Математическая Теория Игр и её Приложения, т.9, в.3, с. 3–35

УДК 519.83
ББК 22.18

# МОДЕЛИ БИРЖЕВЫХ ТОРГОВ И ПОВТОРЯЮЩИЕСЯ ИГРЫ С НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ: ОБЗОР

Виктория Л. Крепс*
Национальный исследовательский университет
Высшая Школа Экономики в Санкт-Петербурге
190008, Санкт-Петербург, ул. Кантемировская, 3
Санкт-Петербургский экономико-математический институт РАН
190013, Санкт-Петербург, ул. Серпуховская, 38
e-mail: vita_kreps@mail.ru

В работе Де Мейера и Салей [17] на примере упрощенной модели многошаговых биржевых торгов с асимметрично информированными агентами продемонстрирована идея эндогенного происхождения броуновской компоненты в эволюции цен на финансовых рынках: случайные флуктуации цен могут являться следствием стратегических рандомизаций «инсайдеров». Модель сводится к повторяющейся игре с неполной информацией. В настоящей работе дается обзор многочисленных исследований, толчком для которых послужила эта пионерская работа.

Посвящается памяти Виктора Доманского



* Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2017 году и при поддержке РФФИ, проект 16-01-00124-а.

*Ключевые слова*: биржевые торги, повторяющиеся игры, асимметричная информация, оптимальные стратегии, случайное блуждание, асимптотическое поведение.

## 1. Введение

### 1.1. Повторяющиеся игры с неполной информацией

Повторяющиеся игры с неполной информацией были введены в рассмотрение Ауманном и Машлером во время их работы для американского Агентства по Контролю над Вооружениями и Разоружению (US Arms Control and Disarmament Agency) в период с 1966 по 1968 годы (см. монографию [13]). В эти годы в условиях холодной войны две сверхдержавы Советский Союз и США договорились о проведении серии конференций, направленных на установление договоренностей о сокращении гонки вооружений. Группе специалистов по теории игр и теории полезностей, в которую входили авторы упомянутой монографии, было поручено выработать переговорные стратегии в условиях неполной информации о состоянии вооружения у советской стороны.

В такой игре предполагается что, игроки имеют различную информацию о событиях, влияющих на функции выигрышей. Игроки, имеющие дополнительную «инсайдерскую» информацию, при длительном взаимодействии неизбежно «выдают» эту информацию другим игрокам через свои действия. Однако, информированный игрок не заинтересован в немедленном обнаружении своей приватной информации, влекущем утрату стратегического преимущества. Это стремление «инсайдера» скрывать свою информацию понуждает его к стратегическому маневрированию, выражающемуся в рандомизации своих действий. Таким образом, инсайдер стоит перед лицом проблемы, как лучше использовать свою приватную информацию, не выдавая ее неинформированным игрокам.

В антагонистических повторяющихся играх с неполной информацией у второго игрока два игрока $n$ раз разыгрывают матричную игру. Состояние игры, определяющее матрицу выигрышей, перед началом игры выбирается на весь период игры случайным ходом из конечного множества состояний в соответствии с известным обоим игрокам вероятностным распределением. Выбранное случаем состояние сообщается Игроку 1, но не Игроку 2. Тем самым, Игрок 1 знает какая именно матричная игра разыгрывается, а Игрок 2 знает только (априорные) вероятности этих событий. При этом Игрок 2 знает об информированности Игрока 1. После каждого шага оба игрока узнают выбор хода противником, не получая информации о выигрышах.

В повторяющейся игре Игрок 2 (неинформированный) игрок, наблюдая действия противника, на каждом шаге переоценивает свою априорную информацию, используя формулу Байеса. Информированный Игрок 1 должен учитывать возможность такой переоценки и стараться, по возможности, выдать как можно меньше информации противнику.

Поскольку повторяющаяся игра с неполной информацией у второго игрока может быть развернута в большую матричную игру, согласно теореме о минимаксе существует решение такой игры в рандомизированных стратегиях. Существование решения означает равенство гарантированных выигрышей обоих игроков $\max\min = \min\max = val$, где $val$ называется *значением игры*, и наличие обеспечивающих значение игры *оптимальных рандомизированных стратегий*.

В качестве иллюстрации стратегического маневра информированного игрока, Ауман и Машлер [13] приводят широко известную историю о событиях на лондонской бирже, произошедших в июне 1815 года. О победе Веллингтона в битве при Ватерлоо, которая произошла накануне, в Лондоне было никому не известно. Барон Ротшильд, первым получив эту информацию, означавшую предстоящее сильное повышение цен акций на лондонской бирже, направляет своего официального агента в Лондон, дав указание продавать. Биржевые игроки, заметив, что агент «всезнающего» Ротшильда продает акции, сделали вывод о поражении Веллингтона. Цены акций катастрофически упали, и в этот момент команда Ротшильда, посланная вслед за первым агентом, скупает их.

Идея этого примера лежит в основе исследования Де Мейера и Салей [17], демонстрирующего возможность стратегического происхождения броуновской компоненты в эволюции цен на финансовых рынках. Таким образом, спустя почти четыре десятилетия после появления теории, возникшей из практической задачи, появился иной источник приложения повторяющихся игр с неполной информацией – упрощенные модели биржевых торгов.

### 1.2. Упрощенная модель биржевых торгов

Начиная с работы Башелье [14], финансовая теория использует для описания эволюции цен на финансовых рынках вероятностную модель случайных блужданий, т.е. равновероятных разнонаправленных скачков, и ее непрерывный аналог – винеровский случайный процесс или броуновское движение. Возникновение регулярных случайных колебаний цен, наблюдаемых при статистическом анализе временных рядов, принято объяснять влиянием на процесс ценообразования многочисленных независимых слабых внешних воздействий, подверженных случайным изменениям во времени.

Однако, гипотеза об полностью экзогенном происхождении этих осцилляций не является удовлетворительной. Такие внешние воздействия, как например, политические события, использование фирмой новой технологии и т.п., носят шоковый характер. Они должны были бы привести к скачкам ценового процесса. Однако в большинстве случаев, если информация о таких событиях не является общим достоянием, они не приводят к значительным ценовым скачкам.

Гипотеза о возможном эндогенном происхождении регулярных случайных флуктуаций в ценовом процессе впервые была высказана в работе Кайла [24]: колебания цен могут порождаться маскировочными действиями инсайдера. Эта идея была продемонстрирована в работе Де Мейера и Салей [17], в которой стратегическое происхождение броуновской компоненты в эволюции цен на финансовых рынках демонстрируется на примере упрощенной модели многошаговых биржевых торгов с асимметричной информацией, происходящих на фоне одного шокового события, определяющего цену акции.

В базовой модели Де Мейера и Салей два игрока с противоположными интересами ведут между собой многократные торги однотипными рисковыми ценными бумагами – акциями. Торги проводятся в $n$ кругов.

Перед началом торгов ликвидная цена акции определяется выбором случая на весь период торгов (формализация внешнего шокового воздействия). Возможны два варианта ликвидной цены акции – высокая и низкая. Вероятность выбора высокой цены акции известна обоим игрокам. Игрок 1, инсайдер, осведомлен об исходе случайного хода, и тем самым, об истинной цене акции, Игрок 2 не имеет этой информации. Игрок 2 знает об осведомленности Игрока 1. Оба игрока знают вероятность $p$ выбора случаем высокой цены акции.

Затем, игроки ведут между собой многошаговые торги. На каждом шаге торгов $t = 1, 2, \ldots, n$, игроки независимо и одновременно делают ставки, то есть назначают цены, за которые они готовы купить акцию. Назвавший более высокую цену покупает за эту цену одну акцию у противника. Оба игрока стремятся максимизировать цену своего итогового «портфеля» (деньги плюс рисковые бумаги по их ликвидной цене).

В такой модели неинформированный игрок, наблюдая за действиями инсайдера, стремится уточнить свою априорную информацию и делать выводы об истинной цене акции. Таким образом, Игрок 1 (инсайдер) сталкивается с проблемой, как лучше использовать свою приватную информацию, не выдавая ее неинформированному Игроку 2. Использование недальновидной политики (ставить высокую цену, если случай выбрал таковую, и низкую цену в противоположном случае) не оптимально для Игрока 1, так как это полностью обнаруживает Игроку 2 состояние дел. С другой стороны, стратегия, не зависящая от выбора случая, и, вследствие этого, не выдающая никакой информации Игроку 2, не позволяет Игроку 1 получить выгоду от его дополнительной информации. Таким образом, Игрок 1 должен поддерживать равновесие между использованием своей приватной информации и сокрытием ее от Игрока 2, что и понуждает его рандомизировать свои действия.

Де Мейер и Салей сводят описанную модель к антагонистической $n$-шаговой повторяющейся игре с неполной информацией у второго игрока, так называемая игра торга (bidding game). Эти повторяющиеся игры имеют неусредненные выигрыши, что отличает их от классической модели Ауманна и Машлера [13].

