Математическая Теория Игр и её Приложения, т.9, в.4, с. 39–53

УДК 517.977
ББК 22.18

ПОСТРОЕНИЕ НЭШЕВСКОГО РАВНОВЕСИЯ НА ОСНОВЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ГАМИЛЬТОНА–ЯКОБИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Екатерина А. Колпакова*
Институт математики и механики
им. Н.Н. Красовского УрО РАН
620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
e-mail: eakolpakova@gmail.com

В работе описано построение равновесных нэшевских программных стратегий для одной неантагонистической дифференциальной игры двух лиц при помощи решения сильно связанной системы уравнений Гамильтона–Якоби. Система Гамильтона–Якоби имеет специальный вид, когда первое уравнение системы не зависит от второго уравнения, а второе уравнение зависит от производной решения первого уравнения. Показано, что решение системы уравнений Гамильтона–Якоби нужно рассматривать в классе многозначных отображений. Дано определение обобщенного решения рассматриваемой системы уравнений Гамильтона–Якоби, доказана теорема существования обобщенного решения. В заключении приведен пример, иллюстрирующий построение стратегий в классе программных управлений.

Ключевые слова: иерархические дифференциальные игры, равновесие по Нэшу, обобщенное решение, система уравнений Гамильтона–Якоби.

---

* Программа УрО РАН «Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка в задачах динамики» проект № 15-16-1-11

1. Введение

Работа посвящена построению нэшевского равновесия в неантагонистической игре двух лиц с помощью ненаказательных стратегий. Ненаказательные стратегии строятся на основе решения сильно связанной системы уравнений Гамильтона–Якоби. Впервые связь между поиском равновесия по Нэшу и решением системы уравнений Гамильтона–Якоби была отмечена в работах [9–11]. В случае, когда решение системы уравнений Гамильтона–Якоби является достаточно гладкой функцией, равновесные по Нэшу стратегии строятся на основе метода динамического программирования [4,10]. Для дифференциальной игры общего вида существование равновесия по Нэшу доказано с помощью концепции стратегий наказания. Стратегии наказания устроены следующим образом. Для фиксированного нэшевского равновесия игроки договариваются о линии поведения, а индивидуальное отклонение игрока наказывается остальными игроками. Однако в случае большого числа игроков выделить нарушителя достаточно сложно. Кроме того, стратегии наказания использовать нерационально, т.к. игроки заботятся не о своем выигрыше, а о поддержании равновесия.

Сложность построения ненаказательных стратегий, реализующих нэшевское равновесие, заключается в том, что нет теории для обобщенных решений сильно связанных систем уравнений Гамильтона–Якоби. В работе [7] ненаказательные стратегии строились на основе BV-решений гиперболической системы квазилинейных уравнений. Дифференцируя по фазовой переменной систему уравнений Гамильтона–Якоби, авторы получили гиперболическую систему квазилинейных уравнений. Авторы рассмотрели случай одномерной фазовой переменной. А. Брессан показал, что в случае, когда начальные условия для системы квазилинейных уравнений лежат в классе функций с малой вариацией, существует и единственно BV-решение гиперболической системы квазилинейных уравнений в классе функций с ограниченной вариацией. Аналогичные построения были сделаны в работе [8] для дифференциальной игры с простыми движениями. Таким образом ненаказательные равновесные стратегии по Нэшу удается построить только в частных случаях, не решая исходную систему уравнений Гамильтона–Якоби.

В настоящей работе введено понятие обобщенного решения системы уравнений Гамильтона–Якоби и построены равновесные по Нэшу программные стратегии для дифференциальной игры специального вида. Предполагается, что динамика игры и функционал платы первого игрока определяются только его управлением, а функционал платы второго игрока зависит как от динамики системы, так и от управлений обоих игроков. Нами показано, что в этом случае решение системы уравнений Гамильтона–Якоби является многозначным отображением, значениями которого являются значения функционалов платы обоих игроков, равновесные по Нэшу. Доказана теорема существования обобщенного решения системы уравнений Гамильтона–Якоби. Понятие обобщенного решения основано на определениях минимаксного решения для непрерывного уравнения Гамильтона–Якоби [5] и M–решения для разрывного по фазовой переменной уравнения Гамильтона–Якоби [3]. На основе полученного решения системы уравнений Гамильтона–Якоби построены программные стратегии, реализующие равновесие по Нэшу.

