Математическая Теория Игр и её Приложения, т.9, в.3, с. 36–63

УДК 519.711.7
ББК 22.1

ТЕОРЕТИКО-ИГРОВАЯ МОДЕЛЬ ПОВЕДЕНИЯ КОНКУРИРУЮЩИХ ВИРТУАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА ДВУХСТОРОННЕМ РЫНКЕ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ

Владимир В. Мазалов*
Юлия В. Чиркова**
Институт прикладных математических исследований
Карельского научного центра РАН
185910, Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11
e-mail: vmazalov@krc.karelia.ru, julia@krc.karelia.ru

Джи Зенг***
Школа экономики и менеджмента
Университет Цинхуа
Пекин, 100084
e-mail: jie.academic@gmail.com

* Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №17-11-01079).

** Работа поддержана грантами РГНФ №15-02-00352_а, РФФИ №16-51-55006.

*** Работа поддержана грантами National Natural Science Foundation of China №61661136002, Tsinghua University Initiative Scientific Research Grant №20151080397.

Джами В. Лиен***
Факультет наук о решениях и управленческой экономике
Китайский институт Гонконга
Шатин, Гонконг, Китай
e-mail:jaimie.academic@gmail.com

Рассматривается рынок, на котором ряд крупных компаний предоставляют свои услуги населению через более мелкие, являющиеся «облачными» виртуальными операторами, перепродающими услуги крупных. Каждая из крупных компаний определяет цену за предоставление своих сервисов виртуальным операторам. Для каждой компании также известен размер клиентской базы и ресурс, характеризующий степень привлекательности данной компании для своих пользователей. Игра представляет собой повторение двухшаговых игр, где виртуальные операторы выбирают компании и назначают цены за услуги. Каждый виртуальный оператор должен выбрать компанию, с которой он будет сотрудничать, и определить цену, по которой он будет продавать населению свои услуги. Каждый виртуальный оператор определяет вероятность выбора компании и цену на услуги с учетом того, что распределение клиентов среди операторов задается спецификацией Хотеллинга. Каждый виртуальный оператор на каждом шаге стремится максимизировать свой выигрыш. В данной работе мы находим оптимальные стратегии виртуальных операторов и исследуем вопрос: может ли система достигнуть некоторого стационарного состояния в повторяющейся двухшаговой игре, или образуется повторяющийся цикл состояний?

Ключевые слова: облачные операторы, повторение двухшаговой игры, спецификация Хотеллинга, равновесие по Нэшу, стационарное состояние.

*** Работа поддержана грантами National Natural Science Foundation of China №61661136002, Tsinghua University Initiative Scientific Research Grant №20151080397.

1. Введение

Современные средства передачи информации, такие как Интернет и мобильная связь, привели к созданию рынка нового типа, в котором участие принимают виртуальные агенты, распределенные в пространстве. Формируются новые рыночные структуры, которые различаются по масштабу ресурсов и решаемых задач, цене и качеству сервиса и другим параметрам. История показала, что разделение сети и услуг привело к росту конкуренции в бывших монополиях связи и коммуникационных технологий. Рынки стали действовать в этих отраслях более эффективно из-за возросшей функциональной совместимости и снижения затрат на изменение конфигурации. Это привело к созданию облачных технологий и появлению облачных или виртуальных операторов, предлагающих разнообразные услуги на основе собственных, а также арендуемых у крупных компаний платформ и интерфейсов, что позволяет виртуальным операторам исключить капиталовложения, необходимые для построения и поддержания собственной инфраструктуры большой мощности (например, сотовой сети, вычислительных кластеров и сетей и т.п.).

Поэтому, как правило, облачные сервисы покупают вычислительные ресурсы у больших компаний, и получают доход за счет удобства представляемых услуг. Например, облачные фирмы, связанные с решением больших вычислительных задач, могут арендовать ресурсы компаний Google или Amazon. Операторы связи федерального значения, такие как Ростелеком, Транстелеком, предоставляют в аренду магистрали связи фирмам, продающим провайдерские услуги. Крупные операторы сотовой связи, такие как МТС, Мегафон, Билайн, предоставляют инфраструктуру своих сотовых сетей виртуальным операторам сотовой связи, таким как NetbyNet, Связной Мобайл и т.п., продающим услуги под собственной маркой. Сети сотовой связи также могут использоваться для передачи данных в различных облачных сервисах, например, для работы облачных центров отправки SMS-сообщений [10].

В таких условиях становятся актуальными задачи оптимальной организации и использования ресурсной базы рынка. К таким относятся определение оптимального числа и мощности узлов, составляющих платформу облачных сервисов [2], оптимизация схемы распределения заданий и потоков данных между сервисами с учетом требований на ресурсы [3, 6]. В условиях рынка, как правило, участники действуют эгоистично, конкурируя и стараясь увеличить свою собственную прибыль. Конкуренцию между облачными сервисами можно моделировать с помощью теории бескоалиционных и кооперативных игр.

Теоретико-игровая модель в данной работе представлена как двухшаговая игра следующего вида. На первом шаге игроки, виртуальные операторы, владельцы облачных сервисов, распределяются по крупным компаниям, собственникам ресурсов (связи, вычислительных и т.п.), и после этого объявляют цены на свои услуги. Пользователи, это люди, которые через Интернет или мобильные устройства выбирают тот или иной сервис, следуя своим личным предпочтениям.

Важным моментом в модели является распределение пользователей по сервисам. Здесь возможен подход, основанный на принципе Вардропа, когда пользователи минимизируют свои затраты [4, 9]. Другой подход основывается на распределении пользователей в виде логистической функции [8]. В данной работе мы предполагаем, что распределение пользователей по сервисам происходит согласно идее Хотеллинга [1], когда пользователи сравнивают полезности от использования той или иной фирмы.

После того, как определено распределение пользователей, определяются выигрыши всех облачных операторов, и находится равновесие по Нэшу [7] в данной конкурентной модели. Равновесие по Нэшу ищется в виде последовательности наилучших реакций игроков на поведение конкурентов. В разделе 3 равновесие ищется в модели рынка с двумя виртуальными операторами. При этом рассмотрены две модификации модели, в которых предпочтения пользователей касаются самих облачных фирм, а также владельцев ресурсов. В разделе 4 рассмотрена модель симметричных операторов, в которой предпочтения пользователей касаются лишь владельцев ресурсов. Такое предположение упрощает нахождение равновесия, поскольку операторы, покупающие ресурс у какой-то компании, ведут себя одинаково. Аналитические результаты сопровождаются численными примерами.

2. Модель рынка

Рассмотрим рынок, на котором ряд крупных компаний предоставляют свои услуги населению через более мелкие, являющиеся «облачными» виртуальными операторами, перепродающими услуги крупных. Здесь и далее под термином *оператор* мы будем понимать именно виртуального оператора, а крупных операторов, ресурсы которых перепродают виртуальные операторы, будем называть *компаниями*.

Каждая из крупных компаний i выделяет ресурс $r_i > 0$ и предоставляет его в аренду виртуальным операторам по цене $p_i > 0$ за единицу ресурса. Для компании также известен размер клиентской базы n_i. Ресурс $r_i > 0$ характеризует объем и качество услуг, предоставляемых данной компанией, и, соответственно, степень привлекательности данной компании для своих пользователей.

Каждый виртуальный оператор должен выбрать, с какой из крупных компаний он будет сотрудничать, а также по какой цене будет продавать услуги населению. Каждый из виртуальных операторов j определяет компании, с которыми он будет заключать договор. Положим $x_{ij} = 1$, если оператор j работает с компанией i, и $x_{ij} = 0$ иначе. Вначале удобно будет предполагать, что $0 \leq x_{ij} \leq 1$. Интерпретировать это можно как вероятность, с которой оператор j сотрудничает с компанией i. Затем каждый оператор j объявляет q_j, цену на продаваемые населению услуги.

В зависимости от этих характеристик покупатели выбирают, к какому из виртуальных операторов обращаться. При этом покупателю при выборе оператора важно, чтобы его цена на услуги была как можно ниже, а показатель привлекательности услуг и вероятность того, что данный оператор предоставляет услуги именно той компании, клиентом которой он является, как можно выше. Обозначим $h_{ij} = S + r_i x_{ij} - q_j$ полезность клиента компании i от выбора оператора j. Покупая у оператора единицу услуги, полезность которой равна S, клиент платит за услугу q_j и получает ресурс (повышенное качество услуг, дополнительные возможности, скидку) r_i, если данный оператор сотрудничает с его компанией. Выбирая между операторами j и l, клиент сравнивает, где полезность выше.

