Математическая Теория Игр и её Приложения, т.9, в.4, с. 3–17

УДК 519.83
ББК 22.18

ИГРА «МНОЖЕСТВЕННЫЙ ДОСТУП» С НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ

Владимир М. Буре
Елена М. Парилина*
Санкт-Петербургский государственный университет
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9
e-mail: v.bure@spbu.ru, e.parilina@spbu.ru

В работе предложена одна модель передачи данных в сети специального вида, в которой два игрока (вершины сети) стремятся переслать как можно больше случайно появляющихся у них пакетов данных через общую вершину. Предполагается, что игроки не обладают полной информацией о наличии у другого игрока пакета данных для возможной передачи. Для решения предлагается использовать кооперативный и некооперативный подходы, в соответствии с которыми найдены кооперативное решение и равновесие по Нэшу. Для сравнения суммарных выигрышей игроков при кооперативном решении и равновесии по Нэшу вычисляется цена анархии.

Ключевые слова: игра «Множественный доступ», передача данных, стохастическая игра, неполная информация.

1. Введение

В работе рассматривается динамическая модель передачи данных в сети заданной топологии. Ставится задача нахождения оптимального поведения устройств сети при ограниченности информации. Предлагается модель игры «Множественный доступ», в которой игроками являются передающие устройства, а стратегиями –

---

* Работа поддержана грантом Российского научного фонда (проект № 17-11-01079).

вероятности пересылки пакета данных при его наличии. Протокол передачи данных позволяет передавать пакет единичной емкости в один период времени, которое предполагается дискретным. В сети имеется два игрока, которые стремятся переслать как можно больше пакетов данных в конечные вершины, используя одну общую вершину, через которую может пройти только один пакет в один период времени. Описанная система передачи данных и доступа к каналу получила название ALOHA [5]. В представленной модели структура сети задана изначально и не меняется во времени. Равновесие по Нэшу в одношаговой игре с n симметричными и несимметричными игроками в сети с протоколом доступа типа к каналу типа ALOHA было найдено в работе [10]. Стохастические игры передачи данных с использованием протоколов ALOHA и slotted ALOHA, но с симметричными игроками, были представлены в работах [6, 12]. Различные дележи суммарного выигрыша игроков в одношаговой игре передачи данных с протоколом ALOHA получены [13] Также большой интерес представляют задачи формирования сети. Например, процесс формирования сети может моделироваться как некооперативная игра, в которой игроки используют правило двойного наилучшего ответа [7].

Теоретико-игровые модели передачи данных широко используются при моделировании беспроводных сетей [8, 16]. Чаще всего при некооперативном подходе к решению игры в качестве решения рассматривается равновесие по Нэшу, которое в общем случае дает меньший суммарный выигрыш игрокам по сравнению с кооперативным равновесием. Это означает, что равновесное по Нэшу поведение участников сети во многих случаях не является «социально оптимальным». Количественной мерой преимущества «социально оптимального» поведения игроков или кооперативного решения перед равновесием по Нэшу может служить цена анархии [11], которая также широко используется в теоретико-игровых моделях массового обслуживания (см., например, [4]).

Для моделирования динамического процесса передачи данных при случайном появлении пакетов у передающих устройств используется стохастическая игра с конечным множеством стратегий игроков в каждом возможном состоянии сети [17]. Построение социально оптимального или кооперативного решения стохастической игры в стационарных стратегиях можно найти в работах [14, 15]. В отличие от работ [14, 15], здесь не строится кооперативная игра, а именно, не определяется характеристическая функция и дележ, а только находится набор стационарных стратегий игроков, максимизирующий суммарный ожидаемый выигрыш игроков в игре. Пример построения кооперативной игры передачи данных в сети, а также способ построения динамически устойчивого вектора Шепли можно найти в статье [3].

Стоит отметить, что при моделировании передачи данных полнота информации или частичное ее отсутствие влияют на оптимальные стратегии игроков. Решение игры «Множественный доступ» с полной информацией получено в [2]. Здесь мы делаем предположение, что игроки не знают о наличии или отсутствии пакета данных у другого игрока. Это предположение кажется естественным, поскольку обмен информацией между передающими устройствами приводит к дополнительным издержкам и задержкам передачи данных.

