Математическая Теория Игр и её Приложения, т.10, в.2, с. 40–61

УДК 519.833.2
ББК 22.18

ФОРМИРОВАНИЕ КОАЛИЦИЙ В ДИНАМИЧЕСКИХ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ИГРАХ

Анна Н. Реттиева*
Институт прикладных математических исследований
Карельского научного центра РАН
185910, Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11
Школа математики и статистики
Университет Циндао
266071, Циндао, Китай
Институт прикладной математики Шандонга
266071, Циндао, Китай
e-mail: annaret@krc.karelia.ru

Предложены концепции определения оптимального поведения в многокритериальных динамических играх. Для построения некооперативного равновесия использована конструкция арбитражной схемы Нэша (произведения Нэша), а для определения кооперативного – арбитражная схема Нэша для всего периода продолжения игры. Исследован процесс формирования коалиций в многокритериальных динамических играх. Для построения характеристической функции используется арбитражная схема Нэша, где многокритериальное равновесие по Нэшу используется в качестве точек статус-кво. Предложено два варианта построения характеристической функ-

* Исследование проведено при финансовой поддержке провинции Шандонг «План двухсот талантов» (№ WST2017009) и РФФИ (проекты 16-01-00183_а, 16-41-100062 р_а).

ции, учитывающие степень информированности игроков (модели с отсутствием информации и с информацией). Исследована динамическая многокритериальная модель управления возобновляемыми ресурсами. Проведено сравнение стратегий игроков и размера эксплуатируемого ресурса при кооперативном и некооперативном поведении, а также для различных концепций построения характеристической функции.

Ключевые слова: динамические игры, многокритериальные игры, равновесие по Нэшу, кооперативное равновесие, характеристическая функция, арбитражная схема Нэша.

1. Введение

Математические модели, учитывающие наличие нескольких целевых функций у участников конфликтно-управляемых процессов, более приближены к реальности. Зачастую игроки хотят достичь одновременно нескольких целей, которые могут быть несравнимы. Такие ситуации типичны для теоретико-игровых моделей в экономике и экологии. Например, предприятия хотят увеличить прибыль и уменьшить затраты на производство, в соглашениях по охране окружающей среды участники хотят увеличить производство и уменьшить затраты на очистку и т.д. Многокритериальный подход позволяет определить оптимальное поведение в таких ситуациях.

Ллойд Шепли [8] в 1959 г. ввел понятие многокритериальной игры, т.е. игры с векторными функциями выигрышей участников, и расширил для таких игр концепцию равновесия по Нэшу, получив, таким образом, оптимальность по Парето (сильную и слабую). В последние годы много работ было посвящено играм с векторными выигрышами и концепциям их решения. Например, в [9] предложено понятие идеального равновесия по Нэшу, в [2] многокритериальные игры связаны с потенциальными, в [5] предложена концепция E-равновесия, а в [4] рассмотрен процесс формирования коалиций в многокритериальных играх. Классическим способом решения векторных игр является их скаляризация путем оптимизации взвешенной суммы критериев, который неприменим для несравнимых критериев. Тем не менее, понятие равновесия по Парето является самой распространенной концепцией решения таких игр. В кооперативных многокритериальных играх для распределения общего кооперативного выигрыша используется естественное расширение вектора Шепли.

Однако, все предложенные концепции решений используются только в статических многокритериальных играх. Мало исследованной проблемой является построение равновесий в динамических многокритериальных играх. В работе [6] было формализовано понятие многокритериального некооперативного равновесия с использованием конструкции арбитражной схемы Нэша и предложены три варианта построения гарантированных выигрышей.

В представленной работе исследуется кооперативный вариант динамической многокритериальной игры. Для определения кооперативного поведения используется разработанный ранее подход построения кооперативного равновесия в теоретико-игровых моделях с несимметричными участниками [7]. А именно, кооперативные стратегии и выигрыши участников определяются из решения арбитражной схемы Нэша для всего периода продолжения игры. При этом точками статус-кво выступают некооперативные выигрыши, полученные при использовании игроками многокритериальных равновесных по Нэшу стратегий.

Предложенный подход используется не только для определения кооперативного поведения при формировании гранд-коалиции $N = \{1, \ldots, n\}$, но и для построения кооперативных стратегий и выигрышей для произвольной коалиции $S \subset N$. При этом исследованы два варианта построения характеристической функции, учитывающие степень информированности игроков (модели с отсутствием информации и с информацией). В первом случае игроки вне коалиции используют свои стратегии Нэша, определенные для некооперативного варианта игры (модель с отсутствием информации) [3], а во втором – игроки вне коалиции строят новые стратегии Нэша в игре с $N \backslash S$ игроками (модель с информацией) [1].

Для иллюстрации предложенных концепций решений исследована динамическая многокритериальная модель управления возобновляемыми ресурсами с конечным горизонтом планирования. Построены некооперативное и кооперативное равновесия. Определены стратегии и выигрыши участников при формировании коалиции в двух вариантах. Проведено сравнение стратегий игроков и размера эксплуатируемого ресурса при кооперативном и некооперативном поведении, а также для различных концепций построения характеристической функции.

2. Многокритериальные игры и их решения

Многокритериальная некооперативная игра – это

$$G = \langle (X_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N} \rangle \,,$$

где $N = \{1, \ldots, n\}$ – множество игроков, X_i – множество допустимых стратегий игрока i и $u_i : \prod\limits_{i=1}^{n} X_i \to \mathbb{R}^m$ – выигрыш игрока i, $i = 1, \ldots, n$.

Шепли [8] расширил для таких игр концепцию равновесия по Нэшу, получив сильное и слабое равновесие по Парето.

Определение 2.1. *Профиль стратегий* $x \in X = \prod\limits_{i=1}^{n} X_i$ *является*

1. *слабым равновесием по Парето, если* $\forall i \in N$
$$\neg \exists y_i \in X_i : u_i(y_i, x_{-i}) > u_i(x) \,,$$
2. *сильным равновесием по Парето, если* $\forall i \in N$
$$\neg \exists y_i \in X_i : u_i(y_i, x_{-i}) \geqq u_i(x) \,.$$

Здесь приняты следующие обозначения: $a > b \Leftrightarrow a_i > b_i$, $a \geqq b \Leftrightarrow a_i \geq b_i$, $\forall i = 1, \ldots, m$.

Другие концепции решения многокритериальных игр, а именно, идеальное равновесие по Нэшу и E-равновесие, были предложены в [9] и [5].

