Математическая Теория Игр и её Приложения, т.9, в.2, с. 62–104

УДК 519.833.2+519.853.6
ББК 22.18

О НЕКОТОРЫХ ПОДХОДАХ К ПОИСКУ РАВНОВЕСИЯ ПО НЭШУ В ВОГНУТЫХ ИГРАХ

Андрей В. Чернов*
Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Нижегородский государственный технический
университет им. Р.Е. Алексеева
603950, Нижний Новгород, ул. Минина, 24
e-mail: chavnn@mail.ru

Рассматриваются конечномерные вогнутые игры – бескоалиционные игры многих лиц с функционалами выигрышей, вогнутыми по «своим» переменным. Для таких игр исследуется проблема разработки численных агоритмов поиска равновесий по Нэшу с гарантированной сходимостью без дополнительных требований выпуклости (слабой выпуклости, квазивыпуклости и т.п.) функционалов выигрышей по «чужим» переменным. Дается описание двух подходов. Первый подход, являющийся достаточно очевидным, основан на использовании метода Хука–Дживса для минимизации функции невязки и приводится в качестве «эталона для сравнения» в смысле эффективности численного решения для возможных альтернативных методов. Второй подход можно (с некоторой натяжкой) рассматривать как нечто среднее между релаксационным

* Работа поддержана финансово МОН РФ в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности в 2014-2016 гг. (проект № 1727) и грантом (соглашение от 27.08.13 № 02.B.49.21.0003 между МОН РФ и ННГУ).

алгоритмом и методом конфигураций Хука–Дживса (но с учетом специфики минимизируемой функции). Центральный результат статьи состоит в обосновании его сходимости – пока лишь для случая, когда множества стратегий игроков одномерны, но при достаточно общих условиях относительно функционалов выигрышей. Приводятся результаты численных экспериментов и их обсуждение. Проводится сравнение с другими методами, известными на данный момент.

Ключевые слова: конечномерная вогнутая игра со многими участниками, равновесие по Нэшу, алгоритм поиска.

1. Введение

В работе [22] был представлен подход, позволяющий свести проблему поиска равновесия по Нэшу в бескоалиционных играх многих лиц, связанных с эллиптическими полулинейными дифференциальными уравнениями в частных производных второго порядка, к проблеме поиска равновесия по Нэшу в конечномерных бескоалиционных играх многих лиц с непрерывными функционалами выигрышей игроков, вогнутыми по «своим» переменным. В рецензии, полученной автором на первоначальный вариант статьи [22], было рекомендовано дополнить статью соображениями о том, как практически можно искать положение равновесия в редуцированной (конечномерной) игре. Основная проблема здесь заключается в том, что функции выигрышей в редуцированной игре выступают в роли своего рода «черного ящика»: мы имеем возможность вычислять их значения, но не обладаем явными аналитическими формулами, которые их определяют (имеются лишь формулы, содержащие решение краевой задачи, связанной с системой дифференциальных уравнений, зависящей от управляемых параметров). При некоторых дополнительных требованиях относительно входных параметров задачи можно, вообще говоря, гарантировать дифференцируемость указанных функций. Однако процедура вычисления градиентов будет сложной, трудоемкой и многоэтапной, в результате чего будет происходить быстрое накопление погрешности при их вычислении. Все это делает проблематичным использование алгоритмов первого и более высоких порядков. Просканировав известную ему литературу по данному предмету, автор обнаружил, что на данный момент известны лишь методы поиска положений равновесия (для упомянутых выше конечномерных игр многих лиц с вогнутыми по «своим» переменным непрерывными функциями выигрышей общего вида), основанные на классических идеях Никайдо–Исода и Розена, см. разделы 2, 6. За исключением релаксационного алгоритма и его модификаций, это методы первого или более высоких порядков. В свою очередь, использование релаксационного алгоритма предполагает выпуклость функций выигрыша по «чужим» переменным (иногда это требование ослабляют до слабой выпуклости, квазивыпуклости и т.д.). В статье [22] в качестве рекомендованного дополнения был добавлен раздел, в котором предлагался алгоритм поиска седловых точек, основанный на идее метода отсечений (предназначенного для минимизации выпуклых функций и известного своей эффективностью – см., например, [14,25,4,5,16]). Но и в нем предполагалось использование градиента функции выигрыша. Таким образом, возникает проблема построения эффективных алгоритмов нулевого порядка, не предполагающих использования дополнительных свойств функций выигрыша.

В данной статье мы даем описание двух подходов. Первый подход, являющийся достаточно очевидным, основан на использовании метода Хука–Дживса для минимизации функции невязки (дополненной штрафом за выход из допустимого множества) и приводится в качестве «эталона для сравнения» в смысле эффективности численного решения для возможных альтернативных методов. Мы называем его эталонным, поскольку концепция его максимально проста, а следовательно, более сложные алгоритмы, демонстрирующие меньшую эффективность, вряд ли могут представлять какой-то практический интерес. Второй подход можно (с некоторой натяжкой) рассматривать как нечто среднее между релаксационным алгоритмом и методом конфигураций Хука–Дживса (но с учетом специфики минимизируемой функции). Центральный результат статьи состоит в обосновании его сходимости – пока лишь для случая, когда множества стратегий игроков одномерны, но при достаточно общих условиях относительно функционалов выигрышей. Приводятся результаты численных экспериментов и их обсуждение. Эти результаты показывают, что второй подход оказывается существенно более эффективным, чем первый. Далее приведем краткий обзор алгоритмов, известных на данный момент.

2. Краткий обзор численных методов решения вогнутых игр

Условно говоря, известные на данный момент методы решения игр многих лиц с вогнутыми по «своим» переменным непрерывными функциями выигрышей можно разделить на классы модификаций следующих методов: 1) Никайдо–Исода, в частности, релаксационные алгоритмы, см., например, [26], а также краткий обзор в разделе 6; 2) Розена; 3) равновесного программирования; 4) специальные (для функций выигрышей специального вида), в частности, линейно-квадратичные, билинейные и т.п.

На методах 2), 3), 4) далее остановимся чуть подробнее.

В работе [39] при выполнении условий вогнутости по «своим» переменным и непрерывной дифференцируемости функций выигрышей, а также следующих предположений:

R$_1$) $X_j = \Big\{t \in \mathbb{R}^{m_j} :\ h_j(t) \geq 0\Big\}$, $h_j : \mathbb{R}^{m_j} \to \mathbb{R}$ – вогнута, $j = \overline{1,\nu}$ (ν – число игроков);

R$_2$) $\forall j = \overline{1,\nu}\ \exists\ \widetilde{t}_j \in \mathbb{R}^{m_j}$: $h_j(\widetilde{t}_j) > 0$ (условие Слейтера);

R$_3$) система функций выигрышей $(J_1, \ldots, J_\nu)$ диагонально строго вогнута на X, то есть для любых $\overline{x}$, $\widetilde{x} \in X$ имеем:

$$(\widetilde{x} - \overline{x})^T \nabla J(\overline{x}) + (\overline{x} - \widetilde{x})^T \nabla J(\widetilde{x}) > 0,$$

$$\nabla J(x) = \Big(\nabla_{x_1} J_1(x), \ldots, \nabla_{x_\nu} J_\nu(x)\Big)^T$$

была доказана единственность ситуации равновесия по Нэшу. Кроме того, был предложен метод решения (метод Розена), основанный на построении максимизирующей последовательности для соответствующей задачи выпуклого программирования по методу проекции градиента.

Равновесное программирование изучает задачи отыскания неподвижных точек так называемых экстремальных многозначных отображений, то есть отображений вида

$$W(x) = \mathrm{Arg}\ \min\Big\{\Phi(x, y) :\ y \in X\Big\}, \quad x \in X,$$

где $X \subset \mathbb{R}^n$, $\Phi(x,y) : X \times X \to \mathbb{R}$.

В приложении к играм исследуемого типа в качестве функции $\Phi(x,y)$ берется (с точностью до знака) функция Никайдо–Исода. Для решения задач равновесного программирования тоже разрабатываются соответствующие численные методы – градиентные, методы, использующие модифицированную функцию Лагранжа, либо нижние и верхние опорные функции, проксимальные, экстрапроксимальные (см., например, [1]). Условия их применимости включают, как правило, липшицевость (или дифференцируемость), предположения, аналогичные $\mathbf{R}_1$) – $\mathbf{R}_3$), а также условие вида

$$\Phi(x,\overline{x}) \le \Phi(x,x) \quad \forall x \in X,$$

для всякого положения равновесия $\overline{x}$.

Что касается специальных методов, то (поскольку непосредственного отношения к материалу данной статьи они не имеют), укажем лишь ссылки [2,15] (там же см. дальнейшую библиографию).

Говоря о решении задач на отыскание равновесия по Нэшу, необходимо также остановиться и на задачах об отыскании обобщенного равновесия по Нэшу, частным случаем которых они являются. В работе [28] дан обзор современных подходов к численному решению таких задач. При этом все указанные подходы разделены на следующие шесть групп.

1. *Практические алгоритмы.* Имеются в виду алгоритмы, часто используемые инженерами и другими специалистами для решения конкретных практических задач (применительно к некоторым из таких задач иногда употребляется термин «задачи с функциями выигрыша типа черного ящика»). Обсуждаются две разновидности таких алгоритмов – типа Якоби и Гаусса–Зейделя, см., например, [40]. Отмечается, что концептуально эти алгоритмы достаточно просты, но касательно их сходимости соответствующие результаты либо неизвестны, либо устанавливаются при весьма ограничительных условиях.

2. *VI-алгоритмы.* Это алгоритмы, основанные на сведении исходной игровой задачи к вариационному неравенству и использовании условий типа Каруша–Куна–Таккера (ККТ-условий).

Таким образом, это методы первого или более высокого порядка, см., например, [30]. Вместо градиентов иногда используются конструкции субдифференциального исчисления (и употребляется термин «полугладкие методы»).

3. *NI-алгоритмы.* Это методы, основанные на использовании функции Никайдо–Исода. Помимо релаксационного алгоритма, а также различных его аналогов, к решению соответствующей задачи негладкой оптимизации применяется подход, основанный на сглаживании целевой функции и сведении этой задачи к гладкой задаче безусловной оптимизации (подробнее см. в [28]). А к решению последней применяются квазиньютоновские методы. Понятно, что для установления эквивалентности исходной и сглаженной задачи требуется выполнение некоторых специальных предположений.

4. *Штрафные методы.* Прежде всего, частная задача оптимизации, стоящая перед каждым из игроков при фиксированном выборе стратегий другими игроками, записывается как задача математического программирования (будем называть ее частной задачей математического программирования). Каждую из частных задач математического программирования можно записать как задачу безусловной оптимизации за счет добавления штрафа к целевой функции. Дальше организуется некоторый алгоритм одновременного решения таких задач. Критерий останова (так же, как и в классическом методе квадратичного штрафа) базируется на проверке ККТ-условий для всех частных задач математического программирования. Этот подход имеет множество модификаций. Так, например, в каждой из частных задач математического программирования можно вводить штраф не по всем ограничениям, а только по части их (*partial penalization*), при определении штрафа можно использовать подход, аналогичный классическому методу множителей, или, иначе говоря, методу модифицированной функции Лагранжа (*augmented Lagrangian method*) и т.п., см., например, [35, 29, 42, 38, 32]. ККТ-условия частных задач, как правило, используются не только при проверке критерия останова, но и

при переходе к следующей итерации в таких алгоритмах. Таким образом, это методы первого (или более высокого) порядка. Иногда введение штрафа используют для сведения задачи на обобщенное равновесие по Нэшу к задаче на равновесие по Нэшу [31].

5. *Методы, основанные на ОДУ.* Основная идея таких методов состоит в том, что обобщенное равновесие по Нэшу характеризуется как точка покоя некоторой системы обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом приходится предполагать, что частные производные функций выигрыша удовлетворяют условию Липшица, см. [30].

6. *Локальные ньютоновские методы.* Локальность здесь означает, что начальная точка предполагается расположенной достаточно близко к искомой точке обобщенного положения равновесия. В частности, в [28,30] описывается полугладкий метод, использующий так называемый «обобщенный якобиан».

