Математическая Теория Игр и её Приложения, т.9, в.3, с. 93–127

УДК 519.83
ББК 22.18

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ОДНОГО КЛАССА МЕТОДОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЗАТРАТ НА КЛАСС КООПЕРАТИВНЫХ ИГР ДВУХ ЛИЦ

Елена Б. Яновская
Национальный исследовательский университет
Высшая Школа Экономики в Санкт-Петербурге
190008, Санкт-Петербург, ул. Союза Печатников, 16
e-mail: eyanovskaya@hse.ru

Исследование решений кооперативных игр двух лиц обусловлено тем, что они являются базой для распространения их на кооперативные игры с произвольным числом игроков с применением свойств согласованности. В статье класс методов распределения затрат для задач двумя агентами [4] распространяется на решения кооперативных игр двух лиц, которые включают в себя задачи распределения затрат, но не имеют ограничений на положительность компонент определений. Указанное распространение производится с помощью аксиомы самоковариантности [1], которая может быть применена и к методам распределений, и к решениям кооперативных игр. В частности, эта аксиома заменяет аксиому нижней композиции, которая применима к задачам распределения затрат, но не применима к задачам распределения прибылей.

Ключевые слова: кооперативная игра с трансферабельными полезностями, задача распределения затрат/прибылей, само-ковариантность, решение.

1. Введение

В статье семейство методов распределения затрат для двух агентов [4] распространяется на класс решений кооперативных игр двух лиц, который шире класса задач распределения затрат, так как в определении кооперативных игр нет ограничений на положительность затрат и прибылей. Указанное распространение производится с помощью свойства самоковариантности – новой аксиомы независимости от класса линейных преобразований – которую можно применить к решениям (методам) обоих рассматриваемых классов. В частности, эта аксиома заменяет аксиому нижней композиции, применяемой к методам распределения затрат, но которую нельзя определить для методов задач распределения прибылей.

Основным отличием между классами задач распределения затрат и прибылей и кооперативными играми двух лиц состоит в требовании положительности всех компонент областей определения первого класса. Это требование излишне в определении кооперативных игр двух лиц. По этой причине большинство аксиом, характеризующих решения (методы) указанных классов, отличаются друг от друга. Например, популярная аксиома независимости от сдвигов индивидуальных полезностей, не может быть применена к задачам распределения затрат/прибылей, так как отрицательные сдвиги могут вывести компоненты задачи из положительной области. С другой стороны, аксиомы верхней и нижней композиции для методов распределения затрат нельзя распространить на свойства теоретико-игровых решений для игр с более чем двумя игроками.

Число известных методов распределения затрат достаточно велико, так как велико и число их свойств, формализация которых может применяться для их аксиоматических характеризаций [5],[6].

Задачи распределения затрат для двух агентов можно рассматривать как субаддитивные кооперативные игры двух лиц с положительными характеристическими функциями. Эффективные решения для такого подкласса игр совпадают с методами распределения затрат. Если аксиомы, характеризующие свойства методов распределения затрат, можно распространить на свойства решений субаддитивных игр с произвольным множеством игроков, то такие методы распределения затрат можно распространить на весь класс субаддитивных кооперативных игр. Очевидно, справедливо и обратное соотношение.

В частности, заметим, что большинство решений кооперативных игр обладает свойством ковариантности относительно положительных линейных преобразований с общим множителем. индивидуальных полезностей игроков. Эта аксиома не требует пояснений в обоих классах рассматриваемых задач. Однако для методов распределения затрат в общем виде она неприменима: как уже указывалось, сдвиги индивидуальных полезностей могут нарушить положительность затрат и прибылей.

В статье [1] автор предложила ослабление аксиомы ковариантности относительно сдвигов, названное самоковариантностью. Оказалось, что эгалитарные решения кооперативных игр удовлетворяют этой аксиоме и могут быть охарактеризованы с ее помощью. В данной статье эта аксиома применяется к решениям кооперативных игр двух лиц вместе с аксиомами эффективности, анонимности, независимости от пути и ковариантности относительно шкалирования. Все такие решения определяются и характеризуются отдельно для супер- и суб-аддитивных игр.

Целью работы является установление совпадений решений для подкласса супераддитивных игр двух лиц с положительными характеристическими функциями с соответствующими методами решений задач распределения ресурсов, удовлетворяющих верхней и нижней композиции и ковариантности относительно шкалирования. Эти методы были определены и охарактеризованы в статье Мулена [4]. Однако их нельзя распространить на класс задач распределения прибылей, так как аксиома нижней композиции не определена для этого класса. Оказалось, что именно аксиома само-инвариантности может заменить эту аксиому, и с ее помощью методы Мулена могут быть применены также и к классу задач распределения прибылей. Данные результаты оформлены в виде препринта [8].

Статья структурирована следующим образом: в разделе 2 приводятся основные определения решений кооперативных игр двух лиц и методы распределения затрат. В разделе 3 описываются все решения кооперативных игр двух лиц, удовлетворяющие аксиомам эффективности, одноточечности, анонимности и самоковариантности.

Этот класс оказался весьма обширным, и в разделе 4 добавлена еще одна аксиома – независимости от пути. Описывается семейство решений, удовлетворяющих расширенной системе аксиом. Показывается, что применение этого семейства к неотрицательным субаддитивным играм или, что то же самое, к классу распределения затрат с двумя агентами, совпадает с семейством методов, охарактеризованных Муленом [4]. В Заключении показывается непосредственное расширение всех приведенных определений и результатов на класс супераддитивных игр двух лиц и методов распределения прибылей. В Приложении помещены доказательства лемм и теорем.

2. Соотношения между решениями кооперативных игр двух лиц и методами распределения затрат между двумя агентами

2.1. Основные определения

Задачи распределения затрат для двух участников можно рассматривать как субаддитивные игры двух лиц с положительными (неотрицательными) значениями характеристической функции. Для такого подкласса субаддитивных игр двух лиц можно в качестве решений применять методы распределения затрат. Если последние оказывается возможным распространить на класс всех субаддитивных игр двух лиц с сохранением характеризующих их свойств, то они могут оказаться полезными для дальнейших их расширений и на супераддитивные игры двух лиц, и далее на игры с произвольным числом игроков.

В этом разделе будут приведены определения кооперативных игр двух лиц и задач распределения затрат между двумя агентами, и показано соответствие между решениями кооперативных игр и методами распределения затрат.

Задачей распределения затрат между двумя агентами $\{i, j\}$ называется набор (c_i, c_j, T), где $c_i, c_j > 0$ – заявки агентов, $T > 0$ – общие затраты, которые нужно распределить между агентами. Таким образом $c_i + c_j > T$. Если $c_i + c_j < T$, то такая задача называется задачей распределения прибыли. Обозначим $c = (c_i, c_j)$. *Методом распределения* затрат для класса $\mathcal{C}$ задач распределения затрат называется функция $r : \mathcal{C} \to \mathbb{R}^2_+$, удовлетворяющая равенству $r_i(c, T) + r_j(c, T) = T$ для всех $c_i, c_j, T : c_i + c_j \geq T > 0$.

Кооперативной игрой (с трансферабельными полезностями) называется пара (N, v), где N – конечное множество игроков, $v : 2^N \to \mathbb{R}$–характеристическая функция, причем принимается, что $v(\emptyset) = 0$. Так как характеристическая функция определена на множестве всех коалиция, а задачи распределения ресурсов не принимают в расчет коалиции агентов,тов данной статье будут рассматриваться только указанные объекты с двумя участниками, где нет собственных коалиций, отличных от индивидуальных участников и всего коллектива. Если множество игроков $N = \{i, j\}$ фиксировано,то кооперативная игра полностью определяется заданием трех чисел $v(\{i\}), v(\{j\}), v(\{i, j\})$. В дальнейшем будут рассматриваться классы игр двух лиц с фиксированным множеством игроков N. Будем обозначать их через i, j, и для простоты исключим обозначение N из всех формул. Кроме того, будем использовать обозначения $v(\{i\}) = v_i, v(\{j\}) = v_j, v(\{i, j\}) = T$.

Решение φ кооперативной игры двух лиц сопоставляет каждой игре $(\{i, j\}, v)$ подмножество $\varphi(\{i, j\}, v) \subset \mathbb{R}^2$ допустимых исходов игры, удовлетворяющих неравенствам $\varphi_i(N, v) + \varphi_j(N, v) \leq v(\{i, j\})$.

Тогда очевидно, что подкласс субаддитивных игр с неотрицательной характеристической функцией совпадает с задачами распределения затрат между двумя агентами. Тем самым методы распределения затрат совпадают с эффективными и одноточечными (см. определение на следующей странице) решениями субаддитивных неотрицательных игр двух лиц.

Рассмотрим сначала подкласс субаддитивных игр двух лиц $\mathcal{G}_+^2$ с неотрицательными значениями характеристической функции большой коалиции, т.е., класс $\mathcal{G}_2^+ = \{(N, v)\}$, где $N = \{i, j\}$, $v_i + v_j \geq v(\{i, j\}) \geq 0, v(\emptyset) = 0$. Таким образом, область определения этого класса игр шире, чем область определения задач распределения ресурсов,так как здесь возможны отрицательные значения индивидуальных значений v_i, v_j характеристических функций.

Напомним хорошо известные свойства решений кооперативных игр, которые далее будут применяться для их характеризаций. Приведем их только для класса $\mathcal{G}_2$ всех игр двух лиц.

Решение φ для класса $\mathcal{G}_2$ называется

– *непустым (NE)*, если $\varphi(\{i, j\}, v)) \neq \emptyset$ для любой игры $(\{i, j\}, v) \in \mathcal{G}_2$;

– *эффективным (EFF)*, если $\varphi_i(\{i,j\},v)+\varphi_j(\{i,j\},v)=v(\{i,j\}$ для любой игры $(\{i,j\},v)\in\mathcal{G}_2$;

– *одноточечным (SV)*, если $|\varphi(\{i,j\},v)| = 1$ для любой игры $(\{i,j\},v)\in\mathcal{G}_2$;

– *положительно однородным (PH)*, если для любых $\alpha>0$ и игры $(\{i,j\},v)\in\mathcal{G}_2$ выполняется $(\{i,j\},\alpha v)\in\mathcal{G}_2$ и $\varphi(\{i,j\},\alpha v)=\alpha\varphi(\{i,j\},v)$;

– *ковариантно относительно сдвигов (TCOV)*, если для любой игры $(\{i,j\},v))\in\mathcal{G}_2$ и вектора $b\in\mathbb{R}^2$

$$x\in\varphi(N,v) \implies x+b\in\varphi(N,v+b),$$

где $(v+b)_k)=v_k+b_k$ для $k=i,jN$, и $(v+b)(\{i,j\}))=v(\{i,j\}+b_i+b_j$;

– *ковариантно (COV)*, если оно положительно однородно и ковариантно относительно сдвигов;

– *слабо ковариантным (WCOV)*, если оно положительно однородно и ковариантно относительно сдвигов только относительно векторов $b\in\mathbb{R}^N$ с равными координатами;

– *анонимно (ANO),* если для любой игры $(\{i,j\},v))\in\mathcal{G}_2$ и перестановки игроков $\pi(\{i,j\})=(\{j,i\})$ выполняется следующее равенство: $\varphi(\pi(\{i,j\}),\pi v)=\pi(\varphi(\{i,j\},v))$. Здесь функция πv определена равенствами $\pi v_i=v_j,\pi v_j=v_i,\pi v(\{i,j\})=v(\{i,j\})$;

– *самоковариантным (self-COV)*, если оно положительно однородно и для любого числа $A\geq -1$ выполняются равенства

$$\varphi(\{i,j\},v+A\varphi(\{i,j\},v))=(A+1)\varphi(N,v) \qquad (2.1)$$

для всех игр $(\{i,j\},v)\in\mathcal{G}_2^+$.

