Математическая Теория Игр и её Приложения, т.9, в.4, с. 18–38

УДК 519.83
ББК 22.18

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПРД-ЯДРА В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ КООПЕРАТИВНЫХ ИГРАХ

Дмитрий А. Вольф
Виктор В. Захаров
Ованес Л. Петросян
Санкт-Петербургский Государственный Университет
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9
e-mail: answer.iii@mail.ru, v.zaharov@spbu.ru,
petrosian.ovanes@yandex.ru

В этой статье мы рассматриваем дифференциальные игры с нетрансферабельными выигрышами и исследуем условия непустоты ПРД-ядра, представленного в [7]. Для исследования непустоты этого кооперативного решения используется подход, впервые предложенный и описанный в работе [23] для получения необходимых и достаточных условий непустоты C-ядра и SC-ядра в статических ТП-кооперативных играх. На основе этих методов в статье получены необходимые и достаточные условия для процедур распределения дележей, гарантирующих непустоту ПРД-ядра в динамических кооперативных играх.

Ключевые слова: кооперативные дифференциальные игры, кооперативные игры, ПРД-ядро, SC-ядро, линейное программирование.

1. Введение

В рамках классической теории кооперативных игр с трансферабельными выигрышами было исследовано множество принципов оптимальности, включая С–ядро. Концепция С–ядра была предложена Д. Джиллисом [13] и является обобщением контрактной кривой Эджворта [12]. Эджворт описал рынок с двумя товарами и двумя участниками. С–ядро в этой игре определяется как часть оптимальной кривой Парето.

Г. Скарф [19] показал, что С–ядро не пусто для класса выпуклых игр в форме характерной функции. Обобщение некоторых результатов Шарфа можно найти в статье Л. Биллера [9] и Шепли [20]. Необходимые и достаточные условия непустоты С–ядра были сформулированы Бондаревой [1] и Шепли [21]. Ключевым в доказательствах является понятие сбалансированной игры. К сожалению, на основе описанных условий невозможно построить конструктивный метод выбора селекторов С–ядра, а именно, конкретных дележей, входящих в С–ядро.

В.В. Захаровым в работе [23] были предложены необходимые и достаточные условия непустоты С-ядра, которые, в отличие от условий сбалансированности, позволяют легко проверить, входят ли одноточечные решения, такие как вектор Шепли, индекс влияния Банзафа, эгалитарное решение и другие, в С-ядро. В работах [24] и [25] на основе предложенного подхода были исследованы геометрические свойства ряда селекторов С-ядра.

В этой статье мы применяем описанный в [23] подход для построения необходимых и достаточных условий непустоты нового кооперативного решения – ПРД-ядра, предложенного в работе [7]. В этой работе авторы построили новое кооперативное решение ПРД-ядро и доказали, что оно является подмножеством С–ядра и обладает свойством сильной динамической устойчивости. Проверка динамической устойчивости кооперативного решения вместе с построением кооперативной траектории, определение соответствующих дележей, выбор способа распределения суммарного выигрыша между игроками являются основными задачами в теории кооперативных дифференциальных игр.

Понятие динамической устойчивости кооперативных решений было впервые определено математически Л.А. Петросяном [4]. В статье [6] он ввел понятие процедуры распределения дележа (ПРД), которое использовал для построения динамически устойчивых решений, а в статье [5] определил понятие сильной динамической устойчивости. На возможность динамической неустойчивости (несостоятельности во времени) решения Нэша в дифференциальной бескоалиционной игре переговоров указал А. Ори в работе [15].

ПРД-ядро построено с использованием системы линейных ограничений для процедур распределения дележей. Эти условия определены для каждого момента времени игры. Из непустоты множества, описываемого этими ограничениями, т.е. непустоты соответствующего набора ПРД в каждый момент времени, следует, что ПРД-ядро не пусто. Мы применяем технику, предложенную в [23], для изучения непустоты набора ПРД в каждый момент времени и в дальнейшем делаем вывод о непустоте ПРД-ядра. Полученные результаты могут быть использованы для численного построения ПРД-ядра и проверки его непустоты.

2. Постановка задачи

2.1. Определение дифференциальной игры

Рассмотрим дифференциальную игру n лиц $\Gamma(x_0, T-t_0)$ с предписанной продолжительностью $(T-t_0)$ и начальным состоянием x_0. Динамика игры задается системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} &\dot{x} = f(x, u_1, \ldots, u_n),\ x \in R^n,\ u_i \in U_i \subset \mathrm{comp} R^k,\ t \in [t_0, T],\ i = \overline{1,n} \\ &x(t_0) = x_0, \end{aligned} \tag{2.1}$$

для которой предполагаются выполненными условия существования, единственности и продолжимости решений для любого допустимого набора измеримых управлений $u_1(\cdot), \ldots, u_n(\cdot)$. Программное управление $u_i(t)$ удовлетворяющее условиям системы (2.1), является стратегией игрока i.

Пусть $N = \{1, \ldots, n\}$ – множество игроков. Выигрыш i-го игрока определяется следующим образом:

$$K_i(x_0, T - t_0; u_1, \ldots, u_n) = \int\limits_{t_0}^{T} h_i(x(\tau), u_1(\tau), \ldots, u_n(\tau))d\tau, \;\; i = 1, \ldots, n, \tag{2.2}$$

где $h_i(x, u_1, \ldots, u_n)$ представляет собой непрерывную функцию, и $x(t)$ – решение задачи Коши для системы (2.1) при управлениях $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_n(t))$.