От себя отметим еще следующие работы. В [34] предлагаются аналоги методов Левенберга–Марквардта и Гаусса–Ньютона; предполагается дважды дифференцируемость функций выигрыша и функций, задающих ограничения. В [27] ККТ-условия частных задач математического программирования объединяются в единую систему ККТ-подобных условий и предлагаются два подхода для решения этой системы. В [41] для поиска положения равновесия используется релаксационный алгоритм; функция Никайдо–Исода предполагается выпукло-вогнутой в слабом смысле. В [26] рассматривается игра двух лиц, в которой игроки выбирают свои стратегии не одновременно (синхронно), а в заранее неизвестные моменты времени (асинхронно), и предполагается, что игра развивается во времени; тем не менее, используется релаксационный алгоритм.

Подводя итог, отметим, что если не считать так называемых практических алгоритмов (сходимость которых теоретически не доказывается), а также релаксационных алгоритмов (в рамках которых, как уже упоминалось, предполагается выпукло-вогнутость функции Никайдо–Исода, то есть выпуклость целевой функции в соответствующих задачах минимизации, ослабляемая иногда до слабой выпуклости, квазивыпуклости и т.д.) используются, в основном, методы первого или более высокого порядка (опирающиеся, в частности, на формулы и неравенства, содержащие градиенты функций выигрыша). Между тем, для задач с функциями выигрыша типа «черный ящик» градиенты могут быть недоступны в принципе.

Обратимся, например, к вогнутой конечномерной игре, возникающей при изучении бескоалиционных игр многих лиц, связанных с эллиптическими дифференциальными уравнениями, см. [22]. Здесь при определенном усилении требований на входные параметры можно установить дифференцируемость функционалов, можно даже получить формулы градиентов. Но практическая процедура их вычисления будет трудоемкой и многоэтапной, а суммарная погрешность вычислений может оказаться такой, что алгоритмы, основанные на использовании градиентов, а тем более, на проверке неравенств, содержащих градиенты, будут неработоспособны. Стало быть, здесь мы будем иметь ситуацию, аналогичную той, в которой функционалы выигрышей можно характеризовать как «черный ящик» (обладаем лишь информацией о том, что они гладкие, можем вычислять их значения по некоему сложному алгоритму, но не имеем для их представления явной аналитической формулы). С учетом сказанного, требуется разработка надежных и эффективных методов нулевого порядка.

Из упомянутых выше (если не считать мало исследованных «практических алгоритмов») методом нулевого порядка является лишь релаксационный алгоритм. Но для его сходимости требуется выпукло-вогнутость функции Никайдо–Исода (иногда условие выпуклости заменяют слабой выпуклостью или квазивыпуклостью, см. [41]), а у нас, вообще говоря, есть только вогнутость функционалов выигрышей по «своим» переменным.

С другой стороны, достаточно очевидно, что для минимизации функции невязки соответствующей системы нелинейных уравнений, дополненной штрафом за выход из допустимого множества, можно (по крайней мере, формально) использовать методы оптимизации нулевого порядка, наиболее популярными из которых являются примерно равные по эффективности методы Хука–Дживса и Нелдера–Мида. Поскольку для их реализации не требуется ничего, кроме значений функции в генерируемых точках, то указанные два метода широко используются для минимизации функций, заданных по принципу «черного ящика». По смыслу подход, основанный на их использовании, можно бы отнести к «практическим алгоритмам», но он (вопреки классификации [28]) не сводится к алгоритмам Якоби и Гаусса–Зейделя. Более того, автору (к его удивлению) не удалось найти в известной ему литературе явного указания на применение именно такого подхода. Поэтому остановимся на нем подробнее в следующем разделе. Этот подход мы называем простейшим, поскольку концепция его и в самом деле максимально проста. В этом смысле он может служить эталоном для сравнения с другими методами. Действительно, если имеется какой-то другой подход, более сложно реализуемый, и численные эксперименты не обнаруживают его превосходства по эффективности, то возникает вопрос: а зачем он вообще нужен (по крайней мере, в чисто практическом плане) ?

Отметим, наконец, что альтернативным подходом для решения задач безусловной минимизации негладкой функции является использование субградиентных методов (и для поиска положений равновесия по Нэшу такой подход применяется), см., например, [25]. Но здесь опять же целевая функция должна быть выпуклой (слабо выпуклой, квазивыпуклой).

3. Простейший алгоритм

Исключительно для упрощения восприятия и нисколько не ограничивая общности рассуждений, рассмотрим случай трех игроков. Итак, пусть заданы выпуклые компакты конечномерных евклидовых пространств X_j, $j=\overline{1,3}$, а также непрерывные функции $J_j(x)$, $x=(x_1,x_2,x_3)\in X=X_1\times X_2\times X_3$, вогнутые каждая по «своей» переменной $x_j\in X_j$, $j=\overline{1,3}$. Стандартным образом[1] (см., например, [8, приложение 2]) с помощью теоремы Какутани [13, теорема XVI.5.1, с.638], устанавливается существование вектора $x=\overline{x}\in X$ такого, что

$$J_1(\overline{x})\geq J_1(x_1,\overline{x}_2,\overline{x}_3),\quad J_2(\overline{x})\geq J_2(\overline{x}_1,x_2,\overline{x}_3),\quad J_3(\overline{x})\geq J_3(\overline{x}_1,\overline{x}_2,x_3)$$

---

[1] На самом деле здесь вместо вогнутости достаточно квазивогнутости, см., например, [6, глава III, § 11, теорема 11.2, с.127].

для всех $x \in X$. То же самое кратко обозначается следующим образом[2]:

$$J_j(\overline{x}) \geq J_j(\overline{x}||\overline{x}_j \to x_j), \quad \forall j = \overline{1,3}, \quad x \in X. \tag{3.1}$$

Это как раз и означает, что ситуация $\overline{x}$ является равновесием по Нэшу в игре, в которой j-й игрок стремится максимизировать свой выигрыш J_j, $j = \overline{1,3}$.

Определим функции

$$F_j(x_i|i \neq j) = \max_{x_j \in X_j} J_j(x_1, x_2, x_3), \quad j = \overline{1,3}.$$

Согласно данному определению, должны выполняться неравенства:

$$\begin{cases} F_1(x_2, x_3) - J_1(x_1, x_2, x_3) \geq 0, \\ F_2(x_1, x_3) - J_2(x_1, x_2, x_3) \geq 0, \\ F_1(x_1, x_2) - J_3(x_1, x_2, x_3) \geq 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

для всех $x = (x_1, x_2, x_3) \in X$.

Теорема 3.1. *При сделанных предположениях справедливо следующее утверждение. Точка $x = \overline{x} \in X$ тогда и только тогда является ситуацией равновесия по Нэшу в данной игре, когда выполняются равенства*

$$\begin{cases} F_1(\overline{x}_2, \overline{x}_3) - J_1(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3) = 0, \\ F_2(\overline{x}_1, \overline{x}_3) - J_2(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3) = 0, \\ F_1(\overline{x}_1, \overline{x}_2) - J_3(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3) = 0. \end{cases} \tag{3.3}$$

Доказательство – очевидно, поскольку это просто переформулировка понятия равновесия по Нэшу.

Из теоремы 3.1 следует, что задача отыскания ситуации равновесия по Нэшу сводится к задаче решения системы нелинейных уравнений

$$\begin{cases} F_1(x_2, x_3) - J_1(x_1, x_2, x_3) = 0, \\ F_2(x_1, x_3) - J_2(x_1, x_2, x_3) = 0, \\ F_1(x_1, x_2) - J_3(x_1, x_2, x_3) = 0 \end{cases} \tag{3.4}$$

---

[2] Здесь запись $\overline{x}||\overline{x}_j \to x_j$ означает вектор $\overline{x}$, у которого j-я компонента заменяется на x_j.

на множестве X. С учетом соотношения (3.2) эта задача, в свою очередь, сводится к задаче минимизации

$$\psi(t)=\sum_{j=1}^{3}\Big\{F_j(t_i|i\neq j)-J_j(t)\Big\}\to\min_{t=(t_1,t_2,t_3)\in X}. \tag{3.5}$$

Лемма 3.1. *Если функция $W(x,y)$ непрерывна на множестве $Z=X\times Y$, где $X\subset\mathbb{R}^m$, $Y\subset\mathbb{R}^n$ – компакты, то функция*

$$F(y)=\max_{x\in X}W(x,y)$$

непрерывна на Y. Если $W(z)=W(x,y)$ удовлетворяет условию Липшица на Z, то функция $F(y)$ также удовлетворяет условию Липшица на Y с той же константой. Если $W(x,y)$ выпукла по $y\in Y$ для каждого $x\in X$, то $F(y)$ выпукла на Y.

Доказательство см. в [11, теорема 2.10.1].

Теорема 3.2. *При сделанных предположениях задача* (3.5) *имеет глобальное решение, а значение задачи равно нулю. Более того, всякая точка глобального минимума в задаче* (3.5) *является ситуацией равновесия по Нэшу в исследуемой игре.*

Доказательство. По лемме 3.1 функция $\psi(t)$ непрерывна на компакте X. Согласно теореме Вейерштрасса отсюда сразу следует существование глобального решения задачи (3.5). С учетом неравенств (3.2) и теоремы 3.1 равновесие по Нэшу (которое, как мы уже говорили выше существует) является точкой глобального минимума в этой задаче и обеспечивает минимальное возможное значение, равное нулю. Отсюда, и с учетом теоремы 3.1 сразу получаем, что всякое глобальное решение (поскольку оно в таком случае тоже должно обеспечивать нулевое значение целевой функции $\psi(.)$, а тем самым, и всем трем ее неотрицательным слагаемым) является ситуацией равновесия по Нэшу. □

Ясно, что при использовании того или иного численного метода для решения задачи (3.5) решение, которое мы получим, будет, скорее всего, приближенным. В связи с этим сформулируем следующее утверждение.

Теорема 3.3. *Пусть* $x^{(\varepsilon)} \in X$ *– приближенное глобальное решение задачи* (3.5) *с точностью* $\varepsilon > 0$*. Тогда* $x^{(\varepsilon)}$ *является ситуацией* ε*-равновесия по Нэшу в исследуемой игре.*

Доказательство. Итак, предположим, что $x^{(\varepsilon)} \in X$ таково, что $\psi(x^{(\varepsilon)}) \leq \varepsilon$. С учетом (3.2), получаем:

$$F_j(x_i^{(\varepsilon)}|i \neq j) - J_j(x^{(\varepsilon)}) \leq \varepsilon, \quad j = \overline{1,3},$$

то есть

$$J_j(x^{(\varepsilon)}) \geq F_j(x_i^{(\varepsilon)}|i \neq j) - \varepsilon, \quad j = \overline{1,3}.$$

Иначе говоря,

$$J_j(x^{(\varepsilon)}) \geq J_j(x^{(\varepsilon)}||x_j^{(\varepsilon)} \to x_j) - \varepsilon, \quad j = \overline{1,3}, \quad \forall x \in X.$$

□

Замечание 3.1. Как видно из доказательства, утверждение теоремы 3.3 останется справедливым также и в том случае, когда требование вогнутости функций $J_j(x)$ по «своим» переменным x_j, $j = \overline{1,3}$, не выполнено. Но с одним отличием: значение задачи (3.5) на этот раз не обязано быть равным нулю, поэтому число $\varepsilon > 0$ уже нельзя понимать как точность приближенного решения.

Замечание 3.2. Из доказательства теоремы 3.3 нетрудно видеть, что в случае, когда значение функции F_j вычисляется приближенно с точностью ε_j, точка $x^{(\varepsilon)}$ будет ситуацией δ-равновесия по Нэшу в исследуемой игре при $\delta = \varepsilon + \max\limits_{j \in \overline{1,3}} \varepsilon_j$.