2. Постановка задачи

Рассмотрим неантагонистическую дифференциальную игру двух лиц

$$\dot{x} = f(t,x,u),\ x(t_0) = x_0,\ u \in U \subset \mathbb{R}^n. \tag{2.1}$$

Игроки максимизируют функционалы платы I_1, I_2:

$$I_1(u(\cdot)) = \sigma_1(x(T)) + \int\limits_{t_0}^{T} g_1(t,x(t),u(t))dt,$$

$$I_2(u(\cdot),v(\cdot)) = \sigma_2(x(T)) + \int\limits_{t_0}^{T} g_2(t,x(t),u(t),v(t))dt.$$

Здесь u и v – управления первого и второго игроков соответственно. Множества $U,V \subset \mathbb{R}^n$ – компакты. Обозначим $\Pi_T = \{(t,x) : t \in [0,T],\ x \in \mathbb{R}^n\}$. Множества $\tilde{U} = \{u : [t_0,T] \to U, u$ измеримые функции$\}$, $\tilde{V} = \{v : [t_0,T] \to V, v$ измеримые функции$\}$.

Мы предполагаем, что

A1. Функция $f(t,x,u)$ непрерывно дифференцируема по t,x и удовлетворяет условию подлинейного роста по u.

A2. Функция σ_1 липшицева.

A3. Множества $(f(t,x,U),g_1(t,x,U))$, $g_2(t,x,U,V)$ строго выпуклы при всех (t,x), функции g_1,g_2 непрерывно дифференцируемы.

A4. Функция σ_2 непрерывно дифференцируема.

Функции оптимального результата игроков c, w удовлетворяют в точках дифференцируемости системе уравнений Гамильтона–Якоби. Составим соответствующую систему уравнений Гамильтона–Якоби

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \max_{u\in U}\langle f(t,x,u),p\rangle + g_1(t,x,u) = 0,\ \ c(T,x) = \sigma_1(x), \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \langle f(t,x,u^0(t,x,p)),q\rangle + \max_{v\in V} g_2(t,x,u^0(t,x,p),v) = 0,$$
$$w(T,x) = \sigma_2(x). \tag{2.3}$$

Здесь $p=\frac{\partial c}{\partial x}$, $q=\frac{\partial w}{\partial x}$. В силу условий $A1$, $A3$ можно найти измеримую предстратегию $u^0:(t,x,p)\to U$, которая удовлетворяет условию

$$u^0(t,x,p) \in \arg\max_{u\in U}\langle f(t,x,u),p\rangle + g_1(t,x,u). \tag{2.4}$$

Обозначим

$$\begin{aligned}
H_1(t,x,p) &= \max_{u\in U}\langle f(t,x,u),p\rangle + g_1(t,x,u) = \\
&= \langle f(t,x,u^0(t,x,p)),p\rangle + g_1(t,x,u^0(t,x,p)),\\
H_2(t,x,q) &= \langle f\Big(t,x,u^0\Big(t,x,\frac{\partial c(t,x)}{\partial x}\Big)\Big),q\rangle + \\
&\qquad + \max_{v\in V} g_2\Big(t,x,u^0\Big(t,x,\frac{\partial c(t,x)}{\partial x}\Big),v\Big),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{2*}(t,x,q) &= \lim\inf_{(\tau,\xi)\to(t,x)} H_2(\tau,\xi,q),\\
H_2^*(t,x,q) &= \lim\sup_{(\tau,\xi)\to(t,x)} H_2(\tau,\xi,q).
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Из работы [5] вытекает, что при сделанных предположениях существует и единственно минимаксное решение $c(\cdot,\cdot)$ в задаче (2.2).