2.2. Кооперативная дифференциальная игра

Рассмотрим кооперативный вариант игры. Пусть $u^* = (u_1^*, \ldots, u_n^*)$ – вектор оптимальных стратегий (программных управлений) игроков, т.е. такой n-набор управлений, который доставляет максимум суммарному выигрышу игроков:

$$u^* = \arg\max_u \sum_{i=1}^{n} K_i(x_0, T - t_0; u). \tag{2.3}$$

Предполагаем, что максимум в (2.3) достигается на множестве допустимых стратегий. Траекторию, соответствующую оптимальным управлениям $u^* = (u_1^*, \ldots, u_n^*)$, будем называть кооперативной траекторией $x^*(t)$.

Предположим, что в игре $\Gamma(x_0, T - t_0)$ характеристическая функция $V(x_0, T - t_0; S), \;\; S \subset N$ построена каким-либо релевантным способом (см., например, [3]). Будем считать, что выполнены условия супераддитивности:

$$V(x_0, T - t_0; S_1 \cup S_2) \geq V(x_0, T - t_0; S_1) + V(x_0, T - t_0; S_2), \tag{2.4}$$
$$\forall\, S_1, S_2 \subset N, \;\; S_1 \cap S_2 = \emptyset.$$

2.3. Кооперативная дифференциальная игра в форме характеристической функции

Кооперативную игру $\Gamma(x_0, T - t_0)$ в форме характеристической функции $V(x_0, T - t_0; S), \;\; S \subseteq N$ будем обозначать как $\Gamma_V(x_0, T - t_0)$.

Обозначим как $L(x_0, T-t_0)$ множество всех дележей [2] в игре $\Gamma_V(x_0, T-t_0)$, т.е.

$$L(x_0, T-t_0) = \Big\{\xi = \{\xi_i,\ i = 1, \dots, n\}:\ \sum_{i=1}^{n} \xi_i = V(x_0, T-t_0; N),$$
$$\xi_i \geq V(x_0, T-t_0; \{i\})\Big\},$$

где $V(x_0, T-t_0; \{i\})$ – значение характеристической функции $V(x_0, T-t_0; S)$ для коалиции S, состоящей из одного i-го игрока.

Для семейства подыгр $\Gamma(x^*(t), T-t), t \in [t_0, T]$ вдоль кооперативной траектории $x^*(t)$ аналогичным образом введем супераддитивную характеристическую функцию $V(x^*(t), T-t; S)$, $S \subseteq N$ $(V(x^*(t), 0; S) = 0)$ и определим $\Gamma_V(x^*(t), T-t)$. Множество дележей в подыгре $\Gamma_V(x^*(t), T-t)$ будем обозначать как $L(x^*(t), T-t)$, имеем

$$L(x^*(t), T-t) = \Big\{\xi(t) = \{\xi_i(t),\ i = 1, \dots, n\}:$$
$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i(t) = V(x^*(t), T-t; N),\ \xi_i(t) \geq V(x^*(t), T-t; \{i\})\Big\}. \quad (2.5)$$

Выполнение свойства супераддитивности (2.4) для характеристической функции $V(x^*(t), T-t)$ гарантирует непустоту множества дележей $L(x^*(t), T-t)$.

2.4. C–ядро

В кооперативной теории игр одним из ключевых вопросов является проблема «справедливого» распределения суммарного максимального выигрыша $V(x_0, T-t_0; N)$ между игроками из $N = \{1, \dots, n\}$.

C-ядро в подыгре $\Gamma_V(x^*(t), T-t)$ определим как подмножество множества дележей $C(x^*(t), T-t) \subset L(x^*(t), T-t)$, $C(x^*(t), T-t) = \{\{\alpha_i^t\}_{i=1}^n\},\ t \in [t_0, T]$, т.ч.

$$\sum_{i \in S} \alpha_i^t \geq V(x^*(t), T-t; S),\ \forall\ S \subseteq N. \quad (2.6)$$

2.5. Непустота С–ядра в статических играх

Приведем основные результаты, связанные с непустотой С-ядра в статических играх.

Необходимые и достаточные условия непустоты С-ядра были сформулированы О. Бондаревой [1] и, позднее, Л. Шепли [21]. Эти условия основываются на понятии сбалансированной игры и являются достаточно дескриптивными, но проверка этих условий для конкретных игр вызывает затруднения.

В работе Г. Оуэна [17] было показано, что для того чтобы в игре (N, v) существовало непустое С–ядро, необходимо и достаточно, чтобы оптимальное значение задачи линейного программирования:

$$\sum_{i\in N} \xi_i \longrightarrow min$$
$$\sum_{i\in S} \xi_i \geq v(S),\ \forall S \subseteq N,\ S \neq \varnothing$$

равнялось $v(N)$.

