описанным выше образом, пока на шаге $l < \infty$ не будет достигнута конечная вершина графа $z_l \in L^l(z_0)$ такая, что $L(z_l) = \varnothing$.

Определим стратегии и выигрыши игроков в стохастической игре $G(z_0)$. Стратегией игрока $i \in N$ в игре $G(z_0)$ будем называть функцию

$$\varphi_i : Z \to \prod_{z \in Z} A_i^z, \qquad (2.2)$$

определяющую для каждой вершины $z \in Z$ стратегию $a_i^z \in A_i^z$. Набор стратегий игроков $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ образует ситуацию в игре $G(z_0)$. Множество стратегий игрока i в игре $G(z_0)$ будем обозначать через Ξ_i.

Под выигрышем игрока i в стохастической игре $G(z_0)$ будем понимать математическое ожидание его выигрыша:

$$E_i(z_0, \varphi) = K_i^{z_0}(x^{z_0}) + (1 - q_0) \sum_{y \in L(z_0)} p(y|z_0, a^{z_0}) E_i(y, \varphi^y), \qquad (2.3)$$

где $E_i(y, \varphi^y)$ – математическое ожидание выигрыша игрока i в стохастической подыгре $G(y)$, начинающейся из вершины y, ситуацией в которой является φ^y – усечение ситуации φ на древовидный подграф $\Psi(y) = \langle Z^y, L \rangle$. Под выигрышем игрока i в подыгре, начинающейся из вершины z, где $z \in L^k(z_0)$ (вершина z может быть достигнута из вершины z_0 за k шагов), будем понимать математическое ожидание выигрыша и вычислять по формуле:

$$E_i(z, \varphi^z) = K_i^z(a^z) + (1 - q_k) \sum_{y \in L(z)} p(y|z, a^z) E_i(y, \varphi^y). \tag{2.4}$$

3. Определение кооперативной стохастической игры и кооперативного поддерева

Предположим, что игроки из множества N объединились и решили максимизировать свой суммарный выигрыш в игре $G(z_0)$. Обозначим через $\bar{\varphi} = (\bar{\varphi}_1, \ldots, \bar{\varphi}_n)$ ситуацию в игре $G(z_0)$, максимизирующую их суммарный выигрыш:

$$\max_{\substack{\varphi_i \in \Xi_i \\ i \in N}} \sum_{i \in N} E_i\left(z_0, (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)\right).$$

Такая ситуация существует в силу конечности множеств стратегий игроков и их функций выигрышей. Обозначим эту ситуацию через

$$\bar{\varphi} = \arg \max_{\substack{\varphi_i \in \Xi_i \\ i \in N}} \sum_{i \in N} E_i(z_0, \varphi) \tag{3.1}$$

и назовем *кооперативной.*

Кооперативная ситуация $\bar{\varphi}$ порождает *кооперативное поддерево* $\bar{\Psi}(z_0)$, состоящее из вершин дерева $\Psi(z_0)$, которые имеют положительную вероятность реализации в игре $G(z_0)$ при использовании игроками ситуации $\bar{\varphi}$.

Построим кооперативную игру на основе некооперативной стохастической игры $G(z_0)$ с множеством игроков N, определив характеристическую функцию $v(S, z_0)$, которая показывает «силу» любой коалиции игроков $S \subseteq N$ в стохастической игре. Для построения характеристической функции воспользуемся α-подходом, предположив, что коалиция S может гарантировать себе максиминное значение игры с нулевой суммой, где первым (максимизирующим) игроком выступает коалиция S, а вторым (минимизирующим) – коалиция $N \setminus S$. Это значение всегда существует в стохастических играх, определенных выше, в силу конечности множеств стратегий игроков и их функций выигрыша.

Запишем уравнение Беллмана для функции $v(S, z_0)$ при $S = N$:

$$v(N, z_0) = \max_{\substack{a_i^{z_0} \in A_i^{z_0} \\ i \in N}} \sum_{i \in N} \left(K_i^{z_0}(a^{z_0}) + (1 - q_0) \sum_{y \in L(z_0)} p(y|z_0, a^{z_0}) v(N, y) \right) =$$
$$= \sum_{i \in N} E_i(z_0, \bar{\varphi}) \tag{3.2}$$

с граничным условием для $z \in \bar{\Psi}(z_0)$ и таких, что $L(z) = \varnothing$ или $q_k = 1$:

$$v(N, z) = \max_{\substack{a_i^{z} \in A_i^{z} \\ i \in N}} \sum_{i \in N} K_i^z(a^z) = \sum_{i \in N} K_i^z(\bar{a}^z), \tag{3.3}$$

где $\bar{a}^z = \bar{\varphi}(z)$.

