Математическая Теория Игр и её Приложения, т.10, в.3, с. 3–23

УДК 519.83
ББК 22.18

УСТОЙЧИВЫЕ ПО ОУЭНУ КОАЛИЦИОННЫЕ РАЗБИЕНИЯ В ИГРАХ С ВЕКТОРНЫМИ ПЛАТЕЖАМИ

Василий В. Гусев
Владимир В. Мазалов*
Институт прикладных математических исследований
Карельского научного центра РАН
185910, Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11
e-mail: gusev@krc.karelia.ru, vmazalov@krc.karelia.ru

Работа посвящена изучению многокритериальных кооперативных игр с векторными платежами и коалиционным разбиением. Предложен дележ, в основе которого лежит понятие вектора Оуэна. Сформулировано определение устойчивости векторного коалиционного разбиения для бикритериальных игр. В игре трех лиц с характеристической функцией в 0-1 редуцированной форме найдены условия, при которых векторные коалиционные структуры являются устойчивыми.

Ключевые слова: вектор Оуэна, устойчивость коалиционных структур, многокритериальные кооперативные игры.

1. Введение

Игры в нормальной форме определяются игроками, их стратегиями и функциями выигрышей. Под решением игры можно понимать

---

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 16-01-00183а, 16-51-55006)

некоторый набор стратегий, где рассматриваемые стратегии удовлетворяют выбранному критерию оптимальности. Существуют ситуации, в которых целесообразно рассматривать функцию выигрыша каждого игрока как вектор. В таком случае игра называется многокритериальной или игрой с векторными платежами. Например, если требуется оптимизировать доходы и расходы некоторых агентов, то можно рассмотреть многокритериальную игру, в которой функции выигрышей представляют собой вектора из двух компонент: доход, расход. Впервые многокритериальные игры были введены в рассмотрение Шепли [11] в 1959 г. Шепли дал обобщение классического определения равновесия по Нэшу для многокритериальных игр, которое называется слабое и сильное Парето равновесие в игре. В этом случае, если Парето равновесие существует, то его выигрыши нельзя увеличить одновременно по всем критериям.

Чтобы найти равновесие в многокритериальной игре можно составить функционал, который зависит от компонент векторных функций. Например, функционал можно определить как доходы минус расходы. Выбор функционала зависит от прикладной задачи и ее специфики. Многокритериальные игры возникают в строительной индустрии, охраны окружающей среды, сельско-хозяйственной кооперации, решении компьютерных задач, где в зависимости от типа работ, работники объединяются в те или иные коалиции.

Один из методов составления функционала в игре с векторными платежами основан на арбитражной схеме Нэша [2, 8]. Алгоритм заключается в следующем: 1) находятся гарантированные выигрыши каждого игрока, т. е. точка статус-кво; 2) записывается произведение разностей, причем уменьшаемое это компонента векторной функции, а вычитаемое — гарантированный выигрыш рассматриваемого игрока. Полученные произведения разностей являются функциями выигрышей игроков в новой некооперативной игре. Затем выбирается критерий оптимальности и находятся оптимальные стратегии.

Так же существует понятие многокритериальной кооперативной игры [3, 4, 6, 9]. В таких играх совместно рассматривается несколько характеристических функций. В [3] и [4] изучаются многокритериальные простые игры, т. е. характеристическая функция принимает только два значения: 0 и 1. Бикритериальные матричные игры изучаются в [7]. В работах [5], [10] метод потенциалов и понятие рационализации (rationalizability) применяется для анализа многокритериальных игр. Приложение многокритериальных игр для решения экологических задач можно найти в [6].

Определение 1.1. *Игра* $\langle N, v(K)\rangle$ *называется многокритериальной кооперативной игрой, где* $v : 2^N \to R^m$ *векторная характеристическая функция,*

$$v(K) = \begin{pmatrix} v^1(K) \\ v^2(K) \\ \dots \\ v^m(K) \end{pmatrix}, \ \forall K \subseteq N.$$

Также, как и в играх с одним критерием, в многокритериальных играх в качестве решения можно воспользоваться вектором Шепли (см. [6, 9, 11]). В данной работе мы будем предполагать, что существует коалиционное разбиение игроков. В этом случае удобно использовать в качестве решения вектор Оуэна. Так как векторная характеристическая функция представляет собой набор характеристических функций, то разумно предположить существование нескольких коалиционных разбиений.

Определение 1.2. *Коалиционным разбиением множества* N *будем называть множество* $\pi = \{K_1, K_2, \dots, K_l\}$ *для которого выполняется:*

$$\cup_{i=1}^{l} K_i = N; \quad K_i \cap K_j = \emptyset, \forall i, j, i \neq j.$$

Определение 1.3. *Тройку* $\langle N, v(K), \pi\rangle$, *где*

$$v(K) = \left(v^1(K), v^2(K), \dots, v^m(K)\right)^T, K \subseteq N,$$

$\pi = (\pi^1, \pi^2, \dots, \pi^m)^T$ *будем называть кооперативной многокритериальной игрой с векторным коалиционным разбиением.*

В определении 1.3 π^j является коалиционным разбиением множества N, $\forall j \in \{1, 2, \dots, m\}$.

Обсудим теперь, что будем понимать под решением кооперативной многокритериальной игры с векторным коалиционным разбиением. Например, можно рассчитать выигрыши игроков в играх

$\langle N, v^j, \pi^j \rangle$, $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ независимо друг от друга и полученные значения понимать под решением кооперативной игры с векторными характеристической функцией и коалиционным разбиением. Такой способ решения будет приемлемым, если нет влияния игр друг на друга. Однако, по ряду причин игры $\langle N, v^j, \pi^j \rangle$ и $\langle N, v^l, \pi^l \rangle, j \neq l$; $j, l \in \{1, 2, \dots, m\}$ могут быть зависимы. Например, пусть $N = \{1, 2, 3\}$, $v(K) = (v^1(K), v^2(K))^T, \pi = (\pi^1, \pi^2)^T, \pi_1 = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$, $\pi_2 = \{\{1, 3\}, \{2\}\}$. Предположим, что в игре $\langle N, v^1(K), \pi^1 \rangle$ третий игрок является слабым, второй сильнее третьего, первый сильнейший, а в игре$\langle N, v^2(K), \pi^2 \rangle$ второй игрок слабый, третий сильнее второго, первый сильнейший. В такой постановке между игроками 2 и 3 существует конкуренция за место в паре с сильнейшим игроком. Игрок 2 находится в коалиции с игроком 1 в коалиционном разбиении π^1, но он также хотел бы находиться с игроком 1 в коалиции и в разбиении π^2. Аналогичные рассуждения верны и для третьего игрока.

Признанным дележом в кооперативной игре с одной характеристической функцией и одним коалиционным разбиением является вектор Оуэна. В следующем разделе понятие вектора Оуэна расширяется для кооперативных игр с несколькими характеристическими функциями и несколькими коалиционными разбиениями.

2. Вектор Оуэна для игр с векторными платежами

Вектор Оуэна для кооперативных игр с одной характеристической функцией и одним коалиционным разбиениям относится к одноточечным дележам. В отличие от вектора Шепли, при вычислении вектора Оуэна учитываются не всевозможные перестановки игроков, а только те, которые учитывают коалиционное разбиение.

Определение 2.1. *Вектором Оуэна в игре* $\Gamma_j = \langle N, v^j(K), \pi^j \rangle$ *называется вектор, компоненты которого вычисляются по формуле*

$$Ow_i(N, v^j, \pi^j) = \frac{1