В работах [23], [24], [25] был также использован метод линейного программирования для исследования непустоты С–ядра. Рассмотрим следующую задачу линейного программирования:

$$\sum_{i\in N} \xi_i \longrightarrow min$$
$$\sum_{i\in S} \xi_i \geq v(S),\ \forall S \subset N,\ S \neq N. \tag{2.7}$$

Предположим, что $\xi^0 = (\xi_1^0, \ldots, \xi_n^0)$ является оптимальным решением задачи ЛП (2.7). Множество всевозможных оптимальных решений задачи (2.7) обозначим через $X^0(v)$. В [23] показано, что необходимое и достаточное условие непустоты С–ядра может быть сформулировано с помощью ЛП (2.7):

Теорема 2.5.1. *Для того чтобы С–ядро в кооперативной игре с трансферабельными выигрышами (N, v) было не пусто, необходимо и достаточно, чтобы следующее неравенство было выполнено:*

$$\sum_{i\in N} \xi_i^0 \leq v(N), \tag{2.8}$$

где $\xi^0 \in X^0(v)$ *решение задачи ЛП (2.7).*

Также в работе [23] было введено понятие SC-ядра:

Определение 2.5.1. *SC-ядром* $SC(v, \xi^0)$ *назовем следующее множество дележей для фиксированного решения* ξ^0 *задачи ЛП (2.7):*

$$SC(v, \xi^0) = \left\{ \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) : \ \xi_i \geq \xi_i^0, \ \sum_{i \in N} \xi_i = v(N) \right\} =$$
$$= \left\{ \xi : \ \xi = \xi^0 + \left(v(N) - \sum_{i \in N} \xi_i^0 \right) I^\lambda, \ \sum_{i \in N} \xi_i^0 \leq v(N) \right\}, \quad (2.9)$$

где $I^\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in R^n$, $\sum_{i \in N} \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geq 0$, $i \in N$.

2.6. Определение ПРД-ядра

При переносе результатов кооперативной (статической) теории в область дифференциальных кооперативных игр проблема поиска устойчивых принципов оптимальности усложняется некоторыми дополнительными аспектами, возникающими в динамике. Данная проблема и способ ее решения для дифференциальных игр с предписанной продолжительностью была изучена в работах Л.А. Петросяна [4], [6].

Ключевым инструментом решения проблемы динамической неустойчивости принципов оптимальности в дифференциальных играх является процедура распределения дележей во времени, впервые предложенная в [6].

Определение 2.6.1. (см. [6]) *Набор функций* $\{\beta_i(\tau), \tau \in [t_0, T], i \in N\}$ *называется процедурой распределения дележа (ПРД)* $\xi(x_0, T - t_0) \in E(x_0, T - t_0)$, *если*

$$\xi_i(x_0, T - t_0) = \int_{t_0}^{T} \beta_i(\tau) d\tau, \ i \in N.$$

Таким образом, ПРД определяет правило, согласно которому компоненты дележа $\xi(x_0, T - t_0)$ распределены во времени на промежутке $[t_0, T]$.

Определение 2.6.2. (см. [6]) *Принцип оптимальности $C(x_0, T-t_0)$ в игре $\Gamma_V(x_0, T-t_0)$ называется динамически устойчивым, если для каждого дележа $\xi(x_0, T-t_0) \in C(x_0, T-t_0)$ существует ПРД $\beta(t)$, $t \in [t_0, T]$, такая, что*

$$\left\{ \int_t^T \beta(\tau) d\tau \right\} \in C(x^*(t), T-t),\ t \in [t_0, T],\ i \in N.$$

Здесь $C(x^*(t), T-t)$ – принцип оптимальности в текущей подыгре $\Gamma_V(x^*(t), T-t)$.

Очевидно, что если $C(x^*(t), T-t) \neq \emptyset$ для $\forall t \in [t_0, T]$, то для любого дифференцируемого селектора $\xi(x^*(t), T-t) \in C(x^*(t), T-t)$ $(\xi(x^*(t_0), T-t_0) = \xi(x_0, T-t_0))$ ПРД $\beta(t) = \beta(\xi(x^*(t), T-t), T-t)$ определяется по формуле:

$$\begin{aligned} &\beta(t) = -\frac{d}{dt}\xi(x^*(t), T-t),\ t \in [t_0, T],\ i \in N, \\ &\xi(x^*(t_0), T-t_0) = \xi(x_0, T-t_0). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Тогда дележ $\xi(x_0, T-t_0)$ представим в виде

$$\xi(x_0, T-t_0) = \int_{t_0}^t \beta(\tau) d\tau + \xi(x^*(t), T-t),\ t \in [t_0, T].$$

Предположим, что функция $V(S; x^*(t), T-t)$, $S \subseteq N$ непрерывно дифференцируема и не возрастает по t, $t \in [t_0, T]$. Введем следующее обозначение:

$$U(S; x^*(t), T-t) = -\frac{d}{dt} V(S; x^*(t), T-t),\ t \in [t_0, T],\ S \subseteq N. \tag{2.11}$$

Определение 2.6.3. *$B(t)$, $\forall t \in [t_0, T]$ – множество интегрированных вектор-функций, каждая из которых удовлетворяет системе неравенств:*

$$\begin{aligned} &B(t) = \Big\{ \beta(t) = (\beta_1(t), \ldots, \beta_n(t)) : \\ &\sum_{i \in S} \beta_i(t) \geq U(S; x^*(t), T-t),\ \forall S \subset N,\ \sum_{i \in N} \beta_i(t) = U(N; x^*(t), T-t) \Big\}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

На основе множества векторов $B(t)$ определяется ПРД-ядро.

Определение 2.6.4. *Пусть множество $B(t) \neq \emptyset$, $\forall t \in [t_0, T]$. ПРД-ядром $\overline{C}(x^*(t), T-t)$ назовем множество вектор-функций $\alpha(t)$, для каждой из которых найдется вектор-функций $\beta(t) \in B(t)$, такая что для любого $t \in [t_0, T]$ выполнено следующее условие:*

$$\alpha(t) = \int\limits_t^T \beta(\tau) d\tau. \tag{2.13}$$

2.7. Свойства ПРД-ядра

Множество $\overline{C}(x^*(t), T-t)$ построено с использованием функций $\beta(t) \in B(t)$. В работе [7] доказано, что элементы ПРД-ядра являются дележами в текущей игре, а функции $\beta(t)$, таким образом, интерпретируются как ПРД из определения 2.6.3. Еще один результат из работы [7] доказывает, что ПРД-ядро $\overline{C}(x^*(t), T-t)$ является подмножеством С-ядра $C(x^*(t), T-t)$.

