Математическая Теория Игр и её Приложения, т.10, в.2, с. 3–26

УДК 519.83, 519.86
ББК 22.18

ИГРОВЫЕ РАВНОВЕСИЯ И ПЕРЕХОДНАЯ ДИНАМИКА В ПОЛНОЙ СЕТИ И В ТРЕУГОЛЬНИКЕ С ГЕТЕРОГЕННЫМИ АГЕНТАМИ

Мария В. Гармаш
Ксения А. Канева
Санкт-Петербургский филиал
Национального исследовательского университета
«Высшая школа экономики»
190121, Санкт-Петербург, ул. Союза Печатников, 16
e-mail: mariagarmash06@gmail.com, xeniakaneva@hse.ru

В работе изучается игровое равновесие в модели с производством и экстерналиями в полной сети. Каждый агент может инвестировать часть своего запаса на первом этапе. Потребление на втором этапе зависит от его инвестиции и продуктивности, так же как и от инвестиций его соседей в сети. Рассматривается динамика приспособления, описываемая системой разностных уравнений. Для случая полной сети с произвольным числом однородных агентов и для случая треугольника – полной сети, в которой три агента обладают разными продуктивностями, – мы изучаем, какие равновесия возможны и какие из этих равновесий динамически устойчивы при различных комбинациях параметров игры.

Ключевые слова: сеть, игра в сети, равновесие Нэша, экстерналия, динамика приспособления, динамическая устойчивость, продуктивность, треугольник, гетерогенные агенты.

1. Введение

Анализ социальных сетей является бурно развивающейся областью исследований и сам по себе, и как методологический подход применимый к анализу взаимоотношений в различных сложных сетевых структурах не только социальных, но и политических, экономических, муниципальных и т.д. Особое место в этих исследованиях занимает подход с позиций сетевых игр (например, [3], [5], [6], [7], [8], [10]). Действия, которые совершают агенты, находящиеся в вершинах сети, являются результатом решения ими оптимизационных задач, и профиль действий всех агентов в сети представляет собой игровое равновесие. При этом решение каждого агента подвержено влиянию поведения его соседей в сети. В большинстве исследований игровых равновесий в сетях (например, [2], [4], [11], [13]) агенты предполагаются однородными (исключая их положение в сети). В таком случае задача сводится к изучению отношения между положением агента в сети и его поведением в игровом равновесии. Однако разброс параметров и гетерогенность становятся важным аспектом современной социальной и экономической жизни (см., например, [1]). Соответственно, наряду с учетом положения агента в сети, важной задачей становится также учет неоднородности агентов как фактора создания различий в их поведении и благосостоянии. Но это направление еще только формируется в литературе. Например, в [4] агенты обладают различными предельными затратами.

Модель, сформулированная в [11], рассматривает ситуации, в которых на первом этапе каждый агент в сети ценой уменьшения текущего потребления может делать инвестиции некоторого ресурса (такого как деньги или время) с целью увеличения потребления на втором этапе. Последнее зависит не только от его собственных инвестиций и продуктивности, но также и от инвестиций его соседей в сети. Полезность каждого агента зависит от его потребления на обоих этапах. Такие ситуации типичны для семей, сообществ, международных организаций, инновационных отраслей и т.д. В модели используется понятие «Равновесия Нэша с экстерналиями», подобное введенному в [14] и [9]. Как и в общем равновесии Нэша, агенты максимизируют свои полезности, и в равновесии ни один агент не находит полезным изменить свое поведение, если другие агенты не меняют своего поведения. Однако задача максимизации при данной концепции такова, что агент не меняет своего поведения так «свободно», как при обычной концепции равновесия Нэша. Именно, предполагается, что агент принимает решение, находясь в определенной среде, которая формируется им самим и его соседями в сети. Хотя он принимает участие в формировании среды, в момент принятия решения агент рассматривает среду как экзогенно заданную.

В работе [12] в двухпериодную модель потребления-инвестиций с сетевыми экстерналиями (см. [11]) добавлены гетерогенность агентов и динамика приспособления. При этом предполагается, что имеются два типа агентов, которые характеризуются различными продуктивностями, но изучается только случай полных сетей. В настоящей статье рассматривается простейший случай полных сетей с тремя типами агентов – треугольник.

Следуя [12], мы вводим динамику приспособления в треугольнике и изучаем динамику перехода к новому равновесию. Вопросы, изучаемые в статье, – перечисление равновесий, которые возможны в треугольнике, и нахождение условий, при которых эти равновесия устойчивы.

Мы также рассматриваем динамику в полной сети, состоящей из однородных агентов, и делаем вывод о том, что при различии начальных условий в нулевом периоде поведение всех агентов полной сети в переходном процессе начиная с первого периода совпадает. Этот результат позволяет сводить переходную динамику, возникающую после объединения трех полных сетей в единую полную сеть, к динамике треугольника с соответствующими весовыми множителями.

Статья организована следующим образом. Раздел 1 – введение. Формулировка игровой модели из [11] приводится в разделе 2. Поведение агентов в равновесии характеризуется в разделе 3. В разделе 4 вводится динамика приспособления, и рассматриваются переходные процессы в полной сети, состоящей из m вершин. Раздел 5 посвящен оценке сходимости переходных процессов, выводятся формулы для числа шагов при всевозможных сочетаниях параметров. В разделе 6 рассматривается динамика приспособления в треугольнике, содержащем вершины с гетерогенными агентами. Раздел 7 заключительный.

Разделы 2 и 3 содержат известные результаты, полученные Матвеенко и Королевым (см., например [11] и [12]). Определения 4.1 и 5.1, данные соответственно в начале разделов 4 и 5 также следуют работе [12]. Все остальные результаты данной работы (разделы 4, 5 и 6) являются авторскими.

2. Описание модели

Имеется сеть (неориентированный граф), в каждой вершине которого $i = 1, 2, \ldots, n$ находится агент. Жизнь каждого агента состоит из двух этапов (или периодов). В первый период каждый агент i наделен начальным запасом блага, e. Агент может использовать этот запас частично для потребления в первом периоде, c_1^i, а частично для инвестиций в знания, k_i, которые используются при производстве блага для потребления во втором периоде, $c_2^i : c_1^i + k_i = e$. Инвестиции немедленно превращаются в запас знаний.

Производство в вершине i описывается производственной функцией,

$$F(k_1, K_i) = g_i k_i K_i, \;\; g_i > 0,$$

зависящей от состояния знаний, k_i, в данной вершине и от среды, K_i. Среда есть сумма инвестиций в знания самого агента и его соседей (агентов, находящихся в смежных вершинах сети):

$$K_i = k_i + \tilde{K}_i, \tilde{K}_i = \sum_{j \in N(i)} k_j,$$

где $N(i)$ – множество соседей вершины i; сумму инвестиций соседей, $\tilde{K}_i$, будем называть чистой экстерналией; g_i – технологический коэффициент.

Предпочтения агента i описываются квадратичной функцией полезности:

$$U_i(c_1^i, c_2^i) = c_1^i(e - ac_1^i) + d_i c_2^i,$$

где $d_i > 0$, a – коэффициент насыщения. Предполагается, что при $c_1^i \in [0, e]$ полезность возрастает по c_1^i, и что полезность имеет убывающую отдачу (вогнута) по c_1^i. Достаточным условием для выполнения данных предположений является условие $0 < a < 1/2$.

Произведение $d_i g_i$ для удобства обозначают как A_i и всегда предполагают, что $a < A_i$. Поскольку увеличение каждого из параметров

d_i, g_i способствует увеличению потребления второго периода, величину A_i называют «продуктивностью» i-го агента.

Будем считать, что $A_i \neq 2a$, $i = 1, 2, \dots, n$. Если $A_i > 2a$, будем говорить, что i-ый агент продуктивен, а если $A_i < 2a$, будем говорить, что i-ый *агент непродуктивен.*

Возможны три способа поведения агента. Агент называется *пассивным*, если он делает нулевые инвестиции в знания, $k_i = 0$; *активным* – если $0 < k_i < e$; *гиперактивным* – если он делает максимально возможные инвестиции в знания, $k_i = e$.

Рассмотрим следующую игру. Игроками являются агенты $i = 1, 2, \dots, n$. Стратегиями игрока i являются значения инвестиций k_i из промежутка $[0, e]$. *Равновесием Нэша с экстерналиями* называется набор уровней знаний (инвестиций) $(k_1^*, k_2^*, \dots, k_n^*)$, такой, что каждое k_i^* является решением при данной среде K_i задачи максимизации функции полезности i-го игрока $P(K_i)$:

$$U_i(c_1^i, c_2^i) \underset{c_1^i, c_2^i}{\longrightarrow} max$$
$$\begin{cases} c_1^i \leq e - k^i, \\ c_2^i \leq F(k^i, K^i), \\ c_1^i \geq 0, c_2^i \geq 0, k^i \geq 0, \end{cases}$$

где среда K_i определяется набором $(k_1^*, k_2^*, \dots k_n^*)$, т.е. $K_i = k_i^* + \sum\limits_{j \in N(i)} k_i^*$.

Первые два ограничения задачи $P(K_i)$ в точке оптимума, очевидно, выполняются как равенства. Подставляя эти ограничения в целевую функцию, мы можем определить *косвенную функцию полезности*:

$$\begin{aligned} V_i(k_i, K_i) = U_i\big(e - k_i, F_i(k_i, K_i)\big) = (e - k_i)\big(e - a(e - K_i)\big) + A_i k_i K_i = \\ = e^2(1 - a) - k_i e(1 - 2a) - a k_i^2 + A_i k_i K_i. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Если все решения игроков являются внутренними ($0 < k_i^* < e$), т.е. все игроки являются активными, то равновесие также называют *внутренним.* В противном случае равновесие называют *угловым.*

Частную производную от функции нескольких переменных по первому аргументу мы будем обозначать D_1.

Ясно, что внутреннее равновесие Нэша с экстерналиями (если оно существует при данных значениях параметров) определяется системой уравнений

$$D_1 V_i(k_i, K_i) = 0, \; i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.2}$$

Дифференцируя правую часть (2.1) по переменной k_i, получаем

$$D_1 V_i(k_i, K_i) = e(2a-1) - 2ak_i + A_i K_i. \tag{2.3}$$

Введем обозначения: $\tilde{A}$ – диагональная матрица, на главной диагонали которой стоят числа $A_1, A_2, \ldots, A_n$, I – единичная $n \times n$-матрица, M – матрица смежности сети. В этой матрице $M_{ij} = M_{ji} = 1$, если в сети имеется ребро, соединяющее вершины i и j, и $M_{ij} = M_{ji} = 0$ – в противном случае. Полагается $M_{ii} = 0$ при всех $i = 1, 2, \ldots, n$. Система уравнений (2.3) принимает форму:

$$(\tilde{A} - 2aI)k + \tilde{A}Mk = \bar{e}, \tag{2.4}$$

где $k = (k_1, k_2, \ldots, k_n)^T$, $\bar{e} = (e(1-2a), e(1-2a), \ldots, e(1-2a))^T$.

Теорема 2.1. *([12], Theorem 1.1) Система уравнений* (2.4) *для полной сети имеет единственное решение.*

Таким образом, система уравнений (2.4) для полной сети имеет единственное решение k^s, компоненты которого мы будем называть стационарными значениями инвестиций. Во внутреннем равновесии $k_i^* = k_i^S$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

3. Характеризация видов поведения агента

Введем следующее обозначение. Независимо от типа поведения агента корень уравнения

$$D_1 V_i(k_i, K_i) = (A_i - 2a)k_i + A_i \tilde{K}_i - e(1-2a) = 0,$$

которое получается из (2.2) и (2.3) в результате замены $K_i = k_i + \tilde{K}_i$, будем обозначать $\tilde{k}_i^s$. Отличие $\tilde{k}_i^s$ от введенного ранее k_i^s лишь в том, что k_i^s представляет собой i-ую компоненту решения системы (2.4), в то время как $\tilde{k}_i^s$ является решением отдельно взятого уравнения системы (2.4) для i-го агента, при этом его чистая экстерналия K_i рассматривается как экзогенная величина. Таким образом,

$$\tilde{k}_i^S = \frac{e(2a-1) + A_i\tilde{K}_i}{2a - A_i}.$$

где $\tilde{K}_i$ – чистая экстерналия i-го агента. Очевидно, в равновесии, если i-ый агент активен, то его инвестиции равны $\tilde{k}_i^S$. Центральную роль при анализе равновесий играет следующее утверждение.

Предложение 3.1. *([12], Lemma 2.1 и Corollary 2.1) Набор значений инвестиций агентов $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ может быть равновесием только если для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ верно, что*

1. *если $k_i = 0$, то $\tilde{K} \le \frac{e(1-2a)}{A_i}$;*
2. *если $0 < k_i < e$, то $k_i = \tilde{k}_i^S$;*
3. *если $k_i = e$, то $\tilde{K}_i \ge \frac{e(1-A_i)}{A_i}$.*

Лемма 3.1. *([12], Lemma 2.2) В равновесии i-ый агент пассивен тогда и только тогда, когда*

$$\tilde{K} \le \frac{e(1-2a)}{A_i} \tag{3.1}$$

i-ый агент активен тогда и только тогда, когда

$$\frac{e(1-2a)}{A_i} < K_i < \frac{e}{A_i}; \tag{3.2}$$

i-ый агент гиперактивен тогда и только тогда, когда

$$K_i \ge \frac{e}{A_i}. \tag{3.3}$$

В полной сети среда у всех агентов одинакова, откуда получается такое следствие.

Следствие 3.1. *В равновесии в полной сети агенты с одинаковой продуктивностью делают одинаковые инвестиции. Если все агенты в полной сети имеют одинаковую продуктивность, то имеет место гомофилия, т.е. все агенты ведут себя одинаково.*

Замечание 3.1. В полной сети не может существовать ситуации, когда в равновесии агент с большим значением продуктивности активен или пассивен, а агент с меньшим значением продуктивности гиперактивен, или когда агент с большим значением продуктивности пассивен, а агент с меньшим значением продуктивности активен или гиперактивен.

Говоря о полной сети, мы будем опускать индекс i в обозначении среды i-го агента, поскольку в полной сети среда у всех агентов одинакова. Таким образом, через K мы обозначаем сумму инвестиций всех агентов полной сети.

Следствие 3.2. *([12], Corollary 2.3) Равновесие, при котором все агенты пассивны, возможно в полной сети тогда и только тогда, когда*

$$K \leq \frac{e(1-2a)}{\max\limits_i A_i}.$$

Равновесие, при котором все агенты активны, возможно в полной сети тогда и только тогда, когда

$$\frac{e(1-2a)}{\min\limits_i A_i} < K < \frac{e}{\max\limits_i A_i}.$$

Равновесие, при котором все агенты гиперактивны, возможно в полной сети тогда и только тогда, когда

$$K \geq \frac{e}{\min\limits_i A_i}.$$

Следствие 3.3. *Равновесие, при котором все агенты гиперактивны, возможно в полной сети, если и только если*

$$\min_i A_i \geq \frac{1}{n}.$$

Равновесие, при котором все агенты пассивны, возможно всегда.

4. Динамика в полной сети. Нахождение определителя системы разностных уравнений. Вывод уравнения движения

Следуя [12], введем динамику, которая может начаться после малого отклонения от положения равновесия или после объединения сетей, каждая из которых до объединения находилась в состоянии равновесия. Мы моделируем динамику следующим образом.

Определение 4.1. *Каждый агент максимизирует свою функцию полезности выбирая уровень инвестиций, при этом в момент принятия решения он рассматривает свою среду как экзогенно заданную. Соответственно, если* $k_i^n = 0$ *и* $D_1V_i(k_i, K_i)|_{k_i=0} \leq 0$, *то* $k_i^{n+1} = 0$*; если* $k_i^n = e$ *и* $D_1V_i(k_i, K_i)|_{k_i=e} \geq 0$, *то* $k_i^{n+1} = e$*; во всех остальных случаях,* k_i^{n+1} *является решением разностного уравнения:*

$$-2ak_i^{n+1} + A_iK_i^n - e(1-2a) = 0.$$

Замечание 4.1. Данное определение мотивировано условием максимизации косвенной функции полезности агента: $e(2a-1) - 2ak_i^{n+1} + A_iK_i^n = 0$, где $K_i^n = k_1^n + k_2^n + \ldots + k_m^n$.

Выведем общую формулу динамики полной сети, состоящей из m вершин, в которых находятся агенты с одинаковой продуктивностью A, при заданных начальных условиях. В начальный момент i-ый агент инвестировал k_{0i}. Предположим, что или $k_{0i} = 0$ и $D_1V_1(k_i, K_i)|_{k_i=0} > 0$, или $k_{0i} = e$ и $D_1V_1(k_i, K_i)|_{k_i=e} < 0$, или $k_{0i} \in (0, e)$. Тогда, как следует из определения 4.1, для рассматриваемой нами полной сети ее динамика задается следующей системой разностных уравнений:

$$\begin{cases} k_1^{n+1} = \frac{A}{2a}k_1^n + \frac{A}{2a}k_2^n + \quad \ldots + \frac{A}{2a}k_m^n + \frac{e(2a-1)}{2a} \\ k_2^{n+1} = \frac{A}{2a}k_1^n + \frac{A}{2a}k_2^n + \quad \ldots + \frac{A}{2a}k_m^n + \frac{e(2a-1)}{2a} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \ldots \\ k_m^{n+1} = \frac{A}{2a}k_1^n + \frac{A}{2a}k_2^n + \quad \ldots + \frac{A}{2a}k_m^n + \frac{e(2a-1)}{2a} \end{cases} \tag{4.1}$$

с начальными условиями

$$k_1^0 = k_{01}, \quad k_2^0 = k_{02}, \quad \ldots, \quad k_m^0 = k_{0m}. \tag{4.2}$$

Предложение 4.1. *Общее решение системы разностных уравнений* (4.1) *имеет вид:*

$$k^n = C\Big(\frac{mA}{2a}\Big)^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \ldots \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{e(1-2a)}{mA-2a} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \ldots \\ 1 \end{pmatrix}, \ n = 1, 2, \ldots. \tag{4.3}$$

Решение разностной задачи Коши (4.1) - (4.2) *выглядит следующим образом:*

$$k^n = \left(\frac{mA}{2a}\right)^n \left[\frac{k_{01}+k_{02}+\ldots+k_{0m}}{m} - \frac{e(1-2a)}{mA-2a}\right] \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \ldots \\ 1 \end{pmatrix} +$$

$$+\frac{e(1-2a)}{mA-2a} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \ldots \\ 1 \end{pmatrix}, \ n = 1, 2, \ldots. \tag{4.4}$$

Доказательство. Матрица системы разностных уравнений (4.1) имеет вид:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{A}{2a} & \frac{A}{2a} & \ldots & \frac{A}{2a} \\ \frac{A}{2a} & \frac{A}{2a} & \ldots & \frac{A}{2a} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{A}{2a} & \frac{A}{2a} & \ldots & \frac{A}{2a} \end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

Для того чтобы выписать характеристическое уравнение данной системы, рассмотрим определитель:

$$\Delta^m = \begin{vmatrix} \frac{A}{2a}-\lambda & \frac{A}{2a}\frac{A}{2a} & \ldots & \frac{A}{2a} \\ \frac{A}{2a} & \frac{A}{2a}-\lambda & \ldots & \frac{A}{2a} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{A}{2a} & \frac{A}{2a} & \ldots & \frac{A}{2a}-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \ldots & \lambda \\ \frac{A}{2a} & \frac{A}{2a}-\lambda & \ldots & \frac{A}{2a} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{A}{2a} & \frac{A}{2a} & \ldots & \frac{A}{2a}-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \ldots & \lambda \\ 0 & -\lambda & \ldots & \lambda \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{A}{2a} & \frac{A}{2a} & \ldots & \frac{A}{2a}-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda\Delta^{m-1} + \frac{A}{2a}(-1)^{m+1}\lambda(-1)^{m-1+1}(-\lambda)^{m-2}.$$

Необходимо решить разностное уравнение следующего вида:

$$\Delta^m + \lambda\Delta^{m-1} = \frac{A}{2a}\lambda^{m-1}(-1)^{3m-1} = \frac{A}{2a}(-\lambda)^{m-1} \tag{4.6}$$

с начальным условием

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} \frac{A}{2a}-\lambda & \frac{A}{2a} \\ \frac{A}{2a} & \frac{A}{2a}-\lambda \end{vmatrix} = -\frac{A}{a} - \lambda + \lambda^2 = \lambda\left(\lambda - \frac{A}{a}\right).$$

Общее решение однородного разностного уравнения (4.6) имеет вид
$$\Delta_g^m = C(-\lambda)^m,$$
а частное решение неоднородного разностного уравнения (4.6) –
$$\Delta_p^m = Dm(-\lambda)^m.$$

Для нахождения числа D воспользуемся методом неопределенных коэффициентов:
$$Dm(-\lambda)^m + \lambda D(m-1)(-\lambda)^{m-1} = \frac{A}{2a}(-\lambda)^{m-1},$$
$$D(-m\lambda + m\lambda - \lambda) = \frac{A}{2a},$$
выразив D, получим:
$$D = -\frac{A}{2a\lambda}.$$

Таким образом, общее решение неоднородного разностного уравнения (4.6) выглядит следующим образом:
$$\Delta^m = \Delta_g^m + \Delta_p^m = C(-\lambda)^m - \frac{A}{2a\lambda}m(-\lambda)^m = C(-\lambda)^m + \frac{Am}{2a}(-\lambda)^{m-1}.$$

Константу C определим из начальных условий при $m = 2$:
$$\Delta^2 = C\lambda^2 - \frac{2A}{2a}\lambda = \lambda^2 - \frac{A}{a}\lambda,$$
откуда находим
$$C = 1.$$

В итоге найдем значение определителя:
$$\Delta^2 = (-\lambda)^m + \frac{Am}{2a}(-\lambda)^{m-1}.$$

В этом случае, данное частное решение является решением задачи Коши.

Следовательно, характеристическое уравнение системы (4.1) принимает следующий вид:
$$(-\lambda)^{m-1}\left(-\lambda + \frac{Am}{2a}\right) = 0.$$

Найдем собственные числа матрицы (4.5)

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{m-1} = 0, \ \lambda_m = \frac{mA}{2a}.$$

В качестве $m-1$ линейно независимых собственных векторов матрицы (4.5), соответствующих собственному числу 0, возьмем следующие векторы:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \ e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \dots, \ e_{m-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Для собственного числа $\lambda_m = \frac{mA}{2a}$ найдем собственный вектор

$$e_m = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix},$$

из следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{A}{2a}x_1 + \frac{A}{2a}x_2 + \quad \dots + \frac{A}{2a}x_m = \frac{mA}{2a}x_1 \\ \frac{A}{2a}x_1 + \frac{A}{2a}x_2 + \quad \dots + \frac{A}{2a}x_m = \frac{mA}{2a}x_2 \\ \qquad\qquad\qquad \dots \\ \frac{A}{2a}x_1 + \frac{A}{2a}x_2 + \quad \dots + \frac{A}{2a}x_m = \frac{mA}{2a}x_m \end{cases}$$

Заметим, что $x_1 = x_2 = \dots = x_m$, и возьмем следующий собственный вектор:

$$e_m = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, вид общего решения системы (4.1) стационарных разностных уравнений следующий:

$$(k^n)_g = C(\frac{mA}{2a})^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}, \ n = 1, 2, \dots.$$

В свою очередь, частое решение неоднородной системы (4.1) имеет вид

$$(k^n)_p = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \dots \\ d_n \end{pmatrix}.$$

Используя метод неопределенных коэффициентов, найдем числа $d_1, d_2, \dots, d_m$, подставляя их вместо $k_1, k_2, \dots, k_m$ в систему (4.1)

$$\begin{cases} d_1 = \frac{A}{2a}(d_1 + d_2 + & \dots + d_m) = \frac{e(2a-1)}{2a}, \\ d_2 = \frac{A}{2a}(d_1 + d_2 + & \dots + d_m) = \frac{e(2a-1)}{2a}, \\ & \dots \\ d_m = \frac{A}{2a}(d_1 + d_2 + & \dots + d_m) = \frac{e(2a-1)}{2a}. \end{cases}$$

Заметим, что $d_1 = d_2 = \dots = d_m$, и получим

$$d_i = \frac{e(2a-1)}{2a(1-\frac{mA}{2a})} = \frac{e(1-2a)}{mA-2a},\ i = 1, 2, \dots, m.$$

Следовательно, общее решение системы (4.1) имеет вид (4.3).

В начальный момент, при $n = 0$, имеем

$$k^0 = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \dots + C_{m-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} +$$

$$+C\Big(\frac{mA}{2a}\Big)^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{e(1-2a)}{mA-2a} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

а также в координатном виде:

$$\begin{cases} k_{01} = C + C_1 + \frac{e(1-2a)}{mA-2a} \\ k_{02} = C + C_2 + \frac{e(1-2a)}{mA-2a} \\ k_{0m-1} = C + C_{m-1} + \frac{e(1-2a)}{mA-2a} \\ k_{0m} = C - C_1 - C_2 - \dots - C_{m-1} \frac{e(1-2a)}{mA-2a} \end{cases}$$

Путем сложения уравнений, получаем

$$k_{01} + k_{02} + \ldots + k_{0m} = mC + m\frac{e(1-2a)}{mA-2a}.$$

Выразим :

$$C = \frac{k_{01} + k_{02} + \ldots + k_{0m}}{m} - \frac{e(1-2a)}{mA-2a}.$$

Окончательно получаем уравнение динамики полной сети (4.4). □

Обозначим

$$\bar{k_0} = \frac{k_{01} + k_{02} + \ldots + k_{0m}}{m}$$

как среднюю величину начальных инвестиций. Введем также

$$k^S = \frac{e(1-2a)}{mA-2a}$$

как величину внутреннего равновесного значения инвестиций.

Замечание 4.2. Из выражения (4.1) видно, что каковы бы ни были различия в начальных условиях в момент времени 0, начиная с 1-го периода все агенты полной сети ведут себя одинаково. Другими словами, гомофилия (см. Следствие 3.1) в полной сети имеет место не только в равновесии, но и в динамике.

5. Вопросы устойчивости. Скорость сходимости

Определение 5.1. *Равновесие называется динамически устойчивым, если после малого отклонения одного из агентов от равновесия начинается динамика, которая возвращает сеть в исходное состояние. В противном случае равновесие называется динамически неустойчивым.*

Анализируя полученную формулу (4.1) видим, что внутреннее равновесие неустойчиво. Если один из агентов отклонится от своей стратегии, то первая скобка будет уже не ноль. Следовательно, с каждым последующим периодом, значения по абсолютной величине будут неограниченно расти.

Рассмотрим устойчивость равновесия для случая $A > 1/m$. Сеть останется во внутреннем равновесии, если значение первой скобки обратится в ноль, то есть средняя величина начальных инвестиций будет равна внутреннему равновесному значению. Если начальные инвестиции будут больше, чем их равновесное значение, то сеть будет стремиться перейти в угловое равновесие с гиперактивным поведением агентов. Иначе, при величине средних инвестиций меньшей, чем равновесное значение, сеть стремится перейти в угловое равновесие, когда поведение агентов пассивно. В таком случае, каждое из равновесий будет устойчиво.

При равном значении величин средних начальных инвестиций и равновесного внутреннего значения в случае, когда величина начальных инвестиций каждого агента отлична от внутреннего равновесного, необходима только одна итерация для равного перераспределения инвестиций между агентами. Таким образом, для перехода системы в равновесие необходим один шаг.

Возникает вопрос о формуле вычисления числа шагов, за которое система перейдет в одно из двух устойчивых равновесий в случае, когда средняя величина начальных инвестиций отлична от внутреннего равновесного значения.

Пусть $\bar{k_0} > k_S$. Из формулы (3.4) легко получить количество шагов, необходимых для того, чтобы величина инвестиций достигла уровня e. Для этого, заметим, что коэффициент при втором слагаемом в (3.4) равен k^s. Таким образом, мы ищем такое значение n, чтобы выполнялось равенство

$$e = \left(\frac{mA}{2a}\right)^n \left(\bar{k_0} - k^s\right) + k^s.$$

Перенося k^s в левую часть уравнения, деляя на $\left(\bar{k_0} - k^s\right)$ и логарифмируя, получаем

$$n = \frac{ln\left(e - k^s\right) - ln\left(\bar{k_0} - k^s\right)}{ln(mA) - ln(2a)}.$$

Поскольку число шагов – целое число, получаем для числа шагов, необходимых для того, чтобы величина инвестиций достигла уровня e, величину

$$entier\left(\frac{ln(e - k_S) - ln(\bar{k_0} - k^S)}{ln(mA) - ln(2a)}\right) + 1,$$

где *entier* обозначает операцию взятия целой части вещественного числа.

Пусть $\bar{k_0} < k_S$. Из формулы (3.4) легко получить количество шагов, необходимых для того, чтобы величина инвестиций достигла нулевого уровня. Мы ищем такое значение n, чтобы выполнялось равенство

$$0 = \left(\frac{mA}{2a}\right)^n \left(\bar{k}_0 - k^s\right) + k^s.$$

Перенося k^s в левую часть уравнения, умножая на -1, деля на $\left(k^s - \bar{k_0}\right)$ и логарифмируя, получаем

$$n = \frac{ln\left(k^s\right) - ln\left(k^s - \bar{k}_0\right)}{ln(mA) - ln(2a)}.$$

Так как число шагов – целое число, получаем для числа шагов, необходимых для того, чтобы величина инвестиций достигла нулевого уровня, величину

$$entier\left(\frac{ln(k_S) - ln(k^S - \bar{k_0})}{n(mA) - ln(2a)}\right) + 1. \tag{5.1}$$

(*entier* обозначает взятие целой части числа).

Перейдем к случаю, когда $A = 1/m$. При данном условии внутреннего равновесия не существует. В этом случае $k^S = e$. Возможны два варианта развития событий:

1. $\bar{k_0} = e$ (все агенты гиперактивны), тогда сеть остается в состоянии углового равновесия. Равновесие неустойчиво.

2. $\bar{k_0} < e$ (инвестиции хотя бы одного агента меньше e), то сеть стремится перейти в состояние углового равновесия с пассивным поведением агентов. Равновесие устойчиво.

При $\bar{k_0} < e$, переход из начального состояния в состояние, в котором все агенты пассивны, происходит за

$$entier\left(\frac{ln(e) - ln(e - \bar{k}_0)}{n(mA) - ln(2a)}\right) + 1$$

шагов.

Обратимся к ситуации, когда $A < 1/m$. В данном случае всегда выполняется $\bar{k_0} < k^S$. Поэтому независимо от того, каким будет начальное состояние агентов, так или иначе сеть будет стремиться перейти в угловое равновесие с пассивным поведением агентов. Таким образом, данное равновесие устойчиво. Других равновесий в рассматриваемом случае быть не может. Количество шагов, за которое происходит переход из начального состояния в положение равновесия, вычисляется также по формуле (5.1).

6. Динамика в треугольнике с разными значениями продуктивности агентов

Теперь рассмотрим сети, в которых агенты могут иметь разные продуктивности. Возьмем треугольник (полную сеть из трёх вершин), у которой продуктивность первого агента равна A_1, продуктивность второго агента – A_2, а продуктивность третьего агента – A_3. Рассмотрим динамику в такой сети.

Составим систему разностных уравнений, которая будет задавать динамику треугольника. Данная система будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} k_1^{n+1} = \frac{A_1}{2a}k_1^n + \frac{A_1}{2a}k_2^n + \frac{A_1}{2a}k_3^n - \frac{e(1-2a)}{2a} \\ k_2^{n+1} = \frac{A_2}{2a}k_1^n + \frac{A_2}{2a}k_2^n + \frac{A_2}{2a}k_3^n - \frac{e(1-2a)}{2a} \\ k_3^{n+1} = \frac{A_3}{2a}k_1^n + \frac{A_3}{2a}k_2^n + \frac{A_3}{2a}k_3^n - \frac{e(1-2a)}{2a} \end{cases} \tag{6.1}$$

Система уравнений также будет иметь начальные условия:

$$k_1^0 = k_{01}, \quad k_2^0 = k_{02}, \quad k_3^0 = k_{03}. \tag{6.2}$$

Предложение 6.1. *Решение разностной задачи Коши* (6.1)–(6.2) *имеет вид:*

$$\begin{pmatrix} k_1^n \\ k_2^n \\ k_3^n \end{pmatrix} = \frac{\bar{k^0} - \bar{k^S}}{\bar{A}} \left(\frac{3\bar{A}}{2a}\right)^n \begin{pmatrix} A_1 \\ A_3 \\ A_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1^S \\ k_2^S \\ k_3^S \end{pmatrix}, \ n = 1, 2, \ldots. \tag{6.3}$$

Доказательство. Матрица системы разностных уравнений (6.1) имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \frac{A_1}{2a} & \frac{A_1}{2a} & \frac{A_1}{2a} \\ \frac{A_2}{2a} & \frac{A_2}{2a} & \frac{A_2}{2a} \\ \frac{A_3}{2a} & \frac{A_3}{2a} & \frac{A_3}{2a} \end{pmatrix}$$

Выпишем характеристическое уравнение нашей системы. Для этого нужно найти ее определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{A_1}{2a} - \lambda & \frac{A_1}{2a} & \frac{A_1}{2a} \\ \frac{A_2}{2a} & \frac{A_2}{2a} - \lambda & \frac{A_2}{2a} \\ \frac{A_3}{2a} & \frac{A_3}{2a} & \frac{A_3}{2a} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 \left(\frac{A_1 + A_2 + A_3}{2a} - \lambda \right).$$

Таким образом, характеристическое уравнение заданной системы разностных уравнений выглядит следующим образом:

$$\lambda^2 \left(\frac{A_1 + A_2 + A_3}{2a} - \lambda \right) = 0.$$

Собственные числа матрицы системы: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = \frac{A_1+A_2+A_3}{2a}$.

Возьмем $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ как два собственных вектора матрицы системы, соответствующих собственному числу 0.

Найдем собственный вектор $e_3 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, соответствующий собственному числу $\lambda_3 = \frac{A_1+A_2+A_3}{2a}$, из системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{A_1}{2a} x_1 + \frac{A_1}{2a} x_2 + \frac{A_1}{2a} x_3 = \frac{A_1+A_2+A_3}{2a} x_1 \\ \frac{A_2}{2a} x_1 + \frac{A_2}{2a} x_2 + \frac{A_2}{2a} x_3 = \frac{A_1+A_2+A_3}{2a} x_2 \\ \frac{A_3}{2a} x_1 + \frac{A_3}{2a} x_2 + \frac{A_3}{2a} x_3 = \frac{A_1+A_2+A_3}{2a} x_3 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} -\frac{A_2+A_3}{2a} x_1 + \frac{A_1}{2a} x_2 + \frac{A_1}{2a} x_3 = 0 \\ \frac{A_2}{2a} x_1 - \frac{A_1+A_3}{2a} x_2 + \frac{A_2}{2a} x_3 = 0 \\ \frac{A_3}{2a} x_1 + \frac{A_3}{2a} x_2 - \frac{A_1+A_2}{2a} x_3 = 0. \end{cases}$$

Будем решать данную систему уравнений при помощи метода исключений Гаусса-Жордана. Третье уравнение можно вычеркнуть, потому что оно представляет собой сумму с обратным знаком двух первых уравнений системы. Поставим третью переменную на первое место. Тогда матрица системы примет вид

$$\begin{pmatrix} \frac{A_1}{2a} & -\frac{A_2+A_3}{2a} & \frac{A_1}{2a} \\ \frac{A_2}{2a} & \frac{A_2}{2a} & -\frac{A_1+A_3}{2a} \end{pmatrix}.$$

Умножим первое уравнение на $\frac{A_2}{A_1}$ и вычтем из второго. Получим

$$\begin{pmatrix} \frac{A_1}{2a} & -\frac{A_2+A_3}{2a} & \frac{A_1}{2a} \\ 0 & \frac{A_2(A_1+A_2+A_3)}{2aA_1} & -\frac{A_1+A_2+A_3}{2a} \end{pmatrix}$$

и сократим строки на общие множители

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{A_2+A_3}{A_1} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{A_1}{A_2} \end{pmatrix}.$$

Умножим вторую строку на $\frac{A_2+A_3}{A_1}$ и прибавим к первой. Получим

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{A_3}{A_2} \\ 0 & 1 & -\frac{A_1}{A_2} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы можем выбрать собственный вектор

$$e_3 = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix},$$

или, лучше

$$e_3 = \frac{1}{\bar{A}} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix},$$

где $\bar{A} = \frac{A_1+A_2+A_3}{2}$.

Значит, общее решение заданной однородной системы стационарных разностных урав-нений имеет вид

$$\begin{pmatrix} k_1^n \\ k_2^n \\ k_3^n \end{pmatrix}_p = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix}.$$

Найдем числа D_1, D_2, D_3 при помощи метода неопределенных коэффициентов. Подставим их вместо k_1, k_2, k_3 в заданную систему и получим следующую систему:

$$\begin{cases} D_1 = \frac{A_1}{2a} D_1 + \frac{A_1}{2a} D_2 + \frac{A_1}{2a} D_3 - \frac{e(1-2a)}{2a} \\ D_2 = \frac{A_2}{2a} D_1 + \frac{A_2}{2a} D_2 + \frac{A_2}{2a} D_3 - \frac{e(1-2a)}{2a} \\ D_3 = \frac{A_3}{2a} D_1 + \frac{A_3}{2a} D_2 + \frac{A_3}{2a} D_3 - \frac{e(1-2a)}{2a} \end{cases} \tag{6.4}$$

или, что то же самое,

$$\begin{cases}(A_1-2a)D_1+A_1D_2+A_1D_3=e(1-2a)\\ A_2D_1+(A_2-2a)D_2+A_2D_3=e(1-2a)\\ A_3D_1+A_3D_2+(A_3-2a)D_3=e(1-2a)\end{cases}.$$

Найдем D_1, D_2, D_3 по формулам Крамера:

$$\Delta=4a^2(A_1+A_2+A_3)-8a^3,$$
$$\Delta_1=e(1-2a)\lfloor 4a^2+2a(2A_1-A_2-A_3)\rfloor,$$
$$\Delta_2=e(1-2a)\lfloor 4a^2+2a(2A_2-A_1-A_3)\rfloor,$$
$$\Delta_3=e(1-2a)\lfloor 4a^2+2a(2A_3-A_2-A_1)\rfloor,$$
$$D_1=\frac{e(1-2a)(2a+2A_1-A_2-A_3)}{2a(A_1+A_2+A_3)-4a^2},$$
$$D_2=\frac{e(1-2a)(2a+2A_2-A_1-A_3)}{2a(A_1+A_2+A_3)-4a^2},$$
$$D_3=\frac{e(1-2a)(2a+2A_3-A_1-A_2)}{2a(A_1+A_2+A_3)-4a^2}.$$

В итоге получаем

$$D_1+D_2+D_3=\frac{3e(1-2a)}{3\bar{A}-2a},$$
$$\bar{D}=\frac{D_1+D_2+D_3}{2}=\frac{e(1-2a)}{3\bar{A}-2a}.$$

Система уравнений (2.3) для нахождения внутренних равновесных значений инвестиций в знания для случая треугольника с различными значениями продуктивности агентов принимает вид

$$\begin{cases}(A_1-2a)k_1+A_1k_2+A_1k_3=e(1-2a)\\ A_2k_1+(A_2-2a)k_2+A_2k_3=e(1-2a)\\ A_3k_1+A_3k_2+(A_3-2a)k_3=e(1-2a)\end{cases}.$$

Очевидно, что решение этой системы совпадает с решением системы (6.1), т.е.

$$k_1^S=D_1,$$
$$k_2^S=D_2,$$
$$k_3^S=D_3.$$

Поэтому среднюю величину $\bar{D}$ будем, так же как и в случае одинаковых продуктивностей агентов, называть внутренним равновесным значением инвестиций и обозначать k^S как $\frac{e(1-2a)}{3\bar{A}-2a}$.

Общее решение системы разностных уравнений, заданной изначально имеет вид

$$\begin{pmatrix} k_1^n \\ k_2^n \\ k_3^n \end{pmatrix} = \frac{C_1}{\bar{A}} \left(\frac{3\bar{A}}{2a}\right)^n \begin{pmatrix} A_1 \\ A_3 \\ A_3 \end{pmatrix} + C_2 \cdot 0^n \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \cdot 0^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

В начальный момент, при $n = 0$, имеем

$$\begin{pmatrix} k_1^0 \\ k_2^0 \\ k_3^0 \end{pmatrix} = \frac{C_1}{\bar{A}} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_3 \\ A_3 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix},$$

или в координатном виде

$$\begin{cases} k_1^0 = \frac{C_1 A_1}{\bar{A}} + C_2 + C_3 + D_1 \\ k_2^0 = \frac{C_1 A_2}{\bar{A}} - C_2 + D_2 \\ k_3^0 = \frac{C_1 A_3}{\bar{A}} - C_3 + D_3 \end{cases}.$$

Сложим полученные равенства и получим

$$k_1^0 + k_2^0 + k_3^0 = 3C_1 + D_1 + D_2 + D_3,$$

откуда

$$\bar{k_0} = C_1 + \bar{D}.$$

Выразим C_1:

$$C_1 = \bar{k}^0 - \bar{D},$$

где $\bar{k}^0 = \frac{k_1^0 + k_2^0 + k_3^0}{2}$.

Тогда

$$C_2 = \frac{C_1 A_2}{\bar{A}} + D_2 - k_2^0,$$
$$C_3 = \frac{C_1 A_3}{\bar{A}} + D_3 - k_3^0.$$

Получим

$$\begin{pmatrix} k_1^n \\ k_2^n \\ k_3^n \end{pmatrix} = \frac{\bar{k^0} - \bar{D}}{\bar{A}} \left(\frac{3\bar{A}}{2a}\right)^n \begin{pmatrix} A_1 \\ A_3 \\ A_3 \end{pmatrix} + \left(\frac{C_1 A_2}{\bar{A}} + D_2 - k_2^0\right) \cdot 0^n \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} +$$

$$+\left(\frac{C_1 A_3}{\bar{A}} + D_3 - k_3^0\right) \cdot 0^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix}, \ n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Итак, окончательное уравнение динамики треугольника имеет вид (6.3). □

7. Заключение

В статье перечислены равновесия, возможные в произвольной полной сети с гомогенными агентами и в простейшей полной сети, – треугольнике, – с гетерогенными агентами. Перечислены все возможные равновесия. Определены условия их существования и динамической устойчивости. Изучена динамика приспособления в полной сети.

Исследование, проведенное в данной работе, необходимо для анализа соединения полных сетей и изучения переходных процессов, возникающих в результате такого соединения. Если соединяются три полных сети, каждая со своим значением продуктивности, находившихся изначально в различных равновесиях, то переходный процесс в объединенной сети вполне описывается динамикой треугольника по причине гомофилии полных сетей. Таким образом, данная работа открывает простор для исследования процессов ассимиляции полных сетей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Acemoglu D., Robinson J. A. *Why nations fall: The origins of power, prosperity, and poverty.* Crown Publishers: New York. 2012.

2. Ballester C., Calvo-Armengol A. and Zenou Y. *Who's who in networks. Wanted: the key player* // Econometrica. 2006. V. 74, No. 5. P. 1403–1417.

3. Bramoullé Y., Kranton R. *Public goods in networks* // Journal of Economic Theory. 2007. V. 135. P. 478–494.
4. Bramoullé Y., Kranton R., D'Amours M. *Strategic interaction and networks* // American Economic Review. 2014. V. 104, No. 3. P. 898–930.
5. Galeotti A., Goyal S., Jackson M.O., Vega-Redondo F., Yariv L. *Network games* // Review of Economic Studies. 2010. V. 77. P. 218–244.
6. Goyal S. *Connections: An introductions to the economics of networks*. Princeton University Press: Princeton. 2010.
7. Jackson M.O. *Social and Economic Networks*. Princeton University Press. 2008.
8. Jackson M.O., Zenou Y. *Games on networks*. In: Young P. and Zamir S. eds. Handbook of game theory. V. 4. Amsterdam: Elsevier Science 2014. P. 95–163.
9. Lucas R. *On the mechanics of economic development* // J. Monet. Econ. 1988. V. 2, No. 1. P. 3–42.
10. Martemyanov Y.P., Matveenko V.D. *On the dependence of the growth rate on the elasticity of substitution in a network* // International Journal of Process Management and Benchmarking. 2014. V. 4, No 4. P. 475–492.
11. Matveenko V.D., Korolev A.V. *Network game with production and knowledge externalities* // Contributions to Game Theory and Management. 2015. P. 199–222.
12. Matveenko V. D., Korolev A. V., Zhdanova M.O. *Game equilibria and unification dynamics in networks with heterogeneous agents* // International Journal of Engineering Business Management. 2017. V. 9. P. 1–17.
13. Naghizadeh P., Liu M. *Provision of Public Goods on Networks: On Existence, Uniqueness, and Centralities*. Submitted to Trans. on Network Science and Engineering. 2016.

14. Romer P.M. *Increasing returns and long-run growth* // The Journal of Political Economy. 1986. V. 94. P. 1002–1037.

GAME EQUILIBRIA AND ADJUSTMENT DYNAMICS IN FULL NETWORKS AND IN TRIANGLE WITH HETEROGENEOUS AGENTS

Maria V. Garmash, St. Petersburg filial of Higher Scool of Economics (mariagarmash06@gmail.com),
Xeniya A. Kaneva, St. Petersburg filial of Higher Scool of Economics (xeniakaneva@gmail.com).

Abstract: The game equilibrium in network is under consideration; in each node of this network economy is de-scribed by the simple two-period Romer model of endogenous growth with production and knowledge externalities. The sum of knowledge levels in the neighbor nodes causes an externality in the production of each node of network. The adjusting dynamics described by differential equations systems is under consideration. For the arbitrary full networks and for triangle – the full network with three types of agents who possess different productivities, – we study which equilibria are possible, and which of these equilibria are dynamically stable under different combinations of parameters of the game.

Keywords: network, game in the network, Nash equilibrium, externality, adjusting dynamics, dynamically stabil-ity, productivity, triangle, heterogeneous agents.