Каждый оператор j стремится максимизировать свой общий доход, который для известных x и q выглядит как $u_j(x,q) + C_j$, где $u_j(x,q)$ строится в форме [5] *доход_ от_ клиента* * *число_ клиентов* – *затраты* и включает выигрыш (или затраты в случае его отрицательности), зависящий от стратегий игроков, а C_j – некоторая постоянная достаточно большая величина, обеспечивающая положительность дохода и включающая полезность арендуемого ресурса для оператора j и, возможно, дополнительные источники финансирования оператора (например, размер гранта, полученного оператором j на создание бизнеса). Далее в качестве функции выигрыша оператора j мы будем рассматривать часть $u_j(x,q)$, которая может оказаться отрицательной, предполагая, что общая величина его дохода положительна.

3. Обобщенная модель Хотеллинга для двух игроков

Пусть на рынке есть два оператора ($j = 1, 2$), конкурирующие между собой. Тогда доля клиентов компании i, которые выберут оператора j, определяется как $\frac{1}{2} + \frac{h_{ij} - h_{i(3-j)}}{2k_{ij}}$. Здесь коэффициент k_{ij} определяет предпочтения клиентов и отражает уровень недовольства клиентов компании i обслуживанием у оператора j и может быть связан с труднодоступностью точек обслуживания и транспортными расходами, низким уровнем сервиса и т.п. При этом, если для случая спецификации Хотеллинга [1], когда $k_{ij} = k_i$ для всех возможных j, все множество клиентов строго разбивается на две группы по операторам, в обобщенном случае эти группы могут пересекаться (то есть какая-то часть клиентов может обслуживаться у обоих операторов) и их объединение может включать не всех клиентов (какие-то клиенты могут обслуживаться в компаниях напрямую без операторов). При этом мы считаем, что параметры задачи задаются таким образом, что доля клиентов компании i, которые выберут оператора j, не превосходит единицы для всех i, j. Этого можно добиться, например, выбрав достаточно большие значения k_{ij}. Также считаем, что $(k_{ij} - k_{i(3-j)})(h_{ij} - h_{i(3-j)}) \geq 0$, чтобы число клиентов компании i, выбравших сервис первого или второго оператора, не превосходило n_i.

Функция выигрыша для каждого оператора $j = 1, 2$ для известных x и q равна

$$u_j(x,q) = q_j \sum_i n_i \left(\frac{1}{2} + \frac{h_{ij} - h_{i(3-j)}}{2k_{ij}}\right) - \sum_i \frac{x_{ij}}{x_{i1} + x_{i2}} p_i r_i.$$

В начале игры заданы первоначальные значения цен q, по которым операторы продают услуги клиентам. Система переходит в новое состояние за два шага. На первом шаге операторы для текущих цен q определяют стратегии x – распределение своего выбора между крупными компаниями. На втором шаге они в соответствии с выбором компаний оптимизируют q, цены на продажу услуг клиентам. Далее игра повторяется – для новой цены корректируется распределение выбора компаний и для нового распределения выбирается оптимальная цена. После ряда итераций система может попасть в стационарное состояние, которое является равновесием по Нэшу для игры, в которой операторы выбирают компании, и одновременно равновесием по Нэшу в игре выбора оптимальных цен на продаваемые услуги. Заметим, что на любом из шагов может оказаться, что существует не одно равновесие, поэтому мы будем различать термины «стационарное» и «равновесное» состояние.

Пусть на рынке есть две крупных компании, между которыми делают выбор операторы. Обозначим x_1 и x_2 – вероятности, соответственно, первому и второму оператору выбрать первую компанию. Тогда $1-x_1$ и $1-x_2$ – вероятности выбрать вторую компанию. Функции выигрыша примут следующий вид

$$\begin{aligned} &u_1(x,q) = \\ &\frac{q_1}{2}\left((n_1+n_2) - (q_1-q_2)\left(\frac{n_1}{k_{11}} + \frac{n_2}{k_{21}}\right) + \left(\frac{n_1 r_1}{k_{11}} - \frac{n_2 r_2}{k_{21}}\right)(x_1 - x_2)\right) \\ &\qquad - \frac{x_1}{x_1+x_2} p_1 r_1 - \frac{1-x_1}{2-x_1-x_2} p_2 r_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &u_2(x,q) = \\ &\frac{q_2}{2}\left((n_1+n_2) + (q_1-q_2)\left(\frac{n_1}{k_{12}} + \frac{n_2}{k_{22}}\right) - \left(\frac{n_1 r_1}{k_{12}} - \frac{n_2 r_2}{k_{22}}\right)(x_1 - x_2)\right) \\ &\qquad - \frac{x_2}{x_1+x_2} p_1 r_1 - \frac{1-x_2}{2-x_1-x_2} p_2 r_2. \end{aligned}$$

По x_j каждая функция u_j выпукла. Значит, оптимальное значение x_j будет находиться на одном из концов отрезка $[0,1]$, то есть при выборе компаний оптимальными будут чистые стратегии.

Рассмотрим первый шаг перехода, когда операторы выбирают компании. Найдем наилучший ответ первого игрока на стратегию второго выбрать первую компанию $x_2 = 1$. В этом случае выигрыш первого игрока определяется как

$$
\begin{aligned}
&u_1(x_1|x_2 = 1, q) = \\
&\frac{q_1}{2}\left((n_1+n_2) - (q_1 - q_2)\left(\frac{n_1}{k_{11}} + \frac{n_2}{k_{21}}\right) + \left(\frac{n_1 r_1}{k_{11}} - \frac{n_2 r_2}{k_{21}}\right)(x_1 - 1)\right) \\
&\qquad\qquad\qquad - \frac{x_1}{x_1+1}p_1 r_1 - \frac{1-x_1}{1-x_1}p_2 r_2 = \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \alpha(q) + \frac{q_1 x_1}{2}\left(\frac{n_1 r_1}{k_{11}} - \frac{n_2 r_2}{k_{21}}\right) - \frac{x_1}{x_1+1}p_1 r_1,
\end{aligned}
$$

где $\alpha(q)$ обозначает не зависящее от x_1 слагаемое. Выигрыш является выпуклой по x_1 функцией с наибольшим значением на одном из концов отрезка $[0,1]$.

Обозначим для сокращения записи $R_j = \frac{n_1 r_1}{k_{1j}} - \frac{n_2 r_2}{k_{2j}}$, $j = 1, 2$. Тогда наилучший ответ первого игрока на стратегию второго $x_2 = 1$ определяется как $x_1 = \begin{cases} 1, \text{ если } \frac{q_1}{2}R_1 - \frac{p_1 r_1}{2} \geq 0, \\ 0, \text{ если } \frac{q_1}{2}R_1 - \frac{p_1 r_1}{2} \leq 0. \end{cases}$ Заметим, что если $\frac{q_1}{2}R_1 - \frac{p_1 r_1}{2} = 0$, то наилучший ответ принадлежит множеству из двух вариантов $\{0,1\}$. Аналогично, наилучший ответ первого игрока на стратегию второго $x_2 = 0$ определяется как $x_1 = \begin{cases} 1, \text{ если } \frac{q_1}{2}R_1 + \frac{p_2 r_2}{2} \geq 0, \\ 0, \text{ если } \frac{q_1}{2}R_1 + \frac{p_2 r_2}{2} \leq 0, \end{cases}$

Наилучший ответ второго игрока на стратегию первого $x_1 = 0$ определяется как $x_2 = \begin{cases} 1, \text{ если } \frac{q_2}{2}R_2 + \frac{p_2 r_2}{2} \geq 0, \\ 0, \text{ если } \frac{q_2}{2}R_2 + \frac{p_2 r_2}{2} \leq 0, \end{cases}$ и наилучший ответ второго игрока на стратегию первого $x_1 = 1$ определяется как $x_2 = \begin{cases} 1, \text{ если } \frac{q_2}{2}R_2 - \frac{p_1 r_1}{2} \geq 0, \\ 0, \text{ если } \frac{q_2}{2}R_2 - \frac{p_1 r_1}{2} \leq 0. \end{cases}$

Тогда получаем следующие варианты равновесного выбора компаний в условиях текущих цен q:

$$x^*(q) = (x_1^*(q), x_2^*(q)) = \begin{cases} (0,0), \text{ если } \begin{cases} q_1 R_1 \le -p_2 r_2, \\ q_2 R_2 \le -p_2 r_2, \end{cases} \\ (0,1), \text{ если } \begin{cases} q_1 R_1 \le p_1 r_1, \\ q_2 R_2 \ge -p_2 r_2, \end{cases} \\ (1,0), \text{ если } \begin{cases} q_1 R_1 \ge -p_2 r_2, \\ q_2 R_2 \le p_1 r_1, \end{cases} \\ (1,1), \text{ если } \begin{cases} q_1 R_1 \ge p_1 r_1, \\ q_2 R_2 \ge p_1 r_1. \end{cases} \end{cases} \tag{3.1}$$

В этих случаях каждая стратегия игрока является наилучшим ответом на стратегию противника, поэтому никому не выгодно отклоняться. Заметим, что единоличное изменение своей стратегии любым из игроков вызывает изменение стратегии противника, соответствующее наилучшему ответу на новую стратегию. Заметим также, что равновесие в чистых стратегиях на первом шаге существует не всегда. Если R_1 и R_2 одновременно положительны или отрицательны, чистое равновесие существует (в некоторых случаях чистых равновесий может быть два или три), но если они имеют разные знаки, то есть области для значений q, где чистого равновесия нет. Например, если $R_1 < 0$ и $R_2 > 0$, то равновесия в чистых стратегиях нет при выполнении условий $\frac{p_1 r_1}{R_1} < q_1 < -\frac{p_2 r_2}{R_1}$ и $-\frac{p_2 r_2}{R_2} < q_2 < \frac{p_1 r_1}{R_2}$.