Многокритериальные игры могут быть рассмотрены и в кооперативном случае. Многокритериальная кооперативная игра – это

$$\langle N, v \rangle \,,$$

где $N = \{1, \ldots, n\}$ – множество игроков, $v : 2^N \to \mathbb{R}^m$ – характеристическая функция, такая, что $v(\emptyset) = 0$ и

$$v(S) = \begin{pmatrix} v^1(S) \\ v^2(S) \\ \ldots \\ v^m(S) \end{pmatrix} , \;\; \forall S \in 2^N \,.$$

В кооперативных многокритериальных играх для распределения общего кооперативного выигрыша используется естественное расширение вектора Шепли.

Определение 2.2. *Вектор Шепли $\phi(v)$ в многокритериальной игре $\langle N, v\rangle$ имеет вид*

$$\phi_i(v) = \sum_{S\subset N, i\in S} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} \begin{pmatrix} v^1(S) - v^1(S\setminus\{i\}) \\ v^2(S) - v^2(S\ \{i\}) \\ \ldots \\ v^m(S) - v^m(S\setminus\{i\}) \end{pmatrix} .$$

3. Динамические многокритериальные игры

Рассмотрим динамическую многокритериальную игру с n игроками в дискретном времени с конечным горизонтом планирования. Игроки эксплуатируют некоторый общий возобновляемый ресурс и стремятся достигнуть двух различных целей. Динамика развития ресурса имеет вид

$$x_{t+1} = f(x_t, u_{1t}, \ldots, u_{nt}), \;\; x_0 = x, \tag{3.1}$$

где $x_t \geq 0$ – размер ресурса в момент времени $t \geq 0$, $f(x_t, u_{1t}, \ldots, u_{nt})$ – функция развития возобновляемого ресурса, $u_{it} \in U_i$ – стратегия (интенсивность эксплуатации) игрока i в момент времени $t \geq 0$, $i \in N = \{1, \ldots, n\}$.

Обозначим профиль стратегий $u_t = (u_{1t}, \ldots, u_{nt})$. Вектор-функции выигрышей игроков на конечном промежутке планирования $[0, m]$ имеют вид

$$J_1 = \begin{pmatrix} J_1^1 = \sum\limits_{t=0}^{m} \delta^t g_1^1(u_t) \\ J_1^2 = \sum\limits_{t=0}^{m} \delta^t g_1^2(u_t) \end{pmatrix}, \ldots, J_n = \begin{pmatrix} J_n^1 = \sum\limits_{t=0}^{m} \delta^t g_n^1(u_t) \\ J_n^2 = \sum\limits_{t=0}^{m} \delta^t g_n^2(u_t) \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

где $g_i^j(u_t) \geq 0$ – функции «мгновенного» выигрыша, $j = 1, 2$, $i \in N$, $\delta \in (0, 1)$ – общий коэффициент дисконтирования.

3.1. Многокритериальное равновесие по Нэшу

Для построения некооперативного равновесия в многокритериальной динамической игре используется подход, предложенный в [6]. А именно, применяется конструкция арбитражной схемы Нэша (произведения Нэша). Поэтому, сначала определяются гарантированные выигрыши, которые играют роль точек статус-кво.

В работе [6] были предложены три варианта построения гарантированных выигрышей для игр с двумя участниками. В первом из них все гарантированные выигрыши определяются из решений антагонистических игр. А именно, первый гарантированный выигрыш – это решение антагонистической игры, в которой первый игрок стремится максимизировать свой первый критерий, а второй – минимизировать его. Остальные гарантированные точки строятся аналогично. Во втором способе гарантированные точки определяются из решений антагонистических игр с суммами критериев. А именно, оба гарантированных выигрыша первого игрока – это решение антагонистической игры, в которой первый игрок стремится максимизировать сумму своих критериев, а второй – минимизировать его. Аналогично для второго игрока. В третьем варианте гарантированные выигрыши строятся как равновесия по Нэшу в играх с первыми и вторыми критериями игроков.

При этом было показано, что наилучшим для состояния эксплуатируемой системы и выгодным для участников является третий вариант построения гарантированных выигрышей (равновесные по Нэшу решения). Поэтому в данной модели с n игроками ограничимся именно этим способом определения гарантированных точек:

$G_1^1, \ldots, G_n^1$ – это выигрыши в равновесии по Нэшу в игре $\langle N, \{U_i\}_{i=1}^n, \{J_i^1\}_{i=1}^n \rangle$,

$G_1^2, \ldots, G_n^2$ – это выигрыши в равновесии по Нэшу в игре $\langle N, \{U_i\}_{i=1}^n, \{J_i^2\}_{i=1}^n \rangle$.

Для построения выигрышей игроков в динамической многокритериальной игре используем произведения Нэша, при этом гарантированные выигрыши играют роль точек стаус-кво:

$$H_1(u_t) = (J_1^1(u_t) - G_1^1)(J_1^2(u_t) - G_1^2)\,,$$
$$\ldots$$
$$H_n(u_t) = (J_n^1(u_t) - G_n^1)(J_n^2(u_t) - G_n^2)\,.$$

Следующее определение содержит предложенную концепцию некооперативного решения динамической многокритериальной игры [6].

Определение 3.1. *Профиль стратегий $u_t^N = (u_{1t}^N, \ldots, u_{nt}^N)$ является многокритериальным равновесием по Нэшу в игре (3.1), (3.2), если*

$$H_i(u_t^N) \geq H_1(u_{1t}^N, \ldots, u_{i-1\,t}^N, u_{it}, u_{i+1\,t}^N, \ldots, u_{nt}^N) \ \ \forall u_{it} \in U_i\,, \ \ i \in N\,. \quad (3.3)$$

Следовательно, как и в классическом равновесии по Нэшу игрокам невыгодно отклоняться от оптимальной стратегии. При этом они максимизируют произведение отклонений оптимальных выигрышей от гарантированных.

3.2. Многокритериальное кооперативное равновесие

Теперь предположим, что игроки хотят действовать кооперативно, т.е. формируется гранд коалиция. Для определения кооперативного поведения используется арбитражная схема Нэша для всего периода продолжения игры. При этом в качестве точки статус-кво выступают некооперативные выигрыши, полученные при использовании игроками многокритериальных равновесных по Нэшу стратегий. Первая точка – это сумма некооперативных выигрышей по первому критерию, вторая — сумма выигрышей всех участников по второму критерию, соответственно.

