

УДК 517.977.8

ББК 22.17

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ ОБЪЕМАМИ ВРЕДНЫХ ВЫБРОСОВ НА ПРИМЕРЕ КРУПНЕЙШИХ ПРЕДПРИЯТИЙ ИРКУТСКОЙ ОБЛАСТИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

АННА В. ТУР

ЕКАТЕРИНА В. ГРОМОВА*

Санкт-Петербургский Государственный Университет
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9
e-mail: a.tur@spbu.ru, e.v.gromova@spbu.ru

В работе рассмотрена дифференциальная игра управления объемами вредных выбросов, в которой продолжительность игры является случайной величиной и определяется моментом первого отказа оборудования производства у какого-либо из игроков. Параметры игры вычислены исходя из реального экологического положения Иркутской области. В качестве игроков выбраны три крупнейших предприятия г. Братска, где наблюдается одна из наиболее острых экологических ситуаций в России. Предложено решение, позволяющее улучшить общую экологическую обстановку в регионе.

Ключевые слова: кооперативные дифференциальные игры, случайная продолжительность, динамическая устойчивость, процедура распределения дележа, управление загрязнениями, экология.

©2018 А.В. Тур, Е.В. Громова

* Исследование выполнено за счет гранта Российского фонда фундаментальных исследований (проект №17-51-53030)

1. Введение

Дифференциальные игры [9] удобны для описания непрерывных конфликтно-управляемых процессов, происходящих во многих областях человеческой деятельности, таких как экономика, экология, производство, менеджмент. Активно развивается применение методов дифференциальных игр при решении задач, возникающих в области природоохранной политики, оптимальной эксплуатации природных ресурсов (см., например, [3, 6, 11, 14, 15, 22, 27]).

Для описания задач из области природоохранного менеджмента часто оказывается целесообразным использование классов игр с так называемыми отрицательными связями [14, 15, 22, 27]. В этом классе игр увеличение значений управляемых параметров у одних игроков, а именно, объемов вредных выбросов в единицу времени, приводит к уменьшению значений функций полезности для других игроков.

В данной работе рассматривается дифференциальная игра с отрицательными связями, моделирующая совместное управление объемами вредных выбросов в атмосферу для нескольких предприятий. Предполагается, что увеличение общего уровня загрязнения ведёт к уменьшению выигрышей игроков.

При описании процессов, наиболее приближенных к реальным, важно учитывать возможность возникновения неопределенности. В рассматриваемой модели предполагается случайная продолжительность развития процесса. Впервые дифференциальные игры со случайной продолжительностью были исследованы в работе [7]. Математический аппарат для получения оптимальных управлений и построения принципов оптимальности в кооперативной постановке дифференциальных игр со случайной продолжительностью был разработан в [10, 12, 13, 17, 18, 25].

В рассматриваемой модели продолжительность игры определяется временем безотказной работы оборудования предприятий. Предполагается, что момент отказа оборудования для каждого участника является случайной величиной, а игра останавливается при возникновении первого отказа (см. аналогичные постановки задачи в области эксплуатации природных ресурсов в [5, 23], а также [20] для игры двух лиц).

В данной работе для игры трёх лиц исследовано кооперативное

решение, при построении которого использованы различные виды характеристической функции [2, 19, 21]. Получены аналитические выражения для компонент вектора Шепли [29], исследован вопрос динамической устойчивости [8, 9] данного решения.

Теоретические результаты продемонстрированы в приложении к реальным данным в области природоохранного менеджмента Иркутской области. В качестве игроков выбраны компании, являющиеся основными источниками загрязнения атмосферы в городе Братске Иркутской области. Данные получены из открытых источников [4, 34, 36, 37, 38, 39].

Статья состоит из трёх разделов. В первом разделе содержится введение, во втором - постановка и решение задачи в общем виде. В последнем разделе приводится анализ полученных выражений для конкретных значений параметров игры, вычисленных на основе реальных данных.

2. Постановка задачи

2.1. Описание игры $\Gamma^{T_{min}}(x_0, t_0)$

Рассмотрим дифференциальную игру управления объемами вредных выбросов $\Gamma^{T_{min}}(x_0, t_0)$, основанную на моделях [5, 14, 20, 22, 23]. В игре участвуют n игроков, каждый из которых имеет промышленное производство на своей территории. Предполагается, что игроки заключили договор об ограничении объемов вредных выбросов. Стратегией игрока i является выбор объёма вредных выбросов u_i в единицу времени (скорость загрязнения). Динамика общего уровня загрязнения описывается уравнением

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^n u_i(t), \quad t \in [t_0, \infty), \quad (2.1)$$

$$x(t_0) = x_0. \quad (2.2)$$

Доход игрока i в момент времени t определяется по формуле

$$R_i(u_i(t)) = u_i(t) \left(b_i - \frac{1}{2} u_i(t) \right), \quad t \in [t_0, \infty), \quad (2.3)$$

где $b_i > 0$. Каждый игрок несет расходы, связанные с устранением загрязнений и выплатой штрафов. Мгновенный выигрыш игрока i

равен $R_i(u_i(t)) - d_i x(t)$, где $d_i \geq 0$ – величина штрафа за загрязнение окружающей среды. Предположим, что установлен максимальный допустимый объем загрязнений в единицу времени игрока i , равный b_i , тогда, очевидно, имеем $u_i(t) \in [0, b_i]$. Функция доходов $R_i(u_i)$ возрастает с ростом объемов выбросов u_i , в то время как её первая производная убывает, что соответствует эффекту «насыщения».

Игра начинается в момент t_0 и заканчивается в момент первого отказа оборудования, осуществляющего фильтрацию вредных выбросов, у какого-либо игрока, т.е. момент окончания игры $T = \min\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$, где T_i – время отказа оборудования у i -го игрока. Предполагаем, что T_i – случайная величина с известной функцией распределения $F_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, $t \in [t_0, \infty)$. Кроме того, полагаем, что $\{T_i\}_{i=1}^n$ – независимые случайные величины.

Выигрыш i -го игрока будем понимать в смысле математического ожидания интегрального выигрыша на интервале со случайным моментом окончания T :

$$K_i(x_0, t_0, u_1, u_2, \dots, u_n) = E \int_{t_0}^T (R_i(u_i) - d_i x(s)) ds = \int_{t_0}^{\infty} \int_{t_0}^t (R_i(u_i) - d_i x(s)) ds dF(t). \quad (2.4)$$

Согласно [20] справедливы следующие утверждения относительно вида функции распределения $F(t)$ и функции интенсивности отказов $\lambda(t) = \frac{F'(t)}{1-F(t)}$, $t \in [t_0, \infty)$ для случайной величины T .

Предложение 2.1 ([20]). Пусть $\{T_i\}_{i=1}^n$ – независимые случайные величины, с соответствующими функциями распределения $\{F_i(t)\}_{i=1}^n$. Тогда функция распределения $F(t)$ случайной величины $T = \min\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ имеет следующий вид:

$$F(t) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - F_i(t)). \quad (2.5)$$

Предложение 2.2 ([20]). Пусть $\{T_i\}_{i=1}^n$ – независимые случайные величины, с соответствующими функциями распределения $F_i(t)$, $i = \overline{1, n}$ и функциями интенсивности отказов $\{\lambda_i(t)\}_{i=1}^n$. Тогда для случайной величины $T = \min\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ функция интенсивности отказов $\lambda(t)$ вычисляется по формуле:

$$\lambda(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(t). \quad (2.6)$$

Согласно [24] и, учитывая Предложение 2.1, выигрыш i -го игрока можно представить в следующем виде:

$$K_i(x_0, t_0, u_1, u_2, \dots, u_n) = \int_{t_0}^{\infty} (R_i(u_i) - d_i x(s))(1 - F(s)) ds, \quad (2.7)$$

где $F(t) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - F_i(t))$.