В оправдание моделирования биржевых торгов игрой двух лиц с нулевой суммой, заметим, что в приведенном выше историческом примере, можно считать, что в июне 1815 года на лондонской бирже было два Игрока: Ротшильд и Не-Ротшильд, так как, по сути дела, Ротшильд играл против всей биржи.

В модели [17] биржевые игроки могут делать произвольные ставки в диапазоне между высокой и низкой ликвидной ценой акции. Таким образом, в отличие от модели [13], игроки имеют континуум возможных действий. Следовательно, существование значения для таких игр нуждается в доказательстве. Авторы доказывают этот факт и строят в неявном виде оптимальные стратегии для этой антагонистической повторяющейся $n$-шаговой игры.

Показано, что последовательность значений игры (выигрыш инсайдера) неограниченно растет при стремлении числа шагов $n$ к бесконечности и получают асимптотику случайной последовательности цен сделок. Они демонстрируют наличие в этой асимптотике винеровской компоненты и рассматривают это явление как ключевой пункт для мотивировки эндогенного происхождения броуновского движения в финансовой теории.

Этот же результат продемонстрирован в работе Де Мейера [16] для моделей с весьма общим торговым механизмом. Диссертация Генсбиттеля [23] содержит аналогичный результат для модели с рисковыми активами двух типов.

### 1.3. Игры торга с дискретными ставками

Поскольку реальные торги проводятся в тех или иных денежных единицах, представляется более реалистичным считать, что игроки могут назначать только дискретные ставки пропорциональные этой минимальной денежной единице.

Независимые исследования дискретных игр торга с двумя возможными целочисленными ликвидными ценами проводились в работах Де Мейера, Марино [18] и Доманского, Крепс [2]. В обеих работах показано, что в отличие от модели Де Мейера, Салей с непрерывными ставками [17] последовательность значений соответствующих $n$-шаговых игр ограничена сверху и сходится при числе шагов $n$, стремящемся к бесконечности. Это кардинально отличает модель с дискретными допустимыми ставками от модели с произвольными допустимыми ставками. В упомянутых работах вычислен предел последовательности значений дискретных $n$-шаговых игр торга: доказательства существенно отличаются, причем доказательство Доманского (полный текст см. [19]) существенно короче.

Ограниченность значений повторяющихся игр позволяет корректно определить игры с бесконечным числом шагов, соответствующие торгам без заранее заданного ограничения продолжительности.

В работе [19] получены оптимальные стратегии обоих игроков в такой бесконечно повторяющейся игре. Показано, что при использовании игроками оптимальных стратегий цены состоявшихся сделок образуют случайное блуждание, что подтверждает гипотезу о том, что случайные флуктуации цен на фондовых рынках могут являться следствием асимметричной информированности агентов.

В последующие годы Виктором Доманским, Мариной Сандомирской, Федором Сандомирским (ученики В. Доманского) и автором настоящей заметки рассматривались обобщения и модификации дискретных игр торга. Кандидатская диссертация Артема Пьяных (факультет ВМК МГУ им. Ломоносова) также посвящена исследованию модификации модели торгов.

Обзор результатов по играм торга полученных до 2013 года представлен в работе [22]. В данной заметке период обзора по этой тематике расширен вплоть до настоящего времени и, в отличие от предыдущего обзора, приводятся не доказательства результатов, а лишь наводящие соображения.

Отметим, что наряду с тем, что полученные оптимальные стратегии игроков в моделях торгов позволяют лучше понять природу случайности в финансовых временных рядах, анализ моделей торгов стимулирует развитие аппарата теории повторяющихся игр с неполной информацией.

Я благодарна Марине Сандомирской, Артему Пьяных и Федору Сандомирскому за советы и замечания при подготовке рукописи.

## 2. Дискретные игры торга бесконечной продолжительности

### 2.1. Один рисковый актив с двумя возможными ценами

Этот раздел начинаем с анализа многошаговых торгов двух агентов однотипными рисковыми активами (акциями), в которых случайная цена акции может принимать два значения: целое положительное число $m$ (состояние $H$) с вероятностью $p$ и 0 (состояние $L$) с вероятностью $1-p$. Допустимы любые целочисленные ставки. Однако, как легко видеть, эффективны ставки от низкой до высокой цены акции. Механизм торга тот же, что и в базовой модели Де Мейера и Салей (см. п.1.2). Перед началом торгов оба игрока имеют достаточное количество денег и акций.

Очевидно, что ставки ниже низкой возможной цены акции или выше таковой не осмысленны. Легко видеть, что также не эффективной является ставка, равная высокой цене акции $m$. Таким образом, множество разумных ставок игрока – $\{0, 1, \dots, m-1\}$. Антагонистические $n$-шаговые повторяющиеся игры $G_n^m(p)$, моделирующие такие торги, задаются двумя матрицами одношаговых выигрышей Игрока 1 размера $m \times m$: при выбранной случаем низкой цене акции

$$A^L = [a_{ij}^L] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & m-1 \\ -1 & 0 & 2 & \dots & m-1 \\ -2 & -2 & 0 & \dots & m-1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -m+1 & -m+1 & -m+1 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

и при выбранной случаем высокой цене акции

$$A^H = [a_{ij}^H] = \begin{pmatrix} 0 & -m+1 & -m+2 & \dots & -1 \\ m-1 & 0 & -m+2 & \dots & -1 \\ m-2 & m-2 & 0 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Строки – это ставки Игрока 1, причем нумерация начинается с нулевой ставки, столбцы – ставки Игрока 2.

В конце игры Игрок 2 платит Игроку 1 сумму одношаговых выигрышей $\sum_{t=1}^{n} a^s(i_t, j_t)$, где $s \in \{L, H\}$ – элемент, выбранный случаем на нулевом шаге. В зависимости от выбора случайного хода игроки повторно разыгрывают одну из этих двух матричных игр.

Как упоминалось в п.1.3, доказана ограниченность значений $V_n^m(p)$ $n$-шаговых игр $G_n^m(p)$ при числе шагов $n$, стремящемся к бесконечности, что кардинально отличает модель с дискретными допустимыми ставками от модели с произвольными допустимыми ставками. Интуитивное объяснение этого факта – в дискретной модели возможность стратегического маневрирования инсайдера существенно сужается по сравнению с моделью с непрерывными ставками.

Ограниченность значений $V_n^m(p)$ повторяющихся игр позволяет корректно определить игры $G_\infty^m(p)$ с бесконечным числом шагов, соответствующие торгам без заранее заданного ограничения продолжительности. Существование значения игры $G_\infty^m(p)$ не следует из общей теории. В работе [19] существование $V_\infty^m(p)$ доказано при помощи построения оптимальных стратегий обоих игроков в явном виде.

Основой для решения игры $G_\infty^m(p)$ послужило интуитивное нахождение Виктором Доманским оптимальной стратегии неинформированного Игрока 2, в которой Игрок 2 учитывает и, в некотором смысле, копирует предыдущий ход Игрока 1. Эта находка в свое время чрезвычайно удивила Бернара Де Мейера.

*Описание чистой оптимальной стратегии $\tau_\infty^m(p)$ Игрока 2.* Не обладая информацией о цене акции, Игрок 2 знает ее математическое ожидание, определяемое вероятностью высокой цены акции. На первом шаге своей оптимальной стратегии Игрок 2 ставит целую часть ожидаемой цены акции. На последующих шагах игры ставка Игрока 2 зависит от пары сделанных ставок на предшествующем шаге (его собственной ставки и ставки инсайдера). Если на предыдущем шаге покупателем был инсайдер (ставка Игрока 1 выше ставки Игрока 2), то на текущем шаге Игрок 2 увеличивает ставку на единицу, если же на предыдущем шаге покупателем был Игрок 2 (ставка Игрока 1 ниже ставки Игрока 2), то на текущем шаге Игрок 2 уменьшает ставку на единицу. Если на предыдущем шаге ставки игроков совпали, то на текущем шаге Игрок 2 делает ту же ставку, что и на предыдущем.

Так определенная стратегия $\tau_\infty^m(p)$ на интервалах $p \in [k/m, (k+1)/m)$ не зависит от $p$. Применение Игроком 2 этой стратегии в конечношаговой игре $G_n^m(p)$ гарантирует ему проигрыш, не больший, чем $H^m(p)$, где $H^m(p)$ представляет собой кусочно-линейную непрерывную вогнутую функцию с $m$ областями линейности $[k/m, (k+1)/m]$, $k = 0, \dots, m-1$ и значениями в точках изломов $p = k/m$, $k = 0, \dots, m$:

$$H^m(k/m) = k(m-k)/2.$$

Точки излома соответствуют целым математическим ожиданиям цены акции. Таким образом, функция $H^m(p)$ является не зависящей от $n$ верхней границей для значений $V_n^m(p)$ конечношаговой игры $G_n^m(p)$, из чего следует ограниченность этих значений.

*Описание оптимальной стратегии $\sigma_\infty^m(p)$ Игрока 1.* Пусть для определенности априорное математическое ожидание цены акции равно целому числу $k$, т.е. вероятность состояния $m$ равна $k/m$. На первом шаге стратегии $\sigma_\infty^m(k/m)$ Игрок 1 использует только ставки $k$ и $k-1$. Условные вероятности этих действий в зависимости от состояния игры устроены таким образом, чтобы их полные вероятностью оказались равны $1/2$, и апостериорная ожидаемая цена акции, соответствующая действию $k-1$, была равна $k-1$, а соответствующая действию $k$, была равна $k+1$.