Некооперативные выигрыши в соответствии с определением 3.1 примут вид

$$J_1^N = \begin{pmatrix} J_1^{1N} = \sum\limits_{t=0}^{m} \delta^t g_1^1(u_t^N) \\ J_1^{2N} = \sum\limits_{t=0}^{m} \delta^t g_1^2(u_t^N) \end{pmatrix}, \ \ldots \ J_n^N = \begin{pmatrix} J_n^{1N} = \sum\limits_{t=0}^{m} \delta^t g_n^1(u_t^N) \\ J_n^{2N} = \sum\limits_{t=0}^{m} \delta^t g_n^2(u_t^N) \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Для определения кооперативного поведения используется арбитражная схема Нэша, следовательно, необходимо решить следующую задачу:

$$(\sum_{i=1}^{n} V_i^{1c} - \sum_{i=1}^{n} J_i^{1N})(\sum_{i=1}^{n} V_i^{2c} - \sum_{i=1}^{n} J_i^{2N}) =$$
$$= (\sum_{t=0}^{m} \delta^t (g_1^1(u_t^c) + \ldots + g_n^1(u_t^c)) - J_1^{1N} - \ldots - J_n^{1N}) \cdot$$
$$\cdot (\sum_{t=0}^{m} \delta^t (g_1^2(u_t^c) + \ldots + g_n^2(u_t^c)) - J_1^{2N} - \ldots - J_n^{2N}) \to \max_{u_{1t}^c, \ldots, u_{nt}^c}, \quad (3.5)$$

где J_i^{jN} — некооперативные выигрыши, определенные в (3.4), $j = 1, 2$, $i \in N$.

Определение 3.2. *Профиль стратегий $u_t^c = (u_{1t}^c, \ldots, u_{nt}^c)$ является многокритериальным кооперативным равновесием в игре (3.1), (3.2), если является решением задачи (3.5).*

3.3. Формирование коалиции

Теперь предположим, что часть игроков объединяется в коалицию S. Для определения выигрыша коалиции также будем использовать арбитражную схему Нэша для всего периода продолжения игры. При этом в качестве точки статус-кво выступают некооперативные выигрыши, полученные при использовании игроками многокритериальных равновесных по Нэшу стратегий.

Исследуем два варианта, учитывающие наличие информации у игроков о формировании коалиции (модели с отсутствием информации и с информацией). В первом случае игроки вне коалиции используют свои стратегии Нэша, определенные для некооперативного варианта игры (модель с отсутствием информации) [3], а во втором – игроки вне коалиции строят новые стратегии Нэша в игре с $N \backslash S$ игроками (модель с информацией) [1].

Модель с отсутствием информации. В данном случае игроки, образовавшие коалицию S, не сообщают об этом другим участникам. Поэтому агенты, не входящие в коалицию (индивидуальные игроки), продолжают использовать стратегии Нэша, определенные для некооперативного варианта многокритериальной динамической игры.

Для определения общего кооперативного выигрыша коалиции S решается следующая задача:

$$(\sum_{i\in S} V_i^{1S}(\tilde{u}_t) - \sum_{i\in S} J_i^{1N})(\sum_{i\in S} V_i^{2c}(\tilde{u}_t) - \sum_{i\in S} J_i^{2N}) =$$
$$= (\sum_{t=0}^{m} \delta^t \sum_{i\in S} g_i^1(\tilde{u}_t) - \sum_{i\in S} J_i^{1N}) \cdot$$
$$\cdot(\sum_{t=0}^{m} \delta^t \sum_{i\in S} g_i^2(\tilde{u}_t) - \sum_{i\in S} J_i^{2N}) \to \max_{u_{it},\, i\in S}, \tag{3.6}$$

где

$$\tilde{u}_i = \begin{cases} u_i, \ i \in S\,, \\ u_i^N, \ i \in N\backslash S\,. \end{cases}$$

Модель с информацией. В данном случае игроки, не входящие в коалицию S, получают информацию о ее формировании. Поэтому они определяют свои новые стратегии как многокритериальное равновесие по Нэшу в игре с $N\backslash S$ игроками.

Для определения общего кооперативного выигрыша коалиции S решается следующая задача:

$$(\sum_{i\in S} V_i^{1S}(\tilde{u}_t) - \sum_{i\in S} J_i^{1N})(\sum_{i\in S} V_i^{2c}(\tilde{u}_t) - \sum_{i\in S} J_i^{2N}) =$$
$$= (\sum_{t=0}^{m} \delta^t \sum_{i\in S} g_i^1(\tilde{u}_t) - \sum_{i\in S} J_i^{1N}) \cdot$$
$$\cdot(\sum_{t=0}^{m} \delta^t \sum_{i\in S} g_i^2(\tilde{u}_t) - \sum_{i\in S} J_i^{2N}) \to \max_{u_{it},\, i\in S}, \tag{3.7}$$

где

$$\tilde{u}_i = \begin{cases} u_i, \ i \in S\,, \\ \tilde{u}_i^N, \ i \in N\backslash S\,, \end{cases}$$

а стратегии $\tilde{u}_i^N$ индивидуальных игроков определяются из решения задач

$$H_i = (J_i^1(u_t) - G_i^1)(J_i^2(u_t) - G_i^2) \longrightarrow \max_{u_i,\, i\in N\backslash S}, i \in N\backslash S\,.$$

3.4. Характеристическая функция

Таким образом характеристическая функция для игры (3.1), (3.2), начинающейся в момент t из состояния x_t имеет вид

$$V(L,x_t)=\begin{cases} 0, & L=0\,,\\ V(\{i\},x_t)=\begin{pmatrix} J_i^{1N}(u_t^N)\\ J_i^{2N}(u_t^N)\end{pmatrix}, & L=\{i\}\,,\\ V(S,x_t)=\begin{pmatrix} \sum\limits_{i\in S} V_i^{1S}(u_t^s)\\ \sum\limits_{i\in S} V_i^{2S}(u_t^s)\end{pmatrix}, & L=S\,,\\ V(I,x_t)=\begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} V_i^{1c}(u_t^c)\\ \sum\limits_{i=1}^{n} V_i^{2c}(u_t^c)\end{pmatrix}, & L=I\,,\end{cases} \tag{3.8}$$

где $J_i^{jN}(u_t^N)$ определены в (3.4), $i\in N$, $j=1,2$, $V_i^{jS}(u_t^s)$ определяются из решения задач (3.6) или (3.7), $i\in S$, $j=1,2$, а $V_i^{jc}(u_t^c)$ определяются из решения задачи (3.5), $i\in N$, $j=1,2$.

Теперь перейдем к рассмотрению динамической многокритериальной модели, связанной с задачей управлением биоресурсами (эксплуатацией рыбной популяции) для демонстрации предложенных концепций решений.