Статья имеет следующую структуру. Раздел 2 содержит описание игры «Множественный доступ» и формулы для вычисления выигрышей игроков. Определения равновесия по Нэшу и кооперативного решения в стохастической игре, теорема о существовании этих равновесий, а также формула цены анархии приведены в разделе 3. Численный пример игры «Множественный доступ» рассмотрен в разделе 4. Работу завершает Заключение с кратким описанием полученных результатов и список литературы.

2. Описание игры

Рассмотрим игру «Множественный доступ» передачи данных в беспроводных сетях (Multiple access game). Игроки, которые являются устройствами передачи данных, обозначены на рис. 1 вершинами 1 и 2. У игроков 1 и 2 в начале каждого периода времени может появится пакет данных единичной емкости с вероятностью $a_1 \in (0,1)$ и $a_2 \in (0,1)$ соответственно. Цель игрока $i = 1,2$ – переслать пакет в вершину r_i. При этом, как видно из схемы передачи данных, пакет должен пройти общую для обоих игроков вершину единичной емкости. В случае, если оба игрока одновременно пересылают пакет, то эти пакеты возвращаются к ним обратно. Для успешной доставки пакета необходимо, чтобы только один из игроков пересылал пакет.

Игрок получает выигрыш 1 за вычетом издержек по пересылке пакета, равных $c \in (0,1)$, если его пакет доставлен в соответствующую конечную вершину. За простой пакета в один период времени игрок несет издержки в размере $d \in [0,1)$.

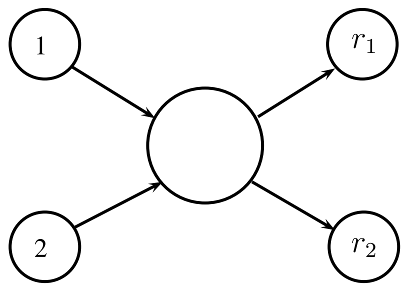

Рисунок 1. Сеть для игры «Множественный доступ»

Время предполагается дискретным и обозначается через $t = 1, 2, \ldots$ Под состоянием системы в момент времени t будем понимать пару $(\omega_1(t), \omega_2(t))$, где $\omega_i(t) = 0$, если у игрока i в момент времени t нет пакета данных для передачи, и $\omega_i(t) = 1$, если у игрока i в момент времени t имеется пакет данных единичной емкости, $i = 1, 2$. Следовательно, множество состояний системы в любой момент времени t есть $\Omega = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$. В отличие от [1], будем предполагать, что игроки не имеют информации о наличии пакета у другого игрока в текущий момент времени, что означает, что игрок 1 в любой момент времени не различает, в каком из состояний множества $\{(0,0), (0,1)\}$ он находится, аналогично и для состояний из множества $\{(1,0), (1,1)\}$. Игрок 2 не различает состояния множества $\{(0,0), (1,0)\}$, а также состояния множества $\{(0,1), (1,1)\}$.

Пусть игрокам известен начальный вектор распределения по состояниям $\pi = (\pi_{(0,0)}, \pi_{(0,1)}, \pi_{(1,0)}, \pi_{(1,1)})$, где π_ω – вероятность того, что состояние ω реализуется в первый момент времени, $\sum\limits_{\omega \in \Omega} \pi_\omega = 1$.

Замечание 2.1. Исходя из постановки задачи, в качестве начального вектора распределения по состояниям π можно рассмотреть вектор $\pi = ((1-a_1)(1-a_2), (1-a_1)a_2, a_1(1-a_2), a_1 a_2)$, который предполагает, что до хода случая в вершинах сети пакетов данных не было.

Опишем процесс передачи данных в такой сети с помощью стохастической игры, для определения которой необходимо задать стратегии игроков и функции выигрышей в каждом состоянии и определить класс стратегий, в которых будет найдено решение игры.