Отметим некоторые свойства минимаксного решения задачи (2.2) при выполнении условий $A1$–A_3 [5,6]:

1. минимаксное решение $c(\cdot,\cdot)$ – локально липшицевая функция;

2. супердифференциал минимаксного решения $D^+c(t,x) \neq \emptyset$ для любой точки $(t,x) \in \Pi_T$.

3. Равновесие по Нэшу

Для построения программных стратегий напомним определение равновесия по Нэшу в программных стратегиях.

Определение 3.1. *[1] Пара стратегий $(\bar{u}(\cdot), \bar{v}(\cdot))$ образуют равновесие по Нэшу в дифференциальной игре двух лиц, если следующие неравенства выполнены для всех $u(\cdot) \in \tilde{U}$, $v(\cdot) \in \tilde{V}$*

$$\sigma_1(\bar{x}(T)) + \int\limits_{t_0}^{T} g_1(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))dt \geq \sigma_1(x^{[1]}(T)) + \int\limits_{t_0}^{T} g_1(t, x^{[1]}(t), u(t))dt,$$

$$\sigma_2(\bar{x}(T)) + \int\limits_{t_0}^{T} g_2(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{v}(t))dt \geq \sigma_2(\bar{x}(T)) + \int\limits_{t_0}^{T} g_2(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), v(t))dt,$$

на отрезке $t \in [t_0, T]$, где

$$\dot{\bar{x}}(t) = f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)),\ \dot{x}^{[1]}(t) = f(t, x^{[1]}(t), u(t)),\ \bar{x}(t_0) = x^{[1]}(t_0) = x_0.$$

Если выполнены предположения $A1$–$A3$, то в задаче оптимального управления с функционалом платы I_1 существует оптимальное управление u^0 в классе измеримых функций. Для построения оптимального управления составим характеристическую систему для уравнения Беллмана (2.2). В силу условий $A1$, A_2 гамильтониан H_1 является дифференцируемым по переменным t, x, s, следовательно характеристическая система имеет вид

$$\dot{\tilde{x}} = \frac{\partial H_1(t, \tilde{x}, \tilde{s})}{\partial \tilde{s}},\ \dot{\tilde{s}} = -\frac{\partial H_1(t, \tilde{x}, \tilde{s})}{\partial \tilde{x}},\ \dot{\tilde{z}} = \langle \frac{\partial H_1(t, \tilde{x}, \tilde{s})}{\partial \tilde{s}}, \tilde{s} \rangle - H_1(t, \tilde{x}, \tilde{s})$$

с краевым условием

$$\tilde{x}(T, \xi) = \xi,\ \tilde{s}(T, \xi) = D_x\sigma_1(\xi),\ \tilde{z}(T, \xi) = \sigma_1(\xi),\ \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Решение характеристической системы существует, единственно и продолжимо на интервале $[t_0, T]$ при любом $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Определим отображение

$$(t_0, x_0) \to \xi(t_0, x_0) = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \ \tilde{x}(t_0, \xi) = x_0, \tilde{x}(T, \xi) = \xi, \\ \tilde{s}(T, \xi) = D_x\sigma_1(\xi), \ \tilde{z}(T, \xi) = \sigma_1(\xi), \ \tilde{z}(t_0, \xi) = c(t_0, x_0)\} \quad (3.1)$$

Опираясь на результаты работы [6], определим $u^0(\cdot; t_0, x_0)$ – оптимальное программное управление первого игрока для начальной точки $(t_0, x_0) \in \Pi_T$. Для любого $\xi_0 \in \xi(t_0, x_0)$, определенного (3.1), согласно принципу максимума Понтрягина для всех $t \in [t_0, T]$ справедливо

$$u^0(t; t_0, x_0) \in \arg\max_{u \in U}[\langle \tilde{s}(t, \xi_0), f(t, \tilde{x}(t, \xi_0), u)\rangle + g_1(t, \tilde{x}(t, \xi_0), u)]. \quad (3.2)$$

Здесь $\tilde{s}(\cdot)$, $\tilde{x}(\cdot)$, $\tilde{z}(\cdot)$ – решения характеристической системы Коши для задачи (2.2).