Запишем уравнение Беллмана для функции $v(S, z_0)$ для коалиции $S \subset N$, $S \neq \varnothing$ или $q_k = 1$:

$$v(S, z_0) = \max_{\substack{a_i^{z_0} \in A_i^{z_0} \\ i \in S}} \min_{\substack{a_i^{z_0} \in A_i^{z_0} \\ i \in N \setminus S}} \sum_{i \in S} \Bigg(K_i^{z_0}(a^{z_0}) +$$
$$+ (1 - q_0) \sum_{y \in L(z_0)} p(y|z_0, a^{z_0}) v(S, y) \Bigg), \tag{3.4}$$

с граничным условием для $z \in \bar{\Psi}(z_0)$ и $z : L(z) = \varnothing$:

$$v(S, z) = \max_{\substack{a_i^{z} \in A_i^{z} \\ i \in S}} \min_{\substack{a_i^{z} \in A_i^{z} \\ i \in N \setminus S}} \sum_{i \in S} K_i^z(a^z). \tag{3.5}$$

Для $S = \varnothing$:

$$v(\varnothing, z_0) = 0. \tag{3.6}$$

Таким образом, на основе некооперативной игры $G(z_0)$ определена кооперативная игра $\bar{G}(z_0)$ с характеристической функцией, удовлетворяющей уравнениям Беллмана (3.2) с граничным условием (3.3) для $S = N$, (3.4) с граничным условием (3.5) для $S \subset N$ и (3.6) для $S = \varnothing$.

Дележом в кооперативной игре $\bar{G}(z_0)$ называется вектор $\alpha(z_0) = (\alpha_1(z_0), \ldots, \alpha_n(z_0))$, удовлетворяющий свойствам:

1. Коллективной рациональности: $\sum\limits_{i \in N} \alpha_i(z_0) = v(N, z_0)$;

2. Индивидуальной рациональности: $\alpha_i(z_0) \geqslant v(\{i\}, z_0)$, $i \in N$.

Обозначим *множество дележей* в игре $\bar{G}(z_0)$ через $I(z_0)$. Под *решением игры* будем понимать правило, которое игре $\bar{G}(z_0)$ ставит в соответствие подмножество $C(z_0) \subset I(z_0)$. В качестве решения может быть выбрано любое решение, известное в теории кооперативных игр. Примерами решений могут служить вектор Шепли, c-ядро, n-ядро, k-ядро и т.п. В данной работе мы остановимся на решении, которое представляет собой множество, а не единственный дележ. Известным примером таких множественных решений является c-ядро [14]:

$$C(z_0) = \left\{ \alpha(z_0) \in I(z_0) : \sum_{i \in S} \alpha_i(z_0) \geqslant v(S, z_0), S \subset N \right\}, \tag{3.7}$$

которое далее будет рассматриваться нами в качестве решения кооперативной игры $\bar{G}(z_0)$.

В кооперативной игре $\bar{G}(z_0)$ игроки реализуют кооперативную ситуацию $\bar{\varphi}(z_0)$ и рассчитывают получить суммарный выигрыш, равный $\sum\limits_{i \in N} E_i(z_0, \bar{\varphi}(z_0))$. Причем, выигрыши игроков определяются дележом из c-ядра. С течением времени при реализации кооперативной ситуации игра попадает в вершины кооперативного поддерева $\bar{\Psi}(z_0)$. Попадая в вершину $z \in \bar{\Psi}(z_0)$, игроки попадают в *подыгру*, определенную на подграфе $\bar{\Psi}(z)$. Определим кооперативную подыгру, начинающуюся из вершины z, $z \in L^k(z_0)$, $k > 0$. Обозначим через φ_i^z усечение стратегии φ_i игрока i на подграф $\Psi(z)$, которая является стратегией в игре $G(z)$. Тогда $\bar{\varphi}_i^z$ – кооперативная стратегия игрока i в подыгре $\bar{G}(z)$.

Определим характеристическую функцию для подыгры $G(z)$, также используя α-подход. Запишем уравнение Беллмана для функции $v(S, z)$ для коалиции $S = N$:

$$\begin{aligned} v(N, z) &= \max_{\substack{a_i^z \in A_i^z \\ i \in N}} \sum_{i \in N} \left(K_i^z(a^z) + (1 - q_k) \sum_{y \in L(z)} p(y|z, a^z) v(N, y) \right) = \\ &= \sum_{i \in N} E_i(z, \bar{\varphi}) \end{aligned} \tag{3.8}$$

с граничным условием (3.3) для $z \in \bar{\Psi}(z_0)$ и таких, что $L(z) = \varnothing$ или $q_k = 1$.

Запишем уравнение Беллмана для функции $v(S,z)$ для коалиции $S \subset N$, $S \neq \varnothing$:

$$v(S,z) = \max_{\substack{a_i^z \in A_i^z \\ i \in S}} \min_{\substack{a_i^z \in A_i^z \\ i \in N\setminus S}} \sum_{i \in S} \left(K_i^z(a^z) + (1-q_k) \sum_{y \in L(z)} p(y|z,a^z) v(S,y) \right), \tag{3.9}$$

с граничным условием (3.5) для $z \in \bar{\Psi}(z_0)$ и $z : L(z) = \varnothing$ или $q_k = 1$.

Для $S = \varnothing$:

$$v(\varnothing, z) = 0. \tag{3.10}$$

Таким образом, определена *кооперативная подыгра* $\bar{G}(z)$ с характеристической функцией, удовлетворяющей уравнениям Беллмана (3.8) с граничным условием (3.3) для $S = N$, (3.9) с граничным условием (3.5) для $S \subset N$ и (3.10) для $S = \varnothing$.

Вектор $\alpha(z) = (\alpha_1(z), \ldots, \alpha_n(z))$, удовлетворяющий условиям:

1. $\sum\limits_{i \in N} \alpha_i(z) = v(N,z)$;

2. $\alpha_i(z) \geqslant v(\{i\}, z)$, $i \in N$,

называется *дележом* кооперативной подыгры $\bar{G}(z)$.