Рассмотрим следующий шаг, на котором операторы назначают цены на продаваемые услуги при уже определенном распределении между компаниями x. Будем считать отрицательные значения цен q допустимыми, показывающими, что оператор тратит средства на рекламные акции, минимизируя затраты. Каждая из функций u_j по q_j вогнута и представляет собой параболу с ветвями вниз. Это означает, что оптимальной стратегией назначения цены q_j является точка максимума u_j по q_j.

Наилучшим ответом первого игрока на стратегию второго q_2 является

$$q_1 = \frac{n_1 + n_2 + q_2\left(\frac{n_1}{k_{11}} + \frac{n_2}{k_{21}}\right) + R_1(x_1 - x_2)}{2\left(\frac{n_1}{k_{11}} + \frac{n_2}{k_{21}}\right)}.$$

Наилучший ответ второго игрока на стратегию первого q_1

$$q_2 = \frac{n_1 + n_2 + q_1\left(\frac{n_1}{k_{12}} + \frac{n_2}{k_{22}}\right) - R_2(x_1 - x_2)}{2\left(\frac{n_1}{k_{12}} + \frac{n_2}{k_{22}}\right)}.$$

Отсюда получим равновесные цены

$$\begin{aligned} q^*(x) = (q_1^*(x), q_2^*(x)) = \\ \left(\frac{n_1+n_2}{3}\left(\frac{2}{K_1} + \frac{1}{K_2}\right) + \frac{x_1 - x_2}{3}\left(\frac{2R_1}{K_1} - \frac{R_2}{K_2}\right),\right. \\ \left.\frac{n_1+n_2}{3}\left(\frac{2}{K_2} + \frac{1}{K_1}\right) - \frac{x_1 - x_2}{3}\left(\frac{2R_2}{K_2} - \frac{R_1}{K_1}\right)\right) = \\ \left(\frac{(n_1+n_2)(K_1+2K_2) + (x_1-x_2)(2R_1K_2 - R_2K_1)}{3K_1K_2},\right. \\ \left.\frac{(n_1+n_2)(2K_1+K_2) - (x_1-x_2)(2R_2K_1 - R_1K_2)}{3K_1K_2}\right), \end{aligned} \tag{3.2}$$

где $K_j = \frac{n_1}{k_{1j}} + \frac{n_2}{k_{2j}}$, $j = 1, 2$.

Таким образом, действуя оптимально, при каждом переходе система будет менять свое состояние по следующему правилу. Пусть состояние системы перед выполнением первого шага перехода s, когда переопределяется выбор компаний, описывается как $x^{(s)} = (x_1^{(s)}, x_2^{(s)})$. Ему соответствует пара значений оптимальных цен $q^{(s)} = (q_1^*(x^{(s)}), q_2^*(x^{(s)}))$, определяемых, согласно (3.2). Тогда следующее состояние, согласно (3.1), определяется как $(x_1^*(q^{(s)}), x_2^*(q^{(s)}))$.

Перед выполнением перехода $s > 1$, когда хотя бы один раз были определены равновесное распределение выбора компаний и цены на продаваемые услуги, возможны четыре состояния системы:

1) $(0,0)$ с ценами $\left(\frac{(n_1+n_2)(K_1+2K_2)}{3K_1K_2}, \frac{(n_1+n_2)(2K_1+K_2)}{3K_1K_2}\right)$,

2) $(0,1)$ с $\left(\frac{(n_1+n_2)(K_1+2K_2)-(2R_1K_2-R_2K_1)}{3K_1K_2}, \frac{(n_1+n_2)(2K_1+K_2)+(2R_2K_1-R_1K_2)}{3K_1K_2}\right)$,

3) $(1,0)$ с $\left(\frac{(n_1+n_2)(K_1+2K_2)+(2R_1K_2-R_2K_1)}{3K_1K_2}, \frac{(n_1+n_2)(2K_1+K_2)-(2R_2K_1-R_1K_2)}{3K_1K_2}\right)$,

4) $(1,1)$ с $\left(\frac{(n_1+n_2)(K_1+2K_2)}{3K_1K_2}, \frac{(n_1+n_2)(2K_1+K_2)}{3K_1K_2}\right)$.

3.1. Ориентированные на компании предпочтения клиентов

Пусть по-прежнему у нас на рынке есть два оператора ($j = 1, 2$), конкурирующие между собой. Пусть доля клиентов компании i, которые выберут оператора j определяется как $\frac{1}{2} + \frac{h_{ij} - h_{i(3-j)}}{2k_i}$, согласно спецификации Хотеллинга [1], где коэффициент k_i отражает уровень консервативности клиентов компании i, неудобство смены оператора для них и степень неготовности переходить от одного оператора к другому. В этом случае суммарное количество клиентов компании i, выбравших первого или второго оператора, равно n_i.

Функции выигрыша примут следующий вид:

$$u_1(x,q) = \frac{q_1}{2}\left((n_1+n_2)-(q_1-q_2)\left(\frac{n_1}{k_1}+\frac{n_2}{k_2}\right)+(x_1-x_2)\left(\frac{n_1r_1}{k_1}-\frac{n_2r_2}{k_2}\right)\right) - \frac{x_1}{x_1+x_2}p_1r_1 - \frac{(1-x_1)}{2-x_1-x_2}p_2r_2,$$

$$u_2(x,q) = \frac{q_2}{2}\left((n_1+n_2)+(q_1-q_2)\left(\frac{n_1}{k_1}+\frac{n_2}{k_2}\right)-(x_1-x_2)\left(\frac{n_1r_1}{k_1}-\frac{n_2r_2}{k_2}\right)\right) - \frac{x_2}{x_1+x_2}p_1r_1 - \frac{(1-x_2)}{2-x_1-x_2}p_2r_2.$$

Для определенности предположим, не умаляя общности, что $\frac{n_1r_1}{k_1}-\frac{n_2r_2}{k_2} \geq 0$, иначе перенумеруем компании. Обозначим разницу $R = \frac{n_1r_1}{k_1}-\frac{n_2r_2}{k_2}$.

При выборе операторами распределения по компаниям возможны следующие равновесия:

$$x^*(q) = (x_1^*(q), x_2^*(q)) = \begin{cases} (0,0), \text{ если } \begin{cases} q_1R \leq -p_2r_2, \\ q_2R \leq -p_2r_2, \end{cases} \\ (0,1), \text{ если } \begin{cases} q_1R \leq p_1r_1, \\ q_2R \geq -p_2r_2, \end{cases} \\ (1,0), \text{ если } \begin{cases} q_1R \geq -p_2r_2, \\ q_2R \leq p_1r_1, \end{cases} \\ (1,1), \text{ если } \begin{cases} q_1R \geq p_1r_1, \\ q_2R \geq p_1r_1. \end{cases} \end{cases} \tag{3.3}$$

В этих случаях каждая стратегия игрока является наилучшим ответом на стратегию противника, поэтому никому не выгодно отклоняться.

Равновесие при выборе операторами цен на предоставляемые услуги имеет вид

$$q^*(x) = (q_1^*(x), q_2^*(x)) = \left(\frac{k_1k_2(n_1+n_2)}{n_1k_2+n_2k_1} + \frac{(x_1-x_2)(n_1r_1k_2-n_2r_2k_1)}{3(n_1k_2+n_2k_1)}, \frac{k_1k_2(n_1+n_2)}{n_1k_2+n_2k_1} - \frac{(x_1-x_2)(n_1r_1k_2-n_2r_2k_1)}{3(n_1k_2+n_2k_1)}\right). \quad (3.4)$$

Следующий вопрос – придет ли система в стационарное состояние при многократном повторении двухшаговой игры, или образуется повторяющийся цикл состояний?