Определим управление $\bar{u}(\cdot)$ формулой (3.2). Оно доставляет максимум функционалу I_1 для задачи оптимального управления (2.1), а значит первое неравенство в определении 3.1 выполнено.

Определим $\bar{v}(\cdot)$ следующим образом

$$\bar{v}(t) \in \arg\max_{v \in V}\{g_2(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), v)\}, t \in [t_0, T], \quad (3.3)$$

где $\bar{x}(\cdot)$ удовлетворяет уравнению $\dot{\bar{x}}(t) = f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))$, $\bar{x}(t_0) = x_0$. По теореме Кастэна [1] отображение

$$\arg\max_{v \in V} g_2(t, x(\cdot), \bar{u}(\cdot), v) : \ [t_0, T] \rightrightarrows V,$$

т.к. композиция непрерывной функции g_2 и непрерывной функции $\bar{x}(\cdot)$, измеримой функции $\bar{u}(\cdot)$ измерима. Отсюда по теореме Неймана–Аумана–Кастэна [1] измеримое многозначное отображение имеет измеримый однозначный селектор. Следовательно отображение $\bar{v}(\cdot)$: $[t_0, T] \to \mathbb{R}^n$ является измеримым.

В определении 3.1 второе неравенство для интегральных частей выполнено в силу определения $\bar{v}$ (3.3).

Отсюда следует, что пара стратегий $(\bar{u}, \bar{v})$ образует равновесие по Нэшу. Первый игрок решает задачу оптимального управления и его выигрыш не зависит от поведения второго игрока. Выбирая управление $\bar{u}(\cdot;t_0,x_0)$, первый игрок получит выигрыш $c(t_0,x_0)$. Покажем, как выбор управления первого игрока влияет на выигрыш второго игрока. Построим стратегии, которые дают гарантированный результат для второго игрока в неантагонистической дифференциальной игре. Определим контрстратегию

$$(t,x,u) \to V(t,x,u) = \arg\max_{v\in V} g_2(t,x,u,v). \tag{3.4}$$

Построим множество

$$U^0(t_0,x_0) = \Big\{ u(\cdot) : [t_0,T] \to U\text{– измеримые функции,}$$

$$\text{удовлетворяющие (3.2)}\Big\}.$$

Рассмотрим отображение $\Gamma(u(\cdot)) : \ \tilde{U} \to \mathbb{R}$

$$u(\cdot) \to \sigma_2(x[T;t_0,x_0]) + \int\limits_{t_0}^{T} g_2(t,x[t;t_0,x_0]),u(t),V(t,x[t;t_0,x_0],u(t))dt, \tag{3.5}$$

$u(\cdot) \in U^0(t_0,x_0)$, функция $x[\cdot;t_0,x_0]$ является решением задачи

$$\dot{x} = f(t,x,u(t)), \ u(\cdot) \in U^0(t_0,x_0), x(t_0) = x_0. \tag{3.6}$$

Замечание 3.1. Наилучший результат второго игрока для начальной точки (t_0,x_0) дают управления

$$u^*(t) \in \arg\max_{u(\cdot)\in U^0(t_0,x_0)} \Gamma(u), \ v^*(t) = V(t,x[t;t_0,x_0]),u^*(t)),$$

Γ определяется (3.5), $x^*[\cdot;t_0,x_0]$ удовлетворяет (2.1). Здесь используется операция $\arg\max$ вместо $\arg\sup$ в силу условия $A3$.