Таким образом, остается лишь описать алгоритм решения задачи (3.5). Прежде всего, нужно указать способ вычисления значений функций $F_j(x_i|i \neq j)$, $j = \overline{1,3}$. Возьмем, например, $j = 1$. Речь, по сути дела, идет о максимизации вогнутой непрерывной функции

$$\varphi_1(x_1) = J_1(x_1, x_2, x_3)$$

на выпуклом компакте X_1, при фиксированных $(x_2, x_3) \in X_2 \times X_3$. Отсюда ясно, что решение этой задачи заведомо существует и его можно найти, например, методом отсечений (или иными методами выпуклого программирования). В случае одномерного множества X_1 можно использовать методы минимизации унимодальных функций. Обратимся теперь собственно к минимизации функции невязки $\psi(t)$ на компакте X. Поскольку мы знаем, что точка глобального минимума заведомо существует и обеспечивает нулевое значение целевой функции, а сама эта функция в случае липшицевости функционалов выигрышей тоже будет липшицевой (согласно лемме 3.1), то для ее отыскания можно, вообще говоря, использовать любой из методов глобальной оптимизации, коих на данный момент разработано уже достаточно много – см., например, [12,18,19,20,21]. В частности, в последних версиях системы MATLAB появился пакет Global Optimization Toolbox, в рамках которого реализованы методы Global Search (глобальный поиск), Multistart (локальный поиск из множества начальных точек), Genetic Algorithm (генетический алгоритм), Direct Search (прямой поиск), Simulated Annealing (моделирование отжига) – см., например, [9, § 4]. Недостатком многих из этих методов является отсутствие критерия останова, гарантирующего то, что точка глобального минимума найдена. Однако в нашем случае этот критерий весьма прост: целевая функция должна быть равна нулю или (с учетом допустимой погрешности) близка к нулю. Это обстоятельство позволяет также использовать и методы локальной оптимизации. Если пользуясь тем или иным методом локальной оптимизации, нам удалось найти допустимую точку, в которой целевая функция зануляется, то это и есть точка глобального минимума. К преимуществам обсуждаемого подхода можно отнести также следующие свойства: 1) простота описания; 2) простота условий; 3) блочный характер: соответствующая компьютерная программа может состоять из отдельных блоков, допускающих замену на блок, реализующий какой-то иной алгоритм – имеются в виду подзадачи вычисления значений функций F_j и целевой функции ψ; 4) возможность использования готовых пакетов программ, в частности, Global Optimization Toolbox. В качестве метода локальной оптимизации (в совокупности с методом мультистарта) при отсутствии дополнительной информации о свойствах функционалов выигрышей приходится использовать методы нулевого порядка. Простейшим из них является метод Хука–Дживса в сочетании со штрафом за выход из допустимого множества.

Из всего сказанного ясно, что, каким бы ни был альтернативный подход к поиску положений равновесия, необходимо хотя бы на основе численных экспериментов проводить сравнение его эффективности с эффективностью данного простейшего метода.

Замечание 3.3. В случае антагонистической вогнуто-выпуклой игры двух игроков можем считать, что

$$J_1(x_1,x_2)=I(x_1,x_2),\ J_2(x_1,x_2)=-I(x_1,x_2),\ x=(x_1,x_2)\in X_1\times X_2,$$

где $X_1\subset\mathbb{R}^m$, $X_2\subset\mathbb{R}^n$ – выпуклые компакты, а функция $I(x_1,x_2)$ вогнута по $x_1\in X_1$ и выпукла по $x_2\in X_2$. Тогда

$$F_1(x_2)=\max_{x_1\in X_1}I(x_1,x_2),\ F_2(x_1)=\max_{x_2\in X_2}\bigl[-I(x_1,x_2)\bigr]=-\min_{x_2\in X_2}I(x_1,x_2).$$

Соответственно,

$$\psi(x)=F_1(x_2)-I(x_1,x_2)+F_2(x_1)+I(x_1,x_2)=F_1(x_2)+F_2(x_1).$$

По лемме 3.1, обе функции $F_1(x_2)$ и $F_2(x_1)$ выпуклы. Следовательно, функция $\psi(x)$ выпукла на X. Поэтому для решения задачи глобальной минимизации функции $\psi(x)$ на $X=X_1\times X_2$ можно использовать методы отсечений. При этом производную по направлению функции $\psi(x)$ в текущей точке в случае непрерывной дифференцируемости функции I и строгого характера выпуклости и вогнутости можно вычислять с помощью теоремы Данскина–Демьянова, см., например, [10, теорема 1.5.3, с.42].

4. Альтернативный подход

Далее будем считать, что число игроков ν произвольно. На данный момент одним из наиболее эффективных методов поиска положений равновесия в вогнутых играх признается так называемый релаксационный алгоритм. Вместе с тем, его сходимость удается устанавливать лишь при всякого рода дополнительных требованиях. В частности, при условии выпуклости функционалов выигрышей по «чужим» переменным и т.п. – подробнее об этом см. в разделе 6. Более того, мы далее приведем примеры вогнутых игр, в которых направление поиска релаксационного алгоритма не обязано быть (и это проявляется в численных экспериментах) направлением спуска функции невязки, в результате чего алгоритм (для этих примеров) оказывается неработоспособным. Именно отсутствие четкой информации об ориентации направления спуска функции невязки наводит на мысль построить некий гибрид релаксационного алгоритма и метода конфигураций Хука–Дживса. С одной стороны, в случае, когда функция невязки оказывается выпуклой в окрестности текущей точки, алгоритм должен не потерять направление спуска, определяемое по релаксационному алгоритму. С другой стороны, в случае, когда определяемое по релаксационному алгоритму направление поиска не является направлением спуска, алгоритм должен на основе имеющейся информации осуществить быстрый и эффективный выбор действительного направления спуска. Здесь как раз-таки и можно использовать идею конфигураций, подобно тому, как это делается в методе Хука–Дживса. На этих соображениях и основан предлагаемый далее алгоритм. Аналогично релаксационному алгоритму и методу Хука–Дживса, он является методом нулевого порядка. Отметим, что для методов нулевого порядка проблема обоснования сходимости оказывается достаточно нетривиальной (не случайно метод Хука–Дживса долгое время рассматривался как эвристический алгоритм и лишь сравнительно недавно его сходимость в окрестность точки минимума удалось доказать, да и то лишь в предположении дифференцируемости целевой функции). Мы, прежде всего, докажем теорему о возможности выбора направления спуска в текущей точке по шаблону одной лишь конфигурации, а затем уже на основе этой теоремы сформулируем сам алгоритм.

Здесь мы ограничимся случаем $\dim X_j = 1$, $j = \overline{1,\nu}$. В общем случае описание алгоритма и его обоснование будет, вероятно, более громоздким при том, что направление рассуждений в плане распространения на общий случай достаточно очевидно.

Лемма 4.1. *Пусть* $\{e_j : \ j = \overline{1,\nu}\}$ *– ортонормированный базис в пространстве* $\mathbb{R}^\nu$, p *– единичный вектор биссектрисы положительного ортанта, то есть* $p = \dfrac{1}{\sqrt{\nu}}(1;\dots;1)^T$. *Тогда существует число* $\gamma > 0$ *такое, что для всякого вектора* $q \in \mathbb{R}^\nu$, $|q| = 1$, *такого, что*

$(q,p)=0$, *найдется номер* $j\in\overline{1,\nu}$, *для которого* $q_j=(q,e_j)\ge\gamma$.

Доказательство. 1. Рассмотрим функцию $f(q)=\max\limits_{j=\overline{1,\nu}} q_j$ и докажем, что она непрерывна по $q\in\mathbb{R}^\nu$. Обозначим

$$\Lambda=\Big\{\lambda\in\mathbb{R}^\nu:\ \lambda_j\ge 0,\ \sum_{j=1}^{\nu}\lambda_j=1\Big\}.$$

Заметим, что

$$\sum_{j=1}^{\nu}\lambda_j q_j\le\big(\max_{j=\overline{1,\nu}} q_j\big)\sum_{j=1}^{\nu}\lambda_j=f(q)$$

для всех $\lambda\in\Lambda$. Более этого, это неравенство обращается в равенство при $\lambda=\widetilde{\lambda}$, где

$$\widetilde{\lambda}_j=\begin{cases}1, & \text{если } j=i,\\ 0, & \text{иначе,}\end{cases}\qquad j=\overline{1,\nu},$$

и любом фиксированном $i\in\operatorname{Arg}\max\limits_{j=\overline{1,\nu}} q_j$, то есть таком, что $q_i=f(q)$. Ясно, что $\widetilde{\lambda}\in\Lambda$. Поэтому справедливо равенство

$$f(q)=\max_{\lambda\in\Lambda}\sum_{j=1}^{\nu}\lambda_j q_j.$$

Тогда по лемме 3.1 функция $f(q)$ непрерывна.

2. Согласно теореме Вейерштрасса, существует

$$\gamma=\min\big\{f(q):\ q\in Q\big\},\quad Q=\big\{q\in\mathbb{R}^\nu:\ |q|=1,\ (q,p)=0\big\}.$$

Для произвольного $q\in Q$ все компоненты q_j, $j=\overline{1,\nu}$, отрицательными быть не могут, поскольку

$$0=(q,p)=\frac{1}{\sqrt{\nu}}\sum_{j=1}^{\nu}(q,e_j)=\frac{1}{\sqrt{\nu}}\sum_{j=1}^{\nu}q_j.$$

А из того, что $|q|=1$, понятно, что и нулевыми они все тоже быть не могут. Поэтому, каково бы ни было $q\in Q$, найдется хотя бы одна положительная компонента q_j. Предположим, например, что $i\in\overline{1,\nu}$

– произвольный индекс такой, что $q_i > 0$. Непосредственно из определения функции $f(q)$ получаем:

$$f(q) = \max_{j=\overline{1,\nu}} q_j \geq q_i > 0.$$

Таким образом, $f(q) > 0$ для всех $q \in Q$. Непосредственно из определения числа γ получаем, что существует $\overline{q} \in Q$ такое, что

$$\gamma = \min\bigl\{f(q) : \ q \in Q\bigr\} = f(\overline{q}), \text{ то есть } f(q) \geq \gamma = f(\overline{q}) > 0 \ \forall q \in Q.$$

Остается заметить, что

$$\max_{j=\overline{1,\nu}}(q, e_j) = \max_{j=\overline{1,\nu}} q_j = f(q) \geq \gamma \quad \forall q \in Q.$$

□

Замечание 4.1. Для $\gamma > 0$ можно получить оценку снизу, исходя из того, что

$$\gamma = \min_{q\in Q} \max_{\lambda\in\Lambda} \sum_{j=1}^{\nu} \lambda_j q_j \geq \max_{\lambda\in\Lambda} \min_{q\in Q} \sum_{j=1}^{\nu} \lambda_j q_j.$$

Лемма 4.2. *Пусть* $\bigl\{e_j : \ j = \overline{1,\nu}\bigr\}$ *– ортонормированный базис в пространстве* $\mathbb{R}^\nu$, $p = \dfrac{1}{\sqrt{\nu}}(1; \ldots ; 1)^T$, $\gamma > 0$ *– число, существование которого установлено в лемме 4.1. Тогда существует число* $\delta > 0$ *такое, что для* $f(q) = \max\limits_{j=\overline{1,\nu}} q_j$ *имеем:*

$$\min_{q\in Q_\delta} f(q) \geq \frac{\gamma}{2}, \quad Q_\delta = \bigl\{q \in \mathbb{R}^\nu : \ |q| = 1, \ |(q, p)| \leq \delta\bigr\}.$$

Доказательство. Как показано при доказательстве леммы 4.1, функция $f(q)$ непрерывна, а следовательно, по теореме Кантора, равномерно непрерывна на компакте $S_1(0) = \bigl\{q \in \mathbb{R}^\nu : \ |q| = 1\bigr\}$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\sigma = \sigma(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$|f(q) - f(\overline{q})| < \varepsilon \quad \forall q, \overline{q} \in S_1(0), \quad |q - \overline{q}| \leq \sigma.$$

С другой стороны, ясно, что $\forall \sigma > 0$ найдется $\alpha = \alpha(\sigma) > 0$ такое, что

$$\max_{\overline{q}\in Q_\delta} \min_{q\in Q} |q - \overline{q}| < \sigma \quad \forall \delta \in (-\alpha; \alpha).$$

С учетом леммы 4.1, остается взять $\delta = \alpha(\sigma(\gamma/2))$. □

Лемма 4.3. *Пусть* σ_0, σ_1, $\sigma_2 > 0$ *– заданные числа;* $V = \left\{v \in \mathbb{R}^\nu : |v| \geq \sigma_0\right\}$, $W = \left\{w \in \mathbb{R}^\nu : \ w_j \in [\sigma_1, \sigma_2], \ j = \overline{1,\nu}\right\}$, *где координаты заданы в ортонормированном базисе* $\left\{e_j : \ j = \overline{1,\nu}\right\}$. *Тогда найдутся числа* δ_1, $\delta_2 > 0$ *такие, что для любых векторов* $v \in V$, $w \in W$ *выполнено одно из следующих трех условий: 1)* $(v,w) \geq \delta_1$; *2)* $(v,-w) \geq \delta_1$; *3)* $\exists j \in \overline{1,\nu}$: $(v,e_j) \geq \delta_2$.