Используя функцию интенсивности отказов и Предложение 2.2, получаем:

$$K_i(x_0, t_0, u_1, u_2, \dots, u_n) = \int_{t_0}^{\infty} (R_i(u_i) - d_i x(s)) e^{-\int_{t_0}^s \lambda(t) dt} ds.$$

где $\lambda(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(t)$.

Для подыгры $\Gamma^{T_{min}}(\theta, x(\theta))$ с продолжительностью $(T - \theta)$, начинающейся из состояния $x(\theta)$, выигрыш игрока i вычисляется при условии, что игра не закончилась до момента θ :

$$\begin{aligned} K_i(x(\theta), \theta, u_1, \dots, u_n) &= \frac{1}{1 - F(\theta)} \int_{\theta}^{\infty} (R_i(u_i) - d_i x(s))(1 - F(s)) ds = \\ &= \int_{\vartheta}^{\infty} (R_i(u_i) - d_i x(s)) e^{-\int_{\vartheta}^s \lambda(t) dt} ds. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Одним из распределений, которое может быть использовано для описания случайной величины T_i , является распределение Вейбулла [32]. Это распределение определяется параметрами λ_i (параметр масштаба) и δ_i (параметр формы), а функция интенсивности отказов $\lambda_i(t)$ имеет вид [32]:

$$\lambda_i(t) = \lambda_i \delta_i t^{\delta_i - 1}, \quad t > 0; \lambda_i > 0; \delta_i > 0.$$

Согласно значениям параметра δ_i , оборудование игрока i может находиться в одной из трех фаз:

1. $\delta_i < 1$ соответствует фазе «приработки», когда отказ оборудования связан, главным образом, с недочетами, допущенными при проектировании (новое оборудование);

2. $\delta_i = 1$ соответствует фазе «нормальной эксплуатации», и отказ возможен из-за некоторых случайных внешних событий;
3. $\delta_i > 1$ соответствует фазе износа (изношенное оборудование).

Далее будем предполагать, что все случайные величины T_i являются независимыми и имеют распределение Вейбулла с различными параметрами λ_i и δ_i , определяющими состояние очистительного оборудования игроков на момент начала игры управления вредными выбросами.

Тогда выигрыш игрока i в подыгре $\Gamma^{T_{min}}(\theta, x(\theta))$ можно представить в виде

$$K_i(x(\theta), \theta, u) = e^{\sum_{i=1}^n \lambda_i (\theta^{\delta_i} - t_0^{\delta_i})} \int_{\theta}^{\infty} (R_i(u_i) - d_i x(s)) e^{-\sum_{i=1}^n \lambda_i (s^{\delta_i} - t_0^{\delta_i})} ds. \quad (2.9)$$

Рассмотрим кооперативный вариант игры. Тогда ожидаемый суммарный выигрыш игроков в игре $\Gamma^{T_{min}}(\theta, x(\theta))$ с продолжительностью $(T - \theta)$, начинающейся из состояния $x(\theta)$, имеет вид:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n K_i(x(\theta), \theta, u_1, \dots, u_n) &= \\ &= e^{\sum_{i=1}^n \lambda_i (\theta^{\delta_i} - t_0^{\delta_i})} \int_{\theta}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^n R_i(u_i) - \sum_{i=1}^n d_i x(s) \right) e^{-\sum_{i=1}^n \lambda_i (s^{\delta_i} - t_0^{\delta_i})} ds. \end{aligned} \quad (2.10)$$

2.2. Кооперативная игра трех лиц

Найдем выражения для оптимальных объемов вредных выбросов для случая игры трех участников. Будем предполагать, что оборудование производств находится в разных фазах эксплуатации.

Моментом окончания игры является первый момент отказа оборудования у одного из игроков, т.е. $T = \min \{T_1, T_2, T_3\}$, где T_1, T_2, T_3 – моменты отказа оборудования для 1-го, 2-го и 3-го игроков соответственно.

Пусть $F_1(t), F_2(t), F_3(t)$ и $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t)$ – соответствующие функции распределения и интенсивности отказов для игроков $\{1, 2, 3\}$.

Предполагаем параметры масштаба в распределении Вейбулла одинаковыми: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$.

Рассмотрим кооперативный вариант игры. Для нахождения оптимальных объемов выбросов будем максимизировать функционал

$$\max_{u_1, u_2, u_3} (K_1 + K_2 + K_3) = \int_0^\infty \left(\sum_{i=1}^3 R_i(u_i) - \sum_{i=1}^3 d_i x(s) \right) e^{-\lambda \sum_{i=1}^3 s^{\delta_i}} ds. \quad (2.11)$$

Будем искать решение задачи в программных стратегиях, используя принцип максимума Понтрягина [28]. Гамильтониан для (2.11) имеет вид:

$$H(x, u_1, u_2, u_3, \Lambda) = \left(\sum_{i=1}^3 \left(u_i(t) \left(b_i - \frac{1}{2} u_i(t) \right) \right) - \sum_{i=1}^3 d_i x(t) \right) e^{-\lambda \sum_{i=1}^3 t^{\delta_i}} + \Lambda(t) (u_1(t) + u_2(t) + u_3(t)). \quad (2.12)$$

Частные производные Гамильтониана:

$$\frac{\partial H}{\partial u_i} = (b_i - u_i) e^{-\lambda(t^{\delta_1} + t^{\delta_2} + t^{\delta_3})} + \Lambda(t) = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.13)$$

Тогда оптимальные управления игроков имеют вид:

$$\bar{u}_i(t) = b_i + \Lambda(t) e^{\lambda(t^{\delta_1} + t^{\delta_2} + t^{\delta_3})}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.14)$$

Сопряженную переменную $\Lambda(t)$ находим из условия:

$$\dot{\Lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x}. \quad (2.15)$$

Следовательно,

$$\Lambda(t) = (d_1 + d_2 + d_3) \int_0^t e^{-\lambda(s^{\delta_1} + s^{\delta_2} + s^{\delta_3})} ds + c. \quad (2.16)$$

Обозначим: $d = d_1 + d_2 + d_3$.

Поскольку $t \in [0, \infty)$, то условие на $\Lambda(t)$ имеет вид:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Lambda(t) = 0. \quad (2.17)$$

2.3. Оптимальные объемы выбросов при различных типах отказов оборудования у игроков

В этом пункте рассмотрим оптимальные выбросы для возможных случаев кооперации трех производств, с оборудованием в различном состоянии.

- Режим приработки оборудования у всех игроков

Параметры формы, соответствующие фазе приработки, для распределения Вейбулла: $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \frac{1}{2}$.

Функция распределения момента окончания игры примет вид:

$$F(t) = 1 - e^{-3\lambda\sqrt{t}}. \quad (2.18)$$

Оптимальные выбросы для этого случая имеют вид:

$$\bar{u}_i(t) = \begin{cases} 0, & t \geq \left(\frac{9b_i\lambda^2 - 2d}{6d\lambda}\right)^2; \\ b_i - \frac{2d(3\lambda\sqrt{t} + 1)}{9\lambda^2}, & 0 \leq t < \left(\frac{9b_i\lambda^2 - 2d}{6d\lambda}\right)^2. \end{cases} \quad (2.19)$$

- Режим нормальной эксплуатации оборудования у всех игроков

Параметры формы для этого случая в распределении Вейбулла: $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 1$.