Замечание 3.2. По определению пара управлений (u^*,v^*) доставляет наилучший результат игроков, который равен $(c(t_0,x_0),w^*(t_0,x_0))$. Здесь c,w – решения задач Коши (2.2), (2.3) соответственно, $w^*(t_0,x_0) = \limsup\limits_{(\tau,\xi)\to(t_0,x_0)} w(\tau,\xi)$.

4. Обобщенное решение системы уравнений Гамильтона–Якоби

Как отмечалось ранее, уравнение (2.2) системы уравнений Гамильтона–Якоби решается независимо от второго. Его минимаксное решение существует и единственно в классе непрерывных функций.

Подставим предстратегию u^0, определенную (2.4), в уравнение (2.3). Заметим, что гамильтониан H_2 может быть разрывным по x, так как u^0 зависит от p, совпадающего с c_x почти всюду. В силу свойств минимаксного решения производная c_x может быть разрывной.

Построим в задаче (2.3) обобщенное решение. Рассмотрим дифференциальное включение

$$(\dot{x}, \dot{z}) \in E(t,x,q),\ E(t,x,q) = \{(f,g) : f \in f(t,x,U),\\ \langle f, q\rangle - g \in [H_{2*}(t,x,q), H_2^*(t,x,q)], q \in \mathbb{R}^n\}, \quad (4.1)$$

где H_{2*}, H_2^* определены (2.5).

Дифференциальное включение (4.1) является допустимым характеристическим согласно работе [2].

Напомним несколько определений согласно работе [3].

Определение 4.1. *Пусть W – график многозначного отображения $w : \Pi_T \rightrightarrows \mathbb{R}$ – замкнутое множество. Будем говорить, что W слабо инвариантно относительно дифференциального включения* (4.1), *если для произвольной точки $(t_0, x_0, z_0) \in W$ существует $\tau > 0$ и траектория (x, z) допустимого дифференциального включения* (4.1) *такая, что $(x(0), z(0)) = (x_0, z_0)$, $(t, x(t), z(t)) \in W$ для всех $t \in [0, \tau]$.*

В определении 4.1 в качестве дифференциального включения можно использовать любое допустимое характеристическое дифференциальное включение, которое удовлетворяет условиям, описанным в [2]. Для удобства изложения будем использовать дифференциальное включение (4.1).

Определение 4.2. *Замкнутое максимальное по включению многозначное отображение $w : \Pi_T \rightrightarrows \mathbb{R}$ называется M-решением задачи Коши для уравнения Гамильтона–Якоби, если $gr\ w$ слабо инвариантен относительно допустимого дифференциального включения*

(4.1), $w(T,x) = \sigma_2(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$.

Определение 4.3. *Эпи-решением (гипо-решением) задачи (2.3) называется замкнутое множество $W \subset [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, слабо инвариантное относительно допустимого дифференциального включения (4.1) и удовлетворяющее условию*

$$(T,x,z) \in W \Rightarrow z \geq \sigma_2(x)((T,x,z) \in W \Rightarrow z \leq \sigma_2(x)) \ \forall \ x \in \mathbb{R}^n.$$

Дадим определение обобщенного решения системы Гамильтона–Якоби.

Определение 4.4. *Многозначное отображение (c,w), где $c(\cdot,\cdot) : \Pi_T \to \mathbb{R}$, $w : \Pi_T \rightrightarrows \mathbb{R}$ называется обобщенным решением задачи Коши для системы уравнений Гамильтона–Якоби (2.2), (2.3), если функция $c(\cdot,\cdot)$ – минимаксное решение задачи (2.2), функция $w(\cdot,\cdot)$ – М-решение задачи (2.3).*

Определим многозначное отображение

$$(t_0,x_0) \rightrightarrows w(t_0,x_0) = \bigcup_{u(\cdot)\in U^0(t_0,x_0)} \Gamma(u) \tag{4.2}$$