В работе [7] было также показано, что ПРД-ядро обладает свойством сильной динамической устойчивости.

Определение 2.7.1. *(см. [5]) Решение $\overline{C}(x_0, T-t_0)$ является сильно динамически устойчивым в игре $\Gamma_V(x_0, T-t_0)$, если*

1. *$\overline{C}(x^*(t), T-t) \neq \emptyset$, $\forall t \in [t_0, T]$;*

2. *$\forall \xi(x_0, T-t_0) \in \overline{C}(x_0, T-t_0)$ существует ПРД $\beta(\tau)$, $\tau \in [t_0, T]$, такая что $\xi(x_0, T-t_0) = \int_{t_0}^T \beta(\tau) d\tau$, и выполняется условие:*

$$\overline{C}(x_0, T-t_0) \supset \int_{t_0}^t \beta(\tau) d\tau \oplus \overline{C}(x^*(t), T-t), \ \forall t \in [t_0, T].$$

Здесь символ $\oplus$ определяется следующим образом. Пусть $a \in R^n$, $D \subset R^n$, тогда $a \oplus D = \{a + d : d \in D\}$.

Сильная динамическая устойчивость ПРД-ядра означает, что при развитии игры вдоль кооперативной траектории $x^*(t)$ для любого дележа $\xi(x_0, T-t_0) \in \overline{C}(x_0, T-t_0)$ существует ПРД такая, что отклонение в момент t от этого дележа в пользу другого дележа

$\hat{\xi}(x^*(t), T-t) \in \overline{C}(x^*(t), T-t)$ приведет к суммарным выплатам в игре $\Gamma(x_0, T-t_0)$, соответствующим некоторому дележу $\bar{\xi}(x_0, T-t_0)$ также из ПРД-ядра $\overline{C}(x_0, T-t_0)$.

Построенное ПРД-ядро $\overline{C}(x^*(t), T-t)$ является сильно динамически устойчивым принципом оптимальности.

Теорема 2.7.1. *Пусть С-ядро $C(x^*(t), T-t) \neq \emptyset$, и ПРД-ядро $\overline{C}(x^*(t), T-t) \neq \emptyset$, $\forall t \in [t_0, T]$. Тогда ПРД-ядро $\overline{C}(x^*(t), T-t)$ является сильно динамически устойчивым решением в игре $\Gamma_V(x_0, T-t_0)$.*

3. Применение методов ЛП для анализа непустоты ПРД-ядра

В этом разделе рассмотрим методы ЛП, описанные в разделе 2.5, для анализа непустоты ПРД–ядра. ПРД-ядро будет построено с использованием системы линейных ограничений для процедур распределения дележа. Эти ограничения определены для каждого момента времени игры. Из непустоты множества описываемого этими ограничениями, т.е. непустоты соответствующего набора ПРД в каждый момент времени следует, что ПРД-ядро не пусто.

Рассмотрим следующую задачу линейного программирования при фиксированном t:

$$\sum_{i \in N} \beta_i \longrightarrow min$$
$$\sum_{i \in S} \beta_i \geq U(S; x^*(t), T-t), \ \forall S \subset N, \ S \neq N. \tag{3.1}$$

Предположим, что $\beta_i^0 = (\beta_1^0, \ldots, \beta_n^0)$ является оптимальным решением задачи ЛП (3.1) при фиксированном t. Множество всевозможных решений задачи (3.1) обозначим через $Y^0(U(S; x^*(t), T-t))$.

Тогда справедлива следующая теорема:

Теорема 3.1. *Для того чтобы множество $B(t)$ (2.12) для определенного $t \in [t_0, T)$ было не пусто, необходимо и достаточно, чтобы для $\forall t \in [t_0, T)$ выполнялось следующее:*

$$\sum_{i \in N} \beta_i^0 \leq U(N; x^*(t), T-t), \tag{3.2}$$

где $\beta^0 \in Y^0(U(S; x^*(t), T-t))$ решение задачи ЛП (2.7).

Доказательство. Необходимость. Пусть $B(t) \neq \emptyset$ для $\forall t \in [t_0, T)$, тогда существует функция $\hat{\beta}(t)$, удовлетворяющая условиям (2.12), которая для $\forall t \in [t_0, T)$ является допустимым решением задачи (3.1), причем

$$\sum_{i \in N} \hat{\beta}_i(t) = U(N; x^*(t), T - t). \tag{3.3}$$

Если $\hat{\beta}(t)$ не является оптимальным решением задачи (3.1), то очевидно, что для оптимального решения $\beta^0(t)$ этой задачи справедливо неравенство (3.2):

$$\sum_{i \in N} \beta_i^0 \leq U(N; x^*(t), T - t).$$

Достаточность. Пусть для некоторого оптимального решения $\beta^0(t)$ задачи (3.1) выполнено условие (3.2). Возьмем в качестве ПРД функцию $\hat{\beta}^0(t)$ с компонентами

$$\hat{\beta}_i^0(t) = \beta_i^0(t) + \frac{U(N; x^*(t), T - t) - \sum\limits_{i \in N} \beta_i^0(t)}{n}. \tag{3.4}$$

Очевидно, что эта функция принадлежит множеству $B(t)$ для $\forall t \in [t_0, T)$. $\square$