Далее, если ожидаемая цена акции после первого шага стала равной $k-1$, то после второго шага Игрок 1 делает ее равной $k-2$ или $k$ с вероятностями $1/2$. Если же ожидаемая цена после первого шага стала равной $k+1$, то после второго шага он делает ее равной $k$ или $k+2$ и так далее.

Применение Игроком 1 стратегии $\sigma_\infty^m(p)$ в конечношаговой игре $G_n^m(p)$ гарантирует ему выигрыш, не больший, чем $L_n^m(p)$. Эти нижние границы для значений $V_n^m(p)$ игр $G_n^m(p)$ имеют ту же самую форму, что и верхняя граница $H^m(p)$. В точках изломов $k/m$ значения $L_n^m(k/m)$ задаются рекуррентными формулами

$$L_n^m(k/m) = 1/2m + 1/2(L_{n-1}^m((k-1)/m) + L_{n-1}^m((k+1)/m)),$$

при начальных условиях $L_0^m(k/m) = 0$, и граничных условиях $L_n^m(0) = L_n^m(1) = 0$.

Поскольку последовательность $L_n^m$ сходится к $H^m$ при $n$ стремящемся к бесконечности, значение $V_\infty^m(p)$ игры $G_\infty^m(p)$ равно $H^m$, и пара $\sigma_\infty^m(p)$, $\tau_\infty^m(p)$ – оптимальные стратегии игроков.

Стратегия $\sigma_\infty^m(p)$ Игрока 1 обеспечивает ему максимальный средний выигрыш $1/2$ за один шаг. Эта стратегия порождает симметричное случайное блуждание апостериорных вероятностей по точкам $l/m$ и, соответственно, случайное блуждание ожидаемых цен акции по целым точкам $l$, $l = 0, \ldots, m$ с поглощением в крайних точках 0 и $m$. Случайная последовательность цен состоявшихся сделок воспроизводит случайное блуждание ожидаемой цены акции, что подтверждает гипотезу об эндогенном происхождении случайных флуктуаций рыночных цен.

Марковский момент поглощения апостериорных вероятностей представляет собой момент обнаружения Игроком 2 цены акции и потери информационного преимущества инсайдера, т.е. в сущности, момент окончания торгов. Таким образом, в отличие от торгов с произвольными допустимыми ставками, торги с дискретными допустимыми ставками, завершаются почти наверное за конечное число шагов, причем ожидаемое число шагов до завершения торгов также конечно и равно $k(m-k)$ для $p = k/m$. Таким образом, значение повторяющейся игры $G_\infty(\mathbf{p})$ с не ограниченным заранее числом шагов равно ожидаемой продолжительности случайного блуждания апостериорных вероятностей, умноженной на постоянный одношаговый выигрыш инсайдера.

Множество всех оптимальных стратегий Игрока 1 в игре $G_\infty^m(p)$ состоит из описанной выше наискорейшей стратегии и ее более медленных модификаций с меньшими чем 1 и, возможно, несимметричными скачками апостериорных вероятностей.

## 2.2. Однотипные акции со счетным числом возможных цен

В работе Доманского и Крепс [4] сделан переход к обобщению модели многошаговых торгов с дискретными допустимыми ставками, при котором случайная цена акции может принимать произвольное неотрицательное целочисленное значение. Это значение выбирается перед началом игры случайным ходом согласно вероятностному распределению $\mathbf{p}$ на множестве $\mathbb{Z}_+$ целых неотрицательных чисел. Допустимы произвольные (неотрицательные) целочисленные ставки.

Такая $n$-шаговая модель описывается антагонистической повторяющейся игрой $G_n(\mathbf{p})$ с неполной информацией у второго игрока. Игра имеет счетное множество $\mathbb{Z}_+$ состояний $s$ (счетное число возможных цен акции) и счетные множества допустимых действий игроков. Одношаговые выигрыши Игрока 1 задаются счетным множеством бесконечных матриц. Первый игрок знает истинную бесконечную матрицу выигрышей, а второй игрок знает лишь априорное распределение $\mathbf{p}$. После каждого шага оба игрока узнают ход противника. В конце игры Игрок 2 платит Игроку 1 сумму выигрышей за весь период игры.

Рассмотренные в [19] игры с двумя возможными значениями цены акции соответствуют распределениям $\mathbf{p}$ с двумя ненулевыми компонентами т.е. распределение $\mathbf{p}$ имеет двухточечный носитель.

Если носитель распределения $\mathbf{p}$ конечен (число возможных цен акции конечно), то значение игры $G_n(\mathbf{p})$ всегда существует, так как такая игра задается конечным числом конечных матриц одношаговых выигрышей Игрока 1. Ставки, превышающие максимальную возможную цену акции, неэффективны и могут быть исключены из рассмотрения.

В общем случае, существование значения игры $G_n(\mathbf{p})$ нуждается в доказательстве. Установлено, что, если случайная ликвидная цена акции $C_{\mathbf{p}}$ имеет конечное математическое ожидание $\mathbf{E}[C_{\mathbf{p}}]$, то значения $V_n(\mathbf{p})$ $n$-шаговых игр $G_n(\mathbf{p})$ существуют.

Если дисперсия случайной цены акции $\mathbf{D}[C_{\mathbf{p}}]$ бесконечна, то при $n \to \infty$ последовательность значений $V_n(\mathbf{p})$ игр расходится. А если дисперсия случайной цены акции конечна, то при $n \to \infty$, эта последовательность ограничена сверху и сходится к $H(\mathbf{p})$ – кусочно-линейной непрерывной вогнутой функции со счетным числом областей линейности. Множества $\Theta(k)$, $k = 1, 2, \ldots$, распределений $\mathbf{p}$ с целыми математическими ожиданиями $\mathbf{E}[C_{\mathbf{p}}] = k$ образуют ее области негладкости. Если $\mathbf{E}[C_{\mathbf{p}}] = k + \alpha$, $\alpha \in [0, 1)$, то $H(\mathbf{p}) = 1/2(\mathbf{D}[C_{\mathbf{p}}] - \alpha(1 - \alpha))$.

При конечной дисперсии цены акции, как и в описанном в 2.1 частном случае двух возможных цен акции, ограниченность значений $V_n(\mathbf{p})$ позволяет корректно определить игры $G_\infty(\mathbf{p})$ с бесконечным числом шагов, описывающие торги не ограниченной изначально продолжительности.

В [4] показано, что $V_\infty(\mathbf{p}) = H(\mathbf{p})$ и в явном виде построены оптимальные стратегии игроков. Оптимальная стратегия Игрока 2 определяется также, как и для случая двух возможных цен акции. Для того, чтобы сконструировать оптимальную стратегию Игрока 1, распределение $\mathbf{p}$ представлено «каноническим» образом в виде выпуклой комбинации распределений с не более, чем двухточечными носителями, для которых математическое ожидание цены акции совпадает с $\mathbf{E}[C_{\mathbf{p}}]$. При произвольном распределении $\mathbf{p}$ оптимальная стратегия Игрока 1 построена в виде выпуклой комбинации его оптимальных стратегий в играх с распределениями, имеющими двухточечный носитель, в выпуклую комбинацию которых раскладывается распределение $\mathbf{p}$. При выборе случаем состояния, равного математическому ожиданию цены акции, Игрок 1 останавливает игру, так как в этом случае ожидаемый выигрыш Игрока 1 равен нулю и продолжение игры для него теряет смысл.

Построенная таким образом оптимальная стратегия инсайдера порождает симметричное случайное блуждание апостериорных математических ожиданий цены акции по множеству целых неотрицательных чисел с поглощением, которое происходит в тот момент, когда апостериорное математическое ожидание цены акции становится равным истинной ликвидной цене акции.

При $\mathbf{p} \in \Theta(k)$ ожидаемая продолжительность этого случайного блуждания до поглощения равна дисперсии ликвидной цены акции. Значение бесконечно повторяющейся игры $G_\infty(\mathbf{p})$ равно ожидаемой продолжительности случайного блуждания, умноженной на постоянный одношаговый выигрыш инсайдера, равный $1/2$. Случайная последовательность цен состоявшихся сделок воспроизводит случайное блуждание ожидаемых цен акции.

Таким образом, результаты, полученные для модели более реалистичной, чем модели изученные в работах [17] и [19], подтверждают гипотезу о том, что случайные флуктуации цен на фондовых рынках могут являться следствием маскировочных действий инсайдера в условиях асимметричной информированности агентов.

## 2.3. Модели многошаговых аукционов акциями одного типа

В отличие от моделей, описанных в пунктах 2.1 и 2.2, где игроков всего двое и торги ведутся непосредственно между ними, в работе Доманского и Крепс [3] сделан переход к модели многошаговых аукционов, в которых торги ведутся с участием аукциониста.