Лемма 4.1. *Отображение w, определенное (4.2), компактнозначно.*

Доказательство. Выберем $w_i(t_0,x_0) = \Gamma(u_i) \in w(t_0,x_0)$. Покажем, что если $w_i(t_0,x_0) \to w_0(t_0,x_0)$, то $w_0(t_0,x_0) \in w(t_0,x_0)$. Действительно,

$$\lim_{i\to\infty} w_i(t_0,x_0) = \lim_{i\to\infty} \Gamma(u_i) = \Gamma(u_0) = w_0(t_0,x_0).$$

Отсюда $w_0(t_0,x_0) = \Gamma(u_0) \in w(t_0,x_0)$. Заметим, что $w(t,x_0)$ ограничено, так как $\Gamma(u)$ ограничено на компакте $U^0(t_0,x_0)$. □

Напомним теорему.

Теорема 4.1. *[10]. Пусть w – замкнутое множество в $[0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Предположим, что $w(t,x) = \{z \in \mathbb{R} : (t,x,z) \in w\} \neq \emptyset$ и $w_*(t,x) = \min_{z\in w(t,x)} z > -\infty$, $w^*(t,x) = \max_{z\in w(t,x)} z < \infty$. Чтобы w было М-решением задачи (2.3) необходимо и достаточно, чтобы epi w_* и hypo w^* являлись М-решениями задачи (2.3).*

Докажем теорему.

Теорема 4.2. *Если выполнены условия A1–A4, то многозначное отображение w, определенное* (4.2) *является M-решением задачи* (2.3).

Доказательство. Для доказательства теоремы воспользуемся теоремой 4.1. Обозначим $w^*(t_0,x_0) = \max\limits_{y\in w(t_0,x_0)} y$, где w определено (4.2). Покажем, что подграфик w^* является слабо инвариантным множеством относительно дифференциального включения (4.1).

Пусть $(t_0,x_0) \in [0,T]\times\mathbb{R}^n$. Выберем $(t_0,x_0,z_0) \in \text{ hypo } w^*$, $z_0 \le w^*(t_0,x_0)$. Существует оптимальное управление (u^*,v^*), определенное (3.2), порождающее траекторию ξ:

$$\dot{\xi} = f(t,\xi,u^*(t)), \quad \xi(t_0) = x_0.$$

В силу выбора точки z_0 и принципа оптимальности Беллмана справедливо

$$z_0 \le w^*(t_0,x_0) = w^*(t,\xi(t)) +$$

$$\int\limits_{t_0}^{t} g_2(\tau,\xi[\tau;t_0,x_0],u^*(\tau),V(\tau,\xi[\tau;t_0,x_0],u^*(\tau))d\tau.$$

Для всех $t\in[t_0,T]$ имеем

$$z_0 - \int\limits_{t_0}^{t} g_2(\tau,\xi[\tau;t_0,x_0],u^*(\tau),V(\tau,\xi[\tau;t_0,x_0],u^*(\tau)))d\tau \le w^*(t,\xi(t)).$$

Заметим, что траектория $(\xi(\cdot),z(\cdot))$ удовлетворяет дифференциальному включению (4.1), т. к.

$$z(t) = z_0 - \int\limits_{t_0}^{t} g_2(\tau,\xi[\tau;t_0,x_0],u^*(\tau),V(\tau,\xi[\tau;t_0,x_0],u^*(\tau)))d\tau.$$

Заметим, что

$$g = \dot{z} = -g_2(t,\xi(t),u^*(t),V(t,\xi(t),u^*(t))),\ \langle f(t,\xi(t),u^*(t),p\rangle - g =$$

$$\langle f(t,\xi(t),u^*(t),p\rangle + g_2(t,\xi(t),u^*(t),V(t,\xi(t),u^*(t))) \in$$

$$[H_{2*}(t,\xi(t),p),H_2^*(t,\xi(t),p)]$$

по определению гамильтониана H_2. Отсюда следует, что $(t,\xi(t),z(t)) \in \text{ hypo } w^*(t,\xi(t))$, а значит $(t,\xi(t),z(t)) \in \text{ hypo } w(t,\xi(t))$. Следовательно $\text{hypo } w^*$ – замкнутое множество, удовлетворяющее определению гипо-решения.