Замечание. Поскольку вектор $\hat{\beta}^0(t)$ принадлежит множеству $B(t)$, $\forall t \in [t_0, T]$, то в соответствии с Определением 2.6.4. дележ $\hat{\alpha}^0(t)$ с компонентами

$$\hat{\alpha}_i^0(t) = \int_t^T \left(\beta_i^0(\tau) + \frac{U(N; x^*(\tau), T - \tau)}{n} - \frac{\sum\limits_{i \in N} \beta_i^0(\tau)}{n}\right) d\tau =$$
$$= \frac{V(N; x^*(t), T - t)}{n} + \frac{\int_t^T \left((n-1)\beta_i^0(\tau) - \sum\limits_{j \in \{N/i\}} \beta_j^0(\tau)\right) d\tau}{n}, \ i \in N \tag{3.5}$$

принадлежит ПРД-ядру $\overline{C}(x^*(t), T - t)$, $\forall t \in [t_0, T]$.

В рамках выполнения условий Теоремы 3.1. очевидно следует выполнение и условия непустоты ПРД-ядра $\overline{C}(x^*(t), T - t)$, $\forall t \in [t_0, T]$:

Теорема 3.2. *Для того чтобы ПРД-ядро было не пусто необходимо и достаточно, чтобы множество $B(t)$ было не пусто для любого фиксированного $t \in [t_0, T]$.*

4. Пример

В качестве примера рассмотрим линейно-квадратичную дифференциальную игру, изученную в работе [14]. Проверим выполнение условие непустоты ПРД-ядра и построим его. Это условие предусматривает решение задачи ЛП (3.1) для всех моментов времени $t \in [t_0, T]$. Однако при решении практических задач применение численных методов линейного программирования в непрерывной постановке, если решение нельзя получить в явном виде, затруднительно. В данном примере мы будем решать задачу ЛП (3.1) с определенным шагом дискретизации.

Рассмотрим дифференциальную игру управления объемами вредных выбросов, основанную на моделях [10], [11], [14] и [16]. В игре участвуют n игроков (страны, фирмы), производящие некоторый товар на загрязняющих окружающую среду производствах. Предполагается, что объем производства прямо пропорционален объему загрязнения. Рассматривается кооперативный вариант игры, при котором игроки заключают соглашение о совместных действиях для уменьшения загрязнения окружающей среды. Игра начинается в момент времени t_0 из состояния x_0 и заканчивается в момент времени T. Фазовая переменная $x(t)$, описывающая состояние системы (общий уровень загрязнения), изменяется в соответствии с динамикой

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{n} u_i \ x(t_0) = x_0, \tag{4.1}$$

где u_i – объем загрязнений в единицу времени (управление) игрока i, $u_i \in [0, b_i]$. Решение в рассматриваемой игре будем искать в классе управлений $u_i(t)$.

Пусть N – множество игроков, $|N| = n$. Функция выигрыша игрока $i \in N$ имеет следующий вид:

$$K_i(x_0, T - t_0; u) = \int_{t_0}^{T} \Big(C_i(u_i(\tau)) - D_i(x(\tau)) \Big) d\tau, \ i \in N, \tag{4.2}$$

где $C_i(u_i(\tau))$ соответствует доходам от производства игрока i, загрязняющего окружающую среду, соответственно, со скоростью $u_i(\tau)$, $D_i(x(\tau))$ – расходы, затраченные игроком i на устранение общего загрязнения $x(\tau)$ (подробнее см. [11]):

$$C_i(u_i(t)) = \left(b_i - \frac{1}{2}u_i(t)\right)u_i(t), \tag{4.3}$$

$$D_i(x(t)) = d_i x(t),\ d_i, b_i > 0. \tag{4.4}$$

Для наглядности положим $n = 3$.

Такие результаты как оптимальные стратегии, вид кооперативной траектории были получены в работе [14], поэтому не будем на них останавливаться. Перейдем к построению характеристической функции.

В данной работе в качестве характеристической функции была выбрана δ-характеристическая функция, впервые предложенная в работе [18]. Значение характеристической функции для коалиции $S \subset N$ находится в два этапа: сначала фиксируется некоторая ситуация равновесия по Нэшу $u^{NE} = (u_1^{NE}, \ldots, u_n^{NE})$, а затем предполагается, что игроки j, не входящие в коалицию $j \notin S$, используют стратегии $\{u_j^{NE}\}$, тогда как игроки из коалиции S максимизирует свой суммарный выигрыш.

Отметим, что описанный в [18] способ построения характеристической функции обладает рядом достоинств, таких как упрощение вычислений по сравнению с классическим способом Неймана- Моргенштерна [2, 6], более понятная экономическая интерпретация и др. Однако в общем случае такая характеристическая функция не является супераддитивной.