Обозначим *множество дележей* подыгры $\bar{G}(z)$ через $I(z)$. Под *решением подыгры* будем понимать правило, которое игре $\bar{G}(z)$ ставит в соответствие подмножество $C(z) \subset I(z)$. В качестве решения кооперативной подыгры $\bar{G}(z)$ будем рассматривать c-ядро:

$$C(z) = \left\{ \alpha(z) \in I(z) : \sum_{i \in S} \alpha_i(z) \geqslant v(S,z), S \subset N \right\}. \tag{3.11}$$

4. Сильная позиционная состоятельность c-ядра

Предположим, что c-ядра стохастической игры $\bar{G}(z_0)$ и любой подыгры $\bar{G}(z)$, $z \in \bar{\Psi}(z_0)$, непусты. Кооперируясь, игроки договариваются о совместной реализации кооперативной ситуации $\bar{\varphi}$ и рассчитывают получить компоненты дележа, принадлежащего c-ядру $C(z_0)$. Попадая в промежуточную вершину $z \in \bar{\Psi}(z_0) \setminus \{z_0\}$ кооперативного поддерева, игрок $i \in N$ выбирает стратегию $\bar{a}_i^z$ в соответствии с кооперативной стратегией $\bar{\varphi}_i$ и получает выигрыш $K_i^z(\bar{a}^z)$.

Если игроки произведут пересчет решения, т.е. найдут решение кооперативной подыгры, начинающейся в вершине z, то текущим решением будет c-ядро $C(z)$. Было бы разумным потребовать, чтобы выигрыш, полученный игроком в вершине z, суммированный с ожидаемой суммой любых дележей из решений $C(y)$, $y \in L(z)$, игр кооперативного поддерева, следующих за игрой $\Gamma(z)$, являлась бы дележом решения $C(z)$. Если это свойство выполнено для любой вершины z кооперативного поддерева, то c-ядро кооперативной стохастической игры $\bar{G}(z_0)$ является сильно позиционно состоятельным.

Для того, чтобы дать строгое определение сильно позиционно состоятельного c-ядра, необходимо определить так называемое ожидаемое c-ядро, т.е. для любой нетерминальной вершины кооперативного поддерева определим множество ожидаемых дележей, принадлежащих c-ядрам, которые являются решениями подыгр, следующих за рассматриваемой вершиной. Для каждой вершины $z \in \bar{\Psi}(z_0)$, $L(z) \neq \varnothing$, определим *ожидаемое c-ядро*:

$$EC(L(z)) = \left\{ \alpha(L(z)) = \sum_{y \in L(z)} p(y|z, \bar{a}^z)\alpha(y) \mid \alpha(y) \in C(y) \right\}. \quad (4.1)$$

Множеству $EC(L(z))$ принадлежат вектора $\alpha(L(z))$, которые являются математическими ожиданиями всевозможных наборов дележей из c-ядер подыгр, начинающихся из следующих за z вершин, относительно вероятностного распределения $\{p(y|z, \bar{a}^z), y \in L(z)\}$.

Также определим процедуру перераспределения выигрышей игроков в вершинах кооперативного поддерева.

Определение 4.1. *Пусть $\alpha(z_0) = (\alpha_1(z_0), \ldots, \alpha_n(z_0)) \in C(z_0)$. Набор векторов $\{\beta(z) = (\beta_1(z), \ldots, \beta_n(z)) : z \in \bar{\Psi}(z_0)\}$ назовем процедурой распределения дележа $\alpha(z_0)$, если выполнены условия:*

1. *Для любой вершины $z \in \bar{\Psi}(z_0)$:*

$$\sum_{i \in N} \beta_i(z) = \sum_{i \in N} K_i^z(\bar{a}^z).$$

2. *Компоненты дележа $\alpha_i(z_0)$, $i \in N$, совпадают с математическим ожиданием соответствующих компонент процедуры*

распределения дележа относительно вероятностного распределения переходов и окончания игры, т.е. $\alpha_i(z_0) = B_i(z_0)$, *где* $B_i(z_0)$ *удовлетворяет функциональному уравнению*

$$B_i(z_0) = \beta_i(z_0) + (1 - q_0) \sum_{y \in L(z_0)} p(y|z_0, \bar{a}^{z_0}) B_i(y)$$

с граничным условием

$$B_i(z) = \beta_i(z), \text{ для всех } z \in \bar{\Psi}(z_0) : L(z) = \varnothing \text{ или } q_k = 1.$$

Первое условие в Определении 4.1 можно назвать условием «достижимости процедуры распределения дележа», поскольку оно позволяет гарантировать, что в любой вершине кооперативного поддерева сумма выплат игрокам равна сумме полученных ими выигрышей при реализации кооперативных стратегий. Второе условие гарантирует игрокам получение компонент заранее выбранного дележа из c-ядра кооперативной игры $\bar{G}(z_0)$ в смысле математического ожидания, если выплаты игрокам на протяжении всей игры будут производиться в соответствии с процедурой распределения $\{\beta(z) : z \in \bar{\Psi}(z_0)\}$.

Теперь нам необходимо определить процедуру распределения дележа $\alpha(z_0)$ из c-ядра $C(z_0)$ таким образом, чтобы c-ядро было сильно позиционно состоятельно.