Функция распределения момента окончания игры имеет вид:

$$F(t) = 1 - e^{-3\lambda t}. \quad (2.20)$$

Оптимальные выбросы для этого случая имеют вид:

$$\bar{u}_i(t) = \begin{cases} 0, & b_i \leq \frac{d}{3\lambda}; \\ b_i - \frac{d}{3\lambda}, & b_i > \frac{d}{3\lambda}, i = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (2.21)$$

- Изношенное оборудование у всех игроков

Параметры формы в распределении Вейбулла примут следующие значения: $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 2$.

Функция распределения момента окончания игры будет иметь вид:

$$F(t) = 1 - e^{-3\lambda t^2}. \quad (2.22)$$

Обозначим

$$\tilde{u}_i(t) = b_i + \frac{d\sqrt{3\pi}e^{3\lambda t^2}(\operatorname{erf}(\sqrt{3\lambda}t) - 1)}{6\sqrt{\lambda}},$$

и

$$A_{\tilde{u}_i} = \{t \mid \tilde{u}_i(t) < 0\}.$$

Тогда оптимальные выбросы для этого случая имеют вид:

$$\bar{u}_i(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \in A_{\tilde{u}_i}; \\ \tilde{u}_i(t), & \text{иначе.} \end{cases} \quad (2.23)$$

- Режим приработки оборудования у двух игроков, режим нормальной эксплуатации у одного игрока

Параметры формы в распределении Вейбулла примут следующие значения: $\delta_1 = \delta_2 = \frac{1}{2}$, $\delta_3 = 1$.

Функция распределения момента окончания игры имеет вид:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda(2\sqrt{t}+t)}. \quad (2.24)$$

Пусть

$$l(t) = \frac{1}{\lambda} + \frac{\sqrt{\pi}e^\lambda}{\sqrt{\lambda}} e^{\lambda(t+2\sqrt{t})} \left(\operatorname{erf}(\sqrt{\lambda}t + \sqrt{\lambda}) - 1 \right).$$

Тогда оптимальные выбросы для этого случая имеют вид:

$$\bar{u}_i(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } l(t) > \frac{b_i}{d}; \\ b_i - dl(t), & \text{если } 0 \leq l(t) \leq \frac{b_i}{d}; \\ b_i, & \text{если } l(t) < 0. \end{cases} \quad (2.25)$$

- Режим нормальной эксплуатации оборудования у двоих игроков, оборудование третьего игрока изношено

Пусть

$$\delta_1 = \delta_2 = 1, \delta_3 = 2.$$

Функция распределения момента окончания игры имеет вид:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda(2t+t^2)}. \quad (2.26)$$

$$\Lambda(t) = \frac{d\sqrt{\pi}e^\lambda}{2\sqrt{\lambda}} \left(\operatorname{erf}(\sqrt{\lambda}t + \sqrt{\lambda}) - \operatorname{erf}(\sqrt{\lambda}) \right) + c, \quad (2.27)$$

Пусть

$$\hat{u}_i(t) = b_i + \frac{d\sqrt{\pi}e^\lambda e^{\lambda(2t+t^2)}}{2\sqrt{\lambda}} \left(\operatorname{erf}(\sqrt{\lambda}t + \sqrt{\lambda}) - 1 \right),$$

и

$$A_{\hat{u}_i} = \{t \mid \hat{u}_i(t) < 0\}.$$

Тогда:

$$\bar{u}_i(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \in A_{\hat{u}_i}; \\ \hat{u}_i(t), & \text{иначе.} \end{cases} \quad (2.28)$$

- Режим нормальной эксплуатации оборудования у двоих игроков, оборудование третьего игрока новое

Параметры формы для распределения Вейбулла: $\delta_1 = \delta_2 = 1$, $\delta_3 = \frac{1}{2}$.

Тогда функция распределения момента окончания игры имеет вид:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda(2t+\sqrt{t})}. \quad (2.29)$$

Пусть

$$k(t) = \frac{1}{2\lambda} + \frac{\sqrt{2\pi}e^{\frac{\lambda}{8}}}{8\sqrt{\lambda}} e^{\lambda(2t+\sqrt{t})} \left(\operatorname{erf} \left(\sqrt{2t\lambda} + \frac{\sqrt{2\lambda}}{4} \right) - 1 \right).$$

Тогда оптимальные выбросы для этого случая имеют вид:

$$\bar{u}_i(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } k(t) > \frac{b_i}{d}; \\ b_i - dk(t), & \text{если } 0 \leq k(t) \leq \frac{b_i}{d}; \\ b_i, & \text{если } k(t) < 0. \end{cases} \quad (2.30)$$

- Режим износа оборудования у двоих игроков, режим нормальной эксплуатации оборудования у третьего игрока

Данному случаю соответствуют параметры формы: $\delta_1 = \delta_2 = 2$, $\delta_3 = 1$.

Функция распределения момента окончания игры имеет вид:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda(2t^2+t)}. \quad (2.31)$$

Пусть

$$\tilde{u}_i(t) = b_i + \frac{d\sqrt{2\pi}e^{\frac{\lambda}{8}}e^{\lambda(t+2t^2)}}{4\sqrt{\lambda}} \left(\operatorname{erf} \left(\sqrt{2\lambda}t + \frac{\sqrt{2\lambda}}{4} \right) - 1 \right),$$

и

$$A_{\tilde{u}_i} = \{t \mid \tilde{u}_i(t) < 0\}.$$

В итоге, оптимальные выбросы для этого случая имеют вид:

$$\bar{u}_i(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \in A_{\tilde{u}_i}; \\ \tilde{u}_i(t), & \text{иначе.} \end{cases} \quad (2.32)$$

График оптимальных объемов выбросов для игры с тремя участниками представлен на Рис. 1.

2.4. Характеристическая функция

Рассмотрим кооперативную дифференциальную игру в форме характеристической функции [9].

Для построения кооперативного решения будем использовать три типа характеристической функции, технические аспекты построения которых подробно описаны в [19].

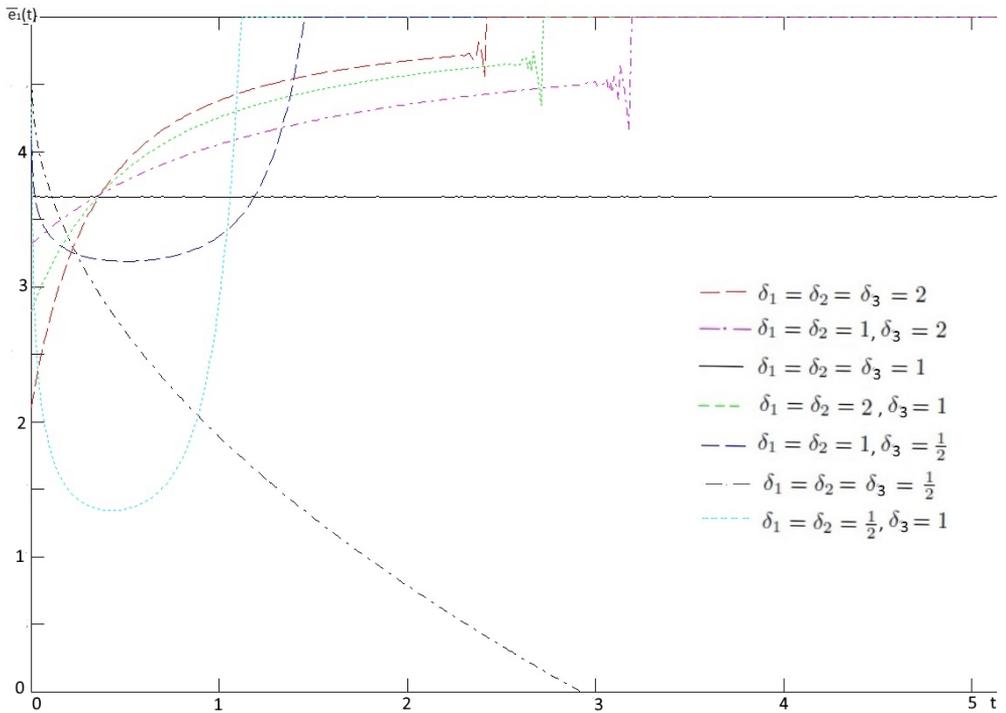


Рисунок 1. Оптимальные управления

2.4.1 α -характеристическая функция

При построении α -характеристической функции используется классический подход Неймана–Моргенштерна [31], который долгое время представлялся единственно возможным способом построения характеристической функции в кооперативной игре. Имеем:

$$V^\alpha(S, \cdot) = \begin{cases} 0, & S = \{\emptyset\}, \\ \max_{i \in S} \min_{j \in N \setminus S} \sum_{i \in S} K_i(x_0, t_0, u_S, u_{N \setminus S}), & S \subset N, \\ \max_{u_1, \dots, u_n} \sum_{i=1}^n K_i(x_0, t_0, u_1, \dots, u_n), & S = N. \end{cases} \quad (2.33)$$

Найдем выражение для α -характеристической функции в рассматриваемом примере для случая, когда игроки находятся в режиме нормальной эксплуатации оборудования, т.е. $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 1$. Пусть $\bar{x}(t)$ – оптимальная кооперативная траектория, которая реализует-

ся в случае, когда игроки используют оптимальные кооперативные выбросы (2.21). Тогда

$$V^\alpha(\{i, j\}, \bar{x}(t), t) = \frac{1}{3\lambda} \left(\frac{1}{2}(b_i^2 + b_j^2) - \frac{d_{i,j}^2}{9\lambda^2} - d_{i,j}x_0 - d_{i,j}\left(b - \frac{d}{\lambda}\right)t - \frac{d_{i,j}}{3\lambda}\left(b - \frac{2d_{i,j}}{3\lambda}\right) \right), \quad (2.34)$$

$$V^\alpha(\{i\}, \bar{x}(t), t) = \frac{1}{3\lambda} \left(\frac{1}{2}b_i^2 - \frac{d_i^2}{18\lambda^2} - d_i x_0 - d_i\left(b - \frac{d}{\lambda}\right)t - \frac{d_i}{3\lambda}\left(b - \frac{d_i}{3\lambda}\right) \right), \quad (2.35)$$

$$V^\alpha(N, \bar{x}(t), t) = \frac{1}{3\lambda} \left(\frac{1}{2}(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - dx_0 - \frac{db}{3\lambda} + \frac{d^2}{6\lambda^2} - d\left(b - \frac{d}{\lambda}\right)t \right). \quad (2.36)$$

2.4.2 δ -характеристическая функция

Построим δ -характеристическую [27] функцию по следующему правилу:

$$V^\delta(S, x_0, t_0) = \begin{cases} 0, & S = \emptyset; \\ \max_{u_i, i \in S} \sum_{i \in S} K_i(x_0, t_0, u_S, u_{N \setminus S}^N), & S \subset N; \\ \max_{u_1, \dots, u_n} \sum_{i=1}^N K_i(x_0, t_0, u_1, \dots, u_n), & S = N. \end{cases} \quad (2.37)$$

Здесь $u_{N \setminus S}^N = \{u_j^n\}_{j \in N \setminus S}$, где $u^N = (u_1^N, \dots, u_n^N)$ – стратегии игроков из некоторого равновесия по Нэшу в рассматриваемой игре. Такой подход к построению характеристической функции был предложен в работе [27]. Предполагается, что игроки из коалиции S используют стратегии, которые являются наилучшим ответом на некоторое фиксированное равновесие по Нэшу в игре $\Gamma^{T_{min}}(x_0, t_0)$.

Заметим, что $V^\delta(S, x_0, t_0) \geq V^\alpha(S, x_0, t_0)$. Действительно, поскольку

$$\sum_{i \in S} K_i(x_0, t_0, u_S, u_{N \setminus S}^N) \geq \min_{u_j} \sum_{j \in N \setminus S} K_i(x_0, t_0, u_S, u_{N \setminus S}) \quad \forall u_S,$$

и

$$\max_{u_i, i \in S} \sum_{i \in S} K_i(x_0, t_0, u_S, u_{N \setminus S}^N) \geq \min_{u_j, j \in N \setminus S} \sum_{i \in S} K_i(x_0, t_0, u_S, u_{N \setminus S}) \quad \forall u_S,$$

значит

$$\max_{u_i, i \in S} \sum_{i \in S} K_i(x_0, t_0, u_S, u_{N \setminus S}^N) \geq \max_{u_i, i \in S} \min_{u_j, j \in N \setminus S} \sum_{i \in S} K_i(x_0, t_0, u_S, u_{N \setminus S}).$$

Найдем равновесие по Нэшу в рассматриваемом примере для случая $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 1$. Имеем:

$$u_i^N(t) = \begin{cases} 0, & b_i \leq \frac{d_i}{3\lambda}; \\ b_i - \frac{d_i}{3\lambda}, & b_i > \frac{d_i}{3\lambda}, i = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (2.38)$$

Заметим, что значения $V^\delta(\{i\}, \bar{x}(t), t)$ совпадают с выигрышами игроков в ситуации равновесия по Нэшу. Получаем:

$$V^\delta(\{i\}, \bar{x}(t), t) = \frac{1}{3\lambda} \left(\frac{1}{2} b_i^2 - \frac{d_i^2}{18\lambda^2} - d_i x_0 - d_i \left(b - \frac{d}{\lambda} \right) t - \frac{k_i}{3\lambda} \right), \quad (2.39)$$

где $k_i = d_i(b - \frac{d}{3\lambda})$.

$$V^\delta(\{i, j\}, \bar{x}(t), t) = \frac{1}{3\lambda} \left(\frac{1}{2} (b_i^2 + b_j^2) - \frac{d_{i,j}^2}{9\lambda^2} - d_{i,j} x_0 - d_{i,j} \left(b - \frac{d}{\lambda} \right) t - \frac{k_{i,j}}{3\lambda} \right), \quad (2.40)$$

где $d_{i,j} = d_i + d_j$, $k_{i,j} = (d_i + d_j)(b - \frac{d+d_i+d_j}{3\lambda})$.

Очевидно,

$$V^\delta(N, \bar{x}(t), t) = V^\alpha(N, \bar{x}(t), t). \quad (2.41)$$

2.4.3 ζ -характеристическая функция

Построим ζ -характеристическую функцию [2, 21] по следующему правилу:

$$V^\zeta(S, x_0, t_0) = \begin{cases} 0, & S = \emptyset; \\ \min_{u_j, j \in N \setminus S} \sum_{i \in S} K_i(x_0, t_0, \bar{u}_S, u_{N \setminus S}), & S \subset N; \\ \max_{u_1, \dots, u_n} \sum_{i=1}^N K_i(x_0, t_0, u_1, \dots, u_n), & S = N. \end{cases} \quad (2.42)$$

Здесь при построении $V^\zeta(S, x_0, t_0)$ предполагается, что игроки из коалиции S используют оптимальные кооперативные стратегии, а игроки из коалиции $N \setminus S$ минимизируют суммарный выигрыш коалиции S .