Сравним эти свойства со свойствами методов распределения ресурсов. Свойства эффективности и одноточечности уже содержится в определении этих методов. Анонимность и положительная однородность определяются точно так же для методов распределения ресурсов.

Свойства ковариантности и слабой ковариантности нельзя применить для методов распределения затрат, так как произвольные (а именно, отрицательные) сдвиги индивидуальных полезностей могут нарушить положительность компонент, определяющих задачи распределения ресурсов. Но свойство самоковариантности можно рассматривать также и как свойство методов распределения затрат.

Приведем теперь два свойства методов распределения затрат, которые, однако, могут рассматриваться как свойства решений только игр двух лиц, и не могут быть распространены на игры с произвольным множеством игроков:

Метод распределения затрат r для задач распределения затрат с двумя агентами удовлетворяет

– *верхней композиции (UC)* или *независимости от пути*, если для всех x и T, T' для которых $0 \leq T \leq T' \leq x_i + x_j$, выполняется равенство
$$r(x,T) = r(r(x,T'),T);$$

– *нижней композиции (LC)*, если для всех x и T, T', где $0 \leq T' \leq T \leq x_i + x_j$ выполняется равенство
$$r(x,T) = r(x,T') + r(r(x, x - r(x,T')), T - T').$$

Эти свойства структурной инвариантности позволяют декомпозицию нахождения долей решения, когда имеющиеся ресурсы ограничены сверху или снизу.

В дальнейшем будут рассматриваться только эффективные и одноточечные решения игр, поэтому будем понимать под термином «решение» – эффективные и одноточечные решения. В этом определении множество решений субаддитивных игр с неотрицательными значениями характеристической функции совпадает с множеством решений в задачах распределения ресурсов с двумя агентами. Это соответствие является определяющим для дальнейшей характеризации решений кооперативных игр.

2.2. Семейство $\mathcal{H}_2^+$ методов распределения

В этом разделе будет приведено распространение решений задач распределения затрат из подкласса класса $\mathcal{H}_2^*$ [4], удовлетворяющих еще аксиоме анонимности, на класс субаддитивных игр двух лиц, и приведены свойства этого решения.

Класс $\mathcal{H}_2^*$ был охарактеризован Муленом как единственный класс решений задач распределения затрат, удовлетворяющих свойствам независимости от пути (composition up и composition down)и положительной однородности. Заметим, что анонимность не предполагается решений в этом классе не предполагалась. Однако в теории решений кооперативных игр анонимность является одним из важнейших свойств, поэтому мы будем рассматривать подкласс $\mathcal{H}_2^a \subset \mathcal{H}_2^*$ анонимных решений и будем распространять именно его.

Рассмотрим сначала класс субаддитивных игр двух лиц с положительными (неотрицательными) значениями характеристической функции большой коалиции $v(\{i,j\}) \geq 0$, и произвольными индивидуальными значениями v_i, v_j. Таким образом, область задания значений характеристической функции на одноточечных коалициях таких игр по сравнению с областью задания (требования агентов) задач распределения затрат увеличивается с положительного ортанта плоскости до полуплоскости $x_i + x_j \geq 0$. Этот класс обозначим через $\mathcal{G}_2^+$.

Класс $\mathcal{H}_2^*$ определяется упорядоченным разбиением положительного ортанта на конусы (их может быть бесконечное число) с вершиной в нуле. Упорядоченность понимается приписыванием сторонам конусов бинарных индексов (1-я и 2-я стороны). На сторонах конусов решение определяется как пропорциональное, т.е., если k – направление стороны конуса, и точка v лежит на этой стороне, то

$$\varphi(v,T) = (t, kt), \text{ где } t = \frac{T}{k+1}. \tag{2.2}$$

Положительные части осей координат являются сторонами конусов. Если v принадлежит внутренности некоторого конуса, задаваемого коэффициентами (наклонами сторон конуса) k_1, k_2, $k_1 < k_2$, $\frac{v_i}{v_j} \in (k_1, k_2)$, то в значении $\varphi(v,T) = (t, T-t)$, получим, что либо $t = \frac{T-(v_j - k_2 v_i)}{k_2+1}$, если сторона с направляющим коэффициентов k_2 первая, либо $t = \frac{T-(v_j-k_1v_i)}{k_1+1}$, если первой является сторона с коэффициентом k_1, т.е. векторы v и $(t, T-t)$ лежат на прямой, параллельной одно из сторон конуса разбиения, которому принадлежит вектор v.

Для анонимных решений $\mathcal{H}_2^a$ положительная часть диагонали является стороной двух смежных конусов.

Теорема 2.1 (Moulin 2000). *Семейство $\mathcal{H}_2^*$ является единственным семейством методов распределения затрат, удовлетворяющих свойствам PH, UC и LC.*

Так как большинство теоретико-игровых решений обладают свойством анонимности, рассмотрим только подсемейство $\mathcal{H}_2^a \subset \mathcal{H}_2^*$ анонимных методов распределения.

Распространим теперь решения из класса $\mathcal{H}_2^a$ на решения игр из класса $\mathcal{G}_2^+$, точнее, ввиду анонимности, на ортант $\{x \,|\, x_i+x_j \geq 0, x_i \geq x_j\}$ значений характеристических функций с бо́льшими значениями для i-го игрока. Для этого разобьем этот ортант на конусы с вершинами в нуле. При этом координатная полуось $x_j = 0, x_i \geq 0$ может и не быть стороной конусов разбиения.

Если в задачах распределения затрат направляющие сторон конусов для рассматриваемого ортанта принадлежали множеству $[0, 1]$ (конус между диагональю и осью x_i,) то разбиение всего ортанта расширяет это множество до $[-1, 1]$.

При этом если для точек конуса, одной из сторон которого является луч из 0 вдоль прямой $x_i + x_j = 0$ в сторону увеличения x_i, прямые, определяющие решение, параллельны этой стороне конуса, то таким образом продолженное решение для φ является эгалитарным для всех точек v из этого конуса, т.е. $\varphi(v, 0) = (0, 0)$.

Полученный класс расширений класса $\mathcal{H}_2^a$ на класс игр $\mathcal{G}_2^+$, обозначим через Φ.

Предложение 2.1. *Решения из класса Φ обладают свойством самоковариантности.*

Однако свойства анонимности и самоковариантности еще недостаточны для того чтобы охарактеризовать семейство решений Φ. В следующем разделе будет описано более широкое семейство всех решений, удовлетворяющих этому свойству.

3. Семейство Ψ

Обозначим через Ψ семейство всех решений для класса $\mathcal{G}_2^+$, удовлетворяющих анонимности и самоковариантности.

Игры с аддитивными характеристическими функциями являются подклассом класса $\mathcal{G}_2^+$, Обозначим через $\mathcal{G}^{ad}$ множество всех аддитивных игр двух лиц. Каждая игра из этого подкласса определяется вектором $v = (v_i, v_j)$ индивидуальных значений характеристической функции. Таким образом, мы может обозначить аддитивную игру двух лиц просто буквой v.

Легко показать, что для этого класса существуют только два решения из класса Ψ: это эгалитарное решение и решение $\varphi(v) = (v_i, v_j)$ для всех $v \in \mathcal{G}_2^+$.

Пусть $\varphi \in \Psi$ – произвольное решение. Определим *обратную* функцию к φ равенством

$$v \in \varphi^{-1}(x, T) \iff x = \varphi(v, T).$$

Так как для эффективных решений вектор решения $\varphi(v, T) = (x_i, x_j)$ удовлетворяет равенству $x_i + x_j = T$, обратная функция зависит только от двух переменных $x = (x_i, x_j)$.

Приведем некоторые свойства решений из семейства Ψ и обратных к ним.

Лемма 3.1. *Если $\varphi \in \Psi$, то множество $\varphi^{-1}(x)$ является выпуклым конусом с вершиной x и сторонами в положительном направлении суммы координат*

Обозначим через L_1 полупрямую

$$L_1 = \{x \in \mathbb{R}^2, |\, x_i + x_j = 1, x_i \geq x_j\}. \tag{3.1}$$

Лемма 3.2. *Для любого решения $\varphi \in \Psi$ множество $\{\varphi(v, 1)\,|\, v_i + v_j > 1, v_i \geq v_j\}$ либо совпадает с полупрямой L_1, либо равно интервалу $[(1/2, 1/2), (1 - A, A)]$ для некоторого $A \geq 1/2$.*

Следствие 3.1. *В условиях Леммы 3.2 для любой точки $y \in L_1$ из $\varphi^{-1}(y) \neq \emptyset$ следует, что множество $\varphi^{-1}(z) \neq \emptyset$ для любой точки $z = (z_i, z_j) \in L_1$, удовлетворяющей неравенству $z_i < y_i$.*

Доказательство непосредственно следует из Леммы 3.2. Следствие показывает, что множество $\{x_i | x_i + x_j = 1, x_i \geq x_j,\ \varphi^{-1}(x) \neq \emptyset\}$ либо является некоторым интервалом $[(1/2, a]$, либо полупрямой $[1/2, \infty)$.

Следствие 3.2. *Если множество* $\{\varphi(v,1)\,|v_i+v_j>1\}$ *ограничено и равно интервалу* $[(-A,A+1),(1-A,A)]$ *для некоторого* $A\geq 1/2$, *то* $\varphi(v,1)=(1-A,A)$ *для всех* $\{v|v_i+v_j\geq 1,\ v_j<kv_i+1-A(1+k)\}$, *где* $k\geq -1$ *равно минимальному наклону лучей из конуса* $\varphi^{-1}(1-A,A)$.

Лемма 3.3. *Если решение* φ *удовлетворяет самоковариантности, то для любых точек* y,z, *лежащих на прямой* $x_i+x_j=T, x_i\leq x_j$, *множества* $\varphi^{-1}(y)$ *и* $\varphi^{-1}(z)$ *не пересекаются.*

Лемма 3.4. *Пусть* $\varphi\in\Psi$ *для класса* $\mathcal{G}_2$, *и для некоторого* x $|\varphi^{-1}(x)|>1$. *Тогда это множество является выпуклым конусом с вершиной в точке* x *и сторонами в положительном направлении сумм координат принадлежащих им точек.*

Лемма 3.5. *Если решение* $\varphi\in\Psi$ *для класса* $\mathcal{G}_2^+$, *то множество* $\{\varphi(v,1)\,|v_i+v_j>1\}$ *либо заполняет всю прямую* $x_i+x_j=1$, *либо является отрезком этой прямой* $[(1-A,A),(A,1-A)]$ *для некоторого* $A\geq 1/2$.

В частности, для аддитивных игр множество $\varphi(v,1)$ *либо заполняют всю прямую в соответствии с решением* $\varphi(v,1)=(v_i,v_j)$, *либо это вырожденные отрезок, сосредоточенный в точке* $(1/2,1/2)$, *соответствующий эгалитарному решению.*

Следующий вывод из Леммы 3.5 очевиден:

Следствие 3.3. *В условиях Леммы 3.5 для любого* $y\in L_1$ *из* $\varphi^{-1}(y)\neq\emptyset$ *следует, что* $\varphi^{-1}(z)\neq\emptyset$ *для всех* $z\in L_1$, *удовлетворяющих неравенству* $z_i<y_i$.