Определение 4.2. *Назовем c-ядро* $C(z_0)$ *кооперативной стохастической игры* $\bar{G}(z_0)$ *сильно позиционно состоятельным, если существует процедура распределения* $\{\beta(z)\}_{z \in \bar{\Psi}(z_0)}$ *дележа из c-ядра* $C(z_0)$ *такая, что для любой вершины* $z \in \bar{\Psi}(z_0)$ *имеют место включения*

$$\beta(z) \oplus (1 - q_k) EC(L(z)) \subset C(z), \tag{4.2}$$

$$B(z_0) \in C(z_0), \tag{4.3}$$

где

$$\beta(z) \oplus (1 - q_k) EC(L(z)) = \\ = \Big\{ \beta(z) + (1 - q_k) \alpha(L(z)) : \alpha(L(z)) \in EC(L(z)) \Big\}.$$

При этом, процедуру распределения $\{\beta(z)\}_{z \in \bar{\Psi}(z_0)}$ *также назовем сильно позиционно состоятельной.*

Условие (4.2) означает, что множество векторов, равных сумме процедуры распределения дележа игрока в вершине z и дележа из ожидаемого c-ядра для вершины z, содержится в c-ядре подыгры, начинающейся в вершине z. Это условие накладывает ограничения на выплаты игрокам в одновременных играх, определенных в вершинах, и чаще всего не выполняется для произвольной игры, если выплаты игрокам производятся в соответствии с изначально заданными функциями выигрышей.

Наложим дополнительные ограничения на характеристические функции подыгр, начинающихся из вершин кооперативного поддерева, чтобы получить достаточные условия сильной позиционной состоятельности c-ядра. Обозначим через $Ev(S, L(z))$ ожидаемое значение характеристической функции, вычисленное для коалиции $S \subseteq N$ в вершинах, следующих за вершиной z:

$$Ev(S, L(z)) = \sum_{y \in L(z)} p(y|z, \bar{a}^z) v(S, y).$$

Обозначим через

$$\Delta v(S, z) = v(S, z) - (1 - q_k) Ev(S, L(z))$$

разность между значениями характеристической функции в вершине z и ожидаемым значением характеристической функции при условии, что игра не закончится в вершине z. Обозначим через $\Delta C(z)$ – аналог c-ядра, построенного по функции $\Delta v(S, z)$. Сформулируем достаточное условие сильной позиционной состоятельности процедуры распределения дележа и c-ядра $C(z_0)$.

Утверждение 4.1. *Пусть для любой вершины $z \in \bar{\Psi}(z_0)$ с-ядро $C(z)$ и множество $\Delta C(z)$ непусты. Если для любой вершины $z \in \bar{\Psi}(z_0)$ процедура распределения $\{\beta(z) : z \in \bar{\Psi}(z_0)\}$ дележа из с-ядра $C(z_0)$ удовлетворяет условиям:*

$$\beta(z) \in \Delta C(z), \tag{4.4}$$

$$B(z_0) \in C(z_0). \tag{4.5}$$

то с-ядро $C(z_0)$ и процедура $\{\beta(z) : z \in \bar{\Psi}(z_0)\}$ сильно позиционно состоятельны.

Доказательство. Покажем, что произвольный вектор $\beta(z) \in \Delta C(z)$, удовлетворяющий условиям (4.4) и (4.5), является сильно позиционно состоятельной процедурой распределения некоторого дележа $\alpha(z_0) \in C(z_0)$, то есть, что условия (4.2) и (4.3) из Определения 4.2 выполнены. Условие (4.5) совпадает с (4.3), поэтому осталось показать, что включение (4.2) выполняется для любой вершины $z \in \bar{\Psi}(z_0)$. Для вершины z возьмем произвольный вектор $\alpha(L(z)) \in EC(L(z))$ и найдем сумму $\beta(z) + (1 - q_k)\alpha(L(z))$. Проверим, принадлежит ли последний вектор c-ядру $C(z)$. Сначала вычислим сумму всех компонент этого вектора:

$$\sum_{i\in N} \beta_i(z) + (1 - q_k) \sum_{y\in L(z)} p(y|z, \bar{a}^z) \sum_{i\in N} \alpha_i(y) =$$

$$= v(N, z) - (1 - q_k) \sum_{y\in L(z)} p(y|z, \bar{a}^z) v(N, y) +$$
$$+ (1 - q_k) \sum_{y\in L(z)} p(y|z, \bar{a}^z) \sum_{i\in N} \alpha_i(y) = v(N, z),$$

что означает выполнение свойства коллективной рациональности.

Теперь пусть $S \subset N$, $S \neq N$:

$$\sum_{i\in S} \beta_i(z) + (1 - q_k) \sum_{y\in L(z)} p(y|z, \bar{a}^z) \sum_{i\in S} \alpha_i(y) \geqslant$$
$$\geqslant v(S, z) + (1 - q_k) \sum_{y\in L(z)} p(y|z, \bar{a}^z) v(S, y) -$$
$$- (1 - q_k) \sum_{y\in L(z)} p(y|z, \bar{a}^z) v(S, y) = v(S, z).$$

В силу произвольности выбора вершины $z \in \bar{\Psi}(z_0)$, можно сделать вывод о том, что c-ядро кооперативной игры $\bar{G}(z_0)$ и процедура $\{\beta(z) : z \in \bar{\Psi}(z_0)\}$ сильно позиционно состоятельны. □

В случае непустоты аналогов c-ядер $\Delta C(z)$ для любой вершины z кооперативного поддерева Утверждение 4.1 дает метод построения сильно позиционно состоятельной процедуры распределения дележей из c-ядра, равных $B_i(z_0)$ из условия (4.5). Стоит отметить, что в общем случае не все дележи из c-ядра могут быть реализованы с помощью определенной выше процедуры распределения $\{\beta(z) : z \in \bar{\Psi}(z_0)\}$.