Обозначим $w_*(t_0, x_0) = \min\limits_{y \in w(t_0,x_0)} y$, где w определено (4.2). Выберем точку $(t_0, x_0, z_0) \in$ epi w_*, $z_0 \geq w_*(t_0, x_0)$. Рассмотрим оптимальную траекторию $\xi(\cdot)$ динамической системы (2.1), порожденную управлением u_* и удовлетворяющую начальному условию $\xi(t_0) = x_0$. В силу оптимальности $\xi(\cdot)$

$$w_*(t, \xi(t)) + \int\limits_{t_0}^{t} g_2(\tau, \xi[\tau; t_0, x_0], u_*(\tau), V(\tau, \xi[\tau; t_0, x_0], u_*(\tau)))d\tau =$$

$w_*(t_0, x_0) \leq z_0$. Отсюда

$$w_*(t, \xi(t)) \leq z_0 -$$

$$\int\limits_{t_0}^{t} g_2(\tau, \xi[\tau; t_0, x_0], u_*(\tau), V(\tau, \xi[\tau; t_0, x_0], u_*(\tau)))d\tau = z(t),$$

т.е. траектория $(\xi(\cdot), z(\cdot))$ лежит в надграфике w_*.

Покажем, что $z(\cdot)$ является решением дифференциального включения (4.1). Действительно,

$$g = \dot{z} = -g_2(t, \xi(t), u_*(t), V(t, \xi(t), u_*(t))),\ \langle f(t, \xi(t), u_*(t), p\rangle - g =$$

$$\langle f(t, \xi(t), u_*(t), p\rangle + g_2(t, \xi(t), u_*(t), V(t, \xi(t), u_*(t))) \in$$

$$[H_{2*}(t, \xi(t), p), H_2^*(t, \xi(t), p)].$$

Следовательно epi w_*, а значит и epi w – замкнутые множества, удовлетворяющие определению эпирешения.

Согласно теореме 4.1 множество epi $w_* \bigcap$ hypo w^* является M-решением задачи (2.3). Заметим, что epi $w_*(T, x) \bigcap$ hypo $w^*(T, x) = \sigma_2(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. □

Замечание 4.1. Мы показали, что многозначное отображение (4.2) является M-решение задачи (2.3), а значит является максимальным по включению согласно определению 4.2. Предположим, что есть W и W' – два M-решения задачи (2.3). В силу максимальности по включению имеем вложения $W \subseteq W'$ и $W' \subseteq W$, следовательно $W = W'$ и M-решение единственно.

5. Пример

Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x} = u,\ x(t_0) = x_0,$$

$x \in \mathbb{R}$, $t \in [0, T]$, $|u| \leq 1$, $|v| \leq 1$. Качество управления первого игрока оценивается функционалом I_1 вида

$$I_1(u(\cdot)) = |x(T)| - \int_{t_0}^{T} \frac{u^2}{2} dt \to \max,$$

а второго – I_2

$$I_2(u(\cdot), v(\cdot)) = x(T) - \int_{t_0}^{T} uv^2 dt \to \max.$$

Составим соответствующую систему уравнений Гамильтона–Якоби

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \max_{u \in U} pu - \frac{u^2}{2} = 0,\ c(T, x) = |x|,$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + qu^0(t, x, p) - \max_{v \in V} u^0(t, x, p)v^2 = 0, w(T, x) = x,$$

$x \in \mathbb{R}$, $T = 2$, $t \in [0, T]$. Первое уравнение системы можно решить с помощью формулы Лакса–Хопфа

$$c(t, x) = |x| - 1/2(t - T).$$

Предстратегия первого игрока имеет вид

$$u^0(t, x, p) = \begin{cases} p, \text{ если } |p| \leq 1, \\ 1, \text{ если } p > 1, \\ -1, \text{ если } p < -1. \end{cases}$$