Перед выполнением перехода $s > 1$, когда хотя бы один раз были определены равновесное распределение выбора компаний и цены на продаваемые услуги, возможны четыре состояния системы: 1) $(0,0)$ с ценами $\left(\frac{k_1k_2(n_1+n_2)}{n_1k_2+n_2k_1}, \frac{k_1k_2(n_1+n_2)}{n_1k_2+n_2k_1}\right)$,
2) $(0,1)$ с $\left(\frac{k_1k_2(n_1+n_2)}{n_1k_2+n_2k_1} - \frac{(n_1r_1k_2-n_2r_2k_1)}{3(n_1k_2+n_2k_1)}, \frac{k_1k_2(n_1+n_2)}{n_1k_2+n_2k_1} + \frac{(n_1r_1k_2-n_2r_2k_1)}{3(n_1k_2+n_2k_1)}\right)$,
3) $(1,0)$ с $\left(\frac{k_1k_2(n_1+n_2)}{n_1k_2+n_2k_1} + \frac{(n_1r_1k_2-n_2r_2k_1)}{3(n_1k_2+n_2k_1)}, \frac{k_1k_2(n_1+n_2)}{n_1k_2+n_2k_1} - \frac{(n_1r_1k_2-n_2r_2k_1)}{3(n_1k_2+n_2k_1)}\right)$,
4) $(1,1)$ с $\left(\frac{k_1k_2(n_1+n_2)}{n_1k_2+n_2k_1}, \frac{k_1k_2(n_1+n_2)}{n_1k_2+n_2k_1}\right)$.

а) Состояние $(0,0)$ не может быть стационарным, так как для него не выполняются условия равновесия для (3.3), и система перейдет из него в одно из трех оставшихся состояний.

б) Рассмотрим четвертое состояние системы $(1,1)$. Здесь $q_1^{(s)} = q_2^{(s)}$. Если выполняются условия для равновесного выбора компаний $(1,1)$ из (3.3), то система попала в стационарное состояние. Иначе оба условия не выполняются. Тогда система переходит в $(0,1)$ или в $(1,0)$. При этом у оператора, выбирающего первую компанию, цена увеличится, а у того, кто выбирает вторую компанию, уменьшится, что обеспечит выполнение условий равновесия и стационарность нового состояния.

в) Пусть система во втором состоянии $(0,1)$. Второе условие из (3.3) для данного состояния выполнено, так как $q_2^{(s)} > 0$. Если выполнено первое условие, то система в стационарном состоянии. Если первое условие не выполнено, система перейдет в состояние $(1,1)$, которое станет стационарным, так как $q_1^{(s+1)} = q_2^{(s+1)}$ увеличится по сравнению с $q_1^{(s)}$, и будут выполнены оба условия для данного состояния.

г) Пусть система в третьем состоянии $(1,0)$. Первое условие из (3.3) для данного состояния выполнено, так как $q_1^{(s)} > 0$. Если выполнено второе условие, то система в стационарном состоянии. Иначе по аналогии с предыдущим пунктом система перейдет в стационарное состояние $(1,1)$.

В итоге вышеприведенного анализа можно сделать следующие выводы для системы, в которой $\frac{n_1 r_1}{k_1} \geq \frac{n_2 r_2}{k_2}$.

1. Система не более чем за три перехода попадает в стационарное состояние. Причем за первый переход система попадает в одно из перечисленных четырех состояний. Далее самый длинный путь за два перехода в стационарное состояние возможен, если на первом переходе система попадает в состояние $(0,0)$.

2. Возможные стационарные состояния системы определяются параметрами системы. Система может прийти в стационарные состояния $(0,1)$ и $(1,0)$, если

$$\left(\frac{k_1 k_2 (n_1+n_2)}{n_1 k_2 + n_2 k_1} - \frac{(n_1 r_1 k_2 - n_2 r_2 k_1)}{3(n_1 k_2 + n_2 k_1)}\right) R \leq p_1 r_1,$$

и в состояние $(1,1)$, если

$$\frac{k_1 k_2 (n_1+n_2)}{n_1 k_2 + n_2 k_1} R \geq p_1 r_1.$$

Заметим, что невыполнение второго условия означает выполнение первого, однако при

$$\frac{k_1 k_2 (n_1+n_2)}{n_1 k_2 + n_2 k_1} - \frac{(n_1 r_1 k_2 - n_2 r_2 k_1)}{3(n_1 k_2 + n_2 k_1)} \leq \frac{p_1 r_1}{R} \leq \frac{k_1 k_2 (n_1+n_2)}{n_1 k_2 + n_2 k_1}$$

оба условия выполнены и любое из трех состояний является стационарным.

3. Равновесные и стационарные состояния системы не зависят от цены на аренду услуг второй компании.

Пример 3.1. Пусть у компаний одинаковое число клиентов $n_1 = n_2 = 10$, первая выделяет больший ресурс ($r_1 = 1$, $r_2 = 0.5$), но и цены у нее выше ($p_1 = 5$, $p_2 = 1$), и уровень недовольства первой компанией меньше ($k_1 = 1$, $k_2 = 2$). Пусть начальные цены операторов на услуги $q_1 = 1$, $q_2 = 0.5$. Для таких цен, согласно (3.3), получаем равновесное распределение на рынке $x^{(1)} = (1, 0)$. Согласно (3.4), новые цены $q^{(1)} \approx (1.5, 1.667)$. Для новых цен, согласно (3.3), распределение $x^{(2)} = (1, 1)$. Для распределения $x^{(2)}$ новые цены $q^{(2)} = (1.333, 1.333)$, для которых $x^{(3)} = x^{(2)} = (1, 1)$. То есть система пришла в стационарное состояние за два шага.

3.2. Ориентированные на операторов предпочтения

Пусть доля клиентов компании i, которые выберут оператора j определяется как $\frac{1}{2} + \frac{h_{ij} - h_{i(3-j)}}{2k_j}$, где коэффициент k_j отражает уровень недовольства клиентов обслуживанием у оператора j и может быть связан с труднодоступностью точек обслуживания и транспортными расходами, низким уровнем сервиса и т.п.

Функции выигрыша примут следующий вид:

$$u_1(x, q) = \frac{q_1}{2k_1}\left((n_1 + n_2)(k_1 - q_1 + q_2) + (n_1 r_1 - n_2 r_2)(x_1 - x_2)\right) - \frac{x_1}{x_1 + x_2} p_1 r_1 - \frac{(1 - x_1)}{2 - x_1 - x_2} p_2 r_2,$$

$$u_2(x, q) = \frac{q_2}{2k_2}\left((n_1 + n_2)(k_2 + q_1 - q_2) - (n_1 r_1 - n_2 r_2)(x_1 - x_2)\right) - \frac{x_2}{x_1 + x_2} p_1 r_1 - \frac{(1 - x_2)}{2 - x_1 - x_2} p_2 r_2.$$

При выборе операторами распределения по компаниям возможны следующие ситуации равновесия:

$$x^*(q) = (x_1^*(q), x_2^*(q)) = \begin{cases} (0,0), \text{ если } \begin{cases} q_1(n_1 r_1 - n_2 r_2) \le -p_2 r_2 k_1, \\ q_2(n_1 r_1 - n_2 r_2) \le -p_2 r_2 k_2, \end{cases} \\ (0,1), \text{ если } \begin{cases} q_1(n_1 r_1 - n_2 r_2) \le p_1 r_1 k_1, \\ q_2(n_1 r_1 - n_2 r_2) \ge -p_2 r_2 k_2, \end{cases} \\ (1,0), \text{ если } \begin{cases} q_1(n_1 r_1 - n_2 r_2) \ge -p_2 r_2 k_1, \\ q_2(n_1 r_1 - n_2 r_2) \le p_1 r_1 k_2, \end{cases} \\ (1,1), \text{ если } \begin{cases} q_1(n_1 r_1 - n_2 r_2) \ge p_1 r_1 k_1, \\ q_2(n_1 r_1 - n_2 r_2) \ge p_1 r_1 k_2. \end{cases} \end{cases} \tag{3.5}$$

Равновесие при выборе операторами цен на предоставляемые услуги имеет вид

$$q^*(x) = (q_1^*(x), q_2^*(x)) = \left(\frac{2k_1+k_2}{3} + \frac{(x_1-x_2)(n_1r_1-n_2r_2)}{3(n_1+n_2)}, \frac{2k_2+k_1}{3} - \frac{(x_1-x_2)(n_1r_1-n_2r_2)}{3(n_1+n_2)}\right). \quad (3.6)$$

Проверим, как и для предыдущего случая, придет ли система в стационарное состояние при многократном повторении двухшаговой игры, или образуется повторяющийся цикл состояний. Пусть для определенности $n_1r_1 \geq n_2r_2$, иначе перенумеруем компании.