Доказательство. Выберем произвольно $v \in V$, $w \in W$. Очевидно, что существует диагональная матрица

$$D = \sqrt{\nu}\,\mathrm{diag}\,(w_1, \ldots, w_\nu),$$

такая, что $w = Dp$, где $p = \dfrac{1}{\sqrt{\nu}}(1; \ldots; 1)^T$. Обозначим $q = \dfrac{Dv}{|Dv|}$. Ясно, что $|q| = 1$. Пусть $\delta > 0$ – число, существование которого установлено в лемме 4.2. Очевидно, возможен лишь один из следующих двух случаев.

а) $|(q,p)| \leq \delta$. Тогда по лемме 4.2, найдется номер $j \in \overline{1,\nu}$ такой, что $(q,e_j) \geq \dfrac{\gamma}{2}$, то есть

$$(Dv, e_j) = (v, De_j) \geq \frac{\gamma}{2}\,|Dv| \geq \frac{\gamma}{2}\sqrt{\nu}\sigma_1|v| \geq \frac{\gamma}{2}\sqrt{\nu}\sigma_1\sigma_0.$$

Заметим, что $De_j = \sqrt{\nu}w_j e_j$. Таким образом, полученное неравенство можно переписать в виде:

$$(v, e_j) \geq \frac{\gamma}{2}\sigma_0\frac{\sigma_1}{w_j} \geq \frac{\gamma}{2}\sigma_0\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \delta_2.$$

Иначе говоря, выполнено условие 3).

б) $|(q,p)| > \delta$. Тогда

$$|(v,w)| = |(v,Dp)| = |(Dv,p)| > \delta\,|Dv| \geq \delta\sqrt{\nu}\sigma_1|v| \geq \delta\sqrt{\nu}\sigma_1\sigma_0 = \delta_1.$$

В частности, если $|(v,w)| = (v,w)$, получаем условие 1). Если же $|(v,w)| = -(v,w)$, получаем условие 2). □

Далее нам потребуется использовать модифицированную функцию Никайдо–Исода:

$$\Phi(x,y) = \sum_{j=1}^{\nu}\left\{J_j(x||x_j \to y_j) - J_j(x)\right\} = \sum_{j=1}^{\nu}\Phi_j(x,y_j),$$

где принято обозначение

$$\Phi_j(x, y_j) = J_j(x||x_j \to y_j) - J_j(x), \quad j = \overline{1, \nu}.$$

Заметим, что

$$\psi(x) = \max_{y \in X} \Phi(x, y) = \sum_{j=1}^{\nu} \max_{y_j \in X_j} \Phi_j(x, y_j).$$

Следующее утверждение известно как теорема Данскина–Демьянова, см. [10, теорема 1.5.3, с.42].

Лемма 4.4. *Пусть X – открытое множество в $\mathbb{R}^n$, Y – компактное множество в $\mathbb{R}^m$, функция $F(x,y)$ непрерывна вместе с производной $F'_x(x,y)$ по совокупности переменных в $X \times Y$. Тогда функция*

$$\varphi(x) = F(x, M(x)), \quad M(x) = \operatorname{Arg} \max_{y \in Y} F(x, y),$$

имеет в любой точке $x \in X$ производную по любому направлению $h \in \mathbb{R}^n$, $|h| = 1$, которую можно найти по формуле:

$$\frac{\partial \varphi(x)}{\partial h} = \max_{y \in M(x)} \big(F'_x(x,y), h \big).$$

Для числа $\varepsilon > 0$ обозначим

$$J_{j,\varepsilon}(x) = J_j(x) - \varepsilon |x_j|^2, \quad j = \overline{1, \nu};$$

$$\psi_\varepsilon(x) = \sum_{j=1}^{\nu} \Big[\max_{y_j \in X_j} J_{j,\varepsilon}(x||x_j \to y_j) - J_{j,\varepsilon}(x) \Big].$$

Лемма 4.5. *Существует константа $K > 0$ такая, что для любого $\varepsilon > 0$ справедлива оценка:*

$$|\psi_\varepsilon(x) - \psi(x)| \le \varepsilon K \quad \forall x \in X. \tag{4.1}$$

Доказательство. Поскольку множество X_j ограничено, найдется константа $\omega_j > 0$ такая, что

$$\big| |x_j|^2 - |y_j|^2 \big| \le \omega_j \quad \forall\, x_j, y_j \in X_j.$$

Для произвольных $x \in X$ и $j = \overline{1, \nu}$ рассмотрим

$$\max_{y_j \in X_j} J_{j,\varepsilon}(x||x_j \to y_j) - J_{j,\varepsilon}(x) = \max_{y_j \in X_j} \Big\{ \Phi_j(x, y_j) + \varepsilon \big[|x_j|^2 - |y_j|^2 \big] \Big\} \geq$$

$$\geq \max_{y_j \in X_j} \Big\{ \Phi_j(x, y_j) - \varepsilon\omega_j \Big\} = \max_{y_j \in X_j} \Big\{ \Phi_j(x, y_j) \Big\} - \varepsilon\omega_j.$$

И аналогично,

$$\max_{y_j \in X_j} J_{j,\varepsilon}(x||x_j \to y_j) - J_{j,\varepsilon}(x) \leq \max_{y_j \in X_j} \Big\{ \Phi_j(x, y_j) \Big\} + \varepsilon\omega_j.$$

Суммируя по $j = \overline{1, \nu}$, получаем (4.1), где $K = \sum\limits_{j=1}^{\nu} \omega_j$. □

Как видно из леммы 4.5 и теоремы 3.3, в смысле поиска положения равновесия усиление требования вогнутости до строгой (и даже до сильной) вогнутости не является существенным.

Лемма 4.6. *Пусть функции выигрышей $J_j(x)$ строго вогнуты каждая по «своей» переменной на X_j, $j = \overline{1, \nu}$, и непрерывно дифференцируемы на открытом множестве Z, содержащем множество X;*

$$Y(x) = \operatorname{Arg} \max_{y \in X} \Phi(x, y).$$

Тогда $Y(x) = \{y(x)\}$, причем вектор-функция $y(x)$ непрерывна на Z. Более того, для каждого $x \in Z$ и каждого направления $h \in \mathbb{R}^\nu$, $|h| = 1$, возможного для множества Z в точке x, существует производная

$$\frac{\partial \psi(x)}{\partial h} = \max_{y \in Y(x)} \big(\nabla_x \Phi(x, y), h \big) = \big(\nabla_x \Phi(x, y(x)), h \big), \qquad (4.2)$$

причем вектор-функция $\nabla_x \Phi(x, y(x))$ непрерывна по $x \in Z$.

Доказательство. Согласно условиям теоремы, функции выигрышей строго вогнуты каждая по «своей» переменной. Отсюда сразу следует, что функция $\Phi(x, y)$ строго вогнута по $y \in X$. А в таком случае, как известно, множество $Y(x)$ при каждом $x \in Z$ состоит лишь из одной точки, то есть $Y(x) = \{y(x)\}$, причем вектор-функция $y(x)$ непрерывна на Z, см., например, [7, Часть II, глава 6, § 6.1, теорема 6.2, с.210]). Тогда, в соответствии с леммой 4.4, получаем, что для каждого $x \in Z$ и каждого направления $h \in \mathbb{R}^\nu$, $|h| = 1$, возможного для множества Z в точке x, существует производная (4.2). Из этого представления ясно, что данную производную по направлению можно понимать как двустороннюю. Отметим, кроме того, что в соответствии с условиями леммы, вектор-функция $\nabla_x \Phi(x, y(x))$ будет непрерывна по $x \in Z$. $\square$

Далее будем считать, что условия леммы 4.6 выполнены. Тогда функция $\psi(x)$ определена на множестве Z. Пусть для каждого $j = \overline{1, \nu}$ определены гладкие неотрицательные функции $\varphi_j(x_j)$, равные нулю на X_j и возрастающие при удалении x_j от X_j. Для каждого $\gamma > 0$ определим штрафную функцию

$$\psi_\gamma(x) = \psi(x) + \gamma \sum_{j=1}^{\nu} \varphi_j(x_j).$$

Лемма 4.7. *Пусть выполнены условия леммы 4.6, а* $\widehat{X}$, $\widetilde{X}$ *– выпуклые ограниченные замкнутые области такие, что*

$$X \subset \widehat{X} \subset \widetilde{X} \subset Z,$$

$$\min\Big\{ |x - y| : \quad x \in \partial X, \quad y \in \partial \widehat{X} \Big\} > 0,$$

$$\min\Big\{ |x - y| : \quad x \in \partial \widetilde{X}, \quad y \in \partial \widehat{X} \Big\} > 0;$$

$\widehat{x} \in X$ *– произвольно заданная точка. Тогда для всех достаточно больших* $\gamma > 0$ *справедливы следующие утверждения. 1. Функция* $\psi_\gamma(x)$, *рассматриваемая на* $\widetilde{X}$, *не имеет вне множества* $\widehat{X}$ *стационарных точек. 2. Для всех* $x \in \widetilde{X} \setminus \widehat{X}$ *имеем:* $\psi_\gamma(x) > \psi_\gamma(\widehat{x})$.

Доказательство. В силу выбора множества $\widehat{X}$ и положительности функции

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{\nu} \varphi_j(x_j)$$

вне множества X очевидно, что при всех достаточно больших $\gamma > 0$ выполняется неравенство

$$\min_{x \in \partial \widehat{X}} \psi_\gamma(x) > \psi(\widehat{x}) = \psi_\gamma(\widehat{x}). \tag{4.3}$$

Выберем произвольно точку $z \in \partial\widetilde{X}$. В силу предположений относительно множеств $\widetilde{X}$ и $\widehat{X}$, найдется точка $x \in \partial\widehat{X}$, получаемая как точка пересечения отрезка $[\widehat{x}; z]$ с границей $\partial\widehat{X}$, такая, что $[x; z] \subset \widetilde{X} \setminus \widehat{X}$. При этом зависимость $x(z)$ будет непрерывной (это следует из того, что выпуклое тело в $\mathbb{R}^\nu$ гомеоморфно замкнутому шару, см., например, [24, § 7.5, с.30]). Определим функцию

$$\beta_\gamma(t) = \psi_\gamma\big(x + t(z - x)\big), \quad t \in [0; 1].$$

Для завершения доказательства остается показать, что существует число $\overline{\gamma} > 0$, не зависящее от выбора точки z и такое, что для всех $\gamma \geq \overline{\gamma}$ функция $\beta_\gamma(t)$ строго возрастает на $[0; 1]$, то есть имеет положительную производную. Обозначим $\ell = z - x$, $h = \ell/|\ell|$. Ясно, что $|h| = 1$. Пользуясь леммой 4.6, заключаем, что существует производная

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\psi(x + t\ell) &= |\ell|\big(\nabla_x\Phi(x + t\ell, y(x + t\ell)), h\big) = \\ &= \big(\nabla_x\Phi(x + t(z - x), y(x + t(z - x))), z - x\big).\end{aligned}$$

Согласно лемме 4.6, функция, стоящая в правой части, непрерывна по $(t, z) \in [0; 1] \times \widetilde{X}$. Тогда по теореме Вейерштрасса она ограничена по модулю некоторой константой $K > 0$. Очевидно, что

$$\frac{d}{dt}\varphi(x + t(z - x)) = \big(\nabla\varphi(x + t(z - x)), z - x\big).$$