Будем рассматривать класс стационарных стратегий, которые не зависят от времени, а зависят только от состояния системы (в дальнейшем, игры). В случае, когда у игрока $i = 1, 2$ нет пакета для пересылки, его единственная стратегия – ожидание, обозначим ее через w_i. Поскольку игроки не обладают полной информацией о наличии пакета у другого игрока, то разумно предположить, что стратегии игрока 1 в состояниях множества $\{(1,0),(1,1)\}$ должны быть одинаковыми, это стратегии w_1 (ожидание) и s_1 (отправка пакета). Тогда смешанной стратегией игрока 1 в состояниях множества $\{(1,0),(1,1)\}$ будет вектор $(1-\xi_1, \xi_1)$, и $\xi_1 \in [0,1]$ – вероятность выбора стратегии s_1, т. е. вероятность отправки пакета игроком 1 в состояниях $(1,0)$, $(1,1)$. Таким образом, стационарная стратегия игрока 1 в игре определяется вероятностью $\xi_1 \in [0,1]$. Аналогично, определим стратегию второго игрока. Стратегии игрока 2 в состояниях множества $\{(0,1),(1,1)\}$ – это стратегии w_2 (ожидание) и s_2 (отправка пакета). Тогда смешанной стратегией игрока 2 в состояниях множества $\{(0,1),(1,1)\}$ будет вектор $(1-\xi_2, \xi_2)$, и $\xi_2 \in [0,1]$ – вероятность отправки пакета игроком 2 в состояниях $(0,1)$, $(1,1)$. Таким образом, стационарная стратегия игрока 2 в игре определяется вероятностью $\xi_2 \in [0,1]$.

Теперь последовательно рассмотрим все состояния игры, определим выигрыши игроков в этих состояниях как функции стратегий ξ_1 и ξ_2 игроков 1 и 2 соответственно и зададим вероятности перехода за один шаг из текущего состояния во все возможные состояния игры, которые в общем случае являются функциями стратегий игроков:

- Состояние $(0,0)$.

  Единственная стратегия игрока $i = 1, 2$ – стратегия w_i. Выигрыши игроков в этом состоянии: $K_1^{(0,0)}(\xi_1, \xi_2) = K_2^{(0,0)}(\xi_1, \xi_2) = 0$. Вероятности перехода из состояния $(0,0)$ в состояния $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$ образуют вектор $p_{(0,0)}$, который равен

$$p_{(0,0)}(\xi_1, \xi_2) = \big((1-a_1)(1-a_2), (1-a_1)a_2, a_1(1-a_2), a_1a_2\big).$$

- Состояние $(0, 1)$.

  Единственная стратегия игрока 1 – стратегия w_1. У игрока 2 – две чистые стратегии s_2 и w_2. В этом состоянии игрок 2 выбирает стратегию s_2 с вероятностью $\xi_2 \in [0, 1]$. Выигрыши игроков равны $K_1^{(0,1)}(\xi_1, \xi_2) = 0$, $K_2^{(0,1)}(\xi_1, \xi_2) = \xi_2(1-c)+(1-\xi_2)(-d)$. Вероятности перехода из состояния $(0, 1)$ в состояния $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ образуют вектор $p_{(0,1)}$, который равен

$$p_{(0,1)}(\xi_1, \xi_2) = \big(\xi_2(1-a_1)(1-a_2), \xi_2(1-a_1)a_2 + (1-\xi_2)(1-a_1), \\ \xi_2 a_1(1-a_2), \xi_2 a_1 a_2 + (1-\xi_2)a_1\big).$$

- Состояние $(1, 0)$.

  У игрока 1 в этом состоянии две чистые стратегии s_1 и w_1. Игрок 1 выбирает стратегию s_1 с вероятностью $\xi_1 \in [0, 1]$. Единственная стратегия игрока 2 – стратегия w_2. Выигрыши игроков равны $K_1^{(1,0)}(\xi_1, \xi_2) = \xi_1(1-c)+(1-\xi_1)(-d)$, $K_2^{(1,0)}(\xi_1, \xi_2) = 0$. Вероятности перехода из состояния $(1, 0)$ в состояния $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ образуют вектор $p_{(1,0)}$, который равен

$$p_{(1,0)}(\xi_1, \xi_2) = \big(\xi_1(1-a_1)(1-a_2), \xi_1 a_1(1-a_2) + (1-\xi_1)(1-a_2), \\ \xi_1(1-a_1)a_2, \xi_1 a_1 a_2 + (1-\xi_1)a_2\big).$$

- Состояние $(1, 1)$.