Заметим, что $V^\zeta(S, x_0, t_0) \leq V^\alpha(S, x_0, t_0)$, т.к.

$$\min_{u_j, j \in N \setminus S} \sum_{i \in S} K_i(x_0, t_0, \bar{u}_S, u_{N \setminus S}) \leq \max_{i \in S} \min_{\substack{u_i, \\ j \in N \setminus S}} \sum_{i \in S} K_i(x_0, t_0, u_S, u_{N \setminus S}).$$

Для рассматриваемой игры получаем:

$$V^\zeta(\{i, j\}, \bar{x}(t), t) = \frac{1}{3\lambda} \left(\frac{1}{2}(b_i^2 + b_j^2) - \frac{d^2}{9\lambda^2} - d_{i,j}x_0 - d_{i,j}(b - \frac{d}{\lambda})t - \frac{d_{i,j}}{3\lambda}(b - \frac{2d}{3\lambda}) \right), \quad (2.43)$$

$$V^\zeta(\{i\}, \bar{x}(t), t) = \frac{1}{3\lambda} \left(\frac{1}{2}b_i^2 - \frac{d^2}{18\lambda^2} - d_i x_0 - d_i(b - \frac{d}{\lambda})t - \frac{d_i}{3\lambda}(b - \frac{d}{3\lambda}) \right), \quad (2.44)$$

$$V^\zeta(N, \bar{x}(t), t) = V^\alpha(N, \bar{x}(t), t). \quad (2.45)$$

Несложно проверить, что в рассматриваемом примере все построенные характеристические функции являются супераддитивными. Сравним найденные значения:

$$\begin{aligned}
 V^\delta(\{i, j\}, \bar{x}(t), t) &= V^\alpha(\{i, j\}, \bar{x}(t), t) + \frac{d_k d_{i,j}}{27\lambda^3}, \\
 V^\zeta(\{i, j\}, \bar{x}(t), t) &= V^\alpha(\{i, j\}, \bar{x}(t), t) - \frac{d_k^2}{27\lambda^3}, \\
 V^\delta(\{i\}, \bar{x}(t), t) &= V^\alpha(\{i\}, \bar{x}(t), t) + \frac{d_i d_{j,k}}{27\lambda^3}, \\
 V^\zeta(\{i\}, \bar{x}(t), t) &= V^\alpha(\{i\}, \bar{x}(t), t) - \frac{d_{j,k}^2}{54\lambda^3}.
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

Таким образом, вдоль кооперативной траектории $\bar{x}(t)$ выполнено неравенство (см. также [30]):

$$V^\delta(S, \bar{x}(t), t) \geq V^\alpha(S, \bar{x}(t), t) \geq V^\zeta(S, \bar{x}(t), t), \quad \forall t \in [0, T].$$

В качестве кооперативного принципа оптимальности выберем вектор Шепли [29]. При использовании α -, β -, и γ -характеристических функций получаем следующие выражения для вектора Шепли:

$$\begin{aligned}
 Sh_i^\alpha(\bar{x}(t), t) = Sh_i^\delta(\bar{x}(t), t) &= \frac{1}{18\lambda} \left(3b_i^2 - 6d_i x_0 - 6d_i \left(b - \frac{d}{\lambda}\right)t - \frac{6d_i b}{3\lambda} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{9\lambda^2} (d^2 - d_i^2 + 6dd_i + \sum_{j \neq i} \frac{d_j^2}{2}) \right), \tag{2.47}
 \end{aligned}$$

$$Sh_i^\zeta(\bar{x}(t), t) = \frac{1}{18\lambda} \left(3b_i^2 - 6d_i x_0 - 6d_i \left(b - \frac{d}{\lambda}\right)t - \frac{6d_i b}{3\lambda} + \frac{d_i d}{\lambda^2} \right).$$

Заметим, что для рассматриваемой модели выражения для компонент вектора Шепли (2.47) при использовании α - и δ -характеристических функций совпадают, что является нетривиальным результатом, поскольку построение α -характеристической функции представляется наиболее сложным в смысле технической реализации.

Выигрыши игроков в ситуации равновесия по Нэшу вдоль оптимальной траектории совпадают со значениями $V^\delta(\{i\}, \bar{x}(t), t)$, которые имеют вид (2.39). Тогда разница между выигрышем игроков в

кооперативном и некооперативном варианте игры будет следующая:

$$\begin{aligned} Sh_i^\alpha(\bar{x}(t), t) - V^\delta(\{i\}, \bar{x}(t), t) &= \frac{1}{162\lambda^3}(d^2 + 2d_i^2 + \sum_{j \neq i} \frac{d_j^2}{2}), \\ Sh_i^\delta(\bar{x}(t), t) - V^\delta(\{i\}, \bar{x}(t), t) &= \frac{1}{162\lambda^3}(d^2 + 2d_i^2 + \sum_{j \neq i} \frac{d_j^2}{2}), \\ Sh_i^\zeta(\bar{x}(t), t) - V^\delta(\{i\}, \bar{x}(t), t) &= \frac{1}{54\lambda^3}(d_i^2 + d_i d). \end{aligned} \quad (2.48)$$

Заметим, что выражения для разности в (2.48) не зависят от времени. Во всех трёх случаях полученные разности принимают неотрицательные значения, а это значит, что независимо от выбора способа построения характеристической функции, кооперация оказывается выгодной для каждого из игроков. При этом суммарное загрязнение при кооперации уменьшается. Действительно,

$$\begin{aligned} \sum_i \bar{u}_i(t) &= b - \frac{d}{\lambda}, \\ \sum_i u_i^N(t) &= b - \frac{d}{3\lambda}, \end{aligned}$$

значит

$$\sum_i \bar{u}_i(t) \leq \sum_i u_i^N(t).$$

2.5. Динамическая устойчивость кооперативного решения

В динамических играх важным свойством кооперативного решения является его динамическая устойчивость. В случае, если дележ динамически устойчив, он остается оптимальным в любой подыгре вдоль оптимальной траектории, при условии, что игроки руководствуются принципом оптимальности, выбранным в начале игры. Понятие динамической устойчивости впервые было введено Петросьяном Л.А. в работе [8]. В работе [9] предложен способ решения проблемы динамической неустойчивости кооперативного решения для игр с фиксированной продолжительностью при помощи схемы выплат, получившей название процедуры распределения дележа. В работах [26, 12] эти понятия были адаптированы для игр со случайным моментом окончания игры.

Пусть $L^{Tmin}(x_0, t_0)$ – множество дележей в игре $\Gamma^{Tmin}(x_0, t_0)$, $M^{Tmin}(x_0, t_0) \subset L^{Tmin}(x_0, t_0)$ – принцип оптимальности в игре $\Gamma^{Tmin}(x_0, t_0)$. $M^{Tmin}(\bar{x}(t), t)$ – тот же принцип оптимальности в подыгре $\Gamma^{Tmin}(\bar{x}(t), t)$, начинающейся в момент t из состояния $\bar{x}(t)$, где $\bar{x}(t)$ – оптимальная кооперативная траектория.