Это следствие показывает. что что множество $x: x_i+x_j=1$, $x_i\geq x_j$, для которого множества $\varphi_x\neq\emptyset$, заполняют или некоторый интервал $[(1/2,1/2)(a,1-a)], a\geq 1/2$, или всю полупрямую L_1.

Следствие 3.4. *Если множество* $\{\varphi(v,1)\,|v_i+v_j>1\}$ $v_i\geq v_j$ *ограничено и является интервалом* $((1/2,1/2),(A,1-A)]$ *для некоторого* $A\geq 1/2$, *то* $\varphi(v,1)=(A,1-A)$ *для всех* $\{v|v_i+v_j\geq 1,\ 1-v_{\leq}v_j\leq \frac{1-A}{A}v_i\}$.

Следующая Лемма устанавливает непрерывность обратной функции φ^{-1} для решений $\varphi\in\Psi$ в областях $x_i+x_j=T$ для произвольного

T. относительно точек x с одинаковой суммой координат $x_i + x_j = T$. Для ее формулировки введем обозначения и простые факты.

Пусть x_n последовательность точек с постоянной суммой $x_{in} + x_{jn} = T$, сходящаяся к x. Не ограничивая общности можно считать, что последовательность x_n монотонна, т.е. или все x_{in} возрастают по n, или все x_{in} убывают по n и, более того, $x_{in} > x_{jn}$.

Пусть x_{in} возрастающая последовательность, и предположим, что множества $\varphi^{-1}x_n$ одномерны, т.е. являются лучами. Обозначим наклон луча $\varphi^{-1}x_n$ через k_n. Тогда $k_n \in [-1, 1]$.

Так как лучи $\varphi^{-1}(x_n)$ не пересекаются (Лемма 3.1), последовательность k_n убывающая. Следовательно, существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} k_n = k$.

Лемма 3.6. *Пусть решение φ удовлетворяет условиям Леммы 3.3. Предположим, что для выше определенной последовательности $x_n \to x$ все множества φ_{x_n} одноточечны. Если последовательность k_n сходится $k_n \to k$, то множество $\varphi^{-1}(x)$ содержит луч из точки x с направлением k.*

Опишем теперь все решения из семейства Ψ для класса игр $\mathcal{G}_2^+$ с помощью обратной функции. Рассмотрим обратную функцию для значений T с $T = 1$, т.е., для $x = (x_i, x_j)$, удовлетворяющих равенству $x_i + x_j = 1$. По анонимности решений из класса Ψ достаточно только с $x_i \geq 1/2$.

Определим семейство $\mathcal{H}$ многозначных функций $h : [1/2, \infty) \to [-1, 1]$, обладающих следующими свойствами: $h \in \mathcal{H}$, если
1) $1 \in h(1/2)$;
2) $h(t) = [a_t, b_t], a_t \leq b_t]$ для всех $t \geq 1/2$;
3) функция имеет замкнутый график: если $x_n \to x, y_n \in h(x_n)$, $y_n \to y$, то $y \in h(x)$;
4) h монотонно не возрастает: $\liminf\limits_{x_n \to x^-} h(x_n) \geq \limsup\limits_{x_m \to x^+} h(x_m)$;
5) Если $|h(x)| = 1$ в некотором максимальном интервале $x \in (a, b)$, то либо $h(x)$ постоянна в этом интервале, либо $h(x) = \frac{1-x}{x}$.

Каждая функция $h \in \mathcal{H}$ определяет эффективное решение ψ^h для класса $\mathcal{G}_2^+$ заданием обратной функции $(\psi^h)^{-1}(x)$ для $x = (x_i, x_j)$, $x_i \in [1/2, \infty), x_i + x_j = 1$ следующим образом:

$$(\psi^h)^{-1}(x) = \begin{cases} \text{луч из } x \text{ с наклоном } h(x_i), & \text{если } |h(x_i)| = 1, \\ \text{угол с вершиной } x & \\ \text{и наклонами сторон 0a,0b}, & \text{если } h(x_i) = [a, b]. \end{cases} \quad (3.2)$$

Само решение ψ^h определяется для любой игры $(v, 1) \in \mathcal{G}_2^+$ следующим соотношением:

$$x = \psi^h(v, 1) \iff v \in (\psi^h)^{-1}(x), \;\; x_i + x_j = 1. \quad (3.3)$$

Если существует такое число A, для которого $h(A) = -1$, то для всех точек v, принадлежащих углу с вершиной в точке $(A, 1 - A)$ и сторонами, образованными лучами с направлениями $\frac{1-A}{A}$ и -1, $\varphi^h(v, 1) = (A, 1 - A)$.

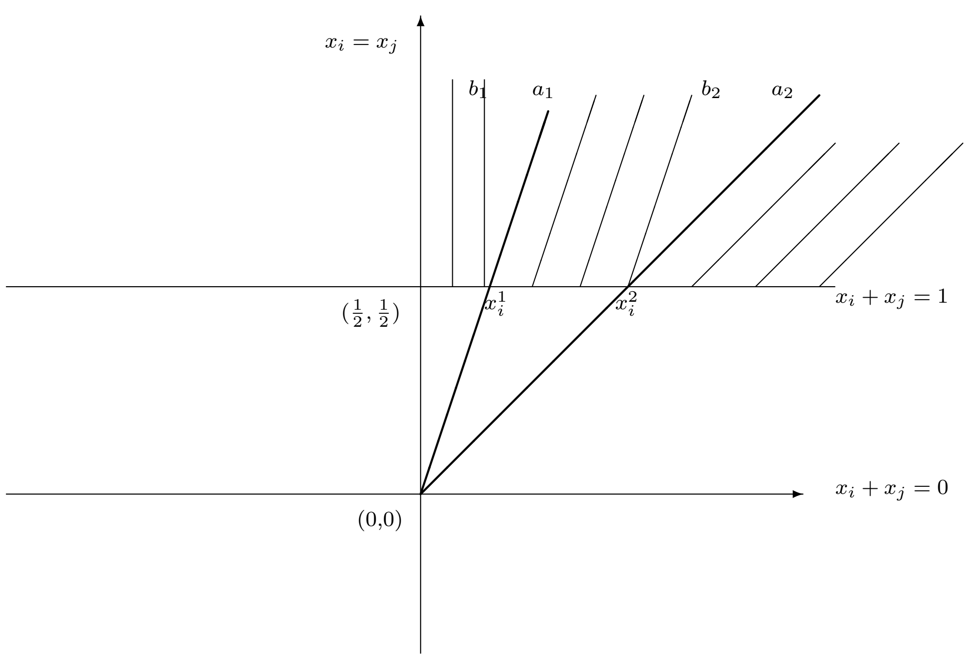

Рисунок 1. График обратной функции $(\varphi^h)^{-1}(x)$ для $x_i + x_j = 1, x_i \geq x_j$

На рис. 1 изображен график обратной функции $(\varphi^h)^{-1}$ для аргумента $x_i : [1/2, \infty)$, представленного на полупрямой $x_i + x_j = 1$,

$x_i \geq x_j$ для функции h, которая является многозначной в двух точках x_i^1 и x_i^2. Значения $(\varphi^h)^{-1}(x)$ для x^1, x^2 являются углами с вершинами в этих точках и сторонами с наклонами $a_i, b_i, i = 1, 2$, а для остальных x_i лучами, выходящими из x_i.

Для произвольных значений T

$$\psi^h(v_i, v_j, T) = T\psi^h\left(\left(\frac{v_i}{T}, \frac{v_j}{T}\right), 1\right). \qquad (3.4)$$

Для игр (v, T) из класса $\mathcal{G}_2^+$ с $v_j > v_i$ решение ψ^h по анонимности определяется следующим образом:

$$\psi_i^h(v_i, v_j, T) = \psi_j^h(v_j, v_i, T). \qquad (3.5)$$

Таким образом, для заданной функции $h \in \mathcal{H}$, решение ψ^h однозначно определено для всего класса $\mathcal{G}_2^+$.

Теорема 3.1. *Решение φ для неаддитивных игр из класса $\mathcal{G}_2^+$ принадлежит семейству Ψ в том и только в том случае, если найдется такая функция $h \in \mathcal{H}$, что $\varphi = \psi^h$.*

Примеры

1. Если $h(t) \equiv \frac{\pi}{2}$ для всех $t \in [1/2, \infty)$, то решение ψ^h стандартное.

2. Если $h(\frac{1}{2}) = [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$, $h(t) \equiv \frac{\pi}{4}$ для всех $t > \frac{1}{2}$, то решение ψ^h является распространением правила the equal loss rule на субаддитивные игры двух лиц с неотрицательными выигрышами коалиции двух игроков.

3. $h((\frac{1}{2}) = [0, \frac{\pi}{2}]$, $h(t) \equiv 0$ для всех $t > \frac{1}{2}$, то решение ψ^h является эгалитарным: $\psi^h((v_i, v_j), 1) \equiv \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ для всех $(v_i, v_j), v_i + v_j > 1$.

4. Если $h(t) = \operatorname{arcctg}\frac{1-t}{t} + \frac{\pi}{4}$, то решение ψ^h пропорциональное.

Все решения 1-4 принадлежат классу Φ (см. раздел 2). Примером функции $h \in \mathcal{H}$, определяющей решение φ^h, обладающее свойствами NE, EFF, ANO и Self-COV, но не принадлежащее классу Φ, является функция $h(t) = \frac{\pi}{2(t+1/2)}$. Действительно, для каждого $t \geq 1/2$ множество $\varphi^h_{(t,1-t)}$ одноточечное, но функция $h(t)$ не имеет интервалов постоянства значений. Поэтому решение φ^h не определяется разбиением полупространства $((x_i, x_j) \,|\, x_i + x_j \geq 0$ на конусы, внутри каждого из которых функция h постоянна, а на границах конусов решение φ^h пропорциональное.

4. Аксиоматическая характеризация семейства Φ

Из предыдущего раздела следует, что семейство Ψ, охарактеризованное в теореме 3.1, весьма обширно и содержит в себе семейство Φ. В этом разделе мы охарактеризуем семейство Φ добавлением еще одной аксиомы. Вспомним, что ограничение семейства Φ на класс задач распределения ресурсов двух лиц совпадает с семейством $\mathcal{H}_2^a$, которое характеризуется аксиомами анонимности, верхней и нижней композициями и положительной однородностью [4]. Свойства верхней и нижней композиции не были использованы при характеризации семейства $\Psi \supset \Phi$ (Теорема 3.1). Следовательно, можно попытаться использовать эти аксиомы. Однако свойство нижней композиции, как уже отмечалось, невозможно применить для характеризации задач распределения прибыли, так как оно для задач распределения прибыли $(c,t),(c,T-t),t<T$ задача $(c,T-t)$, участвующая в определении этого свойства, может оказаться задачей распределения затрат. Наоборот, свойство верхней композиции или независимости от пути полностью годится для обоих классов задач распределения. Его можно применить для характеризации решений всего класса кооперативных игр двух лиц.