4. Многокритериальная задача управления возобновляемыми ресурсами

Исследуется динамическая бикритериальная модель управления биоресурсами. n игроков (страны или фирмы) эксплуатируют ресурс на протяжении конечного промежутка времени $[0,m]$. Динамика развития популяции имеет вид

$$x_{t+1}=\varepsilon x_t-u_{1t}-\ldots-u_{nt}\,,\;\; x_0=x\,, \tag{4.1}$$

где $x_t\geq 0$ — размер популяции в момент времени $t\geq 0$, $\varepsilon\geq 1$ — коэффициент естественного роста популяции, $u_{it}\geq 0$ — стратегия (вылов) игрока i в момент времени $t\geq 0$, $i\in N=\{1,\ldots,n\}$.

Игроки стремятся достичь двух целей — максимизировать доход от продажи ресурса и минимизировать затраты на эксплуатацию.

Предполагается, что цена на рынке для участников различна, а затраты равны и зависят от интенсивности эксплуатации каждого игрока. Тогда вектор-функции выигрышей на конечном промежутке планирования примут вид

$$J_1 = \begin{pmatrix} J_1^1 = \sum\limits_{t=0}^{m} \delta^t p_1 u_{1t} \\ J_1^2 = -\sum\limits_{t=0}^{m} \delta^t c u_{1t}^2 \end{pmatrix}, \ldots, J_n = \begin{pmatrix} J_n^1 = \sum\limits_{t=0}^{m} \delta^t p_n u_{nt} \\ J_n^2 = -\sum\limits_{t=0}^{m} \delta^t c u_{nt}^2 \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

где $p_i \geq 0$ – рыночная цена за единицу ресурса для игрока i, $i \in N$ $c \geq 0$ – затраты на эксплуатацию и $\delta \in (0,1)$ — общий коэффициент дисконтирования.

Таким образом решается линейно-квадратичная динамическая игра, но с выигрышами, представленными в векторном виде. Такой подход кажется более адекватным, чем сложение прибыли, выраженной в денежных единицах, и затрат, пропорциональных квадрату интенсивности. Естественно, с помощью поправочных коэффициентов возможно выразить затраты также в денежных единицах и рассматривать свертку критериев. Но, как нам представляется, векторные функции выигрышей более точно описывают такую модель.

4.1. Многокритериальное равновесие по Нэшу

Начнем с построения гарантированных выигрышей, используя третий вариант их определения [6]. $G_1^1, \ldots, G_n^1$ являются равновесием по Нэшу в игре $\langle N, \{U_i\}_{i=1}^n, \{J_i^1\}_{i=1}^n \rangle$, следовательно функции Беллмана принимают вид

$$V_1(t,x) = \max_{u_1}\{p_1 u_1 + \delta V_1(t+1, \varepsilon x - u_1 - \ldots - u_n)\},$$
$$\ldots$$
$$V_n(t,x) = \max_{u_n}\{p_n u_n + \delta V_n(t+1, \varepsilon x - u_1 - \ldots - u_n)\}.$$

Ища стратегии и функции Беллмана в линейном виде, получим равновесные по Нэшу стратегии

$$u_{1t} = \ldots = u_{nt} = \frac{\varepsilon - 1}{n-1} x_t$$

и размер популяции в равновесии по Нэшу

$$x_t = \left(\frac{n - \varepsilon}{n-1}\right)^t x_0 .$$

Тогда гарантированные выигрыши примут вид

$$G_1^1 = p_1 A x_0\,, \ldots, G_n^1 = p_n A x_0, \tag{4.3}$$

где

$$A = \frac{(\varepsilon - 1)(\delta(n-\varepsilon))^{m+1} + (n-1)^{m+1}}{(n-1)^{m+1}(\delta(n-\varepsilon) - n + 1)}\,.$$

Аналогично, определяя равновесие по Нэшу в игре со вторыми критериями $\langle N, \{U_i\}_{i=1}^n, \{J_i^2\}_{i=1}^n \rangle$, получим вторые гарантированные выигрыши

$$G_1^2 = \ldots = G_n^2 = G x_0^2\,, \tag{4.4}$$

где

$$G = -c\Big(\frac{2n - \varepsilon^2 + \varepsilon\sqrt{4n^2 + \varepsilon^2 - 4n}}{n(-\varepsilon + \sqrt{4n^2 + \varepsilon^2 - 4n})}\Big)^2 \cdot$$

$$\frac{(2\delta n)^{m+1} - (\varepsilon - \sqrt{4n^2 + \varepsilon^2 - 4n})^{m+1}}{(\varepsilon - \sqrt{4n^2 + \varepsilon^2 - 4n})^m (2\delta n - \varepsilon + \sqrt{4n^2 + \varepsilon^2 - 4n})}\,.$$

Согласно определению 3.1 для построения многокритериального равновесия по Нэшу необходимо решить следующую задачу:

$$\begin{gathered} J_1^1(u_{1t} - p_1 A x)(J_1^2(u_{1t}) - G x^2) \to \max_{u_{1t}}\,, \\ \ldots \\ J_n^1(u_{nt} - p_n A x)(J_n^2(u_{nt}) - G x^2) \to \max_{u_{nt}} \end{gathered}$$

или

$$\begin{gathered} p_1(\sum_{t=0}^m \delta^t u_{1t} - Ax)(-c\sum_{t=0}^m \delta^t u_{1t}^2 - G x^2) \to \max_{u_{1t}}\,, \\ \ldots \\ p_n(\sum_{t=0}^m \delta^t u_{nt} - Ax)(-c\sum_{t=0}^m \delta^t u_{nt}^2 - G x^2) \to \max_{u_{nt}}\,. \end{gathered}$$

Рассматривая процесс последовательно, начиная с одношаговой игры и до m-шаговой, и ища оптимальные стратегии в линейном виде $u_{it} = \gamma_{it}^N x_t$, получим многокритериальное равновесие по Нэшу

$$\gamma_{1t}^N = \ldots = \gamma_{nt}^N = \gamma_t^N = \frac{\varepsilon^{t-1}\gamma_1^N}{1 + n\gamma_1^N \sum\limits_{j=0}^{t-2} \varepsilon^j}\,, \tag{4.5}$$