Определение 2.1 ([12]). Вектор-функция $\beta(\vartheta) = (\beta_1(\vartheta), \dots, \beta_n(\vartheta))$, $\vartheta \in [t_0, \infty)$, $i = 1, \dots, n$ называется процедурой распределения дележа $\alpha \in L^{Tmin}(x_0, t_0)$ если

$$\alpha_i = \int_{t_0}^{\infty} (1 - F(t))\beta_i(t)dt, \quad i = 1, \dots, n.$$

Определение 2.2 ([12]). Принцип оптимальности $M^{Tmin}(x_0, t_0)$ в игре $\Gamma^{Tmin}(x_0, t_0)$ называется динамически устойчивым, если для любого дележа $\xi \in M^{Tmin}(x_0, t_0)$ существует такая ПРД, что

$$\xi_i = \int_{t_0}^{\vartheta} (1 - F(t))\beta_i(t)dt + (1 - F(\vartheta))\xi_i^{\vartheta}, \quad \forall \vartheta \in [t_0, \infty), \quad (2.49)$$

где $\xi_i^{\vartheta} \in M^{Tmin}(\bar{x}(\vartheta), \vartheta)$, $F(t) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - F_i(t))$.

Заметим, что в нашей задаче второе слагаемое в (2.49) стремится к нулю при $\vartheta \rightarrow \infty$. Для более общего случая исследование свойств функции цены в задачах с бесконечной продолжительностью игры можно найти, например, в [1].

Теорема о виде ПРД, гарантирующей динамическую устойчивость кооперативному решению в дифференциальной игре, была сформулирована в [9], далее она была адаптирована для дифференциальной игры со случайной продолжительностью в работе [10, 12], а для рассматриваемого класса игр она будет иметь следующий вид.

Теорема 2.1. Если $M^{Tmin}(\bar{x}(t), t) \neq \emptyset$ для любого $t \in [t_0, \infty)$, $\{\xi_i^t\} \in M^{Tmin}(\bar{x}(t), t)$ – абсолютно непрерывные функции времени t , $t \in [t_0; \infty)$, тогда принцип оптимальности $M^{Tmin}(x_0, t_0)$ динамически устойчив и ПРД можно вычислить по формуле

$$\beta_i(t) = \lambda(t)\xi_i^t - \frac{d}{dt}\xi_i^t, \quad \{\xi_i^t\} \in M^{Tmin}(\bar{x}(t), t), \quad (2.50)$$

где $\lambda(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(t)$.

3. Теоретико-игровая задача управления вредными выбросами на примере Иркутской области

Загрязнение атмосферы в городах и поселках области является следствием выбросов веществ от предприятий теплоэнергетики, нефтехимической, угольной, деревообрабатывающей промышленности, автотранспорта и т. д. После изучения различных рейтингов городов России и крупных компаний по объему выбросов в воздух загрязняющих веществ для дальнейшего исследования было выбрано экологическое положение в Иркутской области [35]. Из всех городов Иркутской области самая острая экологическая обстановка наблюдается в Братске. Город Братск на протяжении многих лет включается в Приоритетный список городов России с самым высоким уровнем загрязнения воздуха. Например, в перечне 100 самых загрязненных городов в Российской Федерации 2011 г. Братск занимает 2-е место [38].

Основными предприятиями, загрязняющими окружающую среду в Братске, являются ОАО «РУСАЛ Братск», ОАО «Группа «ИЛИМ» в г. Братске и подразделения ОАО «Иркутскэнерго» (ТЭЦ-6 и др.).

Рассмотрим численный пример решения кооперативной игры управления вредными выбросами в Братске при $n = 3$, где в качестве игроков выступают компании, которые являются основными источниками загрязнения атмосферы в городе. Функция полезности имеет рассмотренный ранее вид $R_i(u_i) - d_i(x)$, $R_i(u_i) = b_i u_i - \frac{1}{2} u_i^2$, $d_i(x) = d_i x$, где $\dot{x}(t) = u_1(t) + u_2(t) + u_3(t)$, где $b_i \geq 0$ — коэффициент, равный отношению общего дохода от производства i -ой компанией (P_i) к объему общего загрязнения соответствующей компании (V_i), $d_i \geq 0$ — величина штрафа, который зависит от суммарного загрязнения. По данным о компаниях (см. таблицу 1) были найдены коэффициенты b_i . Для определения штрафов были использованы сведения о том, какие выплаты за загрязнение атмосферы были произведены компаниями в 2011 г.

Данные по чистой прибыли каждой из компаний [34, 36, 4] и загрязнению атмосферы соответствуют положению на 2011 [37] приведены в табл. 1.

Согласно [4] чистая прибыль по производству и распределению электроэнергии, газа и воды, в г. Братске за 2011 г. составляет 105,8

Таблица 1: Данные о компаниях

Компания	P_i (млн. руб.)	V_i (т)
ОАО «РУСАЛ Братск»	2481	86032,3
ОАО «Группа «ИЛИМ» в г. Братске	8 590	5612,679
Подразделения ОАО «Иркутскэнерго»	105,8	20235,7

млн руб. Наиболее крупными структурами в данном виде деятельности являются подразделения ОАО «Иркутскэнерго». Поэтому данное число мы примем в качестве чистой прибыли по подразделениям ОАО «Иркутскэнерго» в г. Братске.

Пусть L_i – фактические платежи компании i за загрязнение атмосферного воздуха.

Фактические платежи ОАО «РУСАЛ Братск» за загрязнение атмосферного воздуха в 2011 г. – $L_1 = 140406,6$ тыс. руб. [37].

Фактические платежи ОАО «Группа «ИЛИМ» в г. Братске за загрязнение атмосферного воздуха в 2011 г. – $L_2 = 11442,4$ тыс. руб. [37].

Плата за выбросы в атмосферный воздух ОАО «Иркутскэнерго» в 2011 г. составила 63695 тыс. руб. [37]. Из них, по нашим оценкам, примерно $L_3 = 4100$ тыс. руб. пришлось на подразделения, действующие в г. Братске.

$b_i \geq 0$ – коэффициент, равный отношению общего дохода от производства i -ой компанией (P_i) к объему общего загрязнения соответствующей компании (V_i), $d_i \geq 0$ – величина штрафа L_i , который зависит от суммарного загрязнения, т.е.:

$$b_i = \frac{P_i}{V_i}, \tag{3.1}$$

$$d_i = \frac{L_i}{V_1 + V_2 + V_3}. \tag{3.2}$$

На основе данных табл. 1 и данных о выплатах компаний за загрязнения окружающей среды были получены следующие результаты, представленные в табл. 2.

Подставим полученные значения параметров b_i , d_i в формулы для оптимальных объемов выбросов, характеристической функции

Таблица 2: Значения коэффициентов

Компания	b_i	d_i
ОАО «РУСАЛ Братск»	28838,01	1254,97
ОАО «Группа «ИЛИМ» в г. Братске	1530463	102,27
Подразделения ОАО «Иркутскэнерго»	5228,4	36,65

(2.43), вектора Шепли (2.47) и компонент процедуры распределения дележа (2.50), полученные в предыдущем разделе.