Применяя принцип максимума Понтрягина, можно получить следующие выражения [14] для значений характеристической функции для всех возможных коалиций $S \subset N$:

$$V(x^*(t), T-t; \{1,2\}) = -d_{12}\,(T-t)\,x(t) + \\ + \frac{(T-t)\left(3\tilde{b}_{12} + 2d_{12}d_s(T-t)^2 - 3b_s d_{12}(T-t)\right)}{6}, \tag{4.5}$$

$$V(x^*(t), T-t; \{1,3\}) = -d_{13}\,(T-t)\,x(t) + \\ + \frac{(T-t)\left(3\tilde{b}_{13} + 2d_{13}d_s(T-t)^2 - 3b_s d_{13}(T-t)\right)}{6},$$

$$V(x^*(t), T-t; \{2,3\}) = -d_{23}\,(T-t)\,x(t) + \\ + \frac{(T-t)\left(3\tilde{b}_{23} + 2d_{23}d_s(T-t)^2 - 3b_s d_{23}(T-t)\right)}{6},$$

$$V(x^*(t), T-t; \{i\}) = -d_i\,(T-t)\,x(t) + \\ + \frac{(T-t)\left(d_i(2d_s - d_i)(T-t)^2 - 3b_s d_i(T-t) + 3{b_i}^2\right)}{6},$$

где $\tilde{b}_{ij} = b_i^2 + b_j^2, \quad d_{ij} = d_i + d_j, \quad i \neq j, \ i,j = 1,2,3.$

1. Построение множества $B(t)$ и ПРД-ядра $\overline{C}(x_0, T-t_0)$.

Построим множество $B(t)$ на основе вектор-функций $\beta(t)$, удовлетворяющих ограничениям в виде (2.12). Затем формируем ПРД-ядро $\overline{C}(x_0, T-t_0)$ из векторов $\xi = \int_{t_0}^{T} \beta(t)dt, \ \forall \beta \in B(t)$.

Приведем графические иллюстрации и анализ полученных решений для некоторых фиксированных числовых параметров, а именно, положим:

$$t_0 = 0, \quad x_0 = 0, \quad T = \frac{4}{3}, \tag{4.6}$$

$$b_1 = 6, \quad b_2 = 8, \quad b_3 = 7, \quad d_1 = 1.2, \quad d_2 = 1.5, \quad d_3 = 1.1. \tag{4.7}$$

Из (4.5) для параметров (4.7) получаем:

$$\begin{aligned}
V(x^*(t), T-t; \{1\}) &= 5.56t^3 - 9.64t^2 - 0.51t + 4.63, \qquad (4.8)\\
V(x^*(t), T-t; \{2\}) &= 7.03t^3 - 12.35t^2 - 9.73t + 18.28,\\
V(x^*(t), T-t; \{3\}) &= 5.08t^3 - 8.76t^2 - 8.56t + 14.96,\\
V(x^*(t), T-t; \{1,2\}) &= 11.97t^3 - 19.53t^2 - 13.52t + 24.37,\\
V(x^*(t), T-t; \{1,3\}) &= 10.2t^3 - 16.64t^2 - 11.42t + 20.64,\\
V(x^*(t), T-t; \{2,3\}) &= 11.53t^3 - 18.81t^2 - 21.37t + 34.61,\\
V(x^*(t), T-t; \{1,2,3\}) &= 14.44t^3 - 17.86t^2 - 35.99t + 45.51.
\end{aligned}$$

С помощью значений характеристической функции (4.8) построим множество $B(t)$ (2.12):

$$B(t) = \Big\{ \beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t), \beta_3(t)) : \tag{4.9}$$
$$\beta_1(t) \geq -16.68t^2 + 19.28t + 0.51,$$
$$\beta_2(t) \geq -21.08t^2 + 24.7t + 9.73,$$
$$\beta_3(t) \geq -15.24t^2 + 17.53t + 8.56,$$
$$\beta_1(t) + \beta_2(t) \geq -35.91t^2 + 39.06t + 13.52,$$
$$\beta_1(t) + \beta_3(t) \geq -30.59t^2 + 33.27t + 11.42,$$
$$\beta_2(t) + \beta_3(t) \geq -34.58t^2 + 37.61t + 21.37,$$
$$\beta_1(t) + \beta_2(t) + \beta_3(t) = -43.32t^2 + 35.72t + 35.99 \Big\}.$$

2. Проверка условия непустоты ПРД-ядра

Запишем задачу ЛП (3.1), соответствующую нашей модели для фиксированного момента времени t:

$$\sum_{i \in N} \beta_i \longrightarrow min$$
$$\beta_1 + \beta_2 \geq -35.91t^2 + 39.06t + 13.52,$$
$$\beta_1 + \beta_3 \geq -30.59t^2 + 33.27t + 11.42,$$
$$\beta_2 + \beta_3 \geq -34.58t^2 + 37.61t + 21.37,$$
$$\beta_1 \geq -16.68t^2 + 19.28t + 0.51,$$
$$\beta_2 \geq -21.08t^2 + 24.7t + 9.73,$$
$$\beta_3 \geq -15.24t^2 + 17.53t + 8.56. \tag{4.10}$$

Решение задачи ЛП (4.10) для момента времени $t = 1 \in [0, \frac{4}{3}]$ имеет следующий вид:

$$\beta^0 = (\beta_1^0, \beta_2^0, \beta_3^0) = (3.1067, 13.3583, 10.8539). \tag{4.11}$$

Значение $U(\{1, 2, 3\}; x^*(t), t)$ для момента времени $t = 1$:

$$U(\{1, 2, 3\}; x^*(t), t) = 28.3933. \tag{4.12}$$

Таким образом условие (3.2) Теоремы 3.1 для фиксированного момента времени $t = 1$ выполняется.