Перед выполнением перехода $s > 1$, когда хотя бы один раз были определены равновесное распределение выбора компаний и цены на продаваемые услуги, возможны четыре состояния системы:
1) $(0,0)$ с ценами $(\frac{2k_1+k_2}{3}, \frac{2k_2+k_1}{3})$,
2) $(0,1)$ с ценами $(\frac{2k_1+k_2}{3} - \frac{(n_1r_1-n_2r_2)}{3(n_1+n_2)}, \frac{2k_2+k_1}{3} + \frac{(n_1r_1-n_2r_2)}{3(n_1+n_2)})$,
3) $(1,0)$ с ценами $(\frac{2k_1+k_2}{3} + \frac{(n_1r_1-n_2r_2)}{3(n_1+n_2)}, \frac{2k_2+k_1}{3} - \frac{(n_1r_1-n_2r_2)}{3(n_1+n_2)})$,
4) $(1,1)$ с ценами $(\frac{2k_1+k_2}{3}, \frac{2k_2+k_1}{3})$.

а) Из первого состояния система перейдет в одно из состояний $(0,1)$, $(1,0)$ или $(1,1)$.

б) Рассмотрим четвертое состояние системы $(1,1)$. Если выполняются условия для равновесного выбора компаний $(1,1)$ из (3.5), то система попала в стационарное состояние. Если не выполняется первое из условий, то система перейдет в состояние $(0,1)$. При этом $q_1^{(s+1)}$ уменьшается по сравнению с $q_1^{(s)}$, а $q_2^{(s+1)}$ увеличивается по сравнению с $q_2^{(s)}$, то есть сохраняется выполнение условий для данного состояния на следующем переходе $s+1$, и данное состояние становится стационарным для системы. Аналогично, если не выполняется второе из условий, то система перейдет в состояние $(1,0)$, которое также станет началом стационарного состояния. Если не выполняются оба условия, то возможен переход в любое из состояний $(0,1)$ или $(1,0)$, которое станет стационарным.

в) Пусть система во втором состоянии $(0,1)$. Второе условие для данного состояния выполнено, так как $q_2^{(s)} > 0$. Если выполнено первое условие, то система в стационарном состоянии. Пусть первое условие не выполнено. Тогда возможен переход либо в состояние $(1,1)$, либо в состояние $(1,0)$. Если выполнены оба условия состояния $(1,1)$, то будет выполнен переход в это состояние, назначены цены для данного состояние и, в соответствии с пунктом б), система не более чем за один переход попадет в стационарное состояние. Если же не выполняется второе условие для $(1,1)$, то система переходит в состояние $(1,0)$. В данном состоянии $q_1^{(s+1)}$ увеличится по сравнению с $q_1^{(s)}$, а $q_2^{(s+1)}$ уменьшится по сравнению с $q_2^{(s)}$, то есть сохранится выполнение условий для состояния $(1,0)$, и данное состояние станет стационарным.

г) Пусть система в третьем состоянии $(1,0)$. Первое условие для данного состояния выполнено, так как $q_1^{(s)} > 0$. Если выполнено второе условие, то система в стационарном состоянии. Пусть второе условие не выполнено. Тогда возможен переход либо в состояние $(1,1)$, либо в состояние $(0,1)$. Если выполнены оба условия состояния $(1,1)$, то будет выполнен переход в это состояние, назначены цены для данного состояние и, в соответствии с пунктом б), система не более чем за один переход попадет в стационарное состояние. Если же не выполняется первое условие для $(1,1)$, то система переходит в состояние $(0,1)$. В данном состоянии $q_1^{(s+1)}$ уменьшится по сравнению с $q_1^{(s)}$, а $q_2^{(s+1)}$ увеличится по сравнению с $q_2^{(s)}$, то есть сохранится выполнение условий для состояния $(0,1)$, и данное состояние станет стационарным.

В итоге вышеприведенного анализа можно сделать следующие выводы для системы, в которой $n_1r_1 \geq n_2r_2$.

1. Система, как и в предыдущем случае не более чем за три перехода попадает в стационарное состояние.

2. Система может прийти в следующие стационарные состояния (x_1, x_2), если ее параметры таковы, что выполняются следующие условия.

$$(x_1, x_2) = \begin{cases} (0,1), \text{ если } \left(\frac{2k_1+k_2}{3} - \frac{(n_1r_1-n_2r_2)}{3(n_1+n_2)}\right)(n_1r_1 - n_2r_2) \leq p_1r_1k_1, \\ (1,0), \text{ если } \left(\frac{2k_2+k_1}{3} - \frac{(n_1r_1-n_2r_2)}{3(n_1+n_2)}\right)(n_1r_1 - n_2r_2) \leq p_1r_1k_2, \\ (1,1), \text{ если } \begin{cases} \frac{2k_1+k_2}{3}(n_1r_1 - n_2r_2) \geq p_1r_1k_1, \\ \frac{2k_2+k_1}{3}(n_1r_1 - n_2r_2) \geq p_1r_1k_2. \end{cases} \end{cases}$$

3. Равновесные и стационарные состояния системы не зависят от цены на аренду услуг второй компании.

Пример 3.2. Пусть у компаний одинаковое число клиентов $n_1 = n_2 = 10$, первая выделяет больший ресурс ($r_1 = 1$, $r_2 = 0.5$), но и цены у нее выше ($p_1 = 5$, $p_2 = 1$), и уровень недовольства первым оператором больше ($k_1 = 4$, $k_2 = 2$). Пусть начальные цены операторов на услуги $q_1 = 1$, $q_2 = 2$. Для таких цен, согласно (3.5), получаем равновесное распределение на рынке $x^{(1)} = (0, 1)$. Согласно (3.6), новые цены $q^{(1)} = (3.25, 2.75)$. Для новых цен, согласно (3.5), распределение $x^{(2)} = x^{(1)} = (0, 1)$. То есть система пришла в стационарное состояние за один шаг.

Пример 3.3. Пусть у компаний одинаковое число клиентов $n_1 = n_2 = 10$, первая выделяет больший ресурс ($r_1 = 0.5$, $r_2 = 0.25$), но и цены у нее выше ($p_1 = 5$, $p_2 = 1$), и уровень недовольства первым оператором меньше ($k_1 = 2$, $k_2 = 4$). Пусть начальные цены операторов на услуги $q_1 = 1$, $q_2 = 2$. Для таких цен, согласно (3.5), получаем равновесное распределение на рынке $x^{(1)} = (0, 1)$. Согласно (3.6), новые цены $q^{(1)} = (2.625, 3.375)$. Для новых цен, согласно (3.5), распределение $x^{(2)} = (1, 0)$. Для распределения $x^{(2)}$ новые цены $q^{(2)} \approx (2.708, 3.292)$, для которых $x^{(3)} = x^{(2)} = (1, 0)$. То есть система пришла в стационарное состояние за два шага.

4. M игроков, предпочтения клиентов ориентированы на компании

Пусть у нас на рынке $M \geq 3$ операторов ($j = 1, \ldots, M$), конкурирующих между собой. Долю клиентов компании i, которые выберут оператора j определим как $\frac{1}{M} + \sum\limits_{l \neq j} \frac{h_{ij} - h_{il}}{M k_i}$.

Функция выигрыша для каждого оператора j для известных x и q равна

$$u_j(x, q) = q_j \sum_i n_i \left(\frac{1}{M} + \sum_{l \neq j} \frac{h_{ij} - h_{il}}{M k_i} \right) - \sum_i \frac{x_{ij}}{\sum\limits_l x_{il}} p_i r_i.$$

Пусть на рынке две крупных компании, между которыми делают выбор операторы. Обозначим x_j вероятность оператору j выбрать первую компанию. Тогда $1 - x_j$ – его вероятность выбрать вторую компанию. Функция выигрыша примет следующий вид:

$$u_j(x,q) = \frac{q_j}{M}\left((n_1+n_2) - ((M-1)q_j - \sum_{l\neq j} q_l)\left(\frac{n_1}{k_1}+\frac{n_2}{k_2}\right) + ((M-1)x_j - \sum_{l\neq j} x_l)\left(\frac{n_1r_1}{k_1}-\frac{n_2r_2}{k_2}\right)\right) - \frac{x_j}{\sum\limits_l x_l}p_1r_1 - \frac{(1-x_j)}{M-\sum\limits_l x_l}p_2r_2 =$$

$$\alpha_j(q) + \frac{\left(\frac{n_1r_1}{k_1}-\frac{n_2r_2}{k_2}\right)q_j}{M}\left((M-1)x_j - \sum_{l\neq j} x_l\right) - \frac{x_j}{\sum\limits_l x_l}p_1r_1 - \frac{(1-x_j)}{M-\sum\limits_l x_l}p_2r_2,$$

где $\alpha_j(q)$ не зависящая от x величина. Здесь мы считаем, что $\frac{0}{0}=1$.