Как и в модели п.2.2 , случайная ликвидационная цена акции $C_\mathbf{p}$ может принимать произвольные неотрицательные целочисленные значения согласно вероятностному распределению $\mathbf{p}$ на множестве $\mathbb{Z}_+$. Допустимы любые целочисленные ставки.

В аукционе принимают участие несколько $(N)$ игроков, один из которых является инсайдером (Игрок 1). Аукцион организован следующим образом:

1) Перед началом аукциона случайный ход выбирает цену акции на весь период торгов. Результат этого хода сообщается Игроку 1. Все участники аукциона знают, что Игрок 1 является инсайдером.

2) На каждом шаге аукциона $t = 1, 2, \ldots, n$, агенты одновременно делают ставки – называют свою цену акции. Допустимы любые неотрицательные целочисленные ставки.

3) Каждый агент, назвавший максимальную цену, покупает у аукциониста одну акцию за эту цену. Если множество агентов, назвавших максимальную ставку совпадает со всем множеством агентов, то сделка не происходит.

4) По окончании аукциона полученная чистая прибыль или убыток, то есть вырученные деньги минус ожидаемая цена проданных акций, поровну делится между всеми агентами (скажем, выплачивается в качестве дивидендов, возможно отрицательных). Такое правило выполняется в аукционах, которые проводит закрытое акционерное общество с целью распространить среди своих акционеров партию своих однотипных акций.

Все игроки стремятся максимизировать приращение цены своего итогового портфеля (деньги плюс истинная цена полученных акций).

Такие $n$-шаговые аукционы описываются повторяющимися играми $N$ лиц $G_n(N, \mathbf{p})$ с неполной информацией у всех игроков, кроме Игрока 1. Игра задается счетным набором (в соответствии с количеством возможных состояний случайной цены акции) $N$-мерных матриц одношаговых выигрышей игроков. Каждая матрица имеет бесконечное множество входов (в соответствии с количеством возможных действий игроков). Игры $G_n(N, \mathbf{p})$ являются играми с нулевой суммой.

Заметим, что для случая одного неинформированного игрока, $N = 2$, эта игра при удвоении функций выигрышей обоих игроков совпадает с игрой прямых торгов между ними, происходящих без посредника. Таким образом, при $N = 2$ модель сводится к антагонистической игре $G_n(2, \mathbf{p})$ со значением $V_n(2, \mathbf{p})$, равным половине значения $V_n(\mathbf{p})$ игры прямых торгов $G_n(\mathbf{p})$.

В качестве решения для динамической игры $N$ лиц используется концепция совершенной (устойчивой относительно подыгр) ситуации равновесия (см. например [7]). Ввиду бесконечности множества состояний (возможных цен акции) и бесконечности множеств чистых стратегий игроков, при произвольном распределении $\mathbf{p}$ в игре $G_n(N, \mathbf{p})$ может не существовать и ситуации равновесия по Нэшу.

Установлено, что, если случайная ликвидная цена акции имеет конечное математическое ожидание, то в $n$-шаговой игре $G_n(N, \mathbf{p})$ существует совершенная ситуация равновесия.

Для получения совершенных ситуаций равновесия в играх бесконечной продолжительности $G_n(N, \mathbf{p})$ используются решения антагонистических игр прямых торгов $G_n(\mathbf{p})$ (см. п.2.2) в случае существования значений последних игр. В совершенной ситуации равновесия выигрыш Игрока 1 равен $(N-1)/N \cdot V_\infty(\mathbf{p})$, а выигрыши остальных $N-1$ игроков равны $-V_\infty(\mathbf{p})/N$. Все игроки имеют равновесные стратегии: инсайдер воспроизводит оптимальную стратегию Игрока 1 в игре прямых торгов $G_\infty(\mathbf{p})$ (п.2.2), все неинформированные игроки воспроизводят оптимальную стратегию Игрока 2 в той же игре.

Случайная последовательность цен состоявшихся сделок (сделка происходит, если множество игроков, назвавших максимальную ставку, не равно множеству всех игроков) совпадает с последовательностью цен состоявшихся сделок в игре прямых торгов $G_\infty(\mathbf{p})$ заранее неограниченной продолжительности и воспроизводит случайное блуждание ожидаемой цены акции.

Ожидаемая цена покупки акции равна ожидаемой цене акции. Получаемые чистая прибыль или убыток равны нулю и никаких дивидендов не выплачивается.

## 2.4. Многошаговые торги акциями нескольких типов

В этом пункте и последующих разделах будут рассматриваться прямые торги двух агентов и соответствующие им антагонистические повторяющиеся игры.

В отличие от выше изложенных результатов, относящимся к торгам однотипными акциями, в работе Доманского и Крепс [5] исследуются многошаговые торги, на которых два биржевых игрока ведут повторные торги акциями нескольких $(m)$ типов со случайными взаимозависимыми ценами. Ликвидные цены акций $\mathbf{z} = z_1, z_2, \ldots, z_m$ – целочисленные случайные величины с совместным распределением $\mathbf{p}$ на $m$-мерной целочисленной решетке $\mathbb{Z}_+^m$.

Информационная структура аналогична случаю одного рискового актива: оба игрока знают распределение $\mathbf{p}$ вероятностей состояний. Кроме того, Игрок 1 является инсайдером. Он знает ликвидные цены всех типов акций. Игрок 2 не имеет этой информации. Игрок 2 знает, что Игрок 1 является инсайдером.

Допустимы любые целочисленные векторные ставки. На каждом шаге торгов $t = 1, 2, \ldots, n$ игроки независимо и одновременно делают векторные ставки, т.е. называют свои цены для каждого типа акций. Назвавший большую цену акции данного типа покупает у противника за эту цену одну акцию этого типа.

Оба Игрока стремятся максимизировать приращение цены своего итогового «портфеля» (деньги плюс «рисковые» бумаги по их ликвидной цене).

Эта $n$-шаговая модель сводится к антагонистической повторяющейся игре $G_n(\mathbf{p})$ с неполной информацией Игрока 2, со счетным пространством состояний $S = \mathbb{Z}_+^m$ и со счетным пространством действий игроков.

Одношаговые выигрыши $a(\mathbf{z}, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ Игрока 1, соответствующие состоянию $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_m)$ и выборам игроков $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \ldots, i_m)$, $\mathbf{j} = (j_1, j_2, \ldots, j_m)$ задаются суммой $a(\mathbf{z}, \mathbf{i}, \mathbf{j}) = \sum\limits_{r=1}^{m} a_r(z_r, i_r, j_r)$, где

$$a_r(z_r, i_r, j_r) = \begin{cases} j_r - z_r, & \text{для } i_r < j_r; \\ 0, & \text{для } i_r = j_r; \\ -i_r + z_r, & \text{для } i_r > j_r. \end{cases}$$

В конце игры Игрок 2 платит Игроку 1 сумму

$$\sum_{t=1}^{n} a(\mathbf{z}, \mathbf{i}(t), \mathbf{j}(t)).$$

Описание игры известно обоим игрокам.

Если случайные цены различных типов акций независимы, то совместные торги акциями $m$ типов с распределением $\mathbf{p}$ равносильны $m$ раздельным торгам однотипными акциями с распределениями, являющимися одномерными проекциями распределения $\mathbf{p}$.

Если математические ожидания цен всех типов акций конечны, то значения $V_n(\mathbf{p})$ $n$-шаговых игр $G_n(\mathbf{p})$ существуют. Значение такой конечно-шаговой игры не превосходит суммы значений игр, моделирующих торги акциями одного типа. Это означает, что одновременные торги рисковыми активами нескольких (двух или более) типов не более выгодны для инсайдера, чем раздельные торги акциями одного типа. Это объясняется тем, что одновременные торги влекут обнаружение большей инсайдерской информации, ввиду того, что ставки для акций каждого типа несут также информацию об акциях другого типа.

Если дисперсии случайных цен всех типов акций конечны, то значения $n$-шаговых игр не превышают функции $H(\mathbf{p})$ – минимальной кусочно-линейной функции, равной половине суммы дисперсий для распределений с целочисленными математическими ожиданиями цен всех типов активов.

Этот факт позволяет перейти к играм неограниченной продолжительности $G_\infty(\mathbf{p})$. В работе [5] получены решения таких игр. Значение $V_\infty(\mathbf{p})$ совпадает с $H(\mathbf{p})$, т.е. равно сумме значений соответствующих игр неограниченной продолжительности, моделирующих торги однотипными акциями. Таким образом, возможная выгода Игрока 2 при одновременном проведении $n$-шаговых торгов двумя активами по сравнению с раздельными торгами по каждому активу исчезает в игре неограниченной продолжительности.

В явном виде построены оптимальные стратегии обоих игроков. Для каждого актива оптимальная стратегия Игрока 2 независимо воспроизводит его оптимальную стратегию для игры торгов с одним рисковым активом (см. п.2.2).

Для произвольных распределений $\mathbf{p}$ с конечным вектором дисперсий оптимальные стратегии Игрока 1 строятся на основе его оптимальных стратегий для игр $G_\infty(\mathbf{p})$ с не более чем $m+1$ состояниями, т.е. носитель распределения $\mathbf{p}$ содержит не более чем $m+1$ точку (так называемые «элементарные» игры).