Значения α -, δ - и ζ -характеристических функций, полученные при использовании найденных значений параметров приведены в табл. 3–5. При $\lambda = 2$:

$$V^\alpha(N, \bar{x}(t), t) = V^\delta(N, \bar{x}(t), t) = V^\zeta(N, \bar{x}(t), t) = 10^7(19520, 41 - 36, 33t).$$

Таблица 3: α -характеристическая функция

$V^\alpha(\{1\}, \bar{x}(t), t)/10^7$	$1, 476628 - 32, 7094t$
$V^\alpha(\{2\}, \bar{x}(t), t)/10^7$	$19518, 8638 - 2, 6656t$
$V^\alpha(\{3\}, \bar{x}(t), t)/10^7$	$0, 06852 - 0, 9552t$
$V^\alpha(\{1, 2\}, \bar{x}(t), t)/10^7$	$19520, 34093 - 35, 3749t$
$V^\alpha(\{1, 3\}, \bar{x}(t), t)/10^7$	$1, 54556 - 33, 6646t$
$V^\alpha(\{2, 3\}, \bar{x}(t), t)/10^7$	$19518, 93235 - 3, 6208t$

Таблица 4: δ -характеристическая функция

$V^\delta(\{1\}, \bar{x}(t), t)/10^7$	$1, 476709 - 32, 7094t$
$V^\delta(\{2\}, \bar{x}(t), t)/10^7$	$19518, 8639 - 2, 6656t$
$V^\delta(\{3\}, \bar{x}(t), t)/10^7$	$0, 06855 - 0, 9552t$
$V^\delta(\{1, 2\}, \bar{x}(t), t)/10^7$	$19520, 34097 - 35, 3749t$
$V^\delta(\{1, 3\}, \bar{x}(t), t)/10^7$	$1, 54562 - 33, 6646t$
$V^\delta(\{2, 3\}, \bar{x}(t), t)/10^7$	$19518, 93243 - 3, 6208t$

Таблица 5: ζ -характеристическая функция

$V^\zeta(\{1\}, \bar{x}(t), t)/10^7$	$1,476624 - 32,7094t$
$V^\zeta(\{2\}, \bar{x}(t), t)/10^7$	$19518,8635 - 2,6656t$
$V^\zeta(\{3\}, \bar{x}(t), t)/10^7$	$0,0681 - 0,9552t$
$V^\zeta(\{1, 2\}, \bar{x}(t), t)/10^7$	$19520,34093 - 35,3749t$
$V^\zeta(\{1, 3\}, \bar{x}(t), t)/10^7$	$1,54555 - 33,6646t$
$V^\zeta(\{2, 3\}, \bar{x}(t), t)/10^7$	$19518,93163 - 3,6208t$

Для каждого типа характеристической функции построен вектор Шепли (см. табл. 6).

Таблица 6: Вектор Шепли

$Sh^\alpha(\bar{x}(t), t)/10^7 = Sh^\delta(\bar{x}(t), t)/10^7$	$Sh^\zeta(\bar{x}(t), t)/10^7$
$1,4771 - 32,7094t$	$1,47748 - 32,7094t$
$19518,86411 - 2,6656t$	$19518,86393 - 2,6656t$
$0,06876 - 0,9552t$	$0,06856 - 0,9552t$

В табл. 7 приведены значения $\Delta^\alpha = Sh_i^\alpha(\bar{x}(t), t) - V^\delta(\{i\}, \bar{x}(t), t)$, $\Delta^\delta = Sh_i^\delta(\bar{x}(t), t) - V^\delta(\{i\}, \bar{x}(t), t)$, $\Delta^\zeta = Sh_i^\zeta(\bar{x}(t), t) - V^\delta(\{i\}, \bar{x}(t), t)$, которые показывают, насколько больше игроки получают при кооперации. Очевидно, что во всех трех случаях для игроков коопера-

Таблица 7: $\Delta^\alpha, \Delta^\delta, \Delta^\zeta$

$\Delta^\alpha = \Delta^\delta$	Δ^ζ
3910	7910
2099,9	299,9
2100	100

тивное решение оказывается более выгодным, чем некооперативное. Первый игрок имеет самый большой размер штрафа d_i и выигрывает от кооперации больше всех. При этом при кооперации общий уровень загрязнения в каждый момент времени снижается на величину $\frac{2d}{3\lambda} = 464,63$.

Можно заметить, что для игроков выгодность использования ζ -характеристической функции относительно других характеристических функции зависит от значений штрафов d_i , $i = 1, 2, 3$. Действительно, согласно (2.46), маргинальные вклады игроков в коалиции, которые учитывает вектор Шепли, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} V^\zeta(\{i, j\}, \bar{x}(t), t) - V^\zeta(\{k\}, \bar{x}(t), t) = \\ = V^\alpha(\{i, j\}, \bar{x}(t), t) - V^\alpha(\{k\}, \bar{x}(t), t) + \frac{(d_i + d_j)^2}{54\lambda^3} - \frac{(d_k)^2}{27\lambda^3}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Для первого игрока с наибольшим значением штрафа величины $\frac{(d_i + d_j)^2}{54\lambda^3} - \frac{(d_k)^2}{27\lambda^3}$ оказываются положительными, для остальных — отрицательными. Связано это с тем, что для построения, например, $V^\zeta(\{i, j\}, \bar{x}(t), t)$ используются оптимальные кооперативные стратегии игроков i и j ($\bar{u}_i = b_i - \frac{d_i + d_j + d_k}{3\lambda}$, $\bar{u}_j = b_j - \frac{d_i + d_j + d_k}{3\lambda}$), зависящие от штрафа d_k третьего игрока. В то же время стратегии игроков i и j , используемые при построении $V^\alpha(\{i, j\}, \bar{x}(t), t)$, не зависят от величины штрафа третьего игрока ($u_i = b_i - \frac{d_i + d_j}{3\lambda}$, $u_j = b_j - \frac{d_i + d_j}{3\lambda}$). Из чего следует, что значения $V^\zeta(\{i, j\}, \bar{x}(t), t)$ получаются меньше $V^\alpha(\{i, j\}, \bar{x}(t), t)$ на величину, пропорциональную d_k . Аналогично значения $V^\zeta(\{k\}, \bar{x}(t), t)$ получаются меньше $V^\alpha(\{k\}, \bar{x}(t), t)$ на величину, пропорциональную $d_i + d_j$. Значит, коалиция с игроком с большим штрафом проигрывает меньше, чем эта же коалиция без него. Отсюда получаем увеличение маргинальных полезностей, а значит и увеличение значения компоненты вектора Шепли для этого игрока.

При использовании процедуры распределения дележа, приведенной в табл. 8, для игроков окажется нецелесообразным отклонение от выбранного кооперативного принципа оптимальности вдоль всей оптимальной кооперативной траектории.

Таблица 8: Процедура распределения дележа

$\beta^\alpha(t)/10^7 = \beta^\delta(t)/10^7$	$\beta^\zeta(t)/10^7$
41, 5720 – 196, 2564t	41, 57428 – 196, 2564t
117115, 85 – 15, 9936t	117115, 849 – 15, 9936t
1, 36776 – 5, 7312t	1, 36656 – 5, 7312t

4. Заключение

В работе была рассмотрена дифференциальная игра управления объемами вредных выбросов, в которой продолжительность игры определяется моментом отказа оборудования производства у какого-либо из игроков. Параметры игры были вычислены исходя из реального экологического положения г. Братска Иркутской области. Было показано, что совместное урегулирование данной проблемы может приносить экономическую выгоду игрокам, а также улучшать общую экологическую обстановку в регионе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Багно А.Л., Тарасьев А.М. *Свойства функции цены в задачах оптимального управления с бесконечным горизонтом* // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. 2016. Вып. 26:1, С. 3–14.
2. Громова Е.В., Петросян Л.А. *Об одном способе построения характеристической функции в кооперативных дифференциальных играх* // Математическая теория игр и ее приложения. 2015. Т. 7. Вып. 4. С. 19–39; Autom. Remote Control. 2017. № 78:9, P. 1680–1692.
3. Захаров В.В., Петросян Л.А. *Математические модели в экологии*. СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 1996.
4. Каверзина Л.А. *Состояние экономики муниципального образования г. Братска в посткризисный период* // Финансовая аналитика. 2013. № 48(186). С. 24–34.
5. Костюнин С. Ю., Палестини А., Шевкопляс Е. В. *Об одной дифференциальной игре, моделирующей разработку невозобновляемого ресурса* // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. Прикл. матем. Информ. Проц. упр. 2013. № 3. С. 73–82.
6. Мазалов В.В., Реттиева А.Н. *Равновесие по Нэшу в задачах охраны окружающей среды* // Матем. моделирование. 2006. Т. 18. № 5. С. 73–90.