Учитывая непрерывную зависимость $x(z)$, справа стоит функция, непрерывная по $(t, z) \in [0; 1] \times \widetilde{X}$. Тогда по теореме Вейерштрасса существует

$$\overline{\varphi} = \min\Big\{\big(\nabla\varphi(x + t(z - x)), z - x\big) : \quad (t, z) \in [0; 1] \times \partial\widetilde{X}\Big\}.$$

Согласно условиям относительно функций $\varphi_j(x_j)$, $j = \overline{1, \nu}$, функция φ возрастает вдоль любого направления, исходящего из $\widehat{X}$. Поэтому $\dfrac{d}{dt}\varphi(x + t(z - x)) > 0$ независимо от выбора $(t, z) \in [0; 1] \times \partial\widetilde{X}$. Следовательно, $\overline{\varphi} > 0$. В результате проведенных рассуждений получаем оценку:

$$\frac{d}{dt}\psi_\gamma(x + t(z - x)) = \frac{d}{dt}\psi(x + t(z - x)) + \gamma\frac{d}{dt}\varphi(x + t(z - x)) \geq \gamma\overline{\varphi} - K > 0,$$

при условии, что $\gamma \geq \overline{\gamma} = 2\dfrac{K}{\overline{\varphi}}$. □

Лемма 4.8. *Пусть выполнены условия леммы 4.6, а* $\widehat{X}$ *– выпуклая ограниченная замкнутая область такая, что*

$$X \subset \widehat{X} \subset Z, \quad \min\Big\{|x-y|: \quad x \in \partial X, \quad y \in \partial\widehat{X}\Big\} > 0,$$

$\widehat{x} \in X$ *– произвольно заданная точка. Тогда для всех достаточно больших* $\gamma > 0$ *справедливо следующее.*

Пусть ε, σ_1, $\sigma_2 > 0$ *заданные числа,* $\Omega^{(\varepsilon)}$ *– открытое множество, содержащее объединение* ε*-окрестностей всех стационарных точек функции* $\psi_\gamma(x)$*, расположенных в множестве* $\widehat{X}$*,* $X^{(\varepsilon)} = \widehat{X} \setminus \Omega^{(\varepsilon)}$*. Тогда при любых достаточно малых* $\delta > 0$ *и* $\tau_2 \in (0;1)$*, а также при любых* $\tau_1 \in (0;\tau_2)$*,* $x \in X^{(\varepsilon)}$*,* $\psi_\gamma(x) \le \psi_\gamma(\widehat{x})$*, и* $d \in W$*,* $W = \big\{w \in \mathbb{R}^\nu: \ w_j \in [\sigma_1,\sigma_2], \ j = \overline{1,\nu}\big\}$*, выполняется одно из трех условий:*

- ***U**$_1$) $\psi_\gamma(x+td) < \psi_\gamma(x) - \tau_1\delta \ \forall t \in [\tau_1;\tau_2]$, $x + td \in \widehat{X} \ \forall t \in [\tau_1;\tau_2]$;*
- ***U**$_2$) $\psi_\gamma(x-td) < \psi_\gamma(x) - \tau_1\delta \ \forall t \in [\tau_1;\tau_2]$, $x - td \in \widehat{X} \ \forall t \in [\tau_1;\tau_2]$;*
- ***U**$_3$) $\exists\ j \in \overline{1,\nu}$: $\psi_\gamma(x+td[j]) < \psi_\gamma(x) - \tau_1\delta \ \forall t \in [\tau_1;\tau_2]$, $x + td[j] \in \widehat{X}$ $\forall t \in [\tau_1;\tau_2]$.*

Здесь $d[j]$ *получается из* d *занулением всех компонент, кроме* j*-й.*

Доказательство. Зададим выпуклую ограниченную замкнутую область $\widetilde{X}$ как указано в формулировке леммы 4.7 (очевидно, что такая всегда существует). В соответствии с леммой 4.7 можем считать, что функция $\psi_\gamma(x)$, рассматриваемая на $\widetilde{X}$, не имеет стационарных точек вне $\widehat{X}$, причем $\psi_\gamma(x) > \psi_\gamma(\widehat{x})$ для всех $x \in \widetilde{X} \setminus \widehat{X}$. Дальше будем считать, что $\overline{\tau} \in (0;1)$ настолько мало, что $x + td$, $x + td[j] \in \widetilde{X}$ для всех $x \in \widehat{X}$, $d \in W$, $t \in [0;\overline{\tau}]$, $j = \overline{1,\nu}$.

Далее точку $x \in X^{(\varepsilon)}$, $\psi_\gamma(x) \le \psi_\gamma(\widehat{x})$, и вектор $d \in W$ будем считать произвольно фиксированными. Для каждого вектора $\ell \in \mathbb{R}^\nu$ такого, что $x + t\ell \in \widetilde{X}$ при $t \in [0;\overline{\tau}]$, определим функцию

$$\beta_\gamma(t;\ell) = \psi_\gamma(x+t\ell), \quad t \in [0;\overline{\tau}].$$

Согласно лемме 4.6 (см. также доказательство леммы 4.6), эта функция имеет производную вида

$$\frac{d}{dt}\beta_\gamma(t;\ell) = \big(\nabla_x\Phi(x+t\ell, y(x+t\ell)) + \gamma\nabla\varphi(x+t\ell), \ell\big), \quad t \in (0;\overline{\tau}).$$

Для произвольного $z \in \widetilde{X}$ примем обозначение

$$\nabla_x \Phi(z, y(z)) + \gamma \nabla \varphi(z) = \widetilde{\nabla} \psi_\gamma(z).$$

В соответствии со сделанными предположениями, вектор-функция $\widetilde{\nabla} \psi_\gamma(z)$ непрерывна по $z \in \widetilde{X}$. Дальнейшее доказательство проведем в несколько этапов.

1. Получим представление для разности

$$\psi_\gamma(x + t\ell) - \psi_\gamma(x) = \Big[\tau = t|\ell|,\ h = \ell/|\ell|\Big] = \psi_\gamma(x + \tau h) - \psi_\gamma(x) =$$
$$= \omega(\tau) - \omega(0) = \omega'(\theta\tau)\tau, \quad \theta \in (0;1).$$

Очевидно, что

$$\omega'(\theta\tau) = \frac{\partial \psi_\gamma(x + \theta\tau h)}{\partial h} = \frac{\partial \psi_\gamma(x + \theta t\ell)}{\partial h} = \big(\widetilde{\nabla} \psi_\gamma(x + \theta t\ell), h\big),$$

и таким образом,

$$\omega'(\theta\tau)\tau = \big(\widetilde{\nabla} \psi_\gamma(x + \theta t\ell), \tau h\big) = \big(\widetilde{\nabla} \psi_\gamma(x + \theta t\ell), t\ell\big),$$

то есть

$$\psi_\gamma(x + t\ell) - \psi_\gamma(x) = \big(\widetilde{\nabla} \psi_\gamma(x + \theta t\ell), t\ell\big), \quad \theta \in (0;1).$$

2. Докажем, что $|\widetilde{\nabla} \psi_\gamma(z)| > 0$ для всех $z \in \widetilde{X}^{(\varepsilon)} = \widetilde{X} \setminus \Omega^{(\varepsilon)}$. Предположим, от противного, что существует точка $\widetilde{z} \in \widetilde{X}^{(\varepsilon)}$ такая, что $|\widetilde{\nabla} \psi_\gamma(\widetilde{z})| = 0$. Тогда для любого $h \in S_1(0)$, возможного для множества $\widetilde{X}$ в этой точке, получаем:

$$\left| \frac{\partial \psi_\gamma(\widetilde{z})}{\partial h} \right| = \Big| \big(\widetilde{\nabla} \psi_\gamma(\widetilde{z}), h\big) \Big| \le |\widetilde{\nabla} \psi_\gamma(\widetilde{z})| = 0.$$

Но это означает, что $\widetilde{z}$ есть стационарная точка функции $\psi_\gamma(z)$. Но, как уже было сказано выше, вне множества $\widehat{X}$ нет стационарных точек. Стало быть, $\widetilde{z} \in \Omega^{(\varepsilon)}$. Получили противоречие. Следовательно, наше предположение не верно.

3. Заметим, что $\widetilde{X}^{(\varepsilon)}$ – компакт, и по доказанному в пункте 2, функция $|\widetilde{\nabla} \psi_\gamma(z)| > 0$ и непрерывна на $\widetilde{X}^{(\varepsilon)}$. Поэтому, согласно теореме Вейерштрасса, существует

$$\sigma_0 = \min_{z \in \widetilde{X}^{(\varepsilon)}} |\nabla \psi_\gamma(z)| > 0.$$

Тогда по лемме 4.3 найдутся числа δ_1, $\delta_2 > 0$ такие, что для всех векторов $\xi \in \widetilde{X}^{(\varepsilon)}$ и $d \in W$ выполняется одно из трех условий:

а) $(-\nabla\psi(\xi), d) \geq \delta_1$;

б) $(-\nabla\psi(\xi), -d) \geq \delta_1$;

в) $\exists\, j \in \overline{1,\nu}$: $(-\nabla\psi(\xi), e_j) \geq \delta_2$.

Заметим, что $d[j] = \gamma_j e_j$, где $\gamma_j \in [\sigma_1, \sigma_2]$. Тогда из условия в) вытекает, что

$$(-\nabla\psi(\xi), d[j]) = \gamma_j\,(-\nabla\psi(\xi), e_j) \geq \gamma_j\delta_2 \geq \sigma_1\delta_2.$$

Обозначим

$$\delta = \frac{1}{2}\,\min\bigl\{\delta_1, \sigma_1\delta_2\bigr\}.$$

Тогда выписанные выше условия преобразуются следующим образом:

а) $(\nabla\psi(\xi), d) \leq -2\delta$;

б) $(\nabla\psi(\xi), -d) \leq -2\delta$;

в) $\exists\, j \in \overline{1,\nu}$: $(\nabla\psi(\xi), d[j]) \leq -2\delta$.

По условию, вектор-функция $\widetilde{\nabla}\psi_\gamma(z)$ непрерывна на компакте $\widetilde{X}$. Тогда $\forall\,\beta > 0\ \exists\,\gamma(\beta) > 0$:

$$|\widetilde{\nabla}\psi_\gamma(\xi) - \widetilde{\nabla}\psi_\gamma(\eta)|\,\sigma_2\sqrt{\nu} < \beta \quad \forall\,\xi,\eta \in \widetilde{X}:\ |\xi - \eta| \leq \gamma.$$

Выберем число $\tau_2 \in (0;1)$ так, чтобы

$$\tau_2 < \frac{\gamma[\delta/(\sigma_2\sqrt{\nu})]}{\sigma_2\sqrt{\nu}}, \quad \tau_2 < \overline{\tau}.$$

Заметим, что

$$|d| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\nu}\gamma_i^2} \leq \sigma_2\sqrt{\nu}.$$

Таким образом,

$$|\widetilde{\nabla}\psi_\gamma(\xi) - \widetilde{\nabla}\psi_\gamma(\eta)|\,|d| < \beta \quad \forall\,\xi,\eta \in \widetilde{X}:\ |\xi - \eta| \leq \gamma(\beta).$$

Дальнейшие рассуждения проведем в зависимости от того, какое конкретно из трех условий а), б), в) выполнено для $\xi = x$ и d. Будем считать параметры $\tau_1 \in (0;\tau_2)$, $t \in [\tau_1;\tau_2]$ произвольно фиксированными.