Решение φ для класса $\mathcal{G}_+^2$ игр двух лиц называется *независимым от пути (Path Independent, PI)*, если для любых игр $(v,t),(v,T)$, $t<T$

$$\varphi(v,T)=\varphi(\varphi(v,t),T).$$

Для заданной игры $(N,v), N=\{i,j\}$ *путем* называется геометрическое место точек, являющихся решениями игр (v,T) для переменного значения большой коалиции T.

Далее, мы будем применять следующее обозначение: k_1xk_2, axb обозначают углы с вершиной x и сторонами с наклонами k_1,k_2, $k_1<k_2$ или проходящими соответственно через точки a,b.

Очевидно, что если решение φ для класса игр двух лиц удовлетворяет самоковариантности и независимости от пути и для фиксированного $x\in\mathbb{R}^2$ множество $\varphi^{-1}(x)$ является лучом, то для $v\in\varphi^{-1}(x)$, путь φ^v является интервалом на луче $\varphi^{-1}(x)$.

Начнем с рассмотрения подкласса $\mathcal{G}_+^2\subset\mathcal{G}_2$ и решений для него.

Решение φ для игр из класса $\mathcal{G}_2^+$ называется *пропорциональным,* если для любой игры $(v,T)\in\mathcal{G}_2^+$ $\varphi(v,T)=y$, где y – точка пересечения луча $0v$ с прямой $x_i + x_j = T$. Решение может быть пропорциональным не на всем классе игр, а только для некоторых подмножеств класса. Если решение φ пропорционально для некоторой игры $(v,T) \in \mathcal{G}_2^+$, и самоковариантно, то оно пропорционально для всех игр с $w \in \mathcal{G}_2^+$, таких что точки (w_i, w_j) принадлежат лучу $0v$, поэтому далее мы будем пользоваться выражением «решение пропорционально на луче».

Лемма 4.1. *Пусть φ – решение для класса игр $\mathcal{G}_+^2$, удовлетворяющее аксиомам NE, EFF, SV. ANO, self-C0V и PI. Пусть $k_1 0 k_2$ максимальный угол, такой что для любой его внутренней точки x решение φ на луче $0x$ не является пропорциональным, т.е., интервал $[0,x]$ не является путем φ^v для игр (v,t) с $t \in [0,x]$. Тогда для любой точки z внутри этого угла множество $\varphi^{-1}(z)$ является лучом с наклоном k_1 или k_2.*

Лемма 4.2. *Пусть φ – решение для класса $\mathcal{G}_+^2$, удовлетворяющее условиям Леммы 4.1.*

Если точка $a = (a_i, a_j)$ удовлетворяет равенству $a_i + a_j = 1$ и неравенству $a_i > 1$, а множество $\varphi^{-1}(a)$ является углом $k_1 a k_2$, $k_1 < k_2$, то
1) луч $0a$ проходит через этот угол и
2) на лучах $0a$ и лучах из 0 с наклонами k_1, k_2 решение φ пропорциональное.

Лемма 4.3. *Если в условиях леммы 4.1 существует угол, образованный лучами с направлениями $k_1, k_2 \leq 1, k_1 < k_2$, внутри которого множества $\varphi^{-1}(x)$ однотомерные (т.е. лучи) для всех $x_i + x_j = 1$, а для любой точки z, принадлежащей одной из границ сектора множество $\varphi^{-1}(z)$ не пересекается с внутренностью угла $k_1 0 k_2$, то решение φ пропорциональное во всем угле.*

Теорема 4.1. *Семейство Φ решений для класса $\mathcal{G}_2^+$ состоит из решений семейства Ψ, удовлетворяющих аксиоме независимости от пути.*

5. Распространение решений из класса Φ на класс всех субаддитивных игр двух лиц

Как было показано в предыдущем разделе, решения из класса Φ для класса субаддитивных игр двух лиц с неотрицательными значениями большой коалиции определяются упорядоченными разбиениями полупрямой $[\frac{1}{2}, \infty)$ на интервалы и точки, или, что то же самое, разбиением ортанта между положительной частью диагонали $\mathbb{R}^2$ и полупрямой $x_i + x_j = 0, x_i \geq x_j$ на конусы с вершинами в нуле, так что каждая точка $(t, 1-t)$ полупрямой $x_i + x_j = 1, x_i \geq 1/2$ задает направление стороны конуса, проходящей через нее.

Целью этого параграфа является продолжение решений из класса Φ на все субаддитивные игры с сохранением всех свойств, перечисленных в формулировке теоремы 4.1.

Теорема 5.1. *Пусть $\bar{\varphi}$ распространение решения $\varphi \in \Phi$ на класс игр $\mathcal{G}^2_+$ субаддитивных игр двух лиц с отрицательными значениями коалиции двух игроков $v(\{i,j\}) = T < 0$, и это решение удовлетворяет аксиомам NE, SV, ANO, Self-COV и PI. Обозначим через $t_0 = \lim\limits_{t\to\infty} h^{\varphi}(t)$. Тогда расширение $\bar{\varphi}$ для игр (v,T) с $v_i \geq v_j$ определяется следующими равенствами:*

Если $t_0 > -1$, то

$$\varphi(v,T) = \begin{cases} \bar{\varphi}(v,T) = \left(\dfrac{T}{2}, \dfrac{T}{2}\right), & \text{если } v_i = v_j \text{ или} \\ & T \leq v_j - \dfrac{1-t_0}{t_0} v_i, \\ t_0\left(T - (v_j - \dfrac{1-t_0}{t_0} v_i)\right) & \text{иначе .} \end{cases} \tag{5.1}$$

Если $t_0 = -1$, то $\varphi(v,T) = \left(\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$.

6. Заключение

В работе новые решения были исследованы только для субаддитивных игр двух лиц. Это было сделано лишь для простоты изложения, так как определения этих решений можно непосредственно перенести и на супераддитивные игры. Действительно, пусть (v,T) – произвольная субаддитивная игра двух лиц. Тогда игра $(-v,-T)$ супераддитивная, и обратно, Распространим решение $\bar{\varphi}$ для класса субаддитивных игр двух лиц, рассмотренное в предыдущем разделе, на класс супераддитивных игр следующим образом: пусть (v,T) – супераддитивная игра. Положим

$$\bar{\varphi}(v,T) = -\bar{\varphi}(-v,-T) \tag{6.1}$$

Очевидно, что так определенное решение удовлетворяет всем аксиомам Теоремы 4.1, из которых, возможно, только самоковариантность не очевидна. Проверим ее.

Пусть (v,T) супераддитивная игра, а решение φ на субаддитивных играх самоковариантно. Тогда

$$\varphi(v + A\varphi(v,T)) = -\varphi(-v - A\varphi(-v,-T)) = \tag{6.2}$$

$$-(A+1)\varphi(-v,-T) = (A+1)\varphi(v,T)\,. \tag{6.3}$$

Возвращаясь теперь к задачам распределения прибылей заметим, что для этого класса задач семейство методов Φ на положительной области не столь богато, как семейство $\mathcal{H}_2^a$.

Действительно, равенство (6.2) показывает, что такие методы являются перевернутыми (в смысле знака) методов из семейства Φ для отрицательных значений T. Они совпадают с решениями кооперативных игр, исследованными в препринте [7] как решения супераддитивных игр двух лиц, удовлетворяющих аксиомам NE. EFF, ANO, Self-Cov, SI, и слабой ковариантнсти, которая здесь заменена аксиомой Независимости от пути (PI).

7. Приложение

Доказательство Утверждения 2.1. Пусть $(v,T) \in \mathcal{G}_2^+$ – произвольная игра, $\varphi \in \Phi$ – произвольное решение. Тогда по свойству самоковариантности для произвольного $0 \le T \le v_i + v_j$ $\varphi(w,T) = \varphi(v,T)$ для всех векторов w, расположенных на луче, выходящем из точки $\varphi(v,T)$ и проходящем через v. Следовательно, если v лежит на луче конуса разбиения, определяющего решение φ, то Утверждение доказано.

Пусть теперь v лежит внутри одного из конусов разбиения с коэффициентами k_1, k_2. Тогда луч из точки $\varphi(v,T)$, проходящий через v, не пересекает лучи $y_i = k_i x_i$, $i = 1,2$. Более того, по определению класса Φ этот луч параллелен одной из сторон конуса, пусть с коэффициентом k_1 (но можно взять и k_2). Значит решение φ определяется для всех w определяется лучами с направлением k_1 по формуле (2.2), где $w = v, k = k_1$.

Так как точка v была выбрана произвольно, Утверждение доказано.

$\square$

Доказательство Леммы 3.1. Возьмем произвольную субаддитивную игру $(v_i, v_j, 1)$ с $v(\{i,j\}) = 1$, $v_i > v_j$. Для удобства введем обозначения $v = (v_i, v_j)$, а игру $(v_i, v_j, 1)$ будем обозначать просто через $(v,1)$. Пусть $\varphi(v,1) = x$. Тогда $x_i + x_j = 1$. По свойству самоковариантности $\varphi(v',1) = x$ для всех $v' = \alpha v + (1-\alpha)x$ и всех $\alpha > 0$. Такие вектора v' заполняют луч, проведенный из точки x и проходящий через v.

Предположим, что конус $\varphi^{-1}(x)$ не выпуклый. Тогда найдутся игры $(v,1)(w,1) \in \varphi^{-1}(x)$ b $\alpha \in (0,1)$ такие что для $u = \alpha v + (1-\alpha)w$ $\varphi(u,1) \notin \varphi^{-1}(x)$, т.е. $\varphi(u,1) = y \neq x$ и $\varphi(u') = y$ для всех игр на отрезке $[u,y]$. Этот отрезок пересекает одну из образующих конуса $\varphi^{-1}(x)$ в некоторой точке u'', в которой должно быть $\varphi(u'',1) = y = x$, откуда следует $x = y$, что доказывает выпуклость конуса $\varphi^{-1}(x)$.

Доказательство Леммы 3.2. Покажем сначала, что множество точек $x_i \geq 1/2$, для которых найдется такая точка v, $v_i + v_j > 1$, для которой $\varphi(v,1) = (x_i, 1-x_i)$ либо является интервалом $[(1/2,1/2), (A, 1-A)]$, либо полупрямой $\bigcup_{x_i=1/2}^{\infty}(x_i, 1-x_i)$.

Предположим, что для некоторого $y_i \geq 1/2$ найдется такая ее окрестность $U(y_i) = (a_i, b_i)$ (она может состоять из единственной точки y_i), для которой $(\varphi(v,1))_i \cap U(y_i) = \emptyset$ для всех $v : v_i + v_j \geq 1, v_i \geq v_j$, и пусть эта окрестность максимальная, т.е., либо $\varphi^{-1}(\bar{a}) \neq \emptyset$, либо $\varphi^{-1}(\bar{b}) \neq \emptyset$, где $\bar{a} = (a_i, 1-a_i), \bar{b} = (b_i, 1-b_i)$.

Рассмотрим следующие случаи:

1. $\varphi^{-1}(\bar{a}), \varphi^{-1}(\bar{b}) \neq \emptyset$. Не ограничивая общности, можно предположить, что $a_i > b_i$. Множества $\varphi^{-1}(\bar{a}), \varphi^{-1}(\bar{b})$ по Лемме 3.1 являются углами с вершинами $\bar{a}, \bar{b}$ и наклонами сторон, соответственно, α_1, α_2, $\alpha_1 \geq \alpha_2$, β_1, β_2, $\beta_1 \geq \beta_2$. Так как эти лучи не пересекаются,

$\alpha_2 > \beta_1$.