Первоначально этот результат для случая двух активов ($m = 2$) был получен в работе Доманского и Крепс [21]. При $m = 2$ «элементарные» игры – это игры с акциями двух типов $G_\infty^{u,v}(\mathbf{p})$, в которых носитель распределения $\mathbf{p}$ содержит максимум три точки. Построение оптимальной стратегии Игрока 1 в такой «элементарной» игре базируется на одной из его замедленных оптимальных стратегий в «элементарной» игре с одним активом (см. п.2.1).

Алгоритм построения оптимальных стратегий Игрока 1 в играх $G_\infty^{u,v}(\mathbf{p})$ с распределением $\mathbf{p}$ общего вида, основан на специально для этой цели построенном в работе Доманского [20] симметричном представлении распределений **p** на двумерной плоскости с заданным средним как выпуклой комбинации распределений с теми же средними и с не более, чем 3-точечными носителями. Такой алгоритм предписывает последовательность действий Игрока 1 в зависимости от выбранного случаем состояния $z \in \mathbb{Z}^2_+$.

При $m > 2$, ввиду комбинаторных сложностей, связанных с разнообразием спектров распределений в таких разложениях, прямое обобщение результата [21] не представляется возможным и в этом случае используется несколько иной подход к разложению многомерных вероятностных распределений. Алгоритм же построения оптимальных стратегий Игрока 1 на основе модифицированного представления распределения аналогичен случаю двух активов.

Получено, что мартингал апостериорных вероятностей, порожденный оптимальной стратегией Игрока 1 для игры с $(m+1)$-точечным распределением представляет собой симметричное случайное блуждание по точкам целочисленной решетки, лежащим внутри симплекса, натянутого на нагруженные точки распределения. Симметрия нарушается в момент попадания на границу симплекса. Начиная с этого момента, игра превращается в одну из игр с распределениями, имеющими не более чем $m$ точек в носителе.

## 3. Модификации дискретных повторяющихся игр торга

В статье Де Мейера [16] результаты работы [17] (см.п. 1.2) по играм торгов с непрерывными ставками обобщаются на произвольный торговый механизм в предположении, что механизм удовлетворяет аксиомам инвариантности относительно сдвига и масштаба. Это обобщение не может быть распространено на случай дискретных допустимых ставок, так как дискретный механизм, как отмечается в работе [16] не удовлетворяет этим аксиомам. Отметим, что на практике решетка возможных ставок не является инвариантной одновременно относительно сдвига и масштаба.

В этом разделе приводятся результаты, полученные для двух различных модификаций торгового механизма с дискретными допустимыми ставками.

## 3.1. Модели торгов с ненулевым бид-аск спредом

Работа [17] завершается перечислением возможных усложнений модели, которые могли бы сделать ее более реалистичной. В списке усложнений значится, в частности, торговый механизм, в котором игроки назначают различные цены покупки (бид) и продажи акции (аск). Во всех моделях, описанных выше в разделах 1 и 2, игроки назначали на каждом шаге только одну цену, таким образом цены покупки и продажи совпадали.

Такое обобщение исследуется в работе Сандомирской [11]. Два агента ведут повторяющиеся торги акциями одного типа. На каждом этапе торгов назначают несовпадающие целочисленные цены покупки и продажи актива. Рассмотрена модель с фиксированной разницей между ценой продажи и покупки акции (фиксированный бид-аск спред). На фондовом рынке фиксированный спред встречается при торговле некоторыми производными финансовыми инструментами (так называемыми контрактами CFD – Contract For Difference).

На каждом шаге торгов $t = 1, \dots, n$ игроки предлагают свои цены покупки и продажи одной акции. Разница $s$ между ценами покупки и продажи (бид-аск спред) фиксирована правилами торгов (одинакова для обоих игроков). Обозначим $i_t$ цену покупки одной акции Игроком 1 и $j_t$ цену покупки одной акции Игроком 2 на шаге $t$. Ввиду фиксированности спреда $s$, цены продажи на шаге $t$ будут $i_t + s$ и $j_t + s$ для Игроков 1 и 2 соответственно.

Транзакция происходит, если цена покупки акции, названная одним из игроков, превосходит или равна цене продажи, названной его оппонентом на данном шаге, т.е. либо $i_t + s \le j_t$, либо $j_t + s \le i_t$. Если соотношение предложенных цен позволяет провести сделку, то игрок, предложивший максимальную цену покупки, покупает по этой цене одну акцию у другого игрока.

В соответствующей повторяющейся игре $G_n^{m,s}(p)$ одношаговые выигрыши Игрока 1 в состояниях $L$ (цена актива 0) и $H$ (цена актива $m$) задаются формулами

$$a^{L,m,s}(i,j) = \begin{cases} -i, & \text{при } i \ge j + s, \\ 0, & \text{при } |i - j| < s, \\ j, & \text{при } j \ge i + s, \end{cases}$$

$$a^{H,m,s}(i,j) = \begin{cases} m-i, & \text{при } i \geq j+s, \\ 0, & \text{при } |i-j| < s, \\ -m+j, & \text{при } j \geq i+s. \end{cases}$$

Наличие в матрицах выигрышей полосы нулей шириной $2s-1$ вдоль главной диагонали значительно усложняет исследование игры $G_n^{m,s}(p)$. Модели, исследованные в [19] (см.п.2.1), являются частным случаем описанной выше модели и соответствуют нулевому спреду, что, ввиду дискретности ставок, равносильно единичному спреду. Для упрощения расчетов далее везде полагаем, что $m$ кратно $s$.

Рассмотрим «разумную» стратегию $\tau^{m,s}$ неинформированного игрока, являющуюся естественным обобщением чистой оптимальной стратегии Игрока 2 в модели неограниченной продолжительности без спреда. Если $p \in [\frac{sk}{m}, \frac{s(k+1)}{m})$, $k = 0, 1, \ldots, \frac{m}{s} - 1$, то на первом шаге Игрок 2 ставит $sk$.

На каждом последующем шаге $t = 2, \ldots$, ход Игрока 2 определяется действиями обоих игроков на $(t-1)$-м шаге:

$$\tau_t^{m,s}(i_{t-1}, j_{t-1}) = \begin{cases} j_{t-1}-s, & \text{при } i_{t-1} \leq j_{t-1}-s; \\ j_{t-1}, & \text{при } |i_{t-1}-j_{t-1}| < s \\ j_{t-1}+s, & \text{при } i_{t-1} \geq j_{t-1}+s. \end{cases}$$

Аналогично модели п.2.1, найдена $H^{m,s}(p)$ – не зависящая от числа шагов $n$, верхняя граница значений $V_n^{m,s}(p)$ игры $G_n^{m,s}(p)$. Функция $H^{m,s}(p)$ – непрерывная, выпуклая вверх, кусочно-линейная функция с $m/s$ областями линейности $[sk/m, s(k+1)/m]$, $k = 0, 1, \ldots, m/s - 1$ и со значениями

$$H^{m,s}(p_k) = \frac{m^2}{2s} p_k(1-p_k)$$

в точках излома $p_k = sk/m$, $k = 0, 1, \ldots, m/s$. Это позволяет рассматривать игру $G_\infty^{m,s}(p)$ заранее не ограниченной продолжительности.

На этом аналогия со схемой работы [19] заканчивается. Отталкиваясь от гипотезы о том, что оптимальная стратегия инсайдера в модели с ненулевым спредом порождает простое случайное блуждание апостериорных вероятностей по решетке $\left\{\frac{sk}{m} \mid k = 0, \ldots, m/s\right\}$ (аналог решетки $\{\frac{k}{m}\}$ для модели без спреда), Сандомирская рассматривает класс таких стратегий инсайдера, обозначая его $\Sigma^{SRW}$. Проявляя незаурядную изобретательность, автор находит наилучшую стратегию инсайдера $\sigma^{m,s}$ в этом классе, то есть такую, что для $\forall\sigma \in \Sigma^{SRW}$ гарантированный выигрыш инсайдера не превосходит его выигрыша, гарантированного стратегией $\sigma^{m,s}$. Описание стратегии см. в [11].

При применении инсайдером стратегии $\sigma^{m,s}$ в $n$-шаговой игре $G_n^{m,s}(p)$ его гарантированный выигрыш не превышает $L^{m,s}(p)$ – непрерывной, выпуклой вверх, кусочно-линейной функции с теми же интервалами линейности, что и верхняя граница $H^{m,s}(p)$ и со значениями в точках излома $p_k = sk/m$, $k = 0, 1, \ldots, m/s$

$$L^{m,s}(p_k) = V_1(s)\frac{m^2}{s^2}p_k(1 - p_k),$$

где $V_1(s)$ – гарантированный одношаговый выигрыш инсайдера. Для случая $s = 1$ полученные границы совпадают с соответствующими границами, полученными в работе [19].