4. Предположим, для $\xi = x$ и d выполнено условие а). Обозначим

$$\tau = \frac{t}{\tau_2} \in \left[\frac{\tau_1}{\tau_2};1\right].$$

Соответственно, $t = \tau\tau_2$. Рассмотрим (с учетом пункта 1)

$$\psi_\gamma(x+td) - \psi_\gamma(x) = (\widetilde{\nabla}\psi_\gamma(x+\theta td), td) =$$

$$= \tau\tau_2(\widetilde{\nabla}\psi_\gamma(x), d) + R \le -2\tau\tau_2\delta + R,$$

где $\theta \in (0;1)$, $R = \tau\bigl(\widetilde{\nabla}\psi_\gamma(x+\theta\tau\tau_2 d) - \widetilde{\nabla}\psi_\gamma(x), \tau_2 d\bigr)$. Заметим, что в силу выбора τ_2 имеем:

$$|\theta\tau\tau_2 d| \le \tau_2|d| \le \tau_2\sigma_2\sqrt{\nu} < \gamma\left(\frac{\delta}{\sigma_2\sqrt{\nu}}\right).$$

Тогда

$$|R| \le \frac{\delta}{\sigma_2\sqrt{\nu}}\tau\tau_2|d| \le \tau\tau_2\delta.$$

Таким образом,

$$\psi_\gamma(x+td) - \psi_\gamma(x) \le \tau\tau_2(-2\delta+\delta) = -t\delta \le -\tau_1\delta.$$

По условию, $\psi_\gamma(x) \le \psi_\gamma(\widehat{x})$. Следовательно,

$$\psi_\gamma(x+td) \le \psi_\gamma(x) - \tau_1\delta < \psi_\gamma(\widehat{x}).$$

С другой стороны, как уже было сказано в начале доказательства,

$$\psi_\gamma(z) > \psi_\gamma(\widehat{x}) \quad \forall\, z \in \widetilde{X} \setminus \widehat{X}.$$

Отсюда делаем вывод, что $x + td \in \widehat{X}$.

5. Предположим, для $\xi = x$ и d выполнено условие б). Тогда совершенно аналогично пункту 4 получаем:

$$\psi_\gamma(x-td) - \psi_\gamma(x) \le -\tau_1\delta; \quad x - td \in \widehat{X}.$$

6. Предположим, для $\xi = x$ и d выполнено условие в). Здесь опять же можно провести рассуждения, аналогичные пункту 4, с той лишь

разницей, что вместо вектора d выступает вектор $d[j]$. Соответственно, нужно лишь оценить

$$|x+td[j]-x| = t\,|d[j]| = t\gamma_j \le \tau_2\sigma_2 \le \tau_2\sigma_2\sqrt{\nu} < \gamma\left(\frac{\delta}{\sigma_2\sqrt{\nu}}\right);$$

$$|d[j]| = \gamma_j \le \sigma_2 \le \sigma_2\sqrt{\nu}.$$

$\square$

Теорема 4.1. *Предположим, функции выигрышей $J_j(x)$, $j=\overline{1,\nu}$, строго вогнуты каждая по «своей» переменной и непрерывно дифференцируемы на открытом множестве Z, содержащем множество X; $\widehat{X}$ – выпуклая ограниченная замкнутая область такая, что*

$$X\subset\widehat{X}\subset Z,\quad \min\Big\{|x-y|:\quad x\in\partial X,\quad y\in\partial\widehat{X}\Big\}>0,$$

$\widehat{x}\in X$ – произвольно заданная начальная точка. Для заданных параметров $\gamma>0$, $\tau_2\in(0;1)$, $\tau_1\in(0;\tau_2)$, $\delta>0$, σ_1, $\sigma_2>0$, $\overline{\psi}>0$ рассмотрим следующий алгоритм.

Для текущей точки $x=x[k]\in\widehat{X}$ и текущего направления $d=d[k]\in W$, $W=\big\{w\in\mathbb{R}^\nu:\quad w_j\in[\sigma_1,\sigma_2],\ \ j=\overline{1,\nu}\big\}$, выбираемого произвольным образом, проверяем следующие условия.

1. *Если $\psi_\gamma(x[k])<\overline{\psi}$, прекращаем вычисления.*

2. *Если для произвольно выбранного $t\in[\tau_1;\tau_2]$ оказалось, что $\psi_\gamma(x+td)<\psi_\gamma(x)-\tau_1\delta$, $x+td\in\widehat{X}$, то полагаем $k=k+1$, $x[k]=x+td$ и переходим к следующей итерации.*

3. *Если для произвольно выбранного $t\in[\tau_1;\tau_2]$ оказалось, что $\psi_\gamma(x-td)<\psi_\gamma(x)-\tau_1\delta$, $x-td\in\widehat{X}$, то полагаем $k=k+1$, $x[k]=x-td$ и переходим к следующей итерации.*

4. *Если для произвольно выбранного $t\in[\tau_1;\tau_2]$ и некоторого $j\in\overline{1,\nu}$ оказалось, что $\psi_\gamma(x+td[j])<\psi_\gamma(x)-\tau_1\delta$, $x+td[j]\in\widehat{X}$, то полагаем $k=k+1$, $x[k]=x+td[j]$ и переходим к следующей итерации.*

Для каждого достаточно большого $\gamma>0$ и произвольных $\varepsilon>0$, σ_1, $\sigma_2>0$, $\overline{\psi}>0$, найдутся числа $\overline{\delta}>0$, $\overline{\tau}\in(0;1)$ такие, что *для всех* $\delta \in (0; \overline{\delta})$, $\tau_2 \in (0; \overline{\tau})$, *при любом* $\tau_1 \in (0; \tau_2)$ *описанный выше алгоритм будет корректно определенным и сходящимся за конечное число шагов в том смысле, что получим одно из двух: 1)* $x[k] \in \Omega^{(\varepsilon)}$, *где* $\Omega^{(\varepsilon)}$ *– открытое множество, содержащее объединение* ε*-окрестностей всех стационарных точек функции* $\psi_\gamma(x)$, *расположенных в множестве* $\widehat{X}$*; 2)* $\psi_\gamma(x[k]) < \overline{\psi}$.

Доказательство. Пусть параметры $\delta > 0$, $\tau_2 \in (0; 1)$, $\tau_1 \in (0; \tau_2)$ определяются, как указано в лемме 4.8. Для текущей точки $x = x[k] \in \widehat{X}$ и текущего направления $d = d[k] \in W$ возможно лишь одно из двух: 1) $x[k] \in \Omega^{(\varepsilon)}$ – это означает, что алгоритм сошелся в указанном смысле; 2) $x[k] \in X^{(\varepsilon)}$ – это означает, что выполнены условия леммы 4.8, но тогда один из трех случаев 2, 3 или 4 реализуется. Поскольку на каждой итерации значение функции $\psi_\gamma(x[k])$ уменьшается на фиксированную величину, то при невыполнении условия 1) за конечное число шагов получаем $\psi_\gamma(x[k]) < \overline{\psi}$. □

Отметим, что в условиях теоремы 4.1 множество $\widehat{X}$ может сколь угодно мало отличаться от множества X, поэтому (с учетом того, что на практике всегда присутствует какая-то погрешность вычислений) его можно считать фиксированным. Тогда и нижняя граница допустимых значений штрафного параметра $\gamma > 0$ будет фиксированной. В этом случае можно задать произвольную последовательность $\{\varepsilon_k\}$, монотонно стремящуюся к нулю сверху, и в соответствии с теоремой, построить последовательности параметров $\{\delta_k\}$ и $\{\tau_2[k]\}$, $\{\tau_1[k]\}$. В результате получим последовательность точек $x[k] \in \widehat{X}$, для которой либо для одного из членов будет $\psi_\gamma(x[k]) < \overline{\psi}$, либо для всех членов $x[k] \in \Omega^{(\varepsilon_k)}$. Во втором случае получаем последовательность, сходящуюся к множеству Ω всех стационарных точек функции $\psi_\gamma(x)$, расположенных в множестве $\widehat{X}$. С другой стороны, учитывая, что в теореме лишь утверждается существование достаточно малых параметров, но конкретное правило их выбора не указано, имеет смысл вместо последовательности $\{\varepsilon_k\}$ использовать (достаточно стандартную) процедуру дробного уменьшения (дробления) параметров δ, τ_2 и τ_1.

Кроме того, можно организовать последовательность множеств $\widehat{X}_k$, сходящуюся к множеству X. Тогда вместо фиксированного значения штрафного параметра $\gamma > 0$ надо будет использовать последовательность $\gamma_k \to +\infty$. Но опять же, поскольку конкретное правило выбора штрафного параметра в теореме не указано, то при практической реализации имеет смысл использовать процедуру дробного увеличения параметра γ.

Что касается выбора направления поиска d на каждой итерации, отметим следующее. В случае сильной выпуклости функции $\psi(x)$ (а также при некоторых дополнительных условиях) устанавливается, что направление $d = d(x) = y(x) - x$ является эффективным направлением спуска, см., например, [33]. Поэтому именно этот вектор d (в соответствии с упомянутой теоремой подправленный так, чтобы модули его компонент были не меньше некоторой малой фиксированной величины – можно рассматривать это как своего рода регуляризацию по координатам) имеет смысл брать и в общем случае – особенно если учесть, что в случае дважды дифференцируемой функции $\psi(x)$ она должна быть выпукла в окрестности стационарной точки. Между тем, как показывают численные эксперименты, сходимость наблюдается и при других (вообще говоря, произвольных) вариантах выбора вектора d. Однако здесь уже ситуация будет несколько хуже – в том смысле, что, как правило, обнаруживается (достаточно быстрая, тем не менее) сходимость в окрестность той или иной точки локального минимума функции $\psi(x)$, не являющейся положением равновесия в исходной игре. Если же брать (регуляризованный по координатам) вектор $d = y(x) - x$, то в численных экспериментах, как правило, наблюдается сходимость именно к одному из положений равновесия. Хотя, строго говоря, этот феномен остается пока еще необъясненным и требует дополнительного исследования.

Теперь для случая функций выигрышей, строго вогнутых[3] по «своим» переменным, и непрерывно дифференцируемых в окрестности множества X, на основе теоремы 4.1 и проведенных выше рассуждений для практического использования можем рекомендовать следующий алгоритм поиска положения равновесия.

---

[3]В случае простой вогнутости производим их регуляризацию, как было указано выше.

Описание алгоритма

Исходные параметры. Будем считать, что заданы малые положительные числа γ_0, γ_1, c_0, c_1, c_2, c, τ_1, τ_2, $\overline{\psi}$, и достаточно большое значение штрафного параметра $\gamma > 0$. Кроме того, для определенности считаем, что $X_j = [a_j, b_j]$, $j = \overline{1,\nu}$. Начальная точка $x \in X$.

Итерационный процесс.

1. Вычисляем $y(x)$, $\psi_\gamma(x)$, $d = d(x) = y(x) - x$. Если $\psi_\gamma(x) < \overline{\psi}$, прекращаем вычисления.

2. Производим регуляризацию вектора d по координатам. А именно, если обнаруживается, что $|d_j| < \gamma_1$, то делаем следующее. Если $x_j + \gamma_1 < b_j$, то d_j заменяем на γ_1, иначе заменяем d_j на $-\gamma_1$.

3. Полагаем $t = \tau_2$. До тех пор, пока $\psi_\gamma(x + td) \geq \psi_\gamma(x) - \gamma_0$ и $t > \tau_1$, заменяем $t \to ct$. Если после этого оказалось, что $\psi_\gamma(x+td) < \psi_\gamma(x)-\gamma_0$, то делаем замену $x \to x+td$ и переходим к шагу 1.

4. Находим минимальное среди значений $\psi_\gamma(x + d[j])$, $j = \overline{1,\nu}$. Предположим, что это будет $i = j$. Если оказалось, что $\psi_\gamma(x + d[i]) < \psi_\gamma(x) - \gamma_0$, то делаем замену $x \to x + d[i]$ и переходим к шагу 1.

5. Полагаем $t = \tau_2$. До тех пор, пока $\psi_\gamma(x + td[i]) \geq \psi_\gamma(x) - \gamma_0$ и $t > \tau_1$, заменяем $t \to ct$. Если после этого оказалось, что $\psi_\gamma(x + td[i]) < \psi_\gamma(x) - \gamma_0$, то делаем замену $x \to x + td[i]$ и переходим к шагу 1.

6. Полагаем $t = \tau_2$. До тех пор, пока $\psi_\gamma(x - td) \geq \psi_\gamma(x) - \gamma_0$ и $t > \tau_1$, заменяем $t \to ct$. Если после этого оказалось, что $\psi_\gamma(x-td) < \psi_\gamma(x)-\gamma_0$, то делаем замену $x \to x-td$ и переходим к шагу 1.