  В этом состоянии у каждого игрока в начале периода есть пакет данных для передачи. Стратегии игрока 1: s_1 и w_1, игрока 2: s_2 и w_2. Игрок $i = 1, 2$ выбирает стратегию s_i с вероятностью $\xi_i \in [0, 1]$. Выигрыши игроков равны $K_1^{(1,1)}(\xi_1, \xi_2) = \xi_1\xi_2(-c-d) + \xi_1(1-\xi_2)(1-c) + (1-\xi_1)(-d)$, $K_2^{(1,1)}(\xi_1, \xi_2) = \xi_1\xi_2(-c-d) + \xi_2(1-\xi_1)(1-c) + (1-\xi_2)(-d)$.

  Вероятности перехода из состояния $(1, 1)$ в состояния $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ образуют вектор $p_{(1,1)}$, который равен

$$p_{(1,1)}(\xi_1, \xi_2) = \big(0, \xi_1(1-\xi_2)(1-a_1), (1-\xi_1)\xi_2(1-a_2), \\ (1-\xi_1)(1-\xi_2) + \xi_1\xi_2 + (1-\xi_1)\xi_2 a_2 + \xi_1(1-\xi_2)a_1\big).$$

Стохастическая игра Γ передачи данных в сети с топологией, изображенной на рис. 1, определяется множеством состояний Ω, множеством игроков $N = \{1, 2\}$, множествами стратегий каждого игрока в каждом состоянии из множества Ω, функциями выигрышей игроков K_i^ω, $i \in N$, в всех состояниях $\omega \in \Omega$, а также функциями перехода p_ω, которые представляют собой вероятностные распределения на множестве состояний Ω и заданы для каждого $\omega \in \Omega$.

Как уже говорилось выше, мы будем находить решения игры Γ в стационарных стратегиях. Стационарная стратегия η_i игрока i в игре Γ определяется вероятностью $\xi_i \in [0, 1]$, поэтому в дальнейшем, чтобы избежать громоздких обозначений, стационарную стратегию игрока i в игре Γ будем обозначать через ξ_i.

Пусть $E_i^\omega(\xi_1, \xi_2)$ – ожидаемый выигрыш игрока i в игре (подыгре), начинающейся из состояния $\omega \in \Omega$, запишем уравнение Беллмана [1] для $E_i^\omega(\xi_1, \xi_2)$, получим:

$$E_i^\omega(\xi_1, \xi_2) = K_i^\omega(\xi_1, \xi_2) + \delta p_\omega(\xi_1, \xi_2) E_i(\xi_1, \xi_2), \tag{2.1}$$

где $p_\omega(\xi_1, \xi_2)$ – вектор-строка переходных вероятностей, определенная выше для каждого состояния ω.

Запишем ожидаемые выигрыши игрока i в подыграх, начинающихся из соответствующих состояний (верхний индекс) в векторном виде:

$$E_i(\xi_1, \xi_2) = \left(E_i^{(0,0)}(\xi_1, \xi_2), E_i^{(0,1)}(\xi_1, \xi_2), E_i^{(1,0)}(\xi_1, \xi_2), E_i^{(1,1)}(\xi_1, \xi_2)\right)'.$$

Выпишем уравнение Беллмана (2.1) для каждого ω из множества $\{(0, 0), (0, 1),\ (1, 0), (1, 1)\}$, тогда четыре уравнения можно записать как одно уравнение Беллмана в векторной форме [15, 17]:

$$E_i(\xi_1, \xi_2) = K_i(\xi_1, \xi_2) + \delta \Pi(\xi_1, \xi_2) E_i(\xi_1, \xi_2), \tag{2.2}$$

где $\mathbb{I}$ – единичная матрица размерности 4×4, $\delta \in (0, 1)$ – дисконтирующий фактор, $\Pi(\xi_1, \xi_2)$ — матрица размерности 4×4, строки которой – переходные вероятности, т.е.

$$\Pi(\xi_1, \xi_2) = \begin{pmatrix} p_{(0,0)}(\xi_1, \xi_2) \\ p_{(0,1)}(\xi_1, \xi_2) \\ p_{(1,0)}(\xi_1, \xi_2) \\ p_{(1,1)}(\xi_1, \xi_2) \end{pmatrix},$$

и вектор $K_i(\xi_1, \xi_2)$ выигрыша игрока i во всех состояниях:

$$K_i(\xi_1, \xi_2) = \begin{pmatrix} K_i^{(0,0)}(\xi_1, \xi_2) \\ K_i^{(0,1)}(\xi_1, \xi_2) \\ K_i^{(1,0)}(\xi_1, \xi_2) \\ K_i^{(1,1)}(\xi_1, \xi_2) \end{pmatrix}.$$

Все элементы матриц $\Pi(\xi_1, \xi_2)$, $K_i(\xi_1, \xi_2)$, $i = 1, 2$ определены выше при последовательном рассмотрении состояний игры.