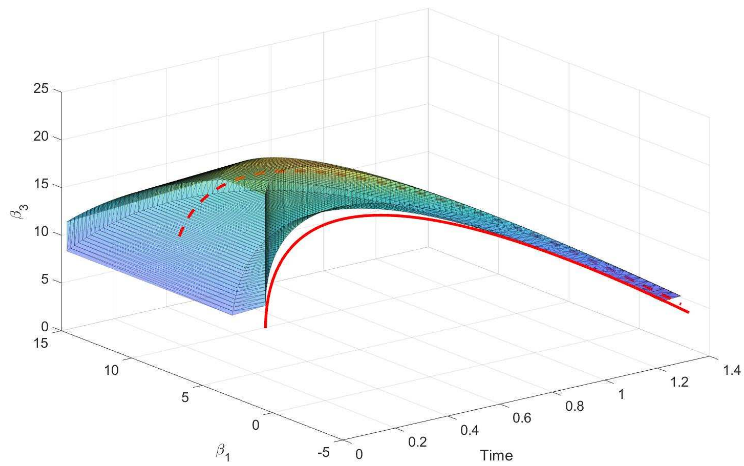

Рисунок 1. Оси: β_1, β_3, t.
β_2 находится с помощью нормирующего условия в (4.13).

Из формулировки системы ограничений в задаче ЛП (4.10) видно, что оптимальное решение β^0 лежит на пересечении $U(\{1\}; x^*(t), t)$, $U(\{2\}; x^*(t), t)$ и $U(\{3\}; x^*(t), t)$, $\forall t \in [0, \frac{4}{3}]$, и вследствие $\beta^0 = \beta^0(t)$ как функция времени имеет вид:

$$\begin{aligned} \beta^0 &= (\beta_1^0(t), \beta_2^0(t), \beta_3^0(t)) : \\ \beta_1^0(t) &= -16.68t^2 + 19.28t + 0.51, \\ \beta_2^0(t) &= -21.08t^2 + 24.7t + 9.73, \\ \beta_3^0(t) &= -15.24t^2 + 17.53t + 8.56. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Далее с помощью формулы (3.4) построим ПРД $\hat{\beta}^0(t)$ с помощью $\beta^0(t)$ и покажем, что оно лежит в множестве $B(t)$ (4.13).

На рис. 1 изображено множество $B(t)$ (4.13), сплошной линией изображено решение $\beta^0(t)$ задачи ЛП (4.10) как функция времени, а пунктирной линией изображено ПРД $\hat{\beta}^0(t)$ рассчитанное по формуле (3.4) с помощью $\beta^0(t)$. Видно, что при заданных параметрах (4.6), (4.7) множество $B(t)$ не пусто. Также видно, что полученная траектория $\beta^0(t)$ не принадлежит множеству $B(t)$ (4.13) и лежит ниже его, т.е. выполняется условие (3.2) Теоремы 3.1.

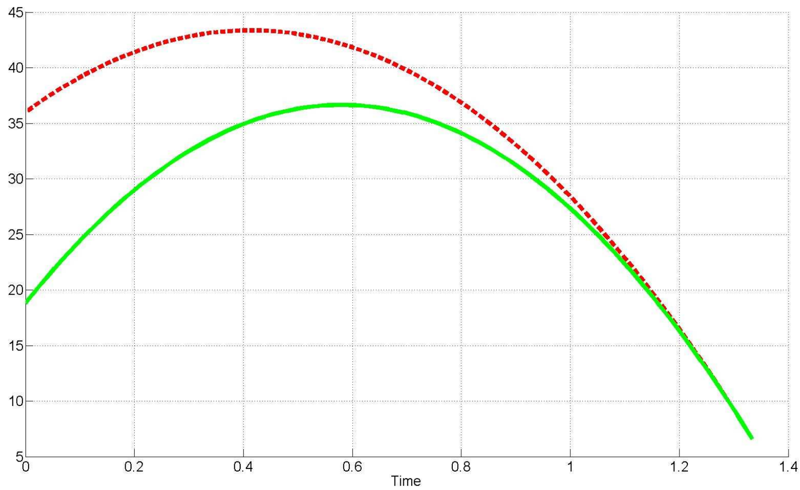

Рисунок 2. $U(\{1,2,3\};x^*(t)$ (2.11) - пунктирная линия, $S_{\beta^0}(t)$ (4.14) - сплошная линия.

С помощью рис. 2 можно дополнительно проверить выполнение условия (3.2) Теоремы 3.1, сплошная линия отображает сумму компонент траектории $\beta^0(t)$, а именно:

$$S_{\beta^0}(t) = \beta_1^0(t) + \beta_2^0(t) + \beta_3^0(t), \tag{4.14}$$

пунктирная линия на рис. 2 отображает значение характеристической функции для генеральной коалиции

$$U(N;x^*(t),T-t) = U(\{1,2,3\};x^*(t),T-t),$$

где $U(\{1,2,3\};x^*(t),T-t)$ определена в (2.11).

Из графика видно, что $S_{\beta^0}(t) \leq U(\{1,2,3\};x^*(t)$, $\forall t \in [t_0,T]$.

Из определения ПРД-ядра следует, что если множество $B(t)$, $t \in [t_0,T]$ не пусто, то и ПРД-ядро не пусто. Однако из-за специфического вида это кооперативного решения изобразить его как некое подмножество множества дележей не представляется возможным. Оперировать этим решением или выбирать какие-то конкретные его элементы можно, используя множество $B(t)$.

5. Заключение

В работе были предложены конструктивные условия для проверки непустоты ПРД-ядра в кооперативных дифференциальных играх. Необходимые и достаточные условия сформулированы на основе методов линейного программирования для анализа непустоты С–ядра. Условия формируются для каждого момента времени из промежутка, на котором определена игра и накладываются не на множество дележей, принадлежащих ПРД-ядру, а на множество соответствующих процедур распределения этих дележей (ПРД). На примере игры управления объемами вредных выбросов показано, что интервальная проверка предложенных условий дает возможность проверить непустоту ПРД-ядра. Устанавливается некоторый шаг проверки сформулированных условий, и с помощью численных методов в среде Matlab производится оценивание.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бондарева О.Н. *Некоторые применения методов линейного программирования к теории кооперативных игр* // Проблемы кибернетики. 1963. № 10. С. 119–140.