Пусть v_1 и v_2 – произвольные точки на лучах из a с наклоном α_2, и из b с наклоном β_1 соответственно, и пусть $w = \gamma v_1 + (1-\gamma)v_2$ для некоторого $\gamma \in (0,1)$. Тогда по Лемме 3.1 $\varphi(w,1) = \bar{a}$ или $\bar{b}$. Let $\varphi(w,1) = \bar{a}$, и, следовательно, луч из точки a, проходящий через точку w, должен содержаться в множестве $\varphi^{-1}(\bar{a})$, что невозможно. Аналогично невозможен случай $\varphi(w,1) = \bar{b}$.

2. $U(y_i) = y_i$. Тогда для любой последовательности T $y_{ni} \to y_i$ найдутся такие векторы v_n, что $\varphi(v_n,1) = (y_{ni}, 1-y_{ni})$ для достаточно больших n. Пусть $y_n \to y, y_{in} < y_i$, $z_n \to y, z_{in} > y_i$, и $\varphi(w_n) = y_n$. Обозначим $[\alpha_n^1, \alpha_n^2]$ $[\beta_n^1, \beta_n^1]$ наклоны лучей границ соответственно множеств $\varphi^{-1}(y_n)$ и $\varphi^{-1}(z_n)$. Тогда $\alpha_n^2 \geq \beta_n^1$ для всех n. Не ограничивая общности мы можем предполагать, что существуют пределы $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n^2 = \alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n^1 = \beta$. Они удовлетворяют неравенству $\alpha \leq \beta$.

Если $\alpha = \beta$, то возьмем произвольную точку v на луче из y в направлении $\alpha = \beta$. Тогда $\varphi(v,1) = y$, так как в противном случае для достаточно больших n этот луч пересечет лучи из y_n в направлениях α_n^2, или же лучи из z_n в направлениях β_n^1, что невозможно.

Если $\alpha < \beta$, то возьмем точку v на луче из y в направлении $\gamma \in (\alpha, \beta)$. Аналогично предыдущему случаю получим, что $\varphi(v,1) = y$.

3. Случай, когда одно из множеств $\varphi^{-1}(\bar{a})$ или $\varphi^{-1}(\bar{b})$ пусто, а другое не пусто, доказывается комбинацией доказательств случаев 1 и 2.

Таким образом, доказано, что на полупрямой L_1 область значений функции φ^{-1} является либо интервалом $[(1/2,1/2)(A,1-A)]$, либо полупрямой L_1.. Следовательно,

$$\varphi^{-1}(x) = \emptyset \implies \varphi^{-1}(y) = \emptyset \text{ для всех } y \in L_1, y_i > x_i.$$

Доказательство Следствия 3.2. Луч $x_j = \frac{1-A}{A} x_i$ из точки $(A, 1-A)$ в положительном направлении суммы координат конусу $\varphi^{-1}(A,1-A)$. Пусть вектор $v = (v_1, v_j)$ удовлетворяет неравенствам $1 - v_i < v_j < \frac{1-A}{A} v_i$. Обозначим $\varphi(v,1) = y$. Тогда по условию Леммы $y_i \leq A$. Предположим, что $y_i < A$. По самоковариантности решения φ справедливо следующее включение: $[y,v] \subset \varphi^{-1}(y)$. Пусть z –

точка пересечения интервала $[y, v]$с лучом $x_j = kx_i + 1 - A(k+1)$. Тогда, снова по самоковариантности решения φ, должны выполняться равенства $\varphi(z, 1) = y, \varphi(z, 1) = (A, 1 - A,)$ что невозможно. Следовательно, $\varphi(v, 1) = (A, 1 - A)$. □

Доказательство Леммы 3.3. Пусть для простоты множества $\varphi^{-1}(y)$ и $\varphi^{-1}(z)$ являются лучами (в противном случае можно было бы рассмотреть любые их селекторы), и предположим, что лучи $\varphi^{-1}(y)$ и $\varphi^{-1}(x)$ из точек y и z соответственно, пересекаются в некоторой точке w. Тогда по определению множеств $\varphi^{-1}(y)$, $\varphi^{-1}(z)$, должны были бы выполняться равенства $\varphi(w, T) = y, z$, что противоречит одноточечности правила φ. □

Доказательство Леммы 3.4. Предположим, что размерность $\varphi^{-1}(x) > 1$ для некоторой точки x с $x_i + x_j = T$. Тогда найдутся 2 точки v, w, удовлетворяющие неравенствам $v_i + v_j > T$, $w_i + w_j > T$ и не лежащими на одной прямой с x, для которых $\varphi(v, T) = \varphi(w, T) = x$. Возьмем точку u внутри угла, образованными лучами из точки x и проходящими через v и w. Предположим, что $\varphi(u, T) = z \neq x$. Тогда $z \in \varphi_u$, и луч zu пересечет одну из сторон угла, пусть сторону xv в некоторой точке y. Тогда, по самоковариантности решения φ, должно быть $\varphi(y, T) = z$, а из определения множества $\varphi^{-1}(x)$ и опять из-за самоковариантности решения φ мы получаем, что $\varphi(y, T) = x$, противоречие.

Следовательно, множество $\varphi^{-1}(x)$ является выпуклым. Его конусность следует из самоковариантности решения φ. □

Доказательство Леммы 3.5. По свойству анонимности достаточно доказать Лемму для подкласса игр с $v_i \geq v_j$. Поэтому покажем, что множество точек $x_i \geq 0$, для которых найдется вектор v, $v_i + v_j > 1$, такой что $\varphi(v, 1) = (x_i, 1 - x_i)$, представляет собой или некоторый интервал, $[0, A]$ или полуось $[0, \infty)$.

Предположим, что найдется окрестность $U(x) = (a, b)$ точки x на прямой $x_i + x_j = 1$, для всех точек y которой $\varphi(v) \neq y$ для всех $v, v_i + v_j > 1$ ($U(x)$ может состоять и из одной точки x). Пусть эта окрестность максимальная, обладающая таким свойством, но в точках a, b $\varphi^{-1}(\bar{a})$ или $\varphi^{-1}(\bar{b}) \neq \emptyset$. Рассмотрим следующие возможности:

1. $\varphi^{-1}(\bar{a}), \varphi^{-1}(b) \neq \emptyset$. Пусть для определенности $b_i > a_i$, и пусть углы лучей из множеств $\varphi^{-1}(\bar{a})$, $\varphi^{-1}(\bar{b})$ с прямой $x_i + x_j = 1$ заполняют интервалы $[\alpha_1, \alpha_2]$, $[\beta_1, \beta_2]$. Так как эти лучи не пересекаются и ввиду неравенства $b_i > a_i$, должно выполняться неравенство $\alpha_2 \geq \beta_1$. Возьмем произвольные точки v_1 и v_2 соответственно на лучах из a под углом α_2 и из b под углом β_1. Тогда $\varphi(v_1, 1) = a$, $\varphi(v_2, 1) = b$. Пусть $w = \gamma v_1 + (1-\gamma) v_2$ для некоторого $\gamma \in (0, 1)$. Тогда по предположению и по Лемме 1 $\varphi(w, 1) = a$ или b. Пусть для определенности $\varphi(w, 1) = a$. Тогда угол между лучом aw и прямой $x_i + x_j = 1$ должен содержаться в множестве $\varphi^{-1}(\bar{a})$. Однако по определению точки w луч aw лежит вне угла $[\alpha_1, \alpha_2]$ из точки a, образованного множеством $\varphi^{-1}(\bar{a})$.

Следовательно, этот случай невозможен.

2. $U(x) = x$. Тогда для любой последовательности $x_n \to x$ для достаточно больших n найдутся такие v_n, что $\varphi(v_n, T) = x_n$. Пусть $x_n \to x, x_{in} < x_i$, а $y_n \to x, y_{in} > x_i$, и $\varphi(w_n) = y_n$. Обозначим соответственно через $[\alpha_n^1, \alpha_n^2]$ и $[\beta_n^1, \beta_n^1]$ множества углов из точек x_n y_n, определяющих множества $\varphi_{x_n}, \varphi_{y_n}$. Тогда $\alpha_n^2 \leq \beta_n^1$ для всех n. Не ограничивая общности можно считать, что существуют пределы $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n^2 = \alpha, \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n^1 = \beta$. Они удовлетворяют неравенству $\alpha \leq \beta$. Рассмотрим случаи

Если $\alpha = \beta$, то возьмем точку v на луче из x в направлении $\alpha = \beta$. Тогда $\varphi(v, 1) = x$, в противном случае для достаточно больших n этот луч пересек бы лучи из x_n в направлении α_n^2 и из y_n в направлении β_n^1, что невозможно.

Если $\alpha < \beta$, то возьмем точку на луче из x в направлении $\gamma \in (\alpha, \beta)$. Аналогично предыдущему случаю получим, что единственной возможностью является $\varphi(v, 1) = x$.

3. Случай, когда одно из множеств $\varphi^{-1}(\bar{a})$ или $\varphi^{-1}(\bar{b})$ пусто, доказывается путем комбинаций доказательств случаев 1 и 2.

Таким образом, доказано, что на полупрямой L_1 значения функции φ^{-1} либо являются интервалом $[(1/2, 1/2)(A, 1-A)]$, или самой полупрямой L_1..

Следовательно,

$$\varphi^{-1}(x) = \emptyset \implies \varphi^{-1}(y) = \emptyset \text{ for all } y \in L_1, y_i > x_i.$$

□

Доказательство Следствия 3.3. Луч $x_j = kx_i + 1 - A(k+1)$ для $x_i \geq A$ принадлежит конусу φ_A. Пусть v – вектор , удовлетворяющий неравенству $v_j < kv_i + 1 - A(1+k)$. Обозначим $\varphi(v,1) = y$. Тогда по условию Леммы $y_i \leq A$. Предположим, что $y_i < A$. По самоковариантности решения φ интервал $[y,v] \subset \varphi^{-1}(y)$. Пусть z – точка пересечения интервала $[y,v]$ с лучом $x_j = kx_i + 1 - A(k+1)$. Тогда, снова по самоковариантности φ должно быть $\varphi(z,1) = y, \varphi(z,1) = (A, 1-A)$, что невозможно. Следовательно, $\varphi(v,1) + (A, 1-A)$. □

Предположим противное. Сначала рассмотрим случай

1. Существует точка x, что $\varphi_x = \emptyset$ и в любой ее окрестности на прямой $x_i + x_j = 1$ есть $x' > x, x'' < x$, такие что $\varphi^{-1}(x'), \varphi^{-1}(x'') \neq \emptyset$. Возьмем произвольную точку v на луче $0x$, удовлетворяющую неравенству $v > x$. Обозначим $\varphi(v,1) = y$. Тогда по предположению $y \neq x$. Рассмотрим последовательности $x'_m \to x, (x'_m)_i < x_i$, $x''_m \to x, (x''_m)_i > x_i$, для которых $\varphi_{x'_m}, \varphi_{x''_m} \neq \emptyset$. Достаточно предположить, что в этих точках множества $\varphi^{-1}(x'), \varphi^{-1}(x'')$ одномерные, т.е. являются лучами с направлениями $k'_m > k''_m$. Возьмем $k \in (\inf_m k', \sup_m k'')$.