Из уравнения (2.2) нетрудно получить формулу для вычисления ожидаемого выигрыша игрока i в векторном виде для всех возможных начальных состояний:

$$E_i(\xi_1, \xi_2) = \big(\mathbb{I} - \delta\Pi(\xi_1, \xi_2)\big)^{-1} K_i(\xi_1, \xi_2). \tag{2.3}$$

Заметим, что обратная матрица в (2.3) существует, поскольку $\Pi(\xi_1, \xi_2)$ – стохастическая матрица, и $\delta \in (0, 1)$.

Если учесть начальное распределение по состояниям π, то ожидаемый выигрыш игрока i можно вычислить по формуле:

$$\hat{E}_i(\xi_1, \xi_2) = \pi E_i(\xi_1, \xi_2) = \pi\big(\mathbb{I} - \delta\Pi(\xi_1, \xi_2)\big)^{-1} K_i(\xi_1, \xi_2). \tag{2.4}$$

В следующем разделе определим равновесия в игре, используя некооперативный и кооперативный подходы.

3. Равновесия. Цена анархии

Будем использовать некооперативный и кооперативный подходы при решении вышеописанной игры. Под некооперативным решением игры будем понимать равновесие по Нэшу.

Определение 3.1. *Ситуация $\xi^* = (\xi_1^*, \xi_2^*)$ называется равновесием по Нэшу в стохастической игре Γ, если справедливы неравенства:*

$$\hat{E}_1(\xi_1^*, \xi_2^*) \geqslant \hat{E}_1(\xi_1, \xi_2^*) \ \textit{для}\ \forall \xi_1 \in [0, 1],$$
$$\hat{E}_2(\xi_1^*, \xi_2^*) \geqslant \hat{E}_2(\xi_1^*, \xi_2) \ \textit{для}\ \forall \xi_2 \in [0, 1].$$

При нахождении кооперативного решения игры мы делаем предположение, что игроки объединяются в коалицию и максимизируют суммарный ожидаемый выигрыш коалиции в игре Γ. При этом, игроки как и при некооперативном подходе, не обладают полной информацией о наличии пакета у другого игрока. Определим решение игры при кооперативном подходе следующим образом:

Определение 3.2. *Ситуация* $\tilde{\xi} = (\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2)$ *называется кооперативным решением в стохастической игре* Γ, *если справедливо неравенство:*

$$\sum_{i=1}^{2} \hat{E}_i(\tilde{\xi}) \geqslant \sum_{i=1}^{2} \hat{E}_i(\xi) \text{ для } \forall \xi \in [0,1] \times [0,1].$$

Кооперативное решение определяет «социальный оптимум» сети заданной топологии, когда ставится задача максимизации суммарного выигрыша системы или максимизации эффективности работы сети при ее централизованном управлении.

В качестве меры выгоды кооперативного поведения игроков по сравнению с некооперативным в игре Γ будем использовать *цену анархии* [11], которая равна отношению суммарного выигрыша игроков при кооперативном решении к их суммарному выигрышу в наихудшей ситуации равновесия по Нэшу (равновесии по Нэшу с наименьшим суммарным выигрышем игроков):

$$PoA(\Gamma) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{2} \hat{E}_i(\tilde{\xi})}{\min\limits_{\xi^* \in NE(\Gamma)} \sum\limits_{i=1}^{2} \hat{E}_i(\xi^*)}, \tag{3.1}$$

где $NE(\Gamma)$ – множество равновесий по Нэшу в игре Γ. Цена анархии (3.1) может быть не определена, если сумма в знаменателе равна нулю.