По x_j каждая функция u_j выпукла. Значит, оптимальное значение x_j будет находиться на одном из концов отрезка $[0,1]$, то есть при выборе компаний оптимальными будут чистые стратегии.

Пусть для определенности $\frac{n_1r_1}{k_1} \geq \frac{n_2r_2}{k_2}$, иначе перенумеруем компании. Обозначим для сокращения записи разницу $R = \frac{n_1r_1}{k_1} - \frac{n_2r_2}{k_2} \geq 0$.

Тогда для определенных цен q равновесным является такое распределение операторов между компаниями $x^*(q) = \{x_j^*(q)\}_{j=1}^M$, где все $x_j^*(q) \in \{0,1\}$, для которого для всех $j = 1,\ldots,M$ выполняется $u_j(x,q)|_{x=x^*(q)} \geq u_j(x,q)|_{x_j=1-x_j^*(q),x_{l\neq j}=x_l^*(q)}$, то есть для каждого оператора j его выбор $x_j^*(q)$ является наилучшим ответом на выбор остальных. Обозначим $K^{-j} = \sum\limits_{l\neq j} x_l^*(q)$ – количество операторов кроме j, выбравших первую компанию.

Рассмотрим ситуацию, где все кроме оператора j выбрали вторую компанию, то есть $K^{-j} = 0$ для любого j. Тогда для каждого оператора j его выбор $x_j = 0$ является наилучшим, если $-\frac{0}{0}p_1r_1 - \frac{1}{M}p_2r_2 \geq \frac{Rq_j}{M}(M-1) - \frac{1}{1}p_1r_1$, или $\frac{(M-1)Rq_j}{M} \leq -\frac{p_2r_2}{M}$. И наоборот, если $\frac{(M-1)Rq_j}{M} \geq -\frac{p_2r_2}{M}$, то наилучшим будет его выбор $x_j = 1$.

Рассмотрим ситуацию, когда все кроме оператора j выбрали первую компанию, то есть $K^{-j} = M-1$ для любого j. Тогда для оператора j его выбор $x_j = 1$ является наилучшим, если $\frac{1}{M}p_1r_1 - \frac{0}{0}p_2r_2 \geq -\frac{Rq_j}{M}(M-1) - \frac{1}{1}p_2r_2$, или $\frac{(M-1)Rq_j}{M} \geq \frac{p_1r_1}{M}$. И наоборот, если $\frac{(M-1)Rq_j}{M} \leq \frac{p_1r_1}{M}$, то наилучшим будет его выбор $x_j = 0$.

Если же $0 < K^{-j} < M-1$, то для оператора j его выбор $x_j = 1$ является наилучшим, если $\frac{Rq_j}{M}(M-1-K^{-j}) - \frac{1}{K^{-j}+1}p_1r_1 \geq -\frac{Rq_j}{M}K^{-j} - \frac{1}{M-K^{-j}}p_2r_2$, или $\frac{(M-1)Rq_j}{M} \geq \frac{p_1r_1}{K^{-j}+1} - \frac{p_2r_2}{M-K^{-j}}$. И если $\frac{(M-1)Rq_j}{M} \leq \frac{p_1r_1}{K^{-j}+1} - \frac{p_2r_2}{M-K^{-j}}$, то наилучшим будет его выбор $x_j = 0$.

Тогда в общем случае наилучшим ответом оператора j на выбор первой компании группой K^{-j} операторов будет $x_j = 0$, если $\frac{(M-1)Rq_j}{M} \leq \frac{p_1r_1\mathbb{I}_{K^{-j}>0}}{K^{-j}+1} - \frac{p_2r_2\mathbb{I}_{K^{-j}<M-1}}{M-K^{-j}}$ и $x_j = 1$ при $\frac{(M-1)Rq_j}{M} \geq \frac{p_1r_1\mathbb{I}_{K^{-j}>0}}{K^{-j}+1} - \frac{p_2r_2\mathbb{I}_{K^{-j}<M-1}}{M-K^{-j}}$.

То есть получаем набор равновесий вида $x^*(q) = \{x_j^*(q)\}_{j=1}^M$, где все $x_j^*(q) \in \{0,1\}$, $K = \sum\limits_l x_l^*(q)$, каждое из которых возможно при выполнении условий

$$\begin{cases} \frac{(M-1)Rq_j}{M} \geq \frac{p_1r_1\mathbb{I}_{K>1}}{K} - \frac{p_2r_2\mathbb{I}_{K<M}}{M-K+1} \text{ для } x_j^*(q) = 1, \\ \frac{(M-1)Rq_j}{M} \leq \frac{p_1r_1\mathbb{I}_{K>0}}{K+1} - \frac{p_2r_2\mathbb{I}_{K<M-1}}{M-K} \text{ для } x_j^*(q) = 0. \end{cases} \tag{4.1}$$

Рассмотрим шаг, на котором операторы определяют цены на продаваемые услуги. Каждая из функций u_j по q_j вогнута и представляет собой параболу с ветвями вниз. Это означает, что оптимальной стратегией назначения цены q_j является точка максимума u_j по q_j.

Наилучшим ответом каждого игрока j на стратегии остальных является q_j, удовлетворяющее уравнению

$$2(M-1)\left(\frac{n_1}{k_1} + \frac{n_2}{k_2}\right)q_j = \\ n_1 + n_2 + \left(\sum_l q_l - q_j\right)\left(\frac{n_1}{k_1} + \frac{n_2}{k_2}\right) + R\left(Mx_j - \sum_l x_l\right).$$

Суммируя уравнения и выражая q_j, получим равновесную ситуацию $q^*(x) = \{q_j^*(x)\}_{j=1}^M$, где

$$q_j^*(x) = \frac{k_1k_2(n_1+n_2)}{(M-1)(n_1k_2+n_2k_1)} + \frac{k_1k_2R\left(Mx_j - \sum\limits_l x_l\right)}{(2M-1)(n_1k_2+n_2k_1)}. \tag{4.2}$$

Таким образом, действуя оптимально, при каждом переходе система будет менять свое состояние по следующему правилу. Пусть состояние системы перед выполнением первого шага перехода s, когда переопределяется выбор компаний, описывается как $x^{(s)} = (x_j^{(s)}, j = 1, \ldots, M)$. Ему соответствуют значения оптимальных цен $q^{(s)} = (q_j^*(x^{(s)}), j = 1, \ldots, M)$, определяемых, согласно (4.2). Тогда следующее состояние, согласно (4.1), определяется как $x * (q^{(s)})$.

Рассмотрим состояние системы перед выполнением перехода $s > 1$, когда хотя бы один раз были определены равновесное распределение выбора компаний и цены на продаваемые услуги. Пусть $x^{(s)}$ – текущее состояние системы перед выполнением перехода s. В силу симметричности задачи, так как операторы различаются только стратегиями, можно упростить обозначения, разбив операторов на две группы.

Пусть к группе A относятся игроки j, выбравшие первую компанию, то есть для которых $x_j^{(s)} = 1$, остальные относятся к группе B. Заметим, что цены $q_j^{(s)}$, определяемые (4.2), одинаковы для всех игроков, относящихся к одной и той же группе, а, следовательно, для них одинаково выполняются или нет условия равновесия. Обозначим $q_A(K)$ и $q_B(K)$ соответственно цены операторов в группах A и B. Тогда условие равновесия (4.1), когда в группе A ровно K операторов, можно переписать как

$$\begin{cases} \frac{(M-1)Rq_A(K)}{M} \geq \frac{p_1 r_1 \mathbb{I}_{K>1}}{K} - \frac{p_2 r_2 \mathbb{I}_{K<M}}{M-K+1}, \\ \frac{(M-1)Rq_B(K)}{M} \leq \frac{p_1 r_1 \mathbb{I}_{K>0}}{K+1} - \frac{p_2 r_2 \mathbb{I}_{K<M-1}}{M-K}. \end{cases} \qquad (4.3)$$

При этом, в случае $K = 0$ первое условие отсутствует, а в случае $K = M$ отсутствует второе.

К началу любой итерации $s > 1$ игры состояние системы можно описать как число игроков в группе A. Состояния будут следующими:
0) все выбрали вторую компанию, у всех одинаковые цены $q_B(0) = Q = \frac{k_1 k_2 (n_1 + n_2)}{(M-1)(n_1 k_2 + n_2 k_1)}$,
K) $1 \leq K \leq M-1$ игроков выбрали первую компанию, у них цены $q_A(K) = Q + \frac{k_1 k_2 R (M-K)}{(2M-1)(n_1 k_2 + n_2 k_1)}$, у остальных цены $q_B(K) = Q - \frac{k_1 k_2 R K}{(2M-1)(n_1 k_2 + n_2 k_1)}$,
M) все M игроков выбрали первую компанию, у всех одинаковые цены $q_A(M) = Q$.