5. Пример

Рассмотрим стохастическую игру $G(z_0)$, заданную на графе $\Psi(z_0)$, который представлен на рис. 1.

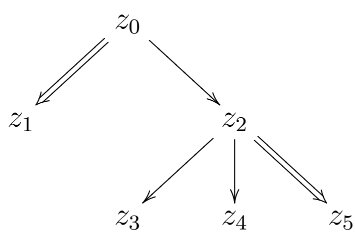


Рисунок 1. Дерево $\Psi(z_0)$

Множество вершин графа $\Psi(z_0)$ есть $Z = \{z_0, \ldots, z_5\}$. Множество игроков $N = \{1, 2, 3\}$. В каждой вершине графа $G(z_0)$ задана одновременная игра трех лиц $\Gamma(z)$, $z \in Z$, с матрицами выигрышей:

$$
\begin{aligned}
\Gamma(z_0) \quad &: \left(\begin{pmatrix} (2,2,2) & (2,2,0) \\ (2,2,0) & (0,0,3) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} (1,1,2) & (2,2,1) \\ (1,3,1) & (3,0,1) \end{pmatrix} \right), \\
\Gamma(z_2) \quad &: \left(\begin{pmatrix} (1,1,1) & (2,2,0) \\ (2,2,0) & (0,0,3) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} (1,1,2) & (2,2,1) \\ (1,3,1) & (3,0,1) \end{pmatrix} \right), \\
\Gamma(z_1), \Gamma(z_5) \quad &: \left(\begin{pmatrix} (2,0,1) & (1,0,1) \\ (3,1,2) & (2,2,2) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} (2,2,1) & (1,1,3) \\ (2,1,1) & (2,1,2) \end{pmatrix} \right), \\
\Gamma(z_3) \quad &: \left(\begin{pmatrix} (1,1,1) & (2,2,2) \\ (3,2,0) & (1,4,1) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} (2,0,1) & (2,1,1) \\ (4,0,1) & (0,4,1) \end{pmatrix} \right), \\
\Gamma(z_4) \quad &: \left(\begin{pmatrix} (2,1,0) & (2,1,3) \\ (3,1,2) & (3,6,4) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} (4,5,0) & (0,5,4) \\ (2,8,0) & (0,8,2) \end{pmatrix} \right).
\end{aligned}
$$

В каждой игре первый игрок выбирает строки, второй игрок – столбцы, а третий – матрицы. Множество стратегий игрока $i \in N$ в игре $\Gamma(z)$ есть $A_i^z = \{1, 2\}$.

Определим вероятности перехода из одних вершин графа в другие. Если в игре $\Gamma(z_0)$ реализуется ситуация $(1, 1, 1)$, то стохастическая игра $G(z_0)$ перейдет в вершину z_1 с вероятностью $1/3$ и в вершину z_2 с вероятностью $2/3$, если же реализуется ситуация, отличная от (1,1,1) (стрелка $\Longrightarrow$ означает детерминированный переход), то игра $G(z_0)$ переходит в вершину z_1. В вершине z_2 при реализации ситуации (2,1,2) стохастическая игра $G(z_0)$ переходит в вершины z_3 и z_4 с вероятностями $1/3$, $2/3$ соответственно, из остальных ситуаций этой игры, игра $G(z_0)$ переходит в вершину z_5 с вероятностью 1.

Также заданы вероятности q_k того, что стохастическая игра $G(z_0)$ закончится на k-м шаге:

$$q_1 = 0.5, \quad q_2 = 0, \quad q_3 = 1.$$

Для построения кооперативного варианта стохастической игры сначала найдем кооперативную ситуацию $\bar{\varphi}$. Получается, что кооперативная ситуация $\bar{\varphi}$ предписывает в вершине z_0 разыгрывать ситуацию $(1,1,1)$. Игра закончится в вершине z_0 с вероятностью 0.5 или перейдет на следующий шаг также с вероятностью 0.5. При продолжении игра переходит в вершину z_1 с вероятностью $1/3$, в которой игроки должны реализовать любую из ситуаций $(2,1,1)$ или $(2,2,1)$, и с вероятностью $2/3$ в вершину z_2, в которой игроки должны разыграть ситуацию $(2,1,2)$. В вершине z_2 игра не заканчивается, поскольку $q_1 = 0$, и переходит в вершины z_3 и z_4 с вероятностями $1/3$ и $2/3$ соответственно. В вершинах z_3 и z_4 игра заканчивается. Таким образом, множество вершин кооперативного поддерева, изображенного на рис. 2, есть $\bar{\Psi}(z_0) = \{z_0, z_1, z_2, z_3, z_4\}$.

$$\begin{array}{ccccc} & & z_0 & & \\ & \swarrow\!\!\swarrow & & \searrow & \\ z_1 & & & & z_2 \\ & & & \downarrow & & \searrow \\ & & & z_3 & & & z_4 \end{array}$$

Рисунок 2. Кооперативное поддерево $\bar{\Psi}(z_0)$ игры $\bar{G}(z_0)$.