Теорема 3.1. *В стохастической игре* Γ *передачи данных в сети с топологией, представленной на рис. 1, всегда существует равновесие по Нэшу и кооперативное решение.*

Доказательство. Поскольку множество игроков конечно, множества стратегий всех игроков во всех состояниях игры конечны, и игра решается в классе стационарных стратегий, то существование кооперативного решения следует из теоремы Шепли [17], а существование равновесия по Нэшу из теорем, доказанных с работах Финка и Такахаши [9, 18]. □

В связи с тем, что в модели имеется шесть параметров: a_1, a_2, c, d, π, δ, один из которых – вектор, то записать стратегии, образующие равновесие по Нэшу или кооперативное решение в общем виде, не представляется возможным. В следующем разделе рассмотрим пример нахождения равновесия по Нэшу, кооперативного решения и цены анархии для одной сети.

4. Пример

Рассмотрим сеть с топологией, изображенной на рис. 1. Предположим, что вероятность появления пакета данных у игрока 1 больше, чем у игрока 2, а именно, $a_1 = 0.8$, $a_2 = 0.2$. Пусть издержки любого игрока по пересылке пакета равны $c = 0.1$. За простой пакета в один период времени игрок несет издержки в размере $d = 0.05$. Дисконтирующий фактор выигрышей обоих игроков $\delta = 0.99$. Предположим, что игра начинается из состояния, когда у обоих игроков имеется пакет для передачи $\pi = (0, 0, 0, 1)$.

Все вычисления проводились в программе Wolfram Mathematica 11.1 [19]. Функция выигрыша игрока 1 имеет вид:

$$\begin{aligned}
&181.152/\big(-36.2304 + (-36.9142 - 10.734\xi_2)\xi_2 + (\xi_1)^2(1.42088+\\
&+\xi_2(-2.42088 + \xi_2)) + \xi_1(-3.1894 + \xi_2(53.5078 + 19.1515\xi_2))\big)+\\
&+\big(\xi_2(42.8875 + 27.0034\xi_2) + \xi_1(-3470.67 + (2899.78 - 2686.02\xi_2)\xi_2)+\\
&+(\xi_1)^2(546.75 + \xi_2(1097.15 + 1578.1\xi_2))\big)/\big(-36.2304+\\
&+(-36.9142 - 10.734\xi_2)\xi_2 + (\xi_1)^2(1.42088 + \xi_2(-2.42088 + \xi_2))+\\
&+\xi_1(-3.1894 + \xi_2(53.5078 + 19.1515\xi_2))\big)
\end{aligned}$$

Функция выигрыша игрока 2 имеет вид:

$$\begin{aligned}
&181.152/\big(-36.2304 + (-36.9142 - 10.734\xi_2)\xi_2 + (\xi_1)^2(1.42088+\\
&+\xi_2(-2.42088 + \xi_2)) + \xi_1(-3.1894 + \xi_2(53.5078 + 19.1515\xi_2))\big)+\\
&+\big((-3400.79 - 780.872\xi_2)\xi_2 + (\xi_1)^2(-7.10438+\\
&+(-435.212 - 222.744\xi_2)\xi_2) + \xi_1(15.947 + \xi_2(3308.04 + 1557.71\xi_2))\big)/\\
&/\big(-36.2304 + (-36.9142 - 10.734\xi_2)\xi_2 + (\xi_1)^2(1.42088+\\
&+\xi_2(-2.42088 + \xi_2)) + \xi_1(-3.1894 + \xi_2(53.5078 + 19.1515\xi_2))\big)
\end{aligned}$$

Выигрыши игроков как функции вероятностей ξ_1, ξ_2 изображены на рис. 2.

Суммарный выигрыш игроков в игре Γ как функция стратегий ξ_1 и ξ_2 представлен на рис. 3.