2. Воробьев Н.Н. *Теория игр для экономистов-кибернетиков.* М: Наука, 1985.

3. Громова Е.В., Петросян Л.А.,*Сильно динамически устойчивое кооперативное решение в одной дифференциальной игре управления вредными выбросами* // Управление большими системами. 2015. № 55. С. 140–159.

4. Петросян Л.А. *Устойчивость решений в дифференциальных играх со многими участниками* // Вестник Ленинградского университета. Серия 1. Математика, механика, астрономия. 1977. № 4. N 19. С. 46–52.

5. Петросян Л.А. *Сильно динамически устойчивые дифференциальные принципы оптимальности* // Вестник Ленинградско-

го университета. Серия 1. Математика, механика, астрономия. 1993. № 4. С. 35–40.

6. Петросян Л.А., Данилов Н.Н. *Устойчивость решений неантагонистических дифференциальных игр с трансферабельными выигрышами* // Вестник Ленинградского университета. Серия 1. Математика, механика, астрономия. 1979. № 1. С. 52–79.

7. Петросян О.Л., Громова Е.В., Погожев С.В. *О сильно динамически устойчивом подмножестве C-ядра в кооперативных дифференциальных играх с предписанной продолжительностью* // МТИП. 2016. № 8. N 4. С. 79–106.

8. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. *Математическая теория оптимальных процессов.* М: Гос. изд-во физико-матем. литературы, 1961.

9. Billera L.J. *Some theorems on the core of n person game* // SIAM Journal of applied Mathematics 1970. V. 18. N 3. P. 567–579.

10. Breton M., Zaccour G., Zahaf M. *A differential game of joint implementation of environmental projects* // Automatica. 2005. V. 41. N 10. P. 1737–1749.

11. Dockner E., Jorgensen S., van Long N., Sorger G. *Differential Games in Economics and Management Science.* Cambridge: Cambridge University Press, 2001.

12. Edgeworth F.Y. *Mathematical physics.* Kegan Paul, London, 1881.

13. Gillies D.B. *Some theorems on n person games, Ph.D. thesis.* Department of Mathematics, Princeton University, 1953.

14. Gromova E. *The Shapley value as a sustainable cooperative solution in differential games of 3 players.* Recent Advances in Game Theory and Applications. 2016. P. 67–89.

15. Haurie A. *A note on nonzero-sum differential games with bargaining solutions* // Journal of Optimization Theory and Applications. 1976. V. 18. N 1. P. 31–39.

16. Haurie A., Zaccour G. *Differential Game Models of Global Environmental Management* // Control and Game-Theoretic Models of the Environment. 1995. P. 3–23.

17. Owen G. *Game theory.* Academic Press, New York, 1982.

18. Petrosyan L., Zaccour G. *Time-consistent Shapley value allocation of pollution cost reduction* // Journal of Economic Dynamics and Control. 2003. V. 27. N 3. P. 381–398.

19. Scarf H.E. *The core of an n person game* // Economica. 1967. V. 35. N 1. P. 50–69.

20. Shapley L.S. *On balanced games without side payments* // Mathematical programming. Academic Press, NewYork 1972. P. 261–290.

21. Shapley L.S. *On balanced sets and cores* // Naval Research Logistic Quarterly. 1967. V. 14. P. 453–460.

22. Shapley, Lloyd S. *A Value for n-person Games* // In Contributions to the Theory of Games, vol. II, H.W. Kuhn, A.W. Tucker, eds. Annals of Mathematical Studies. Princeton University Press. 1953. V. 28 P. 307–317.

23. Zakharov V., O-Hun Kwon *Linear programming approach in cooperative games* // J. Korean Math. Soc. 1997. V. 34. N 2. P. 423–435.

24. Zakharov V., Akimova A. *Nucleous as a selector of the subcore* // Proc. of 11th IFAC Workshop Control Applications of Optimization, St. Petersburg, Russia, July, 2000. V. 33. N 16. P. 675–680.

25. Zakharov V., Akimova A. *Geometric Properties of the Core, Subcore, Nucleolus, Volume VIII* // Nova Science Publishers, 2002. P. 281–289.

ON THE EXISTENCE OF IDP-CORE IN COOPERATIVE DIFFERENTIAL GAMES

Dmitry A. Wolf, Saint-Petersburg State University, Faculty of Applied Mathematics and Control Process (answer.iii@mail.ru),
Victor V. Zakharov, Saint-Petersburg State University, Faculty of Applied Mathematics and Control Process, Dr.Sc., professor (v.zaharov@spbu.ru),
Ovanes L. Petrosian, Saint-Petersburg State University, Faculty of Applied Mathematics and Control Process, Cand.Sc. (petrosian.ovanes@yandex.ru).

Abstract: In this paper we consider differential games with transferable utility and study of non-emptiness property of IDP-core presented in [7]. We apply methods of linear programming first applied in the paper [23] for analyzing non-emptiness of the Core. With described methods we construct necessary and sufficient conditions for IDP-core to be non-empty. This conditions are formalized for each time instant on which the game is defined and are imposed on a set of imputation distribution procedures (IDPs) corresponding to IDP-core.

Keywords: cooperative differential games, cooperative games, IDP-core, SC-core, linear programming.