Вычисляем значения характеристической функции по формулам (3.8) с граничным условием (3.3) для $S = N$, (3.9) с граничным условием (3.5) для $S \subset N$ и (3.10) для $S = \varnothing$. Вычисления представлены в табл. 1. Для дальнейших вычислений используем пакет `TUGlab` в программе Matlab [18].

Таблица 1. Характеристические функции $v(S, z)$ для $\bar{G}(z)$, $z \in \{z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5\}$

$z \setminus S$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{2,3\}$	$\{1,3\}$	$\{1,2,3\}$
z_0	2	1	1.5	5.5	4.5	6	110/9
z_1	2	0	1	3	4	3	6
z_2	3	1	4/3	7	6	7	47/3
z_3	1	1	1	4	4	3	6
z_4	0	1	0	8	9	5	13
z_5	2	0	1	3	4	3	6

Теперь определим c-ядра подыгр, начинающихся из вершин кооперативного поддерева $\bar{\Psi}(z_0)$. Удостоверимся, что все они непусты, чтобы можно было использовать этот принцип оптимальности в качестве решения кооперативной стохастической игры. Системы линейных неравенств и равенства, определяющие c-ядра, а также их графическое представление даны в табл. 2 и 3.

Таблица 2. C-ядро для вершины $z_0 \in \bar{\Psi}(z_0)$

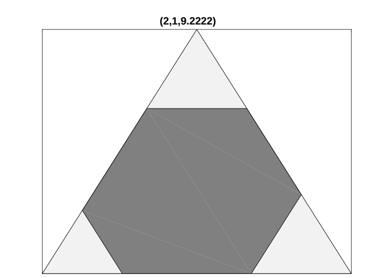
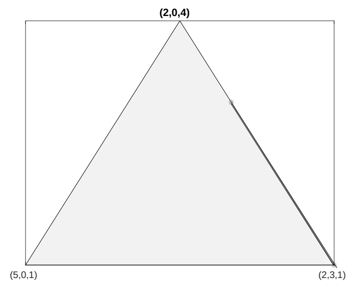
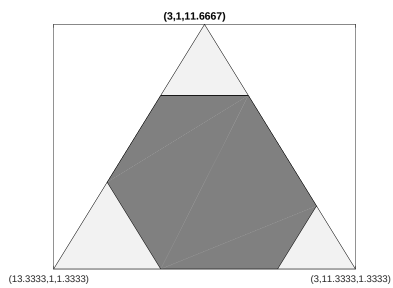
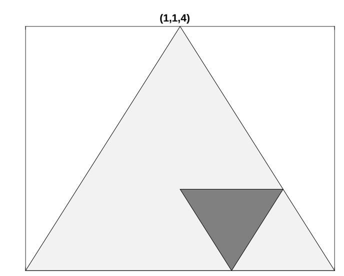
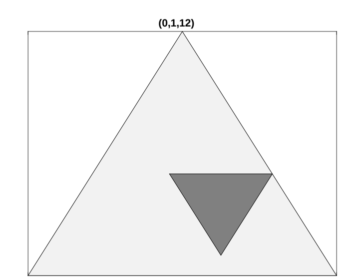
z	c-ядро	Представление c-ядра
z_0	$\begin{cases} \alpha_1 \geqslant 2 \\ \alpha_2 \geqslant 1 \\ \alpha_3 \geqslant 1.5 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \geqslant 5.5 \\ \alpha_1 + \alpha_3 \geqslant 6 \\ \alpha_2 + \alpha_3 \geqslant 4.5 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 100/9 \end{cases}$	

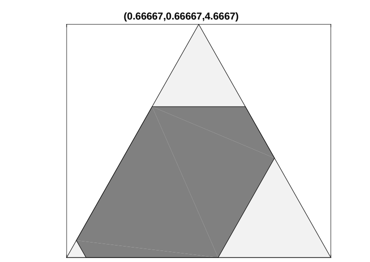
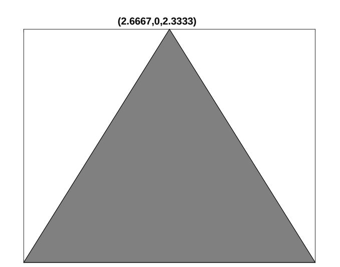
Таблица 3. C-ядро для вершин $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 \in \bar{\Psi}(z_0)$

z_1, z_5	$\begin{cases} \alpha_1 \geqslant 2 \\ \alpha_2 \geqslant 0 \\ \alpha_3 \geqslant 1 \\ \alpha_1+\alpha_2 \geqslant 3 \\ \alpha_1+\alpha_3 \geqslant 3 \\ \alpha_2+\alpha_3 \geqslant 4 \\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 6 \end{cases}$	
z_2	$\begin{cases} \alpha_1 \geqslant 3 \\ \alpha_2 \geqslant 1 \\ \alpha_3 \geqslant 4/3 \\ \alpha_1+\alpha_2 \geqslant 7 \\ \alpha_1+\alpha_3 \geqslant 7 \\ \alpha_2+\alpha_3 \geqslant 6 \\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 47/3 \end{cases}$	
z_3	$\begin{cases} \alpha_1 \geqslant 1 \\ \alpha_2 \geqslant 1 \\ \alpha_3 \geqslant 1 \\ \alpha_1+\alpha_2 \geqslant 4 \\ \alpha_1+\alpha_3 \geqslant 3 \\ \alpha_2+\alpha_3 \geqslant 4 \\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 6 \end{cases}$	
z_4	$\begin{cases} \alpha_1 \geqslant 0 \\ \alpha_2 \geqslant 1 \\ \alpha_3 \geqslant 0 \\ \alpha_1+\alpha_2 \geqslant 8 \\ \alpha_1+\alpha_3 \geqslant 5 \\ \alpha_2+\alpha_3 \geqslant 9 \\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 13 \end{cases}$	