7. Делаем вывод, что минимальная возможная при данном выборе параметров окрестность множества стационарных точек достигнута. Для того, чтобы попасть в более узкую окрестность,

производим дробление параметров:

$$\gamma_0 \to c_0\gamma_0,\ \gamma_1 \to c_1\gamma_1,\ \tau_2 \to c_2\tau_2,\ \tau_1 \to c_2\tau_1.$$

(Как вариант, можно еще точку x заменить на лучшую из всех промежуточных точек, полученных выше. Но, как показывают численные эксперименты, это не оказывает существенного влияния). Переходим к шагу 1.

Отметим, что хотя в формулировке теоремы 4.1 предполагается непрерывная дифференцируемость функций выигрышей, тем не менее, сам алгоритм, представленный здесь, является методом нулевого порядка и поэтому (по крайней мере формально) применим и в наиболее общей ситуации.

5. Результаты численных экспериментов

В рамках сравнения работы простейшего эталонного и описанного выше альтернативного алгоритмов рассматривались различные вогнутые игры при количестве игроков $\nu = 2, 3$, при различном выборе начальной точки. Здесь мы приведем результаты лишь следующих пяти тестов, поскольку для всех остальных наблюдалось примерно то же самое.

Тест № 1. $\nu = 3$, $X_j = [0,1]$, $j = \overline{1,3}$,

$$J_1(x) = -\sin(x_2x_3)(x_1 - 0.3)^2, \quad J_2(x) = -\cos(x_1 - x_3)(x_2 - 0.5)^2,$$

$$J_3(x) = -\operatorname{arctg}(x_1 + x_2)(x_3 - 0.7)^2.$$

Здесь положение равновесия очевидно: $\overline{x} = (0.3, 0.5, 0.7)$. Именно оно и обнаруживается.

Тест № 2. $\nu = 3$, $X_j = [0,1]$, $j = \overline{1,3}$,

$$J_1(x) = -(x_1 - 0.3)^2 + (x_2 + x_3)x_1, \quad J_2(x) = -(x_2 - 3)^2 - x_1x_3x_2,$$

$$J_3(x) = -(x_3 + 3)^2 + x_3\sin(x_1x_2).$$

Оба алгоритма находят одну точку $\overline{x} = (0.8, 1, 0)$. Непосредственным образом проверяется, что это и есть равновесие по Нэшу в данной игре:

$$J_1(x_1, 1, 0) = -(x_1 - 0.3)^2 + x_1 \to \max_{x_1\in[0;1]} \quad \Rightarrow \quad x_1^* = 0.8 = \overline{x}_1;$$

$$J_2(0.8, x_2, 0) = -(x_2 - 3)^2 \to \max_{x_2 \in [0;1]} \quad \Rightarrow \quad x_2^* = 1 = \overline{x}_2;$$

$$J_3(0.8, 1, x_3) = -(x_3 + 3)^2 + x_3 \sin 0.8 \to \max_{x_3 \in [0;1]} \quad \Rightarrow \quad x_3^* = 0 = \overline{x}_3.$$

Тест № 3. $\nu = 2$, $X_j = [-10, 10]$, $j = \overline{1, 2}$,

$$J_1(x) = J_2(x) = -\frac{1}{4}(x_1 + x_2)^2 - \frac{1}{9}(x_1 - x_2)^2.$$

Положение равновесия очевидно: $\overline{x} = (0, 0)$. Именно оно и обнаруживается.

Тест № 4. $\nu = 3$, $X_j = [-10, 10]$, $j = \overline{1, 3}$,

$$J_1(x) = -\big(x_1 - 10\sin(x_2 x_3)\big)^2 + (x_2 + x_3)x_1,$$

$$J_2(x) = -\big(x_2 - 5\cos x_1 \sin x_3\big)^2 - x_1 x_2 x_3,$$

$$J_3(x) = -\big(x_3 + 25\mathrm{arctg}\,(x_1 + x_2)\big)^2 + \sin(x_1 x_2)\, x_3.$$

Здесь уже существует множество положений равновесия и множество точек локального минимума функции $\psi(x)$, не являющихся положением равновесия. Альтернативный алгоритм сходился каждый раз к одному из положений равновесия. Эталонный алгоритм (при фиксированной начальной точке, то есть без использования мультистарта) иногда сходился к положению равновесия, а иногда – просто к точке локального минимума.

Тест № 5. $\nu = 3$, $X_j = [-10, 10]$, $j = \overline{1, 3}$,

$$J_1(x) = -\big(x_1 - 10\sin(x_2 x_3)\big)^2 + (x_2 + x_3)x_1,$$

$$J_2(x) = -\big(x_2 - 5\cos x_1 \sin x_3\big)^2 + 7x_1 x_2 x_3,$$

$$J_3(x) = -\big(x_3 + 25\mathrm{arctg}\,(x_1 + x_2)\big)^2 + 5\sin(x_1 x_2)\, x_3.$$

Здесь ситуация примерно такая же, как с предыдущим тестом.

Далее приведем результаты численных экспериментов при выборе в качестве начальной точки левого конца пространственного отрезка X – см. табл. 1, 2. Здесь `Iters` – количество итераций, `oEvals` – количество вычислений функции невязки $\psi(x)$, `jEvals` – количество вычислений каждого из функционалов выигрышей, $\overline{x}$ – найденная точка (приближение к положению равновесия); запись `e-8` обозначает умножение на 10^{-8}. При запуске альтернативного алгоритма применялись следующие значения параметров:

$$\gamma = 10^{25}, \quad \gamma_0 = 10^{-6}, \quad \gamma_1 = 10^{-40}, \quad \tau_1 = 0.1, \quad \tau_2 = 0.5,$$

$$c = 0.1, \quad c_0 = 0.1, \quad c_1 = 0.1, \quad c_2 = 0.95, \quad \overline{\psi} = 10^{-7};$$

$$\varphi_j(x_j) = \begin{cases} 0, & \text{если } x_j \in [a_j - \delta x; b_j + \delta x]; \\ (x_j - b_j)^2, & \text{если } x_j > b_j + \delta x; \\ (a_j - x_j)^2, & \text{если } x_j < a_j - \delta x; \end{cases}$$

где $\delta x = 10^{-7}$ – точность вычислений по аргументу.

Таблица 1. Результаты работы эталонного алгоритма

№	Iters	oEvals	jEvals	$\overline{x}$	$\psi(\overline{x})$
1	28	160	4941	$\begin{pmatrix} 0.29963 \\ 0.50052 \\ 0.70136 \end{pmatrix}$	8.8763e-8
2	44	270	5853	$\begin{pmatrix} 0.79999 \\ 1.00000 \\ 0.00000 \end{pmatrix}$	-1.6172e-7
3	26	103	4533	$\begin{pmatrix} -5.6812e-4 \\ -1.10756e-3 \end{pmatrix}$	7.7841e-8
4	120	680	29569	$\begin{pmatrix} -4.39600 \\ 4.24900 \\ 2.73950 \end{pmatrix}$	1.04770
5	69	391	17205	$\begin{pmatrix} -5.9253e-5 \\ 5.4707e-5 \\ 2.8684e-5 \end{pmatrix}$	2.5281e-8

Поскольку множества стратегий игроков одномерны, при вычислении функций F_j, $j = \overline{1,\nu}$, использовался метод золотого сечения (который, как известно, работает достаточно быстро). При реализации эталонного алгоритма для минимизации функции невязки $\psi(x)$ использовался метод Хука–Дживса в применении к штрафной функции, которая на допустимом множестве равна функции $\psi(x)$, а вне его принимает достаточно большое значение. Для реализации метода золотого сечения и метода Хука–Дживса использовались собственные авторские программы. Все программы были написаны на языке MATLAB.

Таблица 2. Результаты работы альтернативного алгоритма

№	Iters	oEvals	jEvals	$\overline{x}$	$\psi(\overline{x})$
1	11	27	1065	$\begin{pmatrix} 0.30020 \\ 0.49976 \\ 0.69980 \end{pmatrix}$	9.3727e-8
2	22	47	1825	$\begin{pmatrix} 0.79999 \\ 1.00000 \\ 3.9209e-8 \end{pmatrix}$	2.8869e-11
3	9	22	1013	$\begin{pmatrix} -2.472e-4 \\ -2.472e-4 \end{pmatrix}$	8.4613e-8
4	39	128	5677	$\begin{pmatrix} 5.06390 \\ -10 \\ 10 \end{pmatrix}$	4.1535e-8
5	2	7	353	$\begin{pmatrix} -2.7009e-8 \\ -2.1851e-8 \\ -2.1851e-8 \end{pmatrix}$	1.5535e-12

Из сравнения табл. 1, 2 видим, что альтернативный алгоритм оказался существенно лучше по всем позициям.

6. Сравнение с результатами релаксационного алгоритма

Релаксационный алгоритм принадлежит к семейству методов, основанных на использовании функции Никайдо–Исода[4] [37]:

$$\Phi(y,x) = \sum_{j=1}^{\nu} J_j(x\|x_j \to y_j), \quad x, y \in X,$$

где ν – число игроков. В случае, когда выполнены дополнительные условия:

[4] Иногда пишут «Изода».

D$_1$) $\sum\limits_{j=1}^{\nu} J_j(x) = 0$ для всех $x \in X$ (игра с нулевой суммой);

D$_2$) каждая из функций $J_j(x)$ выпукла по набору «чужих» переменных;

функция $\Phi(y,x)$ оказывается вогнуто-выпуклой, и кроме того, удовлетворяет условию: $\Phi(x,x) = 0$. За счет этого для ситуации равновесия по Нэшу $\overline{x} \in X$ оказывается, что

$$\Phi(y,\overline{x}) \le \Phi(\overline{x},\overline{x}) = 0,$$

а исходная игра сводится к антагонистической игре с функцией выигрыша $\Phi(y,x)$ и нулевым значением игры. В частности, определяются функция наилучшего ответа:

$$Z(x) = \operatorname{Arg}\max_{y\in X}\Phi(y,x), \quad x \in X,$$

и функция цены:

$$P(x) = \Phi\big(Z(x),x\big) = \max_{y\in X}\Phi(y,x), \quad x \in X.$$

При этом игра сводится к задаче минимизации выпуклой функции:

$$P(x) \to \min_{x\in X}.$$

Подробнее см., например, [3, глава III]. Поскольку как сама эта задача, так и задача отыскания наилучшего ответа, являются задачами выпуклого программирования, то можно применять соответствующий арсенал методов. При невыполнении условия **D**$_2$) функция $P(x)$ уже не будет выпуклой, сходимость соответствующих итерационных методов [3, главы III-V] не гарантируется. Поэтому для ее оптимизации приходится использовать глобальные методы, в частности, мультистарт. При невыполнении условия **D**$_1$) использование глобальных методов оптимизации сталкивается с проблемой определения критерия останова, гарантирующего достижение глобального оптимума.

Итерационный процесс релаксационного алгоритма, см., например, [36,33], организуется по правилу

$$x^{k+1} = (1-t_k)x^k + t_k Z(x^k), \quad 0 < t_k \le 1, \quad k = 0,1,2,\ldots.$$

Шаг t_k выбирается тем или иным специальным способом. В частности, либо путем минимизации функции $P(x)$ вдоль направления $Z(x^k) - x^k$, либо априорным образом:

$$t_k \searrow 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} t_k = +\infty,$$

либо из условия дробления по правилу Арлихо:

$$P\big((1-t_k)x^k + t_k Z(x^k)\big) < P(x^k) - \sigma t_k^2 \big\|Z(x^k) - y^k\big\|,$$

$\sigma \in (0;1)$. Опять же, при невыполнении условия $\mathbf{D}_2$) сходимость алгоритма не гарантируется, см., например, [17, п.1.2.1, с.16].