Пусть точка $w : w_i + w_j > 1$ расположена на прямой $y_j = ky_i + (x_j - kx_i)$, и обозначим $\varphi(w,1) = z$. Тогда $z_i > x_i$ или $z_i < x_i$ – равенства быть не может по предположению. Тогда в обоих случаях луч φ_z пересекается с лучами $\varphi : \varphi^{-1}(x'_m)$ или $\varphi^{-1}(x''_m)$ для достаточно больших m, что невозможно по Лемме 3.3.

Очевидно, по Лемме 3.1 такое же доказательство невозможности предположения можно провести и для случая, когда множества $\varphi^{-1}(x'_m)$ могут быть не одномерными.

2. Рассмотрим теперь случай, когда для некоторого интервала $(a,b) \subset \{x_i + x_j = 1\}$ и всех $x \in (a,b)$ $\varphi^{-1}(x) = \emptyset$. Опять предположим для простоты, что множества $\varphi^{-1}(\bar{b})$ одномерны, b максимальная правая граница интервала, так что существует последовательность x_m точек на прямой $x_i + x_j = 1$, такая что $x_m \to b, (x_m)_i > b_i$. Опять не ограничивая общности предположим, что множества φ_{x_m} являются лучами с направляющими k_m. Тогда последовательность k_m возрастающая, и пусть $k = \lim_{m\to\infty} k_m$. Возьмем точку $v, v_i + v_j > 1)$, расположенную на луче, выходящем из x с направлением k. Обозначим

$\varphi(v,1) = z$. Тогда должно быть $z_i < b_i$, в В случае противоположного неравенства путь φ^v пересекался бы с лучами $\varphi^{-1}(x_m)$ для достаточно больших m. Если же $z_i < b_i$, то путь φ^v из v в z будет иметь направление $k' < k$, и опять-таки пересечется с лучами $\varphi^{-1}(x_m)$. Получили, что случай 2 также невозможен. $\square$

Доказательство Теоремы 3.1. Пусть $h \in \mathcal{H}$ – произвольная функция, удовлетворяющая свойствам 1)–4). Покажем, что $\psi^h \in \Psi$.

Из свойств 3) и 4) следует, что для любого вектора $v = (v_i, v_j)$, $v_j \leq v_i, v_i + v_j > 1$ найдется такая точка x для которой $v \in \psi^h(x)$. Следовательно, решение ψ^h не пусто для игр $(v,1) \in \mathcal{G}_2^+$ и, по (3.4), оно не пусто для всех игр из $\mathcal{G}_2^+$.

Одноточечность решений $\psi^h(t)$ для всех t следует из непересекаемости значений $(\psi^h)^{-1}$: $(\psi^h)^{-1}(x) \cap (\psi^h)^{-1}(y) = \emptyset$ для любых $x \neq y, x_i + x_j = y_i = y_j$, что обусловлено свойствами 2) и 4) функции h и определением обратной функции (3.3).

Анонимность решения ψ^h следует из (3.5).

Пусть теперь $\varphi \in \Psi$ – произвольное решение, и выберем число $A = \max x$ так, чтобы существовал вектор $v, v_i \geq v_j$, удовлетворяющий равенству $\varphi(v,1) = (x, 1-x)$. Нужно доказать, что $\varphi = \psi^{h^\varphi}$ для некоторой функции $h^\varphi \in \mathcal{H}$. Не ограничивая общности предположим, что число A с минимальным значением $h(A) = 1$ не достигается, т.е., условно, $A = \infty$.

Построим функцию $h^\varphi \in \mathcal{H}$, которая будет определять решение $\varphi = \psi^{h^\varphi}$.

Очевидно, $\varphi((1/2,1/2),1) = (1/2,1/2)$, поэтому положим $(1/2,1/2) \in h^\varphi(1/2)$.

Для произвольного $t \geq 1/2$ положим

$$h^\varphi(t) = [\alpha_1^t, \alpha_2^t], \tag{7.1}$$

где множество $\varphi^{-1}(t, 1-t)$ равно углу с вершиной $(t, 1-t)$ и со сторонами, имеющими наклоны α_1^t, α_2^t. Тогда функция h^φ удовлетворяет свойству 2).

Так как множества $\varphi^{-1}(x)$ и $\varphi^{-1}(y)$ для $x_i + x_j = y_i + y_j = 1$ не пусты по предположению $A = \infty$, замкнуты и не пересекаются, мы получаем, что функция $h^\varphi(t)$ (7.1) не возрастающая по t, т.е., она удовлетворяет свойству 4). По Лемме 3.6 функция h^φ удовлетворяет свойству 3).

Следовательно, $h^\varphi \in \mathcal{H}$, и $\psi^{h^\varphi} \in \Psi$.

Остается показать, что $\varphi = \psi^{h^\varphi}$. Из равенства (7.1) следует, что для любого $t \geq 1/2$ множество $h^\varphi(t) = [k_1^t, k_2^t]$ определяет единственное множество $\varphi^{-1}(t, 1-t)$, такое что k_1, k_2 являются наклонами сторон угла $\varphi^{-1}(t, 1-t)$. Следовательно, из (2.1) следует, что $\varphi^{-1} = (\psi^{h^\varphi})^{-1}$, откуда, вместе с 3.3) мы получаем $\varphi = \psi^{h^\varphi}$.

Это доказательство было проведено для подкласса $\mathcal{G}_2^+$ игр(v, T), удовлетворяющих условиям $T = 1$, $v_i \geq v_j$. Расширение этого результата на весь класс $\mathcal{G}_2^+$ проводится с помощью анонимности (3.5)и положительной однородности (частью свойства самоковариантности) (3.4) решений из семейства Ψ. $\square$

Доказательство Леммы 4.1. По условию Леммы путь $\varphi^z(v, t)$ для любой внутренней точки z и $t \in [0, v_i + v_j]$ пересекает стороны угла в ненулевой точке. Пусть он пересекает сторону $x_j = k_2 x_i$ в точке y.

Покажем, что интервал $[y, z]$ имеет наклон k_1. Обозначим наклон интервала $[y, z]$ через k и предположим, что $k \neq k_1, k_2$. Рассмотрим следующие случаи:

1. $k < k_1$. Тогда луч с этим наклоном из множества $\varphi^{-1}(z)$ пересекает луч $x_j = k_1 x_i$, что невозможно.
2. $k_1 < k < k_2$. Тогда по положительной однородности φ решение является пропорциональным на луче внутри угла из нулевой точки с наклоном k, что невозможно по предположению.
3. $k > k_2$. Этот случай аналогичен случаю 1.

Так как точка z была выбрана произвольно внутри угла, значение обратной функции $\varphi^{-1}(z)$ состоит из единственного луча с тем же самым наклоном k_1 or k_2.

Для любой точки границы $w : w_j = k_2 w_i$ значение обратной функции $\varphi^{-1}(w)$ равно углу $k_1 a k_2$. $\square$

Доказательство Леммы 4.2. Обозначим через k_a наклон луча $0a$ к линии $x_i + x_j = 1$.

Рассмотрим следующие случаи: 1. $k_a < k_1 < k_2$ (рис. 2).

По положительной однородности решения φ $\varphi^{-1}(\alpha a) = \alpha\varphi^{-1}(a)$ для любого $\alpha > 0$. Пусть $v \in \varphi^{-1}(\alpha a) \cap (\varphi^{-1}(a)$ для некоторого $\alpha < 1$.

Тогда $\varphi(v,1)=a, \varphi(v,\alpha)=\alpha a$, По независимости от пути решения φ $\alpha a=\varphi(v,\alpha)=\varphi(\varphi(v,1),\alpha)$. Так как $\varphi(v,1)=a$, из этого неравенства мы получаем $\varphi(a,\alpha a)=\alpha$, что означает пропорциональность решения φ на луче $0a$. Следовательно, часть луча $0a$ выходящая из точки a, принадлежит множеству $\varphi^{-1}(a)$, что возможно только в случае $k_a=k_1$. Из этого равенства следует, что на луче $0a$, совпадающем с лучом с наклоном k_1, решение φ пропорциональное.

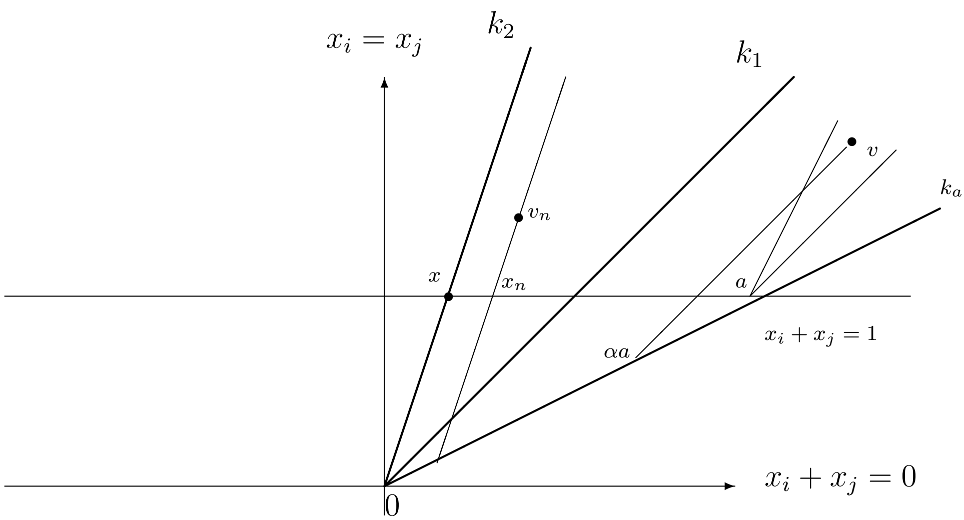

Рисунок 2. Пути решения φ для случая 1 доказательства Леммы 4.2.

Остается показать, что на луче из нуля с направлением k_2 решение φ пропорциональное. Пусть w — произвольная точка с суммой компонент 1, лежащая внутри угла $k_1 0 k_2$ (рис. 3).

Наклон любого луча из множества $\varphi^{-1}(w)$ меньше или равен k_2. Если он не равен k_2, то его продолжение пересечет луч из a с наклоном k_2. Тогда в точке пересечения b должно быть $\varphi(b,1)=w$, и $\varphi(b,1)=a$, что невозможно. Следовательно, для любой точки w внутри этого $k_1 0 k_2$ множество $\varphi^{-1}(w)$ является лучом из w с наклоном k_2.

Пусть последовательность $x_n \to x$, $x_{ni} > k_2 x_{nj}$ состоит из точек на линии $x_i + x_j = 1$. Тогда множества $\varphi^{-1}(x_n)$ являются лучами с направлением k_2 По Лемме 3.6 луч из x с наклоном k_2 принадлежит множеству $\varphi^{-1}(x)$, что означает пропорциональность решения φ на луче $0k_2$.