Заметим, что аналоги c-ядер $\Delta C(\cdot)$ непусты для всех вершин кооперативного поддерева. Сначала проверим, является ли c-ядро сильно позиционно состоятельным, если выплаты игрокам производятся в соответствии с изначально заданными функциями выигрышей, то есть, проверим, принадлежат ли вектора выигрышей в вершинах кооперативного поддерева при реализации кооперативных ситуаций соответствующим множествам $\Delta C(\cdot)$:

$$\begin{aligned}
&K^{z_0}(1,1,1) = (2,2,2) \in \Delta C(z_0),\\
&K^{z_1}(2,2,1) = (2,2,2) \in C(z_1) = \Delta C(z_1),\\
&K^{z_2}(2,1,2) = (1,3,1) \notin \Delta C(z_2),\\
&K^{z_3}(1,2,1) = (2,2,2) \in C(z_3) = \Delta C(z_3),\\
&K^{z_4}(2,2,1) = (3,6,4) \in C(z_4) = \Delta C(z_4).
\end{aligned}$$

Таблица 4. Множества $\Delta C(z)$ для вершин z_0 и z_2

z	$\Delta C(z)$	Представление $\Delta C(z)$
z_0	$\begin{cases} \alpha_1 \geqslant 2/3 \\ \alpha_2 \geqslant 2/3 \\ \alpha_3 \geqslant 8/9 \\ \alpha_1+\alpha_2 \geqslant 8/3 \\ \alpha_1+\alpha_3 \geqslant 19/6 \\ \alpha_2+\alpha_3 \geqslant 11/6 \\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 6 \end{cases}$	
z_2	$\begin{cases} \alpha_1 \geqslant 8/3 \\ \alpha_2 \geqslant 0 \\ \alpha_3 \geqslant 1 \\ \alpha_1+\alpha_2 \geqslant 1/3 \\ \alpha_1+\alpha_3 \geqslant 8/3 \\ \alpha_2+\alpha_3 \geqslant -4/3 \\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 5 \end{cases}$	

Как мы видим, в вершине z_2 условие включения нарушается, поэтому мы не можем гарантировать сильную позиционную состоятельность дележа из c-ядра, если игрокам производить выплаты в вершинах в соответствии с изначально заданными функциями выигрышей.

Покажем, что условие (4.2) нарушается в вершине z_2. Согласно Определению 4.2 игроки могут выбрать любой дележ из ожидаемого c-ядра для вершины z. Пусть, ими будут выбраны дележи $(1.5, 3, 1.5) \in C(z_3)$ и $(0, 8, 5) \in C(z_4)$, тогда сумма в левой части включения (4.2) будет иметь вид:

$$(1,3,1) + \frac{1}{3}(1.5,3,1.5) + \frac{2}{3}(0,8,5) = \left(\frac{3}{2}, \frac{28}{3}, \frac{29}{6}\right),$$

причем этот вектор не принадлежит c-ядру $C(z_2)$, что говорит о нарушении условия (4.2) сильной позиционной состоятельности c-ядра.

Согласно Утверждению 4.1, набор векторов $\beta(z)$ из $\Delta C(z)$, $z \in \bar{\Psi}(z_0)$, является процедурой распределения дележа из c-ядра $C(z_0)$ исходной игры. Из Утверждения 4.1 также следует, что такой набор $\{\beta(z) : z \in \bar{\Psi}(z_0)\}$ является сильно позиционно состоятельным. Например, возьмем следующие элементы из $\Delta C(z)$, $z \in \bar{\Psi}(z_0)$: $\beta(z_0) = (4,1,1)$, $\beta(z_1) = (2,2,2)$, $\beta(z_2) = (3,1,1)$, $\beta(z_3) = (2,2,2)$, $\beta(z_4) = (3,6,4)$. Посчитаем математическое ожидание выигрышей игроков, если в вершинах кооперативного поддерева им производятся выплаты в соответствии с этой процедурой распределения $\{\beta(\cdot)\}$:

$$\begin{aligned} B(z_0) = (4,1,1)+ \\ &+ (1-0.5)\left\{\frac{1}{3}(2,2,2) + \frac{2}{3}\left((3,1,1) + \frac{1}{3}(2,2,2) + \frac{2}{3}(3,6,4)\right)\right\} = \\ &= \left(\frac{56}{9}, \frac{29}{9}, \frac{25}{9}\right). \end{aligned}$$

Очевидно, что $B(z_0) \in C(z_0)$.

Таким образом, мы показали способ построения сильно позиционно состоятельной процедуры распределения дележа, когда в качестве решения игры выбирается множественный принцип оптимальности – c-ядро.