1) Рассмотрим состояния системы 0 и M. Здесь все цены одинаковы и равны Q. Состояние 0 не может быть стационарным, так как нарушается второе из условий (4.3) $(M-1)Rq_B(0) \le -p_2r_2$, так как $Rq_B(0) = Q > 0$, значит система перейдет в одно из оставшихся состояний. Система будет в стационарном состоянии M только в том случае, если в состоянии M (была в нем или перешла в него из 0) выполняется первое условие для равновесного выбора компаний из (4.3) $(M-1)RQ \ge p_1r_1$. Иначе из состояния 0 или M система перейдет в состояние $K < M$, для которого должно выполняться

$$\begin{cases} \frac{(M-1)RQ}{M} \ge \frac{p_1r_1\mathbb{I}_{K>1}}{K} - \frac{p_2r_2\mathbb{I}_{K<M}}{M-K+1}, \\ \frac{(M-1)RQ}{M} \le \frac{p_1r_1\mathbb{I}_{K>0}}{K+1} - \frac{p_2r_2\mathbb{I}_{K<M-1}}{M-K}, \end{cases}$$

что возможно только для $K \in \{1, M-1\}$. K может равняться 1, если выполнены оба условия

$$\begin{cases} \frac{(M-1)RQ}{M} \ge -\frac{p_2r_2}{M}, \\ \frac{(M-1)RQ}{M} \le \frac{p_1r_1}{2} - \frac{p_2r_2}{M-1}, \end{cases}$$

первое из которых очевидно выполнено. Если выполнено и второе, то в таком состоянии $q_A(1) > Q > 0$, $q_B(1) < Q$ и после назначения новых цен выполнение условий равновесия сохранится и состояние $K = 1$ станет стационарным.

Если второе условие не выполнено, то есть $\frac{(M-1)RQ}{M} < \frac{p_1r_1}{2} - \frac{p_2r_2}{M-1}$, тогда остается $K = M-1$. Проверим выполнение условий

$$\begin{cases} \frac{(M-1)RQ}{M} \ge \frac{p_1r_1}{M-1} - \frac{p_2r_2}{2}, \\ \frac{(M-1)RQ}{M} \le \frac{p_1r_1}{M}. \end{cases}$$

Второе условие выполняется в силу нестационарности состояния $K = M$. Первое выполняется, так как $\frac{(M-1)RQ}{M} > \frac{p_1r_1}{2} - \frac{p_2r_2}{M-1} \ge \frac{p_1r_1}{M-1} - \frac{p_2r_2}{2}$ для $M \ge 3$. Для новых цен $q_A(M-1) > Q$ и $q_B(M-1) < Q$ выполнение условий также сохранится и состояние $K = M-1$ станет стационарным.

То есть из состояния 0 система перейдет в стационарное состояние из набора $\{1, M-1, M\}$. Состояние M либо стационарное, либо из него система перейдет в стационарное состояние из набора $\{1, M-1\}$.

2) Пусть система находится в состоянии K $(1 \leq K \leq M-1)$. Если выполняются условия для равновесного выбора компаний из (4.3), то система попала в стационарное состояние. Если условия не выполнены, то формируется новое состояние K'. Если $K' = M$ и это состояние не стационарно, то, согласно пункту 1) система перейдет из него в стационарное состояние из набора $\{1, M-1\}$. Если $K' = 0$ (такое возможно, если цены $q_B(K)$ были отрицательны), то, согласно пункту 1) система перейдет из него в стационарное состояние из набора $\{1, M-1, M\}$.

Иначе $1 \leq K' \leq M-1$, такое, что

$$\begin{cases} \frac{(M-1)Rq_A(K)}{M} \geq \frac{p_1 r_1 \mathbb{I}_{K'>1}}{K'} - \frac{p_2 r_2}{M-K'+1} \text{ для оставшихся в } A, \\ \frac{(M-1)Rq_B(K)}{M} \leq \frac{p_1 r_1}{K'+1} - \frac{p_2 r_2 \mathbb{I}_{K'<M-1}}{M-K'} \text{ для оставшихся в } B, \\ \frac{(M-1)Rq_B(K)}{M} \geq \frac{p_1 r_1 \mathbb{I}_{K'>1}}{K'} - \frac{p_2 r_2}{M-K'+1} \text{ для сменивших } B \text{ на } A, \\ \frac{(M-1)Rq_A(K)}{M} \leq \frac{p_1 r_1}{K'+1} - \frac{p_2 r_2 \mathbb{I}_{K'<M-1}}{M-K'} \text{ для сменивших } A \text{ на } B. \end{cases}$$

Далее для K' назначаются новые цены $q_A(K')$ и $q_B(K')$. При этом для сменивших группу B на A цены увеличатся, а для сменивших группу A на B цены уменьшатся независимо от K', так как $q_A(K) > Q \geq q_B(K')$ и $q_B(K) < Q \leq q_A(K')$ для $1 \leq K \leq M-1$, а, значит, для них условия равновесия (4.3) будут выполнены и с новыми ценами. Поэтому в случае, когда все операторы сменили свою группу, новое состояние будет стационарным.

а) Если $1 \leq K < K' \leq M-1$, то обязательно есть операторы, сменившие группу B на A. То есть

$$\frac{(M-1)Rq_B(K)}{M} \geq \frac{p_1 r_1}{K'} - \frac{p_2 r_2}{M-K'+1}.$$

Так как $K' \leq M-1$, то либо кто-то остался в группе B, либо пришел в нее из группы A. В первом случае

$$\frac{(M-1)Rq_B(K)}{M} \leq \frac{p_1 r_1}{K'+1} - \frac{p_2 r_2 \mathbb{I}_{K'<M-1}}{M-K'},$$

во втором случае также

$$\frac{(M-1)Rq_B(K)}{M} < \frac{(M-1)Rq_A(K)}{M} \leq \frac{p_1 r_1}{K'+1} - \frac{p_2 r_2 \mathbb{I}_{K'<M-1}}{M-K'},$$

и тогда

$$\frac{p_1 r_1}{K'} - \frac{p_2 r_2}{M-K'+1} \leq \frac{p_1 r_1}{K'+1} - \frac{p_2 r_2 \mathbb{I}_{K'<M-1}}{M-K'},$$

что возможно только в случае $K' = M - 1$.

Тогда при $K' = M - 1$ и, соответственно, $K < M$ выполняется

$$\begin{cases} \frac{(M-1)Rq_A(K)}{M} > \frac{(M-1)Rq_B(K)}{M} \geq \frac{p_1r_1}{M-1} - \frac{p_2r_2}{2}, \\ \frac{(M-1)Rq_B(K)}{M} \leq \frac{p_1r_1}{M}. \end{cases}$$

После назначения новых цен выполнение второго условия (4.3) сохранится, так как $q_B(M-1) < q_B(K)$ для $K < M-1$. Первое неравенство будет выполнено, так как

$$\frac{(M-1)Rq_A(M-1)}{M} > \frac{(M-1)Rq_B(K)}{M} \geq \frac{p_1r_1}{M-1} - \frac{p_2r_2}{2}$$

при $1 < K < M - 2$. То есть состояние $K' = M - 1$ стационарное.

б) Если $1 \leq K' < K \leq M - 1$, то обязательно есть операторы, сменившие группу A на B. То есть

$$\frac{(M-1)Rq_A(K)}{M} \leq \frac{p_1r_1}{K'+1} - \frac{p_2r_2}{M-K'}.$$

Так как $K' \geq 1$, то либо кто-то остался в группе A, либо пришел в нее из группы B. В первом случае

$$\frac{(M-1)Rq_A(K)}{M} \geq \frac{p_1r_1\mathbb{I}_{K'>1}}{K'} - \frac{p_2r_2}{M-K'+1},$$

во втором случае

$$\frac{(M-1)Rq_A(K)}{M} > \frac{(M-1)Rq_B(K)}{M} \geq \frac{p_1r_1\mathbb{I}_{K'>1}}{K'} - \frac{p_2r_2}{M-K'+1},$$

и тогда

$$\frac{p_1r_1\mathbb{I}_{K'>1}}{K'} - \frac{p_2r_2}{M-K'+1} \leq \frac{p_1r_1}{K'+1} - \frac{p_2r_2}{M-K'},$$

что возможно только в случае $K' = 1$.