а стратегия на последнем шаге γ_1^N определяется из уравнения

$$-2c\gamma_1^N \prod_{i=2}^{m}(\varepsilon - n\gamma_i^N)\Big[\sum_{i=0}^{m-1}\delta^i\gamma_{m-i}^N \prod_{j=m+1-i}^{m}(\varepsilon - n\gamma_j^N) - A\Big] +$$
$$+\Big[-c\sum_{i=0}^{m-1}\delta^i(\gamma_{m-i}^N)^2 \prod_{j=m+1-i}^{m}(\varepsilon - n\gamma_j^N)^2 - G\Big] = 0\,.$$

4.2. Формирование гранд коалиции

В соответствии с (4.5) определим выигрыши в многокритериальном равновесии по Нэшу

$$J_1^{1N}(x) = \sum_{t=0}^{m}\delta^t p_1\gamma_t^N x_0\,,$$
$$\ldots \qquad (4.6)$$
$$J_n^{1N}(x) = \sum_{t=0}^{m}\delta^t p_n\gamma_t^N x_0\,,$$

$$J_1^{2N}(x) = \ldots = J_2^{2N}(x) = -c\sum_{t=0}^{m}\delta^t\gamma_t^N x_0^2\,. \qquad (4.7)$$

Согласно определению 3.2 для построения многокритериального кооперативного равновесия необходимо решить следующую задачу:

$$(V_1^{1c}+\ldots+V_n^{1c}-J_1^{1N}-\ldots-J_n^{1N})(V_1^{2c}+\ldots+V_n^{2c}-J_1^{2N}-\ldots-J_n^{2N})\to \max_{u_{1t}^c,\ldots,u_{nt}^c}$$

или

$$(\sum_{t=0}^{m}\delta^t(p_1u_{1t}^c+\ldots+p_nu_{nt}^c)-Px)(-c\sum_{t=0}^{m}\delta^t((u_{1t}^c)^2+\ldots+(u_{nt}^c))^2-Kx^2) \to \max_{u_{1t}^c,u_{2t}^c}\,,$$

где $P = (p_1 + \ldots + p_n)\sum\limits_{t=0}^{m}\delta^t\gamma_t^N$, $K = -nc\sum\limits_{t=0}^{m}\delta^t(\gamma_t^N)^2$.

Начнем с одношаговой игры и будем искать оптимальные стратегии в линейном виде: $u_{11}^c = \gamma_{11}^c x, \ldots, u_{n1}^c = \gamma_{n1}^c x$. Суммы кооперативных выигрышей по обоим критериям имеют вид

$$H_{11}^c(\gamma_{11}^c,\ldots,\gamma_{n1}^c;x) = p_1\gamma_{11}^c x + \ldots + p_n\gamma_{n1}^c x\,,$$
$$H_{21}^c(\gamma_{11}^c,\ldots,\gamma_{n1}^c;x) = -c((\gamma_{11}^c)^2 + \ldots + (\gamma_{n1}^c)^2)x^2\,.$$

Для построения кооперативных стратегий необходимо решить следующую задачу

$$(H_{11}^c(\gamma_{11}^c,\ldots,\gamma_{n1}^c;x)-Px)(H_{21}^c(\gamma_{11}^c,\ldots,\gamma_{n1}^c;x)-Kx^2)\to\max_{\gamma_{11}^c,\ldots,\gamma_{n1}^c}. \quad (4.8)$$

Из условий первого порядка получим связь между оптимальными кооперативными стратегиями в одношаговой игре

$$\gamma_{21}^c=\frac{p_2}{p_1}\gamma_{11}^c,\ldots,\gamma_{n1}^c=\frac{p_n}{p_1}\gamma_{11}^c\,,$$

а стратегия первого игрока имеет вид $\gamma_{11}^c=\frac{cA+\sqrt{c^2A^2-3cG}}{3c}$.

Перейдем к двухшаговой игре. Сумма кооперативных выигрышей по первому критерию примет вид

$$H_{12}^c(\gamma_{11}^c,\ldots,\gamma_{n1}^c,\gamma_{12}^c,\ldots,\gamma_{n2}^c;x)=$$
$$=p_1\gamma_{12}^cx+\ldots+p_n\gamma_{n2}^cx+\delta(p_1\gamma_{11}^c+\ldots+p_n\gamma_{n1}^c)(\varepsilon-\gamma_{12}^c-\ldots-\gamma_{n2}^c)x\,,$$

а для второго критерия –

$$H_{22}^c(\gamma_{11}^c,\ldots,\gamma_{n1}^c,\gamma_{12}^c,\ldots,\gamma_{n2}^c;x)=$$
$$-c((\gamma_{12}^c)^2+\ldots+(\gamma_{n2}^c)^2)x^2-c\delta((\gamma_{11}^c)^2+\ldots+(\gamma_{n1}^c)^2)(\varepsilon-\gamma_{12}^c-\ldots-\gamma_{n2}^c)^2x^2\,.$$

Для построения кооперативных стратегий в двухшаговой игре необходимо решить следующую задачу

$$(H_{12}^c(\gamma_{11}^c,\ldots,\gamma_{n1}^c,\gamma_{12}^c,\ldots,\gamma_{n2}^c;x)-Px)\cdot$$
$$\cdot(H_{22}^c(\gamma_{11}^c,\ldots,\gamma_{n1}^c,\gamma_{12}^c,\ldots,\gamma_{n2}^c;x)-Kx^2)\to\max_{\gamma_{11}^c,\gamma_{21}^c,\ldots,\gamma_{12}^c,\gamma_{22}^c}. \quad (4.9)$$

Из условий первого порядка получим связь между оптимальными кооперативными стратегиями в двухшаговой игре

$$\gamma_{22}^c=\frac{p_2}{p_1}\gamma_{12}^c,\ldots,\gamma_{n2}^c=\frac{p_n}{p_1}\gamma_{12}^c\,,$$

а также связь между стратегиями первого игрока на обоих шагах

$$\gamma_{12}^c=\frac{\varepsilon p_1\gamma_{11}^c}{p_1+\gamma_{11}^c(p_1+\ldots+p_n)}\,. \quad (4.10)$$

При этом стратегия первого игрока на последнем шаге определяется из одного из уравнений условий первого порядка.