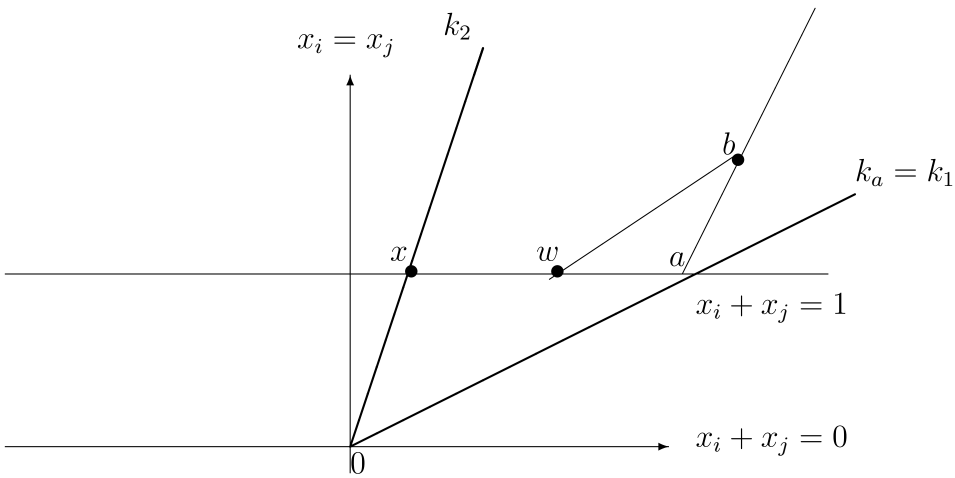

Рисунок 3. Случай $k_a = k_1$ в доказательстве Леммы 4.2.

2. $k_1 < k_2 \leq k_a$. Аналогично доказательству п.1) мы получаем, что этот случай приводит к пропорциональности решения φ на луче $0a$ и $k_2 = k_a$.

3. $k_1 < k_a < k_2$ (рис. 4). Сначала покажем пропорциональность решения φ на луче $0a$. Возьмем произвольную точку w в угле k_1ak_2. Тогда $\varphi(w, 1) = a$. Из положительной однородности φ следуют равенства $\varphi(w, \alpha) = \alpha a$ для любых $0 < \alpha < 1$, а по аксиоме независимости от пути φ из последних двух равенств следует $\varphi(a, \alpha) = \alpha a$, что означает пропорциональность решения φ на луче $0a$.

Теперь покажем пропорциональность решения φ на луче из 0 с направлением k_1. Рассмотрим точку $y = \left(\frac{1}{1+k_1}, \frac{k_1}{1+k_1}\right)$ на этом луче (рис. 4). По положительной однородности решения φ и по Лемме 3.6 мы получаем $\varphi^{-1}(y) \neq \emptyset$.

Пусть $v \in \varphi^{-1}(y)$ – произвольная точка. Тогда $\varphi(v, 1) = y$. Рассмотрим следующие случаи:

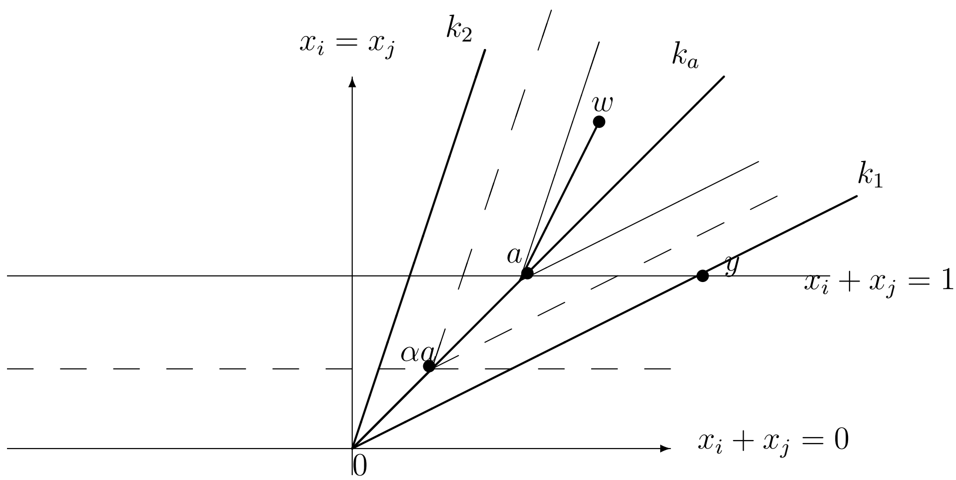

Рисунок 4. Решение φ на луче с направлением k_1:
случай 3 доказательства Леммы 4.2.

3.1) Точка v находится на луче из 0 с наклоном k_1. Это утверждение уже доказано.

3.2) Точка v находится вне угла $k_1 0 k_a$ (рис. 5).

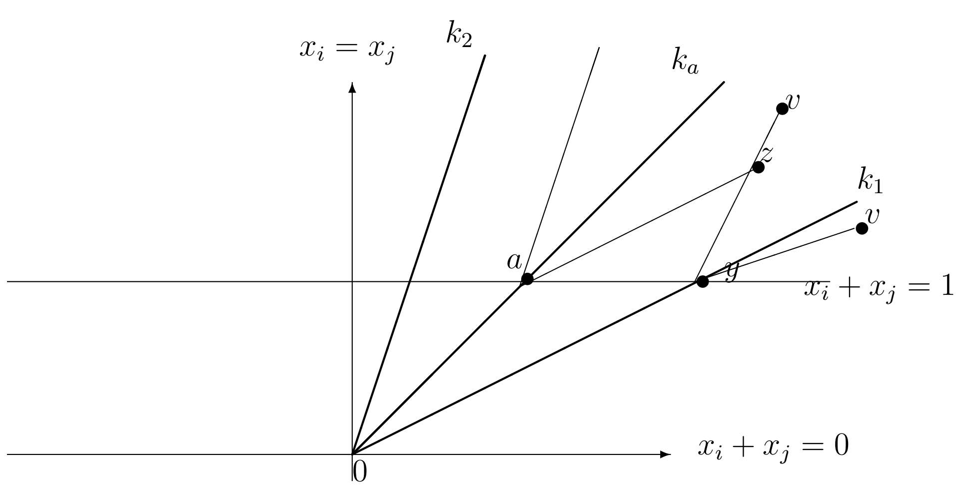

Рисунок 5. Решение φ для игр вне угла $k_1 0 k_2$.

Тогда по Лемме 4.1 угол с вершиной y, одна сторона которого имеет наклон k_1, а другая лежит на луче $0v$, содержится в множестве $\varphi^{-1}(y)$.

3.3) Точка v находится в угле $k_a 0 k_1$. Тогда наклон интервала $[v, y]$ должен находиться между k_1 и k_a. Однако если он больше чем k_1, то луч из y через точку v будет пересекать луч из a в направлении k_1. В точке пересечения z должны были бы выполняться равенства $\varphi(z, 1) = a, \varphi(z, 1) = y$, что невозможно.

Следовательно, из пп. 3.2) и 3.3) следует, что луч из y в направлении k_1 содержится в множестве $\varphi^{-1}(y)$, откуда следует пропорциональность решения φ на луче $0k_1$.

Аналогично доказывается пропорциональность решения φ на луче $0k_2$. □

Доказательство Леммы 4.3. Если множество точек $X = \{x : x_i + x_j = 1, x_i \geq x_j\}$, размещенных внутри угла $k_1 0 k_2$ и таких что на лучах $0x$ решение φ пропорциональное, плотно на интервале $[a, b]$, где $a = (a_i, 1 - a_i), b = (b_i, 1 - b_i)$, где $k_1 = \frac{1-b_i}{b_i}, k_2 = \frac{1-a_i}{a_i}$, то по Лемме оно пропорционально во всем угле $k_1 0 k_2$.

Рассмотрим интервал $[a, b]$ точек угла, удовлетворяющих равенствам $a_i + a_j = b_i + b_j = 1$. Тогда лучи из a, b соответственно в направлениях $0a, 0b$, принадлежат множествам $\varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(b)$. Для каждой точки z множество $\varphi^{01}(z)$ является лучом из этой точки, и все эти лучи не пересекаются по одноточечности решения φ. Кроме того, по положительной однородности, в каждой точке z луча $y_j = kx_j, k \in (k_1, k_2)$ лучи $\varphi^{-1}(z)$ параллельны. Это возможно только если либо лучи $\varphi^{-1}(z)$ параллельны для всех внутренних точек угла, либо проходят через нулевую точку. Первый случай означает, что лучи параллельны одной из сторон угла, и, следовательно, на другой стороне угла множества $\varphi^{-1}(z)$ не одномерные. Второй случай отвечает требованиям Леммы. □

Пусть k_1 – направление луча $\varphi^{-1}(x)$, k_2 – направление луча $0x$. Если $k_1 = k_2$, то решение φ на луче $0x$ пропорциональное.

Пусть теперь решение φ на луче $0x$ не пропорциональное. $k_1 \neq k_2$, и для определенности рассмотрим случай $k_1 < k_2$. Тогда по Лемме 4.1 в правой части окрестности: $y \in U(x)$, $y_i > x_i$ лучи $\varphi^{-1}(y)$ имеют направление k_1.

Возьмем произвольное число $\alpha > 1$. Так как решение φ на луче $0x$ не пропорциональное, $\varphi(\alpha x, 1) = z \neq x$. Обозначим наклон отрезка $[\alpha x, z]$ через k_3. Для z справа от x, т.е. $z_i > x_i$ в окрестности x по Лемме 4.1 множества $\varphi^{-1}(z)$ одномерны, и лучи $\varphi^{-1}(z)$ имеют направление k_1. Значит $z_i < x_i$. Возьмем точку w на луче из точки αx с направлением k_1. Тогда по положительной однородности решения φ $\varphi(w, \alpha) = \alpha x$, а по свойству независимости от пути $\varphi(w, 1) = z$.

Доказательство Теоремы 4.1. Пусть $\varphi \in \Phi$ произвольное решение для класса игр $\mathcal{G}_2^+$. Покажем, что оно удовлетворяет свойству независимости от пути. Независимость от пути – это одно из свойств, характеризующих семейство $\mathcal{H}_2^*$ методов распределения затрат. Очевидно, это свойство сохраняется при распространении его анонимного подсемейства $\mathcal{H}_+^a$ на класс $\mathcal{G}_2^+$ субаддитивных игр двух лиц с неотрицательными значениями характеристической функции на коалициях двух лиц.

Пусть теперь φ произвольное решение для класса игр $\mathcal{G}_+^2$, удовлетворяющих аксиомам NE, EFF, ANO, Self-COV и PI. По Теореме 3.1 $\varphi \in \Psi$. Для того чтобы показать, что $\varphi \in \Phi$, достаточно доказать этот факт для подкласса $\mathcal{G}_2^1 \subset \mathcal{G}_2^+$ игр, таких что

$$(\{i, j\}, v) \in \mathcal{G}_2^1 \iff v(\{i, j\}) = 1, v_i + v_j \geq 1, \text{ и } v_i \geq v_j.$$

Затем, применяя аксиомы анонимности и положительной однородности, можно будет доказать требуемый результат для всего класса $\mathcal{G}_2^+$.

Начнем доказательство этой части теоремы с нахождения значений обратной функции $\varphi^{-1}(x)$ для всех точек полупрямой $x \in L_1$, и покажем, что любая такая функция порождает разбиение положительного ортанта на конусы, определяющие решение φ для характеристических функций игр из класса $\mathcal{G}_2^+$.

Обозначим через $L_2 \subset L_1$ максимальное множество точек $\bar{a} = (a, 1-a) \in L_1$ полупрямой L_1, для которых множество $\varphi^{-1}(\bar{a}) \neq \emptyset$. По Лемме 3.2 $L_2 = L_1$ или $L_2 = [(1/2, 1/2), (a, 1-a)]$ для некоторого $a \geq 1/2$.