Программное управление первого игрока, согласно формуле (3.2) имеет вид

$$u^0(t; t_0, x_0) = \begin{cases} 1, \text{ если } x_0 > 0, \\ -1, \text{ если } x_0 < 0, \\ \{-1, 1\}, \text{ если } x_0 = 0. \end{cases}$$

Контрстратегия второго игрока имеет вид

$$V(u) = \begin{cases} \{-1, 1\}, & \text{если } u > 0, \\ 0, & \text{если } u < 0. \end{cases}$$

Программное управление второго игрока имеет вид

$$v^0(t; t_0, x_0) = \begin{cases} \{-1, 1\}, & \text{если } x_0 \geq 0, \\ 0, & \text{если } x_0 < 0. \end{cases}$$

М–решение второго уравнения системы уравнений Гамильтона–Якоби имеет вид

$$w(t, x) = \begin{cases} x + t - T, & \text{если } x < 0, \\ x, & \text{если } x > 0, \\ [x, x + t - T], & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Видно, что решение многозначно вдоль кривой $x = 0$. Наилучший результат второго игрока имеет вид

$$\Gamma^* = \begin{cases} x - t + T, & \text{если } x \leq 0, \\ x, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Варга Дж. *Оптимальное управление дифференциальными m функциональными уравнениями.* М.: Наука, 1977.

2. Лахтин А.С., Субботин А.И. *Минимаксные и вязкостные решения разрывных уравнений с частными производными первого порядка* // Доклады Академии Наук. 1998. Т. 359, № 4. С. 452–455.

3. Лахтин А.С., Субботин А.И. *Многозначные решения уравнений с частными производными первого порядка* // Математический сборник. 1998. Т. 189, № 6. С. 33–58.

4. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Шевкопляс Е.В. *Теория игр.* Санкт-Петербург: БХВ–Петербург, 2012.

5. Субботин А.И. *Обобщенные решения уравнений с частными производными первого порядка: перспективы динамической оптимизации.* Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.

6. Субботина Н.Н. *Метод характеристик для уравнений Гамильтона–Якоби и его приложения в динамической оптимизации* // Современная математика и ее приложения. 2004. Т. 20. С. 1–129.

7. Bressan A., Shen W. *Semi-cooperative strategies for differential games* // International Journal of Game Theory. 2004. V. 32. P. 1–33.

8. Cardaliaguet P., Plaskacz S. *Existence and uniqueness of a Nash equilibrium feedback for a simple nonzero-sum differential game* // International Journal of Game Theory. 2003. V. 32. P. 33–71.

9. Case J.H. *Toward a theory of many player differential games* // SIAM J. Control. 1969. V. 7. No 2. P. 179–197.

10. Friedman A. *Differential Games.* Wiley-Interscience, 1971.

11. Starr A.W., Ho Y.C. *Non-zero Sum Differential Games* // Journal of Optimization Theory and Applications. 1969. V. 3. No 3. P. 184–206.

A CONSTRUCTION OF NASH EQUILIBRIUM BASED ON SYSTEM OF HAMILTON–JACOBI EQUATIONS OF SPECIAL TYPE

Ekaterina A. Kolpakova, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of UrB RAS, Cand.Sc. (eakolpakova@gmail.com).

Abstract: The paper is devoted to the Nash program strategies' construction in nonzero-sum differential games with two players applying the solution of a strong coupled system of Hamilton–Jacobi equations. The system of Hamilton–Jacobi equations is of the special type where the first equation of the system doesn't depend on the second one, and the second equation depends on the derivative of the first equation's solution. We show that the solution of the system of Hamilton–Jacobi equations should be considered in the class of multivalued maps. We propose a generalized solution for the system of Hamilton–Jacobi equations and prove the existence theorem for such generalized solution. To conclude we consider an example illustrating the Nash program strategies' construction.

Keywords: hierarchical differential games, Nash equilibrium, generalized solution, system of Hamilton–Jacobi equations.