То есть при $K' = 1$ и, соответственно, $K > 1$ выполняется

$$\begin{cases} \frac{(M-1)Rq_A(K)}{M} \geq -\frac{p_2r_2}{M}, \\ \frac{(M-1)Rq_B(K)}{M} < \frac{(M-1)Rq_A(K)}{M} \leq \frac{p_1r_1}{2} - \frac{p_2r_2}{M-1}. \end{cases}$$

После назначения новых цен выполнение первого условия (4.3) сохранится, так как $q_A(1) > q_A(K)$ для $K > 1$. Второе неравенство будет выполнено, так как

$$\frac{(M-1)Rq_B(1)}{M} < \frac{(M-1)Rq_A(K)}{M} \leq \frac{p_1r_1}{2} - \frac{p_2r_2}{M-1}$$

при $2 < K < M - 1$. То есть состояние $K' = 1$ стационарное.

Таким образом, если система действует по правилам пошагового выбора оптимальных состояний, то в любом случае не более чем за три перехода попадет в стационарное состояние, одно из трех возможных: 1, $M-1$ или M. При этом не исключается наличие и других стационарных состояний, попасть в которые можно только случайно, назначив подходящие первоначальные цены.

Пример 4.1. Рассмотрим две компании. Первая давно присутствует на рынке, у нее больше клиентов ($n_1 = 25$, $n_2 = 10$), но и цены у нее выше ($p_1 = 10$, $p_2 = 5$). Вторая, пытаясь захватить рынок, выставляет низкие цены, ведет агрессивную рекламную политику с навязчивой рекламой ($k_1 = 1$, $k_2 = 2$) и выделяет в аренду больший ресурс ($r_1 = 0.5$, $r_2 = 0.6$). На рынке $M = 10$ операторов, перепродающих услуги этих двух компаний. В зависимости от первоначальных цен q система попадет в одно из состояний, представленных в таблице 1, и далее будет менять состояния до тех пор, пока не попадет в одно из стационарных, выделенных жирным шрифтом. Видно, что в состояниях $K = 8$ и $K = 9$ у операторов, выбравших вторую компанию, цены отрицательны, но это не мешает состоянию $K = 9$ быть стационарным. Заметим также, что стационарные состояния $K = 2, 3$ являются изолированными, попасть в них система может только, назначив подходящие первоначальные цены.

Таблица 1. Переходы между состояниями

Состояние K	q_A	q_B	Возможные переходы
0	–	0.13	1, 10
1	0.28	0.112	
2	0.26	0.096	
3	0.246	0.08	
4	0.23	0.063	1, 10
5	0.213	0.046	1, 9
6	0.196	0.03	1, 9
7	0.18	0.013	1, 9
8	0.163	-0.004	1, 9
9	0.146	-0.02	
10	0.13	–	

Пример 4.2. Рассмотрим предыдущий пример с меньшим числом клиентов и операторов ($n_1 = 10$, $n_2 = 4$, $M = 4$). В зависимости от первоначальных цен q система попадет в одно из состояний, представленных на рис. 1, и в итоге окажется в одном из стационарных состояний 1 или 3.

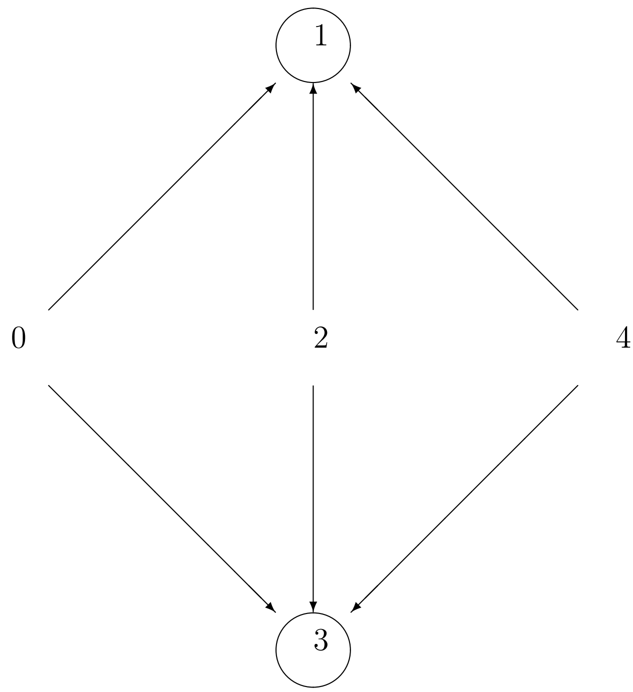

Рисунок 1. Переходы между состояниями

5. Заключение

В статье построена и исследована модель поведения двух облачных операторов на рынке телекоммуникационных услуг, на котором игроками являются операторы, перепродающие услуги крупных компаний. Поведение игроков на данном рынке смоделировано как повторяющаяся двухшаговая игра, где на первом шаге операторы определяют распределение степеней своего участия в сотрудничестве с крупными компаниями, а на втором шаге назначают цены на продаваемые услуги для клиентов. Получены равновесные и стационарные решения для данной игры. Найдены оптимальные стратегии операторов на первом и втором шаге и показаны условия существования равновесия в чистых стратегиях на первом шаге. Для случаев, когда предпочтения клиентов ориентированы на компании или операторов, показано, что при повторении игры система приходит в стационарное состояние не более чем за 3 повторения. Кроме того, показано, что в игре, где более двух операторов, в случае, когда предпочтения клиентов ориентированы на компании, система также приходит в стационарное состояние не более чем за 3 повторения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Armstrong M. *Competition in two-sided markets* // The RAND Journal of Economics. 2006. Vol. 37, No. 3. P. 668–691.

2. Chang F., Ren J., Viswanathan R. *Optimal resource allocation in clouds* // Proceedings of the 3rd International Conference on Cloud Computing, Cloud 2010, IEEE Computer Society, Washington, DC, USA, 2010. P. 418–425.

3. Chaisiri S., Lee B.-S., Niyato D. *Optimization of resource provisioning cost in cloud computing* // Services Computing, IEEE Transactions. 2012. Vol. 5 (2). P. 164–177.

4. Karakitsiou A., Migdalas A. *Locating facilities in a competitive environment* // Optimization Letters. 2017. Vol. 11 (5). P. 929–945.

5. Kiiski A., Hämmäinen H. *Mobile virtual network operator strategies: Case Finland* // ITS 15th Biennial conference. 2004. Berlin, Germany (4–7 September 2004). URL http://www.netlab.tkk.fi/tutkimus/lead/leaddocs/KiiskiHammainen_MVNO.pdf

6. Kllapi H., Sitaridi E., Tsangaris M. M., Ioannidis Y. *Schedule optimization for data processing ows on the cloud* // Proceedings of the 2011 ACM SIGMOD International Conference on Management of

data, SIGMOD '11, ACM, New York, NY, USA, 2011. P. 289–300. URL http://doi.acm.org/10.1145/1989323.1989355

7. Mazalov V.V., *Mathematical Game Theory and Applications*. New York: Wiley, 2014.

8. Mazalov V., Lukyanenko A., Luukkainen S. *Equilibrium in cloud computing market* // Performance Evaluation. 2015. Vol. 92. P. 40–50.

9. Mazalov V.V., Melnik A.V. *Equilibrium Prices and Flows in the Passenger Traffic Problem* // International Game Theory Review. 2016. Vol. 18, No. 1.

10. Raivio Y., Mazhelis O., Annapureddy K., Mallavarapu R., Tyrväinen P. *Hybrid cloud architecture for short message services* // Proceedings of the 2nd International Conference on Cloud Computing and Services Science, Closer 2012, SciTePress, 2012. P. 489–500.

VIRTUAL OPERATORS COMPETITION IN TWO-SIDED TELECOMMUNICATION MARKET

Vladimir V. Mazalov, IAMR KarRC RAS, Dr.Sc., professor (vmazalov@krc.karelia.ru),
Julia V. Chirkova, IAMR KarRC RAS, Cand.Sc. (julia@krc.karelia.ru),
Jie Zheng, School of Economics and Management, Tsinghua University (jie.academic@gmail.com),
Jaimie W. Lien, Department of Decision Sciences and Managerial Economics, The Chinese University of Hong Kong (jaimie.academic@gmail.com).

Abstract: Consider a market where two large companies provide services to the population through "cloud" virtual operators which buy companies' services and sell them to clients. Each of large companies determines a price, which it obtains selling its services to virtual operators. Also the number of its clients and its resource (a characteristic of company's attractiveness for clients), are known. The game process is a repeat of two-step games where virtual operators choose companies and prices for services. Each of virtual operators needs to choose a company whose services he is going to sell and to define a price for the services to sell to clients. Each virtual operator chooses the probability to choose the company and the price for services which they sell to clients, taking into account that clients distribution among operators is given by the Hotelling specification. Each virtual operator at each step tries to maximize his payoff. We find the optimal virtual operators' strategies and consider the question: can the system achieve some stationary state under repeated two-step game, or it formes of a repeating cycle of states?

Keywords: cloud operators, repeated two-step game, Hotelling specification, Nash equilibrium, stationary state.