Но в отличии от случая игры без спреда, в котором стратегия $\sigma^{m,1}$ — оптимальная стратегия Игрока 1 в игре неограниченной продолжительности $G_\infty^m(p)$, при $s > 1$ стратегия $\sigma^{m,s}$ не оптимальна в игре $G_\infty^{m,s}(p)$: выйдя из класса стратегий $\Sigma^{SRW}$, ее можно улучшить, обеспечив инсайдеру больший выигрыш. Следовательно, гипотеза о том, что оптимальная стратегия инсайдера порождает простое случайное блуждание, неверна. При этом не исключено, что оптимальная стратегия инсайдера порождает случайное блуждание, которое имеет более сложную структуру.

Результаты для модели со спредом при двух возможных значениях ликвидной цены акции, обобщаются на случай счетного множества возможных ликвидных цен, по аналогии с тем, как это сделано в работе [4] для модели без спреда (см. п. 2.2).

### 3.2. Цена сделки, зависящая от ставок обеих сторон

В работах Пьяных [8], [10], [9] исследуется предложенная в статье Чаттерджи и Самуэльсона [15] иная модификация механизма торгов: цена покупки равна выпуклой комбинации предложенных ставок с заданным коэффициентом $0 \leq \beta \leq 1$, который может быть интерпретирован как переговорная сила агентов.

По аналогии с исследованием базовой модели торгов с дискретными ставками (см. п. 2.1 и п. 2.2), автор сначала в работе [8] рассматривает случай двух возможных цен акции (состояния $L$ и $H$), а затем случай счетного числа возможных цен акции. Информационная структура та же, что и в базовой модели.

В случае двух состояний $L$ (цена акции равна 0) и $H$ (цена акции равна $m$) одношаговые выигрыши инсайдера задаются формулами

$$a^{L,\beta}(i,j) = \begin{cases} (1-\beta)i + \beta \cdot j, & i < j, \\ 0, & i = j, \\ -\beta \cdot i - (1-\beta)j, & i > j, \end{cases}$$

$$a^{H,\beta}(i,j) = \begin{cases} (1-\beta)i + \beta \cdot j - m, & i < j, \\ 0, & i = j, \\ m - \beta \cdot i - (1-\beta)j, & i > j. \end{cases}$$

Модель, исследованная в [19] (см. п. 2.1), представляет собой частный случай этой модели при $\beta = 1$. Так как при $0 < \beta < 1$, в отличие от случая $\beta = 1$, ставка, равная $m$ осмысленна (не доминируема), в этом случае игроки повторно разыгрывают матричную игру размера $(m+1) \times (m+1)$, а не размера $m \times m$, как в случае $\beta = 1$.

Следуя схеме работы [19], автор в явном виде получает решение игры неограниченной продолжительности $G^{\beta}_{\infty}(p)$ Автор описывает чистую стратегия Игрока 2 $\tau^{\beta}_{\infty}(p)$, которая при $\beta < 1$ отличается от введенной в [19] для базовой модели стратегии $\tau^{m}_{\infty}(p)$ лишь первым ходом, а именно разбиением отрезка $[0,1]$ на сегменты, на которых эта стратегия постоянна.

При $p \in ((k-(1-\beta))/m, (k+\beta)/m] \bigcap [0,1]$, где $k = 0, 1, \ldots, m$, на первом шаге стратегии $\tau^{\beta}_{\infty}(p)$ Игрок 2 ставит $k$. На каждом последующем шаге $t$ ход Игрока 2 определяется действиями обоих игроков на $(t-1)$-м шаге также, как и в базовой модели при $\beta = 1$.

Эта стратегия Игрока 2 в $n$-шаговой игре гарантирует Игроку 2 проигрыш не больший, чем $H^{\beta}(p)$. Таким образом, получаем верхнюю границу значений $n$-шаговой игры, не зависящую от числа шагов $n$, что позволяет корректно определить игру неограниченной продолжительности.

$H^{\beta}(p)$ является вогнутой кусочно-линейной функцией, график которой состоит из $m+1$ линейных сегментов и определяется своими значениями в точках $(k+\beta)/m$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$:

$$H^{\beta}_{\infty}((k+\beta)/m) = \frac{1}{2}\left((m-(k+\beta))(k+\beta) + (1-\beta)\beta\right).$$

Далее приводится стратегия Игрока 1 $\sigma_\infty^\beta(p)$, обеспечивающая нижнюю зависящую от числа шагов $n$ границу значения $n$-шаговой игры. Совпадение при $n \to \infty$ нижней границы с функцией $H^\beta(p)$ означает, что игра неограниченной продолжительности $G_\infty^\beta(p)$ имеет значение, равное $H^\beta(p)$, а пара стратегий $\tau_\infty^\beta(p)$, $\sigma_\infty^\beta(p)$ – оптимальные стратегии игроков в этой игре.

Автор приводит два варианта оптимальной стратегии Игрока 1 $\sigma_\infty^{\beta,1}(p)$ и $\sigma_\infty^{\beta,2}(p)$. Стратегия $\sigma_\infty^{\beta,1}(p)$ порождает симметричное случайное блуждание апостериорных вероятностей по точкам $(k+\beta)/m$ до попадания в точки $\beta/m$ или $(m-1+\beta)/m$. После этого симметрия нарушается: так, например, в состоянии $\beta/m$ вероятность перехода в состояние 0 (момент поглощения) равна $1/(1+\beta)$, а в состояние $(1+\beta)/m$ равна $\beta/(1+\beta)$. При $\beta \to 1$ стратегия $\sigma_\infty^{\beta,1}(p)$ сходится к наискорейшей оптимальной стратегии Игрока 1 при $\beta = 1$.

Случайное блуждание апостериорных вероятностей, порождаемое стратегией $\sigma_\infty^{\beta,2}(p)$, в дополнение к точкам $(k+\beta)/m$ включает точки $k/m$. При $\beta \neq 1/2$ блуждание не является симметричным.

Для стратегии $\sigma_\infty^{\beta,1}(p)$ получить аналитические формулы длительности блуждания не удалось в силу сложностей из-за нарушения симметрии блуждания в точках $\beta/m$ и $(m-1+\beta)/m$, но численные расчеты показали, что при использовании стратегии $\sigma_\infty^{\beta,1}(p)$ игра заканчивается быстрее, чем при использовании стратегии $\sigma_\infty^{\beta,2}(p)$, и тем быстрее, чем ближе $\beta$ к границам отрезка $[0,1]$.

При любом значении $p \in [0,1]$, $\beta \in [0,1]$ и при числе допустимых ставок, не меньшем трех ($m \geq 3$), справедливо неравенство

$$V_\infty^\beta(p) \geq V_\infty^1(p) = V_\infty^0(p),$$

причем равенство достигается только при $p = k/m, k = 0,1,\ldots,m$.

Таким образом, при целой ожидаемой цене акции, равной $k$, значение игры не зависит от $\beta$ и равно $k(m-k)/2$. В противном случае, при $p \in (k/m,(k+1)/m)$ наиболее выгодным для инсайдера является значение $\beta(p)$, равное разности между ожидаемой ценой акции и ее целой частью, $\beta^1(p) = mp - k$, в этом случае априорная вероятность $p$ будет точкой излома функции $V_\infty^{\beta^1(p)}(p)$.

В работе [9] получено обобщение результатов на случай счетного числа состояний. При конечной дисперсии случайной цены акции, аналогично случаю $\beta = 1$ для построения оптимальной стратегии Игрока 1 используются симметричные представления одномерных вероятностных распределений с заданным средним в виде выпуклых комбинаций распределений с тем же средним и с носителем, содержащим не более двух точек.

В работе [10] рассматривается такая же $\beta$-модификация модели Де Мейера и Салей [17] с непрерывными ставками. Успешно следуя весьма сложной схеме этой работы, автор получает получает решение соответствующей повторяющейся игры для произвольного $\beta$. Оптимальные стратегии игроков зависят от параметра $\beta$. Однако значение игры и асимптотика случайной последовательности цен сделок от $\beta$ не зависит, что находится в соответствии с результатом работы Де Мейера [16] о независимости асимптотики от торгового механизма. Отметим, что работа [16] не касается решений конечно-шаговых игр.

## 4. Дискретные игры торга конечной продолжительности

Вопрос о получении решения $n$-шаговой игры $G_n^m(p)$ с дискретными допустимыми ставками остается открытым при $m > 2$. Случай двух допустимых ставок ($m = 2$) тривиален – обнаружение истинной цены акции Игроком 2 происходит на первом шаге и $V_n^2(p) = V_1^2(p) = \min\{p, 1-p\}$.

### 4.1. Одношаговые дискретные игры торга

При $m > 2$ нетривиальным оказывается решение даже одношаговой игры $G_1^m(p)$. В работе Сандомирской и Доманского [12] при произвольном значении высокой цены акции $m$ дается решение одношаговой игры торгов $G_1^m(p)$ для всех вероятностей $p$ высокой цены акции.