Для полноты картины необходимо упомянуть, что наряду с классической функцией Никайдо–Исода используют также ее модификацию (функцию Ky Fan):

$$\Psi(x,y) = \sum_{j=1}^{\nu} \big[J_j(x) - J_j(x\|x_j \to y_j)\big]$$

(для функций проигрыша, выпуклых по «своим переменным»), а также регуляризацию этой модификации:

$$\Psi_\alpha(x,y) = \Psi(x,y) - \frac{\alpha}{2}\|x-y\|^2.$$

Поскольку эта функция сильно вогнута по y, то существует единственное решение задачи

$$\Psi_\alpha(x,y) \to \max_{y\in X}.$$

Именно такая регуляризация используется в работе [33]. Поскольку соответствующая функция цены

$$V_\alpha(x) = \Psi_\alpha(x, y_\alpha(x)),$$

при $\alpha = 0$ является (если разобраться) прямым аналогом нашей функции $\psi(x)$, остановимся на результатах этой работы подробнее.

В [33] рассматривается следующий вариант релаксационного алгоритма:

s_1) выбрать $x^0 \in X$, β, $\sigma \in (0;1)$; $k = 0$; $\varepsilon > 0$;

s_2) проверить критерий останова: $V_\alpha(x^k) \le \varepsilon$;

s_3) вычислить $y_\alpha(x^k)$ и положить $d^k = y_\alpha(x^k) - x^k$;

s_4) найти $t_k \in \{\beta^\ell : \ \ell = 0, 1, 2, \ldots\}$, максимальное, такое, что выполняется условие Арлихо:

$$V_\alpha(x^k + t_k d^k) \le V_\alpha(x^k) - \sigma t_k^2 \|d^k\|;$$

s_5) положить $x^{k+1} = x^k + t_k d^k$, $k = k + 1$ и перейти к шагу s_2).

Сходимость (в глобальном смысле) для данного алгоритма доказывается при выполнении одной из следующих групп условий.

A_1) функции $J_j(x)$ непрерывно дифференцируемы, $j = \overline{1, \nu}$;

A_2) для данных $x \in X$ при $x \ne y_\alpha(x)$ выполняется неравенство:

$$\sum_{j=1}^{\nu} \bigl[\nabla J_j(x) - \nabla J_j(x \| x_j \to y_{\alpha,j}(x))\bigr]^T (x - y_\alpha(x)) > 0;$$

B) функция $\Psi_\alpha(., y)$ выпукла при любом фиксированном y из открытой выпуклой окрестности множества X.

Таким образом, эти условия достаточно жесткие; условие B) является аналогом условия $\mathbf{D}_2$); при выполнении условий A_1), A_2) (как показано) также выполняется некий аналог условия $\mathbf{D}_2$). Вместе с тем, в работе [33] относительно множества X не требуется, чтобы оно было прямоугольным и компактным, а достаточно, чтобы оно было не пусто, замкнуто и выпукло (если X не прямоугольно, речь идет об отыскании обобщенного равновесия по Нэшу).

В работе [23] были представлены результаты численных экспериментов решения с помощью релаксационного алгоритма игровой задачи с функциями выигрышей:

$$J_j(x) = -\frac{(x_1 + x_2)^2}{4} - \frac{(x_1 - x_2)^2}{9}, \quad X_j = [-10; 10], \quad j = 1, 2.$$

Это соответствует тесту № 3 (см. раздел 5). Нетрудно убедиться, что искомое положение равновесия по Нэшу будет равно $\overline{x} = (0; 0)$. В экспериментах использовалось аналитическое выражение для функции наилучшего ответа (которое нетрудно найти непосредственно):

$$Z(x) = -\frac{5}{13}(x_2, x_1).$$

При заданной точности 0.001 и оптимальном (в соответствии с формулой из [36]) способе выбора шага t_k потребовалось 108–157 вычислений функции цены $P(x)$ (в зависимости от выбора начального приближения); при постоянном шаге количество вычислений функции цены оказалось 11977. Как видно из табл. 1, 2 (показатель `oEvals`), и для эталонного, и для альтернативного алгоритма результат оказывается лучше.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алеева С.Р., Якубович Е.О. *Равновесное программирование и его применение для нахождения равновесия по Нэшу* // Вестник Челябинского гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Вып. 16. № 28(319). С. 6–20.

2. Антипин А.С. *Градиентный и экстраградиентный подходы в билинейном равновесном программировании.* М.: ВЦ им. А.А. Дородницына РАН, 2002.

3. Беленький В.З., Волконский В.А. *Итеративные методы в теории игр и программировании.* М.: Наука, 1974.

4. Болдырев В.И. *Метод кусочно-линейной аппроксимации для решения задач оптимального управления* // Дифференц. уравнения и процессы управления. 2004. № 1. С. 28–123.

5. Бузинов А.А. *Методы отсечений в линейном оптимальном быстродействии.* Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Ярославль: ЯрГУ, 2000. М.: Наука, 1985.

6. Васин А.А., Морозов В.В. *Теория игр и модели математической экономики.* М.: МАКС Пресс, 2005.
7. Васин А.А., Краснощеков П.С., Морозов В.В. *Исследование операций.* М.: ИЦ «Академия», 2008.
8. Воробьев Н.Н. *Теория игр для экономистов-кибернетиков.* М.: Наука, 1985.
9. Гольдштейн А.Л. *Оптимизация в среде MATLAB.* Пермь: Изд-во ПНИПУ, 2015.
10. Евтушенко Ю.Г. *Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации.* М.: Наука, 1982.
11. Евтушенко Ю.Г. *Оптимизация и быстрое автоматическое дифференцирование.* М.: ВЦ им. А.А.Дородницына РАН, 2013.
12. Елсаков С.М., Ширяев В.И. *Однородные алгоритмы многоэкстремальной оптимизации для целевых функций со значительным временем вычисления значения* // Вычислительные методы и программирование. 2011. Т.12. С. 48–69.
13. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ.* М.: Наука, 1984.
14. Левин А.Ю. *Об одном алгоритме минимизации выпуклых функций* // Докл. АН СССР. 1965. Т.160. № 6. С. 1244–1247.
15. Минарченко И.М. *Локальный поиск в квадратичной игре двух лиц* // Известия Иркутского гос. ун-та. Сер. Матем. 2016. Т. 18. С. 60–73.
16. Ненахов Э.И. *Об одном алгоритме отыскания решений системы линейных неравенств* // Теорія оптимальних рішень. 2005. № 4. С. 42–48.
17. Писарук Н.Н. *Введение в теорию игр.* Минск: БГУ, 2015.
18. Пиявский С.А. *Один алгоритм отыскания абсолютного экстремума функции* // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. 1972. Т.12. № 12. С. 57–67.

19. Посыпкин М.А. *Параллельный эвристический алгоритм глобальной оптимизации* // Труды ИСА РАН. 2008. Т.32. С. 166–179.

20. Сергеев Я.Д., Квасов Д.Е. *Диагональные методы глобальной оптимизации.* М.: Физматлит, 2008.

21. Стронгин Р.Г. *Численные методы в многоэкстремальных задачах.* М.: Наука, 1978.

22. Чернов А.В. *О существовании равновесия по Нэшу в дифференциальной игре, связанной с эллиптическими уравнениями: монотонный случай* // Матем. теория игр и ее приложения. 2015. Т. 7. Вып. 3. С. 48–78.

23. Чиркина Д.Н. *Обзор метода релаксации для поиска точек равновесия по Нэшу в непрерывных некооперативных играх многих лиц* / Материалы XVI Международной молодежной конф. «Наукоемкие технологии и интеллектуальные системы – 2014». Секция 1: «Интеллектуальные системы». М.: МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2014. С. 37–40.

24. Шведов И.А. *Компактный курс математического анализа. Ч.2. Дифференциальное исчисление функций многих переменных.* Новосибирск: НГУ, 2003.

25. Шор Н.З. *Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения.* Киев: Наукова думка, 1979.

26. Başar T. *Relaxation techniques and asynchronous algorithms for online computation of non-cooperative equilibria* // J. of Economic Dynamics and Control. 1987. Vol. 11. No. 4. P. 531–549.

27. Dreves A., Facchinei F., Kanzow C., Sagratella S. *On the solution of the KKT conditions of generalized Nash equilibrium problems* // SIAM J. Optim. 2011. Vol. 21. No. 3. P. 1082–1108.

28. Facchinei F., Kanzow C. *Generalized Nash equilibrium problems* // Ann. Oper. Res. 2010. Vol. 175. P. 177–211.

29. Facchinei F., Lampariello L. *Partial penalization for the solution of generalized Nash equilibrium problems* // J. Global Optim. 2011. Vol. 50. No. 1. P. 39–57.

30. Facchinei F., Pang J.S. *Finite-dimensional variational inequalities and complementarity problems.* New York: Springer, 2003.

31. Facchinei F., Pang J.-S. *Exact penalty functions for generalized Nash problems* // Large-Scale Nonlinear Optimization. Vol. 83 of the series "Nonconvex Optimization and Its Applications". 2006. P. 115–126.

32. Fukushima M. *Restricted Generalized Nash Equilibria and Controlled Penalty Algorithm* // Technical Report. 2011. Vol. 8. No. 3. P. 201–218.

33. von Heusinger A., Kanzow C. *Methods for Generalized Nash Equilibrium Problems with Inexact Line Search* // J. Optim. Theory Appl. 2009. No. 143. P. 159–183.

34. Izmailov A. F., Solodov M. V. *On error bounds and Newton-type methods for generalized Nash equilibrium problems* // Comput. Optim. Appl. 2014. Vol. 59. No. 1–2. P. 201–218.

35. Kanzow C., Steck D. *Augmented Lagrangian Methods for the Solution of Generalized Nash Equilibrium Problems* // SIAM J. Optim. 2016. Vol. 26. No. 4. P. 2034–2058.

36. Krawczyk J.B., Uryasev S. *Relaxation Algorithms to Find Nash Equilibria with Economic Applications* // Environmental Modeling and Assessment. 2000. No. 5. P. 63–73.

37. Nikaido H., Isoda K. *Note on Noncooperative Convex Games* // Pacific J. of Mathematics. 1955. Vol. 5. No. 5. P. 807–815.

38. Pang J.S., Fukushima M. *Quasi-variational inequalities, generalized Nash equilibria, and multi-leader-follower games* // Computational Management Science. 2005. Vol. 2. No. 1. P. 21–56.

39. Rosen J.B. *Existence and Uniqueness of Equilibrium Points for Concave n-Person Games* // Econometrica. 1965. Vol. 33. No. 3. P. 520–534.

40. Stoer J., Bulirsch R. *Introduction to numerical analysis*. New York: Springer, 2002.

41. Uryas'ev S., Rubinstein R.Y. *On relaxation algorithms in computation of noncooperative equilibria* / IEEE Transactions on Automatic Control. 1994. Vol. 39. No. 6. P. 1263–1267.

42. Zhang L.P., Han J.Y. *Unconstrained optimization reformulations of equilibrium problems* // Acta Mathematica Sinica, English Series. 2009. Vol. 25. No. 3. P. 343–354.

ON SOME APPROACHES TO SEARCHING THE NASH EQUILIBRIUM IN CONCAVE GAMES

Andrey V. Chernov, Nizhnii Novgorod State University, Nizhnii Novgorod State Technical University, Cand.Sc., associate professor (chavnn@mail.ru).

Abstract: The subject of the paper is finite-dimensional concave games id est noncooperative n-person games with objective functionals concave with respect to "their own" variables. For such games we investigate the problem of designing numerical algorithms for searching the Nash equilibrium with convergence guaranteed without additional requirements concerning objective functionals such as convexity in "strange" variables or another similar hypotheses (in the sense of weak convexity, quasiconvexity and so on). We describe two approaches. The first one being obvious enough is based on usage of the Hooke–Jeeves method for minimization a residual function and presented as a "standard for comparison" in the sense of efficiency of numerical solution for possible alternative methods. The second one (to some extent) can be regarded as "a cross between" the relaxation algorithm and the Hooke–Jeeves method of configurations (but with considering specific character of the function being minimized). Its justification (at this moment for the case of one-dimensional sets of players strategies but with general enough requirements to objective functionals) is a main result of the paper. Moreover, we present results of numerical experiments with their discussion. We give the comparison with other algorithms which are known at present.

Keywords: finite-dimensional concave game, Nash equilibrium, searching algorithm.