6. Заключение

В работе рассмотрены многошаговые стохастические игры, заданные на древовидных графах. Построен кооперативный вариант игры в предположении, что игроки могут образовывать гранд коалицию. В качестве решения кооперативной игры выбрано c-ядро, которое в общем случае является множеством, если оно непусто. Понятие сильной позиционной состоятельности c-ядра адаптировано для класса стохастических игр, особенностью которых является невозможность заранее сказать, по каким вершинам в графе будет проходить игровой процесс, поскольку переходы являются случайными и зависят в том числе и от стратегий игроков. К сожалению, классические кооперативные принципы оптимальности не являются позиционно состоятельными и сильно позиционно состоятельными как в дифференциальных, так и многошаговых играх. Производя выплаты игрокам в соответствии с изначально заданными функциями выигрышей, не всегда удается добиться сильной позиционной состоятельности дележей из c-ядра. Получены достаточные условия сильной позиционной состоятельности дележа из c-ядра, при которых выплаты игрокам во всех вершинах, которые могут реализоваться в кооперативной игре, будут производиться в соответствии со специальным образом определенной процедурой распределения дележа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Громова Е.В., Петросян Л.А. *Сильно динамически устойчивое кооперативное решение в одной дифференциальной игре управления вредными выбросами* // Управление большими системами. 2015. Т. 55. С. 140–159.

2. Парилина Е.М. *Устойчивая кооперация в стохастических играх* // Математическая теория игр и ее приложения. 2010. Т. 2, вып. 3. С. 21–40.

3. Петросян Л.А. *Устойчивость решений в дифференциальных играх со многими участниками* // Вестник Ленинградского

университета. Серия 1: математика, механика, астрономия. 1977. Вып. 19. С. 46–52.

4. Петросян Л.А. *Построение сильно-динамически устойчивых решений в кооперативных дифференциальных играх* // Вестник Ленинградского университета. Серия 1: математика, механика, астрономия. 1992. № 2. С. 33–38.

5. Петросян Л.А. *Сильно динамически устойчивые принципы оптимальности в многокритериальных задачах оптимального управления* // Техническая кибернетика. 1993. № 1. С. 169–174.

6. Петросян Л.А., Баранова Е.М., Шевкопляс Е.В. *Многошаговые кооперативные игры со случайной продолжительностью* // Труды института математики и механики. Оптимальное управление и дифференциальные игры. Сборник статей. 2004. Т. 10. № 2. С. 116–130.

7. Петросян Л.А., Данилов Н.А. *Устойчивые решения неантагонистических дифференциальных игр с транзитивными выигрышами* // Вестник ЛГУ. 1979. №1. С. 46–54.

8. Петросян Л.А., Кузютин Д.В. *Игры в развернутой форме: оптимальность и устойчивость.* СПб: Изд-во С.-Петербургского университета. 2000.

9. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А. *Принципы устойчивой кооперации* // Математическая теория игр и ее приложения. 2009. Т.1, вып. 1. С. 106–123.

10. Петросян О.Л., Громова Е.В., Погожев С.В. *О сильно динамически устойчивом подмножестве C-ядра в кооперативных дифференциальных играх с предписанной продолжительностью* // Математическая теория игр и ее приложения. 2016. Т. 8, вып. 4. С. 79–106.

11. Печерский С.Л., Яновская Е.Б. *Кооперативные игры: решения и аксиомы.* СПб.: Изд-во Европейского университета в С.-Петербурге, 2004.

12. Седаков А.А. *О сильной динамической устойчивости с-ядра* // Математическая теория игр и ее приложения. 2015. Т. 7, вып. 2. С. 69–84.

13. Тур А.В. *Линейно-квадратичные стохастические дискретные игры со случайной продолжительностью* // Математическая теория игр и ее приложения. 2014. Т. 6, вып. 3. С. 76–92.

14. Gillies D.B. *Solutions to general non-zero-sum games* // In Tucker, A. W.; Luce, R. D. Contributions to the Theory of Games IV. (Annals of Mathematics Studies 40). Princeton: Princeton University Press. 1959. P. 47–85.

15. Parilina E., Zaccour G. *Node-Consistent Core for Games Played over Event Trees* // Automatica. 2015. Vol. 53. P. 304–311.

16. Petrosjan L.A. *Cooperative Stochastic Games* // Advances in Dynamic Games. Annals of the ISDG. Application to Economics, Engineering and Environmental Management, ed. by A. Haurie, S. Muto, L. A. Petrosjan, T.E.S. Raghavan. 2006. P. 139–146.

17. Shapley L.S. *Stochastic Games* // Proceedings of National Academy of Sciences of the USA. 1953. V. 39. P. 1095-1100.

18. http://mmiras.webs.uvigo.es/TUGlab/

STRONGLY SUBGAME CONSISTENT CORE IN STOCHASTIC GAMES

Elena M. Parilina, Saint Petersburg State University, Cand.Sc., associate professor (e.parilina@spbu.ru),
Leon A. Petrosyan, Saint Petersburg State University, Dr.Sc., professor (l.petrosyan@spbu.ru).

Abstract: Stochastic games defined on finite tree graphs are investigated in the paper. Each node of the graph is defined by a given n-person normal form game. Transition to the next vertex of the tree is random and depends on the strategy profile realised in the current game. To determine cooperative solution of the game, the problem of maximization of players' joint total expected payoff is solved. The core is considered as the solution of the cooperative game. The definition of the strong subgame consistency (strong dynamic consistency) of the core is introduced. Method for constructing a cooperative distribution procedure of the imputation from the core which provides strong subgame consistency of the imputation is proposed.

Keywords: stochastic game, strong subgame consistency, strong time consistency, core.