Очевидно, что в одношаговой игре при выборе случаем низкой ликвидной цены акции инсайдер делает ставку 0 при любой вероятности $p$, и матрица выигрыша инсайдера в состоянии $L$ сводится к строке

$$A^{L,m} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & m-1 \end{pmatrix}.$$

Эти позволяет свести решение игры $G_1^m(p)$ с неполной информацией к решению игры с полной информацией с матрицей выигрыша инсайдера

$$A^m(i,j) = \begin{cases} (1-p)j + p(m-i), & i > j; \\ (1-p)j, & i = j; \\ (1-p)j + p(-m+j), & i < j, \end{cases}$$

где $i \in I$ – ставка инсайдера в состоянии $H$, $j \in J$ – ставка неинформированного игрока.

Логика построения оптимальных стратегий обоих игроков в зависимости от вероятности выбора высокой цены следующая: при малых, близких к нулю, $p$ ставки обоих игроков минимальны, а при возрастании $p$ ставки обоих игроков тоже растут. При увеличении $p$ рост ставок обеспечивает расширение спектра выбираемых игроками смешанных стратегий.

При $p$ близких к $1/2$ у второго игрока наибольшая неопределенность, а значит, наибольший спектр ставок. Неопределенность минимальна при $p$ близких к нулю или единице.

Из общей теории игр с неполной информацией следует, что значение игры $V_1^m(p)$ является вогнутой кусочно-линейной функцией от $p$ с конечным числом промежутков линейности. Причем на каждом из этих промежутков оптимальная стратегия неинформированного игрока постоянна.

Неинформированный игрок на каждом этапе выравнивает выигрыши инсайдера при использовании инсайдером определенного набора ставок, исключая нулевую. Получены точки излома кусочно-линейной функции $V_1^m(p)$.

На основе анализа структуры ставок, используемых игроками в оптимальных стратегиях при различных $p$, разработан рекурсивный подход к вычислению оптимальных стратегий неинформированного игрока для всех вероятностей $p$. Говоря нестрого, рекурсия проводится по числу чистых стратегий, которые неинформированный Игрок 2 использует в своей оптимальной смешанной стратегии.

Оптимальная стратегия инсайдера выравнивает спектр найденной оптимальной стратегии Игрока 2. Функция распределения весов в ней найдена решением системы разностных уравнений, полученных из условий выравнивания. Базой для расчета элементов решений служат решения на концах отрезка $[0,1]$: при вероятностях $p$ достаточно близких к нулю или единице, игра решается в чистых стратегиях.

При отдалении до некоторого уровня этой вероятности от нуля или от единицы в оптимальных смешанных стратегиях игроков появляются две чистые стратегии и так далее.

Результаты проиллюстрированы с помощью компьютерного моделирования.

### 4.2. Решения $n$-шаговых игр с тремя допустимыми ставками

В работе [6] для $n$-шаговых игр $G^3_n(p)$ с тремя разумными допустимыми ставками 0, 1 и 2 в явном виде получены решения, которые выражаются с помощью возвратной последовательности второго порядка $\delta_n,\ \ n = 0, 1, 2, \ldots$, определяемой рекуррентными соотношениями

$$\delta_{n+1} = 2(\delta_n + \delta_{n-1}), \quad \delta_0 = 0, \quad \delta_1 = 2.$$

Для каждого интервала линейности функции значений $V^3_n(p)$ в явном виде с помощью последовательности $\delta_n$ описываются оптимальные стратегии обоих игроков.

Кусочно-линейная непрерывная функция значений $V^3_n(p)$ игры $G^3_n(p)$ на отрезке $[0, 1]$ имеет три точки негладкости: $1/3$, $p_n$, $2/3$, где

$$p_n = (\delta_{n-1} + \delta_n)/(\delta_{n-1} + 2\delta_n), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Функция $V^3_n(p)$ определена своими значениями на концах отрезка $V^3_n(0) = V^3_n(1) = 0$ и значениями в точках излома:

$$V^3_n(p) = \begin{cases} 1 - 2/3\delta_n & \text{при } p = 1/3, \\ 1 - 1/(2\delta_n + \delta_{n-1}) & \text{при } p = p_n, \\ 1 - 1/3\delta_{n-1} & \text{при } p = 2/3. \end{cases}$$

При $n \to \infty$ функции $V^3_n(p)$ сходятся к значению $V^3_\infty(p)$ игры неограниченной продолжительности $G^3_\infty(p)$ (см. п. 2.1).

Инсайдер управляет последовательностью апостериорных вероятностей высокой цены акции, которые вычисляются по его стратегиям на предшествующих шагах. Оптимальная стратегия инсайдера в игре $G^3_n(p)$ после первого шага генерирует апостериорную вероятность, равную $p_{n-1}$, после второго шага, равную $p_{n-2}$, и так далее, и, наконец, перед последним шагом, равную $p_1 = 1/2$.

Максимальный выигрыш от приватной информации в игре $G_n^3(p)$ инсайдер получает при априорной вероятности высокой цены акции $p = p_n$, что согласуется с тем, что в одношаговой игре его максимальный выигрыш достигается при $p = 1/2$.

## 5. Асимптотическое поведение значения игры

Ввиду трудности нахождения решения повторяющейся игры с неполной информацией (за полвека существования теории удалось найти решения лишь для нескольких игр), главным инструментом изучения повторяющихся игр с неполной информацией является качественный и асимптотический анализ их решений. Одной из основных асимптотических проблем является описание поведения значения игры при большом числе шагов.

### 5.1. Аппроксимация решений конечно-шаговых игр торга

В работе Сандомирской [25] установлено, что при $n \to \infty$ значение $n$-шаговой игры торгов $G_n^m(p)$ сходится к значению игры бесконечной продолжительности $G_\infty^m(p)$ экспоненциально быстро. Это – первый пример экспоненциальной сходимости значений. Напомним, что в классических примерах значение $n$-шаговой игры с неполной информацией при $n \to \infty$ имеет порядок $n$ или $\sqrt{n}$.

Решение игры $G_\infty^m(p)$ получено в явном виде (см. п.2.1). Однако, когда число шагов игры торга фиксировано, оптимальные стратегии Игроков 1 и 2 в игре неограниченной продолжительности перестают быть оптимальными, хотя и близки к таковым при большом числе шагов игры.

В [25] показано, что приведенная в п. 2.1 наискорейшая оптимальная стратегия $\sigma_\infty^m$ Игрока 1 в игре $G_\infty^m$ с неограниченной продолжительностью является его $\varepsilon_n$-оптимальной стратегией для любой $n$-шаговой игры, причем $\varepsilon_n$ при $n \to \infty$ убывает как минимум с экспоненциальной скоростью. Этот факт не верен для более медленных оптимальных стратегий Игрока 1 в игре $G_\infty^m(p)$.

Получена явная формула для разности между значением $V_\infty^m(p)$ игры с бесконечным числом шагов и гарантированным выигрышем Игрока 1 в $n$-шаговой игре при применении им стратегии $\sigma_\infty^m(p)$, которая является наискорейшей оптимальной стратегией в игре $G_\infty^m(p)$.

Эта разность обозначается $\varepsilon_n(p)$. При $p = k/m$

$$\varepsilon_n(k/m) = \sum_{l=1}^{[m/2]} \left(\cos\frac{\pi(2l-1)}{m}\right)^n D_l(k/m),$$

где коэффициенты $D_l(k/m)$ равны

$$D_l(k/m) = \frac{1}{2m}\sin\frac{\pi k(2l-1)}{m}\mathrm{ctg}\frac{\pi(2l-1)}{2m}\left(1+\mathrm{ctg}^2\frac{\pi(2l-1)}{2m}\right)$$

и $[\alpha]$ означает целую часть числа $\alpha$.

И принимая во внимание, что скорость сходимости $V_n^m$ to $V_\infty^m$ не меньше, чем скорость сходимости $\varepsilon_n$ к нулю, имеет место оценка

$$\sup_p |V_\infty(p) - V_n(p)| = O\left(\cos^n \pi/m\right).$$

Таким образом, значение $V_n(p)$ $n$-шаговой игры $G_n^m(p)$ сходится к значению $V_\infty^m(p)$ бесконечной игры $G_\infty^m(p)$ по меньшей мере экспоненциально быстро. Стратегия $\sigma_\infty$ является $\varepsilon_n$-оптимальной стратегией Игрока 1 в $n$-шаговой игре $G_n$, где $\varepsilon_n = O(\cos^n \pi/m)$.

Найденное в [6] для случая $m = 3$ значение игры $G_n^3(p)$ (см. п.3.2) позволяет вычислить супремум по $p$ модуля разности $V_\infty^3(p)$ и $V_n^3(p)$, который в этом случае оказывается равным $\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}(1+\sqrt{3})^n}$, что соответствует полученной оценке.

## 5.2. Характеризация асимптотики значений для класса игр, включающего игры торга

В работе Сандомирского [26] рассматриваются антагонистические повторяющиеся игры $\Gamma_n(\mathbf{p})$ с неполной информацией на стороне Игрока 2, в которых множества чистых стратегий игроков $I$, $J$ и множество состояний игры $K$ конечны. Как и в играх торга, финальный выигрыш равен ненормированной сумме одношаговых выигрышей. В играх $\Gamma_n(p)$ рассматриваемого класса предполагается, что асимметрия между игроками лишь информационная: значение одношаговой версии игры, в которой оба игрока не знают состояние игры, так называемой *не-обнаруживаемой* игры $\Gamma_1^{NR}(\mathbf{p})$, равно нулю при любой априорной вероятности $p$. Игры, обладающим этим свойством, автор называет *почти справедливыми*. Игры торга почти справедливы.