Обозначим через $L^p \subset L_2$ такое подмножество, для любой точки которого $x \in L^p$ решение φ на луче $0x$ пропорциональное. Такое множество не пусто, так как $(1/2, 1/2) \in L_p$. По Леммам 3.3 и 4.1 множество L^p состоит из изолированных точек и интервалов.

Найдем значения обратной функции $\varphi^{-1}(\bar{x})$ для $x \in (a,b)$, где $(a,b) \in L_2 \setminus L^p$, максимальный открытый интервал, в котором решение $\varphi^1(\bar{x})$ одноточечное.

По Лемме 4.1 лучи $\varphi^{-1}(x)$ для $x \in (a,b)$, $x,a,b \in L_1$, имеют одинаковый наклон k_{ab}, совпадающий с минимальным наклоном лучей из $\varphi^{-1}(a)$, или с максимальным наклоном лучей из $\varphi^{-1}(b)$. Из той же самой Леммы следует, что множества $\varphi^{-1}(x)$ являются невырожденными конусами только если на луче $0x$ решение φ пропорциональное, откуда следует, что решение φ пропорционально и на лучах $0a, 0b$.

Очевидно, что если на луче $0x$ решение φ пропорциональное, то для $x \in L_2$ луч $\varphi^{-1}(x)$ имеет наклон $\frac{1-x_i}{x_i}$.

Таким образом, мы получили, что для решений φ, удовлетворяющих всем свойствам, указанным в формулировке теоремы, функция h^φ, определенная в предыдущем разделе для решений из семейства Ψ, удовлетворяет еще двум дополнительным свойствам:
5) Если $|h^\varphi(t)| > 1$ для некоторого $t > 1/2$, то $\frac{1-t}{t} \in h^\varphi(t)$,
6) Если для всех $t \in (a_i, b_i)$ $|h^\varphi(t)| = 1$, то либо $h^\varphi(t)$ постоянна для всех $t \in (a_i, b_i)$, либо $h^\varphi(t) = \frac{1-t}{t}$.

Пусть функция $h : [1/2, \infty) \to [-1, 1]$ удовлетворяет свойствам 1)–6). Рассмотрим решение ψ^h, определенное в (2.1) на области L_1.

Докажем, что $\psi^h \in \Phi$. Определим функцию ψ^h

Пусть $v = (v_j, v_j) \in L$, $T < v_i + v_j$. Если v принадлежит внутренности угла, образованного лучами $0a, 0b$), то положим $\psi^h(v,1) = (t, 1-t)$, где либо

$$t = \frac{v_i}{v_i + v_j}, \text{ если } h(t) = \frac{1-t}{t} \text{ для всех } t \in (a,b), \tag{7.2}$$

либо

$$t = \begin{cases} \dfrac{1}{1+k_a}, & \text{если } 1 \le \dfrac{(1+k_a)(v_j - k_b v_i)}{k_a - k_b} \\ \dfrac{1-(v_j - k_b v_i)}{1+k_b}, & \text{иначе,} \end{cases} \tag{7.3}$$

где k_a, k_b – наклоны лучей $0a, 0b$, или же

$$t = \begin{cases} \dfrac{1}{1+k_b}, & \text{если } 1 \le \dfrac{(1+k_b)(v_j - k_a v_i)}{k_b - k_a} \\ \dfrac{1-(v_j - k_a v_i)}{1+k_a}, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{7.4}$$

В первом случае решение ψ^h пропорциональное, в последних двух случаях оно определяется путями $(\psi^h)^v$, когда T изменяется от v_i+v_j до 1. Эти пути являются кусочно-линейными линиями, состоящими из двух интервалов. Выбор одной из двух возможностей (7.3) или (7.4) для решения $\psi^h(v,1)$ в любом интервале разбиения полупрямой L_1, где решение ψ^h не является пропорциональным, может быть сделан однозначно, если это разбиение упорядочено. Тогда мы получим определение решения ψ^h равенством (7.3), если интервал (a,b) индексирован как (a^1,b^2)), и определение ψ^h равенством (7.4), если интервал упорядочен иначе: (a^2,b^1).

Определения (7.2)–(7.4) добавленные множеством L^p и упорядочением разбиения полупрямой L_1, определенными функцией h, однозначно определяют решение $\psi^h \in \Psi$, и они совпадают для решений из семейства Φ, приведенных в разделе 4, откуда следует $\psi^h \in \Phi$.

Доказательство Теоремы 5.1. Равенства (5.1) (и их симметричная часть для $v_j > v_i$) определяют непустое, одноточечное и анонимное решение $\bar{\varphi}$ для субаддитивных игр (v,T) с $T \leq 0$. Нетрудно проверить, что решение $\bar{\varphi}$ удовлетворяет аксиомам Self-COV и PI. Независимость от пути, обусловленная равенствами (5.1), показывает, что $\bar{\varphi}$ действительно, является расширением решения φ на отрицательные значения T.

Предположим теперь, что существует расширение решения $\bar{\varphi}$ на весь класс субаддитивных игр двух лиц, удовлетворяющих аксиомам NE, SV, ANO, Self-COV и PI. Рассмотрим два случая.

1. Существует такая точка $(t_0, 1-t_0), t_0 > 1/2$, для которой $h^{\varphi}(t) = \frac{t_0}{1-t_0}$ для всех $t \geq t_0$ (рис. 6)

Пусть v – произвольная точка, удовлетворяющая неравенствам $v_i > \frac{1-t_0}{t_0} v_j$, $v_i + v_i > 1, T < 0$. Обозначим $\bar{\varphi}(v,T) = y$. Покажем, что интервал $[y,v]$ имеет наклон $\frac{t_0}{1-t_0}$ к прямой $x_i + x_j = 0$. Действительно, меньший наклон невозможен по определению t_0. Если же он больше, чем $\frac{t_0}{1-t_0}$, то луч из y с таким наклоном пересечет луч из нуля с наклоном $\frac{t_0}{1-t_0}$, и в точке пересечения z по самоковариантности решения $\bar{\varphi}$ и по определению t_0 мы получили бы два пути: zy по самоковариантности и $z0$ по определению решения φ, что невозможно по аксиоме SV.

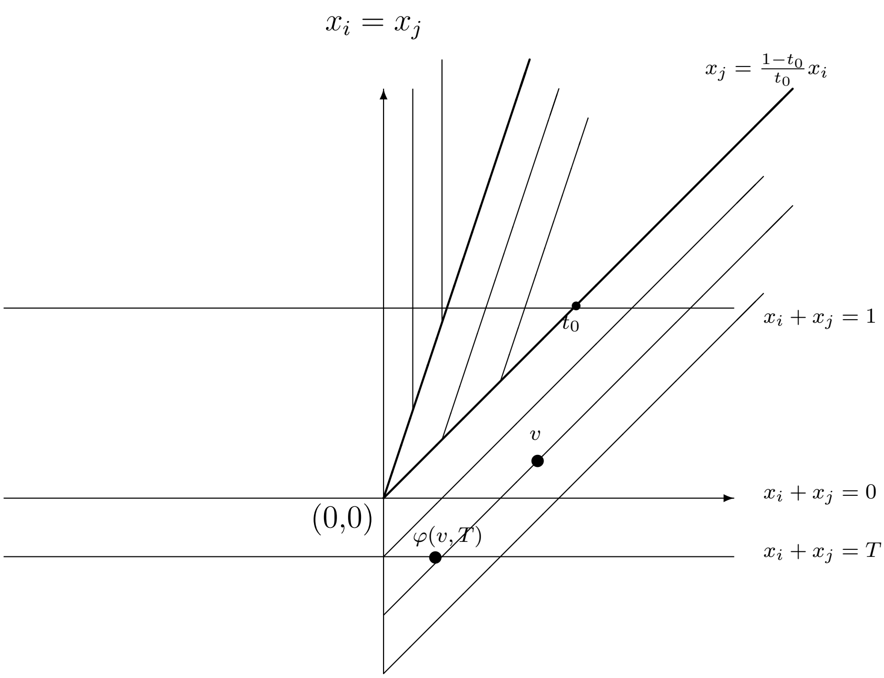

Рисунок 6. Решение φ для случая 1 в доказательстве Теоремы 5.1.

2. $\lim\limits_{t\to\infty} h^{\varphi}(t) = 0$. В этом случае $\varphi(v,T) = (\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ для всех $T \leq 0$ и $v : v_i + v_i > T, v_i \geq v_j$. Действительно, если $\bar{\varphi}(v,T) = y \neq (\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$, то луч из y проходящий через точку v, пересек бы линию $x_i + x_j = 0$ и лучи $\varphi^{-1}(t,-t)$ для достаточно больших t, и мы возвратились бы к случаю 1.

Следовательно, мы доказали, что для любой точки $y : y_i \geq y_j$, $y_i + y_j < 0$, $y_i \neq y_j$ множество $\bar{\varphi}^{-1}(y)$ является лучом, параллельным оси абсцисс x_i. Если $y_i = y_j$, то множество $\bar{\varphi}^{-1}(y)$ является углом, стороны которого параллельны координатным осям. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Яновская Е.Б. *Совместная аксиоматизация пред n-ядра и решения Дутты-Рэя для выпуклых игр* // Математическая теория игр и ее приложения. 2012. Т.4. Вып. 2. С.96–123.

2. Arín J. Iñarra E. *Egalitarian sets for TU-games*// International Game Theory Review. 2002. V. 4. N 3. P. 183–199.

3. Dutta B. *The egalitarian solution and the reduced game property in convex games* // International Journal of Game Theory. 1990. V. 19. P. 153–159.

4. Moulin H. *Priority rules and other asymmetric methods* // Econometrica. 2000. V. 68. N 3. P. 643–684.

5. Moulin H. *Axiomatic cost and surplus sharing* // In: K.J.Arrow & A.K.Set & K.Suzumura (eds.) Handbook of social choice and welfare. ed.1. 2002. V. 1. chapter 6. P. 289–357.

6. Thomson W. *Axiomatic and game-theoretic analysis of bankruptcy and taxation problems: a survey* // Mathematical Social Sciences. 2003. V. 45. P. 249–297.

7. Yanovskaya E.B. *Self-Covariant Solutions To Cooperative Games With Transferable Utilities* // Preprint HSE. 2014. Series: Economics. WP BRP 85/EC/2014.

8. Yanovskaya E. *An extension of a class of cost sharing methods to the solutions of the class of two-person cooperative games*// Preprint NRY Higher School of Economics. 2014. Series: Economics N127.

AN EXTENSION OF A CLASS OF COST SHARING METHODS TO TWO-PERSON COOPERATIVE GAMES SOLUTIONS

Elena B. Yanovskaya, National Research University at St.Petersburg, Dr.Sc., professor (eyanovskaya@hse.ru).

Abstract: Two-person games and cost/surplus sharing problems are worth for studying because they are the base for their extending to the classes of such problems with variable population with the help of very powerful consistency properties. In the paper a family of cost-sharing methods for cost sharing problems with two agents [4] is extended to a class of solutions for two-person cooperative games that are larger than both cost-sharing and surplus-sharing problems, since cooperative games have no no restrictions on positivity of costs and surpluses. The tool of the extension is a new invariance axiom – self covariance [1]– that can be applied both to cost-sharing methods and to cooperative game solutions. In particular, this axiom replaces the Lower composition axiom which is not applicable to methods for profit sharing problems.

Keywords: cooperative game with transferable utilities, cost/surplus sharing method, self-covariance, solution.