Продолжая описанный процесс для m шагов, получим кооперативные стратегии

$$\gamma_{1t}^c = \frac{p_1 \varepsilon^{t-1} \gamma_{11}^c}{p_1 + \gamma_{11}^c \sum\limits_{j=0}^{t-2} \varepsilon^j \sum\limits_{i=1}^{p} p_i}\,,\ t = 2, \ldots, m\,,$$

$$\gamma_{jt}^c = \frac{p_j}{p_1} \gamma_{1t}^c\,,\ j = 2, \ldots, n\,,\ t = 1, \ldots, m\,, \tag{4.11}$$

а стратегия первого игрока на последнем шаге γ_{11}^c определяется из уравнения

$$p_1 \Big[-c \sum_{i=2}^{m} \delta^{m-i} \sum_{l=1}^{n} (\gamma_{li}^c)^2 \prod_{j=i+1}^{m} (\varepsilon - \sum_{l=1}^{n} \gamma_{lj}^c)^2 - K \Big] -$$

$$-2c\gamma_{11}^c \prod_{j=2}^{m} (\varepsilon - \sum_{l=1}^{n} \gamma_{lj}^c) \Big[\sum_{i=1}^{m} \delta^{m-i} \sum_{l=1}^{n} p_l \gamma_{li}^c \prod_{j=i+1}^{m} (\varepsilon - \sum_{l=1}^{n} \gamma_{lj}^c) - P \Big] = 0\,.$$

4.3. Формирование коалиции

Модель с отсутствием информации. В данном случае игроки, образовавшие коалицию S, не сообщают об этом другим участникам. Поэтому агенты, не входящие в коалицию (индивидуальные игроки), продолжают использовать стратегии Нэша, определенные для некооперативного варианта многокритериальной динамической игры.

Таким образом, для определения общего кооперативного выигрыша коалиции S решается следующая задача:

$$(\sum_{i \in S} V_i^{1S}(\tilde{u}_t) - \sum_{i \in S} J_i^{1N})(\sum_{i \in S} V_i^{2c}(\tilde{u}_t) - \sum_{i \in S} J_i^{2N}) =$$

$$= (\sum_{t=0}^{m} \delta^t \sum_{i \in S} p_i u_{it}^s - P^S x) \cdot$$

$$\cdot (-c \sum_{t=0}^{m} \delta^t \sum_{i \in S} (u_{it}^s)^2 - K^S x^2) \to \max_{u_{it}^s,\, i \in S}\,, \tag{4.12}$$

где $P^S = \sum\limits_{i \in S} p_i \sum\limits_{t=0}^{m} \delta^t \gamma_t^N$, $K^S = -|S| c \sum\limits_{t=0}^{m} \delta^t (\gamma_t^N)^2$, при следующей динамике развития популяции

$$x_{t+1} = \varepsilon x_t - \sum_{i \in S} u_{it}^s - \sum_{i \in N \setminus S} u_{it}^N\,,\ x_0 = x\,.$$

Пользуясь, аналогично случаю формирования гранд коалиции, переходом от одношаговой игры к m-шаговой и ища оптимальные стратегии членов коалиции в линейном виде $u_{i1}^s = \gamma_{it}^s x$, $i \in S$, получим

$$\gamma_{st}^s = \frac{p_s \gamma_{s1}^s \prod\limits_{j=2}^{t} (\varepsilon - \sum\limits_{l \in N \setminus S} \gamma_{lj}^N)}{p_s + \gamma_{s1}^s \sum\limits_{i \in S} p_i (1 + \sum\limits_{j=2}^{t-1} (\varepsilon - \sum\limits_{l \in N \setminus S} \gamma_{lj}^N))}, \; t = 2, \ldots, m,$$

$$\gamma_{jt}^s = \frac{p_j}{p_s} \gamma_{st}^s, \; j \in S, \; j \neq s, \; t = 1, \ldots, m, \qquad (4.13)$$

а стратегия игрока $s \in S$ на последнем шаге γ_{s1}^s определяется из уравнения

$$-p_s \Big[c \sum_{j=1}^{m} \delta^{m-j} \sum_{i \in S} (\gamma_{ij}^s)^2 \prod_{l=j+1}^{m} (\varepsilon - \sum_{i \in S} \gamma_{il}^s - \sum_{i \in N \setminus S} \gamma_{il}^N)^2 - K^S \Big] -$$
$$- 2c \gamma_{s1}^s \prod_{j=2}^{m} (\varepsilon - \sum_{i \in S} \gamma_{ij}^s - \sum_{i \in N \setminus S} \gamma_{ij}^N) \cdot$$
$$\cdot \Big[\sum_{j=1}^{m} \delta^{m-j} \sum_{i \in S} p_i \gamma_{ij}^s \prod_{l=j+1}^{m} (\varepsilon - \sum_{i \in S} \gamma_{il}^s - \sum_{i \in N \setminus S} \gamma_{il}^N) - P^S \Big] = 0.$$

Модель с информацией. В данном случае игроки, не входящие в коалицию S, получают информацию о ее формировании. Поэтому они определяют свои новые стратегии как многокритериальное равновесие по Нэшу в игре с $N \setminus S$ игроками.

Таким образом, сначала игроки, не входящие в коалицию, определяют свои равновесные по Нэшу стратегии в предположении, что стратегии кооперирующихся игроков известны. После этого агенты в коалиции максимизируют свой суммарный выигрыш. Как и ранее, будем искать оптимальные стратегии в линейном виде $u_{it} = \gamma_{it} x_t$, $i \in N \setminus S$, $u_{it} = \gamma_{it}^s x_t$, $i \in S$.

Этап 1. Пусть стратегии игроков из коалиции u_{it}^s, $i \in S$ заданы. Индивидуальные игроки ($i \in N \setminus S$) решают задачи

$$p_i (\sum_{t=0}^{m} \delta^t u_{it} - Ax)(-c \sum_{t=0}^{m} \delta^t u_{it}^2 - Gx^2) \to \max_{u_{it}} \qquad (4.14)$$

при следующей динамике развития популяции

$$x_{t+1} = \varepsilon x_t - \sum_{i\in S} u_{it}^s - \sum_{i\in N\setminus S} u_{it}\,,\; x_0 = x\,.$$

Как и при определении многокритериального равновесия по Нэшу, получим что стратегии индивидуальных игроков ($i \in N \setminus S$) одинаковы и имеют вид

$$u_{it} = \gamma_{it} x = \gamma_t^N x = \frac{\gamma_1^N \prod_{j=2}^{t}(\varepsilon - \sum_{l\in S}\gamma_{lt}^s)}{1+(n-|S|)\gamma_1^N(1+\sum_{j=2}^{t-1}(\varepsilon - \sum_{l\in S}\gamma_{lt}^s))} x,\; t = 2,\ldots,m, \quad (4.15)$$

а стратегия на последнем шаге γ_1^N определяется из уравнения

$$-2c\gamma_1^N \prod_{i=2}^{m}(\varepsilon - \sum_{l\in S}\gamma_{li}^s - (n-|S|)\gamma_l^N)\cdot$$
$$\cdot\Big[\sum_{i=0}^{m-1}\delta^i\gamma_{m-i}^N \prod_{j=m+1-i}^{m}(\varepsilon - \sum_{l\in S}\gamma_{li}^s - (n-|S|)\gamma_l^N) - A\Big] +$$
$$+\Big[-c\sum_{i=0}^{m-1}\delta^i(\gamma_{m-i}^N)^2 \prod_{j=m+1-i}^{m}(\varepsilon - \sum_{l\in S}\gamma_{li}^s - (n-|S|)\gamma_l^N)^2 - G\Big] = 0\,.$$

Полученные равновесные стратегии обозначим $\tilde{u}_{it}^N = \tilde{\gamma}_t^N x$, $i \in N\setminus S$.