Для почти справедливых игр значение игры $V_n(\mathbf{p})$ может интерпретироваться, как доход Игрока 1, получаемый от реализации его информационного преимущества.

Автор дает ответ на вопрос, какое свойство почти справедливой игры «ответственно» за асимптотическое поведение значений $n$-шаговых игр. С точностью до дополнительного условия единственности оптимальной стратегии Игрока 2 на некотором интервале априорных вероятностей, получена характеризация возможного асимптотического поведения значения почти справедливой игры.

Напомним, что в непрерывных играх торга значение $n$-шаговой игры имеет порядок $\sqrt{n}$, а в дискретных играх торга и их модификациях при стремлении числа шагов к бесконечности значение соответствующих конечно-шаговых игр ограничено.

В дискретной игре торга неограниченной продолжительности с двумя состояниями $G^m_\infty(p)$ оптимальная стратегия неинформированного игрока зависит не от точного значения априорной вероятности $p$, а определяется лишь интервалом, к которому принадлежит $p$, причем число таких интервалов конечно. Таким образом, оптимальная стратегия Игрока 2 в игре $G^m_\infty(p)$ кусочно-постоянна, где число «кусков» конечно. Не трудно проверить, что в соответствующей не-обнаруживаемой одношаговой игре $\Gamma_1^{NR}(p)$ у Игрока 2 также есть оптимальная кусочно-постоянная стратегия: для обоих игроков оптимален выбор ставки, равной целой части ожидаемой цены актива. В не-обнаруживаемой одношаговой игре торгов с непрерывными ставками нет оптимальных кусочно-постоянных стратегий: единственные оптимальные стратегии игроков – ставить ожидаемую цену актива.

Назовем игру $\Gamma_n(\mathbf{p})$ *кусочной*, если в не-обнаруживаемой одношаговой игре $\Gamma_1^{NR}(\mathbf{p})$ у Игрока 2 есть кусочно-постоянная стратегия с конечным числом областей постоянства. Ввиду простоты решения игры $\Gamma_1^{NR}(\mathbf{p})$, это условие легко проверяемо. Сандомирский демонстрирует, что в классе почти справедливых игр это свойство игры отвечает за тип асимптотического поведения значения:

- если игра $\Gamma_n(\mathbf{p})$ кусочна, то значения игр $\Gamma_n(\mathbf{p})$ ограничены;

- если на некотором участке априорных распределений $\mathbf{p}$ оптимальная стратегия Игрока 2 единственна и принимает более, чем конечное число значений, то значение игры $\Gamma_n(\mathbf{p})$ растет как $\sqrt{n}$.

Результаты о сходимости значений игр из работ [19] и [17] являются следствием этого результата.

Подход работы Сандомирского базируется на идеях Де Мейера и Марино [18], которые связывают верхние границы значений с инвариантами рекуррентных уравнений, а также на явных конструкциях инвариантных функций, использующих геометрию метрики Канторовича [1].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вершик А.М. *Метрика Канторовича: начальная история и малоизвестные применения* // Зап. научн. сем. ПОМИ. Теория представлений, динамические системы. XI. Специальный выпуск. 2004. Т. 312. С. 69–85.

2. Доманский В.К., Крепс В.Л. *Повторяющиеся игры с асимметричной информацией и случайные блуждания цен на финансовых рынках* // Обозрение прикл. и промышл. матем. 2005. Т. 12. Вып. 4. С. 950–952.

3. Доманский В.К., Крепс В.Л. *Многошаговые торги акций в закрытом акционерном обществе и повторяющиеся игры n лиц с неполной информацией* // Экономическая наука современной России. 2008. № S1. С. 100–102.

4. Доманский В.К., Крепс В.Л. *Теоретико-игровая модель биржевых торгов: стратегические аспекты формирования цен на фондовых рынках* // Журнал Новой экономической ассоциации. 2011. Вып. 11. С. 39–62.

5. Доманский В.К., Крепс В.Л. *Игры торгов несколькими активами* // Математическая теория игр и ее приложения. 2014. Т. 6. Вып. 3. С. 32–53.

6. Крепс В.Л. *Повторяющиеся игры, моделирующие биржевые торги, и возвратные последовательности* // Изв. РАН, Теория и системы управления. 2009. Вып. 4. С. 109–120.

7. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Шевкопляс Е.В. *Теория игр.* Изд-во «БХВ-Петербург», 2012.

8. Пьяных А. *Об одной модификации модели биржевых торгов с инсайдером* // Математическая теория игр и ее приложения. 2014. Т. 6. Вып. 4. С. 68-–84.

9. Пьяных А. *Многошаговая модель биржевых торгов с элементами переговоров и счетным множеством состояний* // Управление большими системами. 2016. Т. 64. С. 6-–26 .

10. Пьяных А. *О модификации многошаговой модели биржевых торгов с непрерывными ставками и асимметричной информацией* // Математическая теория игр и ее приложения. 2016. Т. 8. Вып. 2. С. 91-—113.

11. Сандомирская М.С. *Теоретико-игровая динамическая модель инсайдерских торгов с ненулевым спрэдом* // Управление большими системами. 2014. Т. 40. С. 207–234.

12. Сандомирская М.С., Доманский В.К. *Решение одношаговой игры биржевых торгов с неполной информацией* // Математическая теория игр и ее приложения. 2012. Т. 4. Вып. 1. С. 32–54.

13. Aumann R.J., Maschler M. *Repeated Games with Incomplete Information.* Cambridge, Massachusetts–London, England: The MIT Press. 1995.

14. Bachelier L. *Theorie de speculation* // Ann. Ecole Norm. Sup. 1900. Vol. 17. P. 21–86.

15. Chatterjee K., Samuelson W. *Bargaining under Incomplete Information* // Operations Research. 1983. Vol. 31, no. 5. P. 835-–851.

16. De Meyer B. *Price dynamics on a stock market with asymmetric information* // Games and economic behavior. 2010. Vol. 69. P. 42–71.

17. De Meyer B., Moussa Saley H. *On the Strategic Origin of Brownian Motion in Finance* // Int. Journal of Game Theory. 2003. Vol. 31. P. 285–319.

18. De Meyer B., Marino A. *Continuous versus discrete market game.* Cowles Foundation Discussion Paper. 2005. No 1535.

19. Domansky V. *Repeated games with asymmetric information and random price fluctuations at finance markets* // Int. Journal of Game Theory. 2007. Vol. 36(2). P. 241–257.

20. Domansky V. *Symmetric representations of bivariate distributions* // Statistics and Probability Letters. 2013. Vol. 83. P. 1054–1061.

21. Domansky V., Kreps V. *Repeated games with asymmetric information modeling financial markets with two risky assets* // RAIRO Operations Research. 2013. Vol. 47. P. 251–272.

22. Domansky V., Kreps V., Sandomirskaia M. *A Survey on Discrete Bidding Games with Asymmetric Information* // Contributions to Game Theory and Management. 2013. Vol. 6. P. 89-–114.

23. Gensbittel F. *Asymptotic analysis of repeated games with incomplete information.* Thèse de doctorat de l'Université Paris 1, Panthéon-Sorbonne-Paris (10/12/2010), Bernard De Meyer (Dir). http:/tel.archives-ouvertes.fr/tel-00579522/fr/ (2010).

24. Kyle A.S. *Continuous Auctions and Insider Trading* // Econometrica. 1985. Vol. 53. P. 1315—1335.

25. Sandomirskaia M. *Repeated Bidding Games with Incomplete Information and Bounded Values: On the Exponential Speed of Convergence* // Int. Game Theory Rev. 2017. Vol. 19. – I.1. DOI: http://dx.doi.org/10.1142/S0219198916500171

26. Sandomirskiy F. *On Repeated Zero-Sum Games with Incomplete Information and Asymptotically Bounded Values* // Dynamic Games and Applications 21. Online publication date: 3-Mar-2017. DOI 10.1007/s13235-017-0217-7.

# BIDDING MODELS AND REPEATED GAMES WITH INCOMPLETE INFORMATION: A SURVEY

**Victoria L. Kreps**, NRU HSE and SPb Inst. for Econ. & Math. RAS, Dr.Sc. (vita_kreps@mail.ru).

*Abstract*: With the help of a simplified model of multistage bidding with asymmetrically informed agents De Meyer and Saley [17] demonstrate an idea of endogenous origin of Brownian component in the evolution of prices on stock markets: random price fluctuations may originate from strategic randomization of "insiders". The model is reduced to a repeated game with incomplete information. The present paper contains a survey of multiple researches inspired by this pioneering paper.

*Keywords*: bidding, repeated games, asymmetric information, optimal strategies, random walk, asymptotic behavior.