7. Петросян Л.А., Мурзов Н.В. *Теоретико-игровые проблемы в механике* // Литовский математический сборник. 1966. № VI-3. С. 423–433.
8. Петросян Л.А. *Устойчивость решений в дифференциальных играх со многими участниками* // Вестник Ленинградского университета. 1977. № 4. С. 46–52.
9. Петросян Л.А., Данилов Н.Н. *Устойчивые решения неантагонистических дифференциальных игр с трансферабельными выигрышами* // Вестник ЛГУ. 1979. № 1. С. 46–54.
10. Петросян Л.А., Шевкопляс Е.В. *Кооперативные дифференциальные игры со случайной продолжительностью* // Вестн. С.-Петербург. ун-та, Сер. 1: Математика, механика, астрономия. 2000. Вып. 4. С. 18–23.
11. Реттиева А.Н. *Кооперативное регулирующее условие в задаче разделения биоресурсов* // УБС. 2009. Вып. 26.1. С. 366–384.
12. Шевкопляс Е.В. *Устойчивая кооперация в дифференциальных играх со случайной продолжительностью* // Математическая теория игр и ее приложения. 2012. Т. 2. Вып. 3. С. 79–105.
13. Шевкопляс Е.В. *Уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана в дифференциальных играх со случайной продолжительностью* // Математическая теория игр и ее приложения. 2009. Т.1. Вып. 2. С. 98–118.
14. Breton M., Zaccour G., Zahaf M. *A differential game of joint implementation of environmental projects* // Automatica. 2005. Vol. 41. N. 10. P. 1737–1749.
15. Dockner E.J., Van Long N. *International pollution control: Cooperative vs noncooperative strategies* // Journal of Environmental Economics and Management. 1993. Vol. 25. P. 13–29.
16. Dockner E., Jorgensen S., Long N. V., Sorger G. *Differential Games in Economics and Management Science*. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.

17. Gromov D., Gromova E.V. *Differential games with random duration: a hybrid systems formulation* // Contributions to Game Theory and Management. 2014. Vol. 7. P. 104–119.
18. Gromov D., Gromova E. *On a Class of Hybrid Differential Games* // Dynamic Games and Applications. 2017. Vol. 7. No. 2. P. 266–289.
19. Gromova E., Marova E. *On the characteristic function construction technique in differential games with prescribed and random duration* // Contributions to Game Theory and Management. 2018. Vol. XI. P. 53–66.
20. Gromova E.V., Tur A.V., Balandina L.I. *A game-theoretic model of pollution control with asymmetric time horizons* // Contributions to Game Theory and Management. 2016. Vol. 9. P. 170–179.
21. Gromova E., Petrosyan L. *On an approach to constructing a characteristic function in cooperative differential games* // Autom Remote Control. 2017. Vol. 78(9). P. 1680–1692.
22. Haurie A., Zaccour G. *Differential game models of global environmental management* // Annals of Dynamic Games, Boston. 1994. P. 124–132.
23. Kostyunin S., Palestini A., Shevkoplyas E.V. *On a nonrenewable resource extraction game played by asymmetric firms* // JOTA. 2014. Vol. 163. P. 660–673.
24. Kostyunin S., Shevkoplyas E. *On simplification of integral payoff in differential games with random duration* // Vestnik S. Petersburg Univ. Ser. 10. Prikl. Mat. Inform. Prots. Upr. 2011. N. 4. P. 47–56.
25. Marin-Solano J., Shevkoplyas E.V. *Non-constant discounting and differential games with random time horizon* // Automatica. 2011. Vol. 47. No. 12. P. 2626–2638.
26. Petrosjan L.A., Shevkoplyas E.V. *Cooperative Solutions for Games with Random Duration. Game Theory and Applications* // Volume IX. Nova Science Publishers. 2003. P. 125–139.

27. Petrosjan L., Zaccour G. *Time-consistent Shapley value allocation of pollution cost reduction* // Journal of Economic Dynamics and Control. 2003. 27(3). P. 381–398.
28. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishenko E. *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov*. Nauka, 1983.
29. Shapley L.S. *A Value for n-person Games* // In: H. W. Kuhn and A. W. Tucker, Eds., Contributions to the Theory of Games II, Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, Princeton. 1953. Vol. 28. P. 307–317.
30. Sedakov A. (2018) Characteristic Functions in a Linear Oligopoly TU Game. In: Petrosyan L., Mazalov V., Zenkevich N. (eds) Frontiers of Dynamic Games. Static & Dynamic Game Theory: Foundations & Applications. Birkhauser, pp. 219–235.
31. von Neumann J., Morgenstern O. *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press, 1953.
32. Weibull W. *A statistical distribution function of wide applicability* // J. Appl. Mech.- Trans. ASME. 1951. 18(3). P. 293–297.
33. Yaari M.E. *Uncertain Lifetime, Life Insurance, and the Theory of the Consumer* // The Review of Economic Studies. 1965. Vol. 32. No. 2. P. 137–150.
34. Бухгалтерская отчетность ОАО «РУСАЛ Братск», 2011 г.
<https://braz-rusal.ru/>
35. Викулова А. А. О нестандартном задании характеристической функции в кооперативных играх, ВКР,
<http://nauchkor.ru/uploads/documents/587d36565f1be77c40d58cff.pdf>
36. Годовой отчет открытого акционерного общества «Группа «Илим» за 2011 г.
<http://www.ilingroup.ru/aktsioneram/raskrytie-informatsii/godovji-otchet/>

37. Государственный доклад «О состоянии и об охране окружающей среды Иркутской области в 2011 году»
<http://irkobl.ru/sites/ecology/working/woter/aukzion/doklad2011.pdf>
38. Государственный доклад «О состоянии и об охране окружающей среды Российской Федерации в 2011 году»
http://www.mnr.gov.ru/docs/o_sostoyanii_i_ob_okhrane_okruzhayushchey_sredy_rossiyskoy_federatsii/130175/
39. Рейтинг 400+100 крупнейших компаний Сибири в 2016 году
https://expert.ru/ratings/rejting-400_100-krupnejshih-kompanij-sibiri-v-2016-godu/

ON THE OPTIMAL CONTROL OF POLLUTION EMISSIONS FOR THE LARGEST ENTERPRISES OF THE IRKUTSK REGION OF THE RUSSIAN FEDERATION

Anna V. Tur, Saint Petersburg State University, Cand.Sc.
(a.tur@spbu.ru)

Ekaterina V. Gromova, Saint Petersburg State University, Dr.Sc.,
associate professor (e.v.gromova@spbu.ru).

Abstract: The paper considers a differential game pollution control in which the duration of the game is a random variable and is determined by the moment of the first failure of the production equipment from any of the players. Game parameters are calculated based on the real ecological situation of the Irkutsk region. The three largest enterprises of Bratsk, where one of the most acute environmental situations in Russia is observed, are chosen as players. A solution was proposed that would improve the overall ecological situation in the region

Keywords: cooperative differential games, random time horizon, time-consistency, strong time-consistency, imputation distribution procedure, pollution control, ecology.