Этап 2. Игроки, входящие в коалицию S, решают задачу

$$(\sum_{t=0}^{m}\delta^t\sum_{i\in S}p_i u_{it}^s - P^S x)\cdot$$
$$\cdot(-c\sum_{t=0}^{m}\delta^t\sum_{i\in S}(u_{it}^s)^2 - K^S x^2) \to \max_{u_{it}^s,\, i\in S}\,, \quad (4.16)$$

где $P^S = \sum_{i\in S} p_i \sum_{t=0}^{m}\delta^t\gamma_t^N$, $K^S = -|S|c\sum_{t=0}^{m}\delta^t(\gamma_t^N)^2$, при следующей динамике развития популяции

$$x_{t+1} = \varepsilon x_t - \sum_{i\in S} u_{it}^s - \sum_{i\in N\setminus S} \tilde{u}_{it}^N\,,\; x_0 = x\,.$$

Пользуясь, аналогично случаю без информации, переходом от одношаговой игры к m-шаговой, получим

$$\gamma_{st}^{s} = \frac{p_s \gamma_{s1}^{s} \varepsilon^{t-1}}{p_s + \gamma_{s1}^{s} \sum\limits_{i \in S} p_i \sum\limits_{j=0}^{t-2} \varepsilon^{j} + p_s (n - |S|) \tilde{\gamma}_1^{N}) \sum\limits_{j=0}^{t-2} \varepsilon^{j}}\,,\ t = 2, \ldots, m\,,$$

$$\gamma_{jt}^{s} = \frac{p_j}{p_s} \gamma_{st}^{s}\,,\ j \in S\,,\ j \neq s\,,\ t = 1, \ldots, m\,, \tag{4.17}$$

а стратегия игрока $s \in S$ на последнем шаге γ_{s1}^{s} определяется из уравнения

$$-p_s \Big[c \sum_{j=1}^{m} \delta^{m-j} \sum_{i \in S} (\gamma_{ij}^{s})^2 \prod_{l=j+1}^{m} (\varepsilon - \sum_{i \in S} \gamma_{il}^{s} - (n - |S|) \tilde{\gamma}_{il}^{N})^2 - K^S \Big] -$$

$$-2c \gamma_{s1}^{s} \prod_{j=2}^{m} (\varepsilon - \sum_{i \in S} \gamma_{ij}^{s} - (n - |S|) \tilde{\gamma}_{lj}^{N}) \cdot$$

$$\cdot \Big[\sum_{j=1}^{m} \delta^{m-j} \sum_{i \in S} p_i \gamma_{ij}^{s} \prod_{l=j+1}^{m} (\varepsilon - \sum_{i \in S} \gamma_{il}^{s} - (n - |S|) \tilde{\gamma}_{il}^{N}) - P^S \Big] = 0\,.$$

Полученные равновесные стратегии обозначим $\tilde{u}_{it}^{s} = \tilde{\gamma}_{it}^{s} x$, $i \in S$.

Таким образом характеристическая функция для игры (4.1), (4.2), начинающейся в момент t из состояния x_t имеет вид

$$V(L, x_t) = \begin{cases} 0, & L = 0\,, \\ V(\{i\}, x_t) = \begin{pmatrix} p_i \sum\limits_{t=0}^{m} \delta^t \gamma_t^N x_t \\ -c \sum\limits_{t=0}^{m} \delta^t (\gamma_t^N)^2 x_t^2 \end{pmatrix}, & L = \{i\}\,, \\ V(S, x_t) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{t=0}^{m} \sum\limits_{i \in S} p_i \gamma_{it}^{s} x_t \\ -c \sum\limits_{t=0}^{m} \sum\limits_{i \in S} (\gamma_{it}^{s})^2 x_t^2 \end{pmatrix}, & L = S\,, \\ V(I, x_t) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{t=0}^{m} \delta^t \sum\limits_{i=1}^{n} p_i \gamma_{it}^{c} x_t \\ -c \sum\limits_{t=0}^{m} \delta^t \sum\limits_{i=1}^{n} (\gamma_{it}^{c})^2 x_t^2 \end{pmatrix}, & L = I\,, \end{cases} \tag{4.18}$$

где γ_t^N определены в (4.5), γ_{it}^{s} определены в (4.13) или (4.17), $i \in S$, а γ_{it}^{c} определяются из (4.11), $i \in N$.

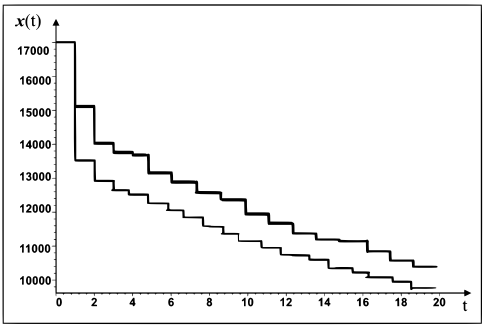

Рисунок 1. Размер популяции: темная линия – кооперация, светлая – равновесие по Нэшу

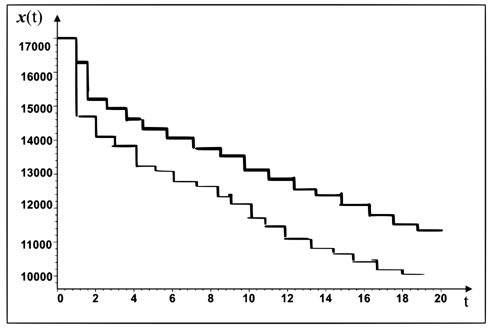

Рисунок 2. Размер популяции: темная линия – модель без информации, светлая – с информацией

5. Моделирование

Численное моделирование было проведено со следующими параметрами:

$$n = 10,\ \varepsilon = 1.1,\ p_1 = 100,\ p_2 = \ldots = p_{10} = 150,\ c = 50,\ \delta = 0.8\,.$$

Сначала проведем сравнение состояния эксплуатируемой популяции при кооперативном и некооперативном поведении игроков. На рис. 1 представлена динамика развития популяции в многокритериальном равновесии по Нэшу (светлая линия) и в случае формирования гранд коалиции (темная линия). Заметим, что кооперативное поведение благотворно влияет на экологическую обстановку, поскольку размер популяции при кооперации больше.