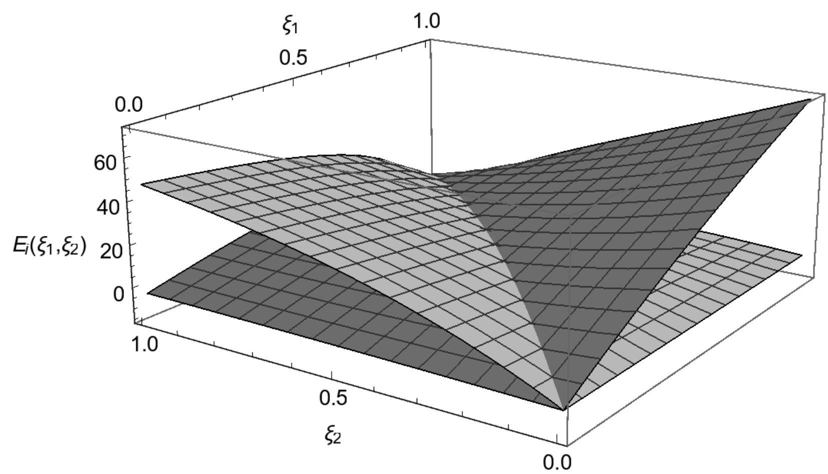

Рисунок 2. Выигрыши игроков (игрок 1 — темно-серый, игрок 2 — светло-серый)

Равновесие по Нэшу определяется вероятностями $\xi_1^* = 0.955$, $\xi_2^* = 0.647$, что означает, что игрок 1, имея пакет для передачи, посылает его с вероятностью $\xi_1^* = 0.955$ и ждет с вероятностью $1 - \xi_1^* = 0.045$. При этом, игрок 2, имея пакет для передачи, посылает его с вероятностью $\xi_2^* = 0.647$ и ждет с вероятностью $1 - \xi_2^* = 0.353$. Выигрыши игроков в равновесии по Нэшу равны $\hat{E}_1(\xi_1^*, \xi_2^*) = 23.538$, $\hat{E}_2(\xi_1^*, \xi_2^*) = 0.496$.

Кооперативным решением в игре является ситуация $(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2) = (1, 0)$, при которой выигрыши игроков равны $\hat{E}_1(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2) = 72.18$, $\hat{E}_2(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2) = -5$ с суммарным выигрышем игроков 67.18.

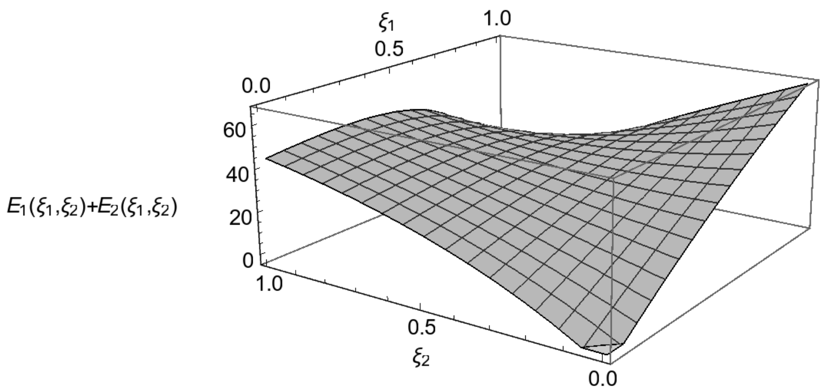

Рисунок 3. Суммарный выигрыш игроков

Воспользуемся формулой (3.1) и вычислим цену анархии в этой игре:

$$PoA(\Gamma) = \frac{67.18}{23.538 + 0.496} = 2.79521,$$

что говорит о необходимости координаций стратегий игроков в данной сети.

5. Заключение

В работе представлена одна теоретико-игровая модель передачи данных с неполной информацией в сети заданной топологии. В игре имеется конфликт интересов двух игроков (вершин), у которых случайно появляются пакеты данных единичной емкости для пересылки в конечные вершины. Процесс передачи данных моделируется как стохастическая игра, в которой игроки, не обладают информацией о том, есть или нет пакет данных у другого игрока, поэтому они не различают некоторые состояния игры. В связи с этом, множество стратегий игроков меняется по сравнению с игрой, в которой игроки обладают полной информацией. Доказывается, что в представленной игре всегда существует кооперативное решение и равновесие по Нэшу. В качестве «меры» потерь системы от отсутствия координации действий игроков используется цена анархии. В работе рассмотрен численный пример, для которого координация стратегий игроков увеличила бы суммарный выигрыш более чем в два с половиной раза. Представленная модель может быть обобщена на случаи более сложных по строению сетей. Также представляет интерес анализ цены анархии как функции параметров системы для сетей различных топологий с целью выявления требующих управления систем передачи данных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беллман Р. *Динамическое программирование.* М.: Изд-во иностранной литературы, 1960.

2. Буре В.М., Парилина Е.М. *Стохастические модели передачи данных в сетях с различными топологиями* // Управление большими системами. 2017. Вып. 68. С. 6–29.

3. Парилина Е.М. *Кооперативная игра передачи данных в беспроводной сети* // Математическая теория игр и ее приложения. 2009. Т. 1, вып. 4. С. 93–110.

4. Чиркова Ю.В. *Цена анархии в игре баланса загрузки системы обслуживания с тремя машинами* // Математическая теория игр и ее приложения. 2014. Т. 6, вып. 4. С. 85–96.

5. Abramson N.M. *The aloha system: Another Alternative for Computer Communications* // AFIPS '70 (Fall): Proceedings of the November 17-19, 1970, Fall Joint Computer Conference. New York, NY, USA: ACM, 1970. P. 281–285.

6. Altman E., El Azouzi R., Jiménez T. *Slotted Aloha as a game with partial information* // Computer Networks. 2004. Vol. 45. Is. 6. P. 701–713.

7. Bazenkov N.I. *Double best response dynamics in topology formation game for ad hoc networks* // Automation and Remote Control. 2015. 76 (2). P. 323–335.

8. Buttyan L., Hubaux J.-P. *Security and Cooperation in Wireless Networks: Thwarting Malicious and Selfish Behavior in the Age of Ubiquitous Computing* // Cambridge University Press New York. 2007.

9. Fink A.M. *Equilibrium in a stochastic n-person game* // Journal of Science of the Hiroshima University. 1964. A-I 28. P. 89–93.

10. Inaltekin H., Wicker S.B. *The Analysis of Nash Equilibria of the One-Shot Random-Access Game for Wireless Networks and the Behavior of Selfish Nodes* // IEEE/ACM Transactions on Networking. 2008. Vol. 16. No. 5. Pp. 1094–1107.

11. Koutsoupias E., Papadimitriou C. *Worst-case equilibria* // Proceedings of the 16th Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science. 1999. P. 404–413.

12. MacKenzie A.B., Wicker S.B. *Selfish users in Aloha: a game-theoretic approach* // IEEE 54th Vehicular Technology Conference. VTC Fall 2001. Proceedings, Atlantic City, NJ. 2001. Vol.3. P. 1354–1357.

13. Marbán S., van de Ven P., Borm P., Hamers H. *ALOHA networks: a game-theoretic approach* // Math Meth Oper Res. 2013. Vol. 78. Is. 2. P. 221–242.

14. Parilina E.M., Tampieri A. *Stability and cooperative solution in stochastic games* // Theory and Decision. 2017. https://doi.org/10.1007/s11238-017-9619-7 (in print)

15. Petrosjan L.A., Baranova E.M. *Cooperative Stochastic Games in Stationary Strategies* // Game Theory and Applications. 2006. Vol. 11. P. 7–17.

16. Sagduyu Y.E., Ephremides A. *A game-theoretic look at simple relay channel* // Wireless Networks. 2006. Vol. 12. No. 5. Pp. 545–560.

17. Shapley L.S. *Stochastic games* // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 1953. Vol. 39. P. 1095–1100.

18. Takahashi M. *Stochastic games with infinitely many strategies* // Journal of Science of the Hiroshima University. 1964. A-I 28. P. 95–99.

19. https://www.wolfram.com/mathematica/

MULTIPLE ACCESS GAME WITH IMPERFECT INFORMATION

Vladimir M. Bure, Saint Petersburg State University, Dr.Sc., professor (v.bure@spbu.ru),
Elena M. Parilina, Saint Petersburg State University, Cand.Sc, associate professor (e.parilina@spbu.ru).

Abstract: We propose a model of data transmission in the network of a special topology, in which two players (nodes of the network) tend to send as many randomly appeared data packages as they can through a common node. We assume that the player does not have complete information on the number of data packages of the other player for possible transfer to the destination node. To solve the game, we propose to use cooperative and noncooperative approaches, according to which the cooperative solution and Nash equilibrium are found. To compare the players' payoffs in the cooperative solution and the Nash equilibrium, the price of anarchy is calculated.

Keywords: data transmission, multiple access, stochastic game, imperfect information.