Теперь покажем различие двух вариантов построения характеристической функции. На рис. 2 представлена динамика развития популяции в модели без информации (темная линия) и модели с информированными игроками (светлая линия). Заметим, что размер популяции в первом случае больше. Следовательно, состояние экологической системы лучше, когда игроки не обладают информацией о формировании коалиции.

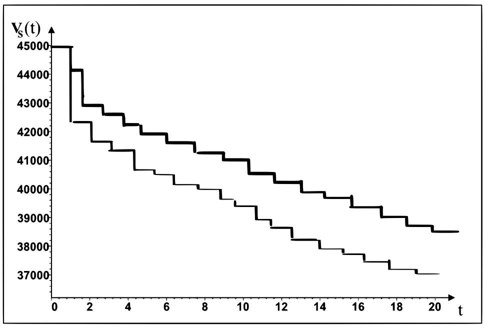

Рисунок 3. Выигрыш коалиции: темная линия – модель без информации, светлая – с информацией

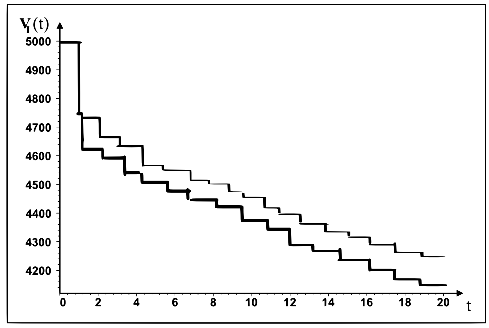

Рисунок 4. Выигрыш индивидуального игрока: темная линия – модель без информации, светлая – с информацией

На рис. 3 показаны выигрыши коалиции S в двух рассмотренных случаях. Заметим, что для коалиции более выгоден тайный процесс формирования. А для индивидуальных игроков ситуация противоположная (см. рис. 4). Следовательно, второй способ построения характеристической функции не стимулирует формирование коалиций.

6. Заключение

В работе предложены концепции определения оптимального поведения в многокритериальных динамических играх. Для построения некооперативного равновесия использована конструкция арбитражной схемы Нэша (произведения Нэша), а для определения кооперативного – арбитражная схема Нэша для всего периода продолжения игры.

Исследован процесс формирования коалиций в многокритериальных динамических играх. Для построения характеристической функции используется арбитражная схема Нэша, где многокритериальное равновесие по Нэшу используется в качестве точек статус-кво. Данный подход позволяет напрямую определять кооперативные выигрыши участников коалиции, а не распределять общий кооперативный выигрыш с использованием всевозможных дележей.

Характеристическая функция построена с использованием нестандартных подходов (модели с информацией и без информации). В первом из них, игроки, не входящие в коалицию S, используют равновесные по Нэшу стратегии, определенные для некооперативного варианта многокритериальной динамической игры. Такой подход соответствует ситуации, в которой игроки не обладают информацией о формировании коалиции. Во втором способе определения характеристической функции игроки вне коалиции S определяют новые стратегии Нэша в многокритериальной игре с $N \setminus S$ игроками. Этот случай соответствует ситуации когда игроки знают, что коалиция S сформировалась, и поэтому меняют свое поведение.

Проведено сравнение схем поведения игроков для различных концепций построения характеристической функции в динамической бикритериальной задаче управления возобновляемыми ресурсами. Показано, что первый способ построения благотворно влияет на экологическую обстановку и стимулирует создание коалиций, а второй – приносит выгоду игрокам вне коалиции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mazalov V.V., Rettieva A.N. *Fish wars with many players* // International Game Theory Review. 2010. Vol. 12(4). P. 385–405.

2. Patrone F., Pusillo L., Tijs S.H. *Multicriteria games and potentials* // Top. 2007. Vol. 15. P. 138–145.

3. Petrosjan L.A., Zaccour G. *Time-consistent Shapley value allocation of pollution cost reduction* // Journal of Economic Dynamics and Control. 2003. V. 27, no. 3. P. 381–398.

4. Pieri G., Pusillo L. *Multicriteria Partial Cooperative Games* // Applied Mathematics. 2015. Vol. 6(12). P. 2125–2131.

5. Pusillo L., Tijs S. *E-equilibria for multicriteria games* // Annals of ISDG. 2013. Vol. 12. P. 217–228.

6. Rettieva A.N. *Multicriteria dynamic games* // International Game Theory Review. 2017. Vol. 1(19). P. 1750002.

7. Rettieva A.N. *A discrete-time bioresource management problem with asymmetric players* // Automation and Remote Control. 2014. Vol. 75(9). P. 1665–1676.

8. Shapley L.S. *Equilibrium points in games with vector payoffs* // Naval Research Logistic Quarterly. 1959. Vol. 6. P. 57–61.

9. Voorneveld M., Grahn S., Dufwenberg M. *Ideal equilibria in noncooperative multicriteria games* // Mathematical Methods of Operations Research. 2000. Vol. 52. P. 65–77.

COALITION FORMATION IN DYNAMIC MULTICRITERIA GAMES

Anna N. Rettieva, School of Mathematics and Statistics, Qingdao University, Institute of Applied Mathematics of Shandong, Institute of Applied Mathematical Research Karelian Research Center of RAS, Dr.Sc., docent (annaret@krc.karelia.ru).

Abstract: In this paper new approaches to obtain optimal behavior in dynamic multicriteria games are constructed. The multicriteria Nash equilibrium is obtained via the Nash bargaining design (Nash products), and the cooperative equilibrium is determined by the Nash bargaining procedure for the entire planning horizon. Coalition formation process in dynamic multicriteria games is investegated. To construct the characteristic function the Nash bargaining scheme is applied where the multicriteria Nash equilibrium plays the role of the status-quo points. Two variants of characteristic function's determination that take into account information structure of the game are presented (models without information and with informed players). Dynamic multicriteria bioresorce management problem is considered. The players' strategies and the size of the resource are compared under cooperative and noncooperative behavior and for different variants of characteristic function determination.

Keywords: dynamic games, multicriteria games, Nash equilibrium, cooperative equilibrium, characteristic function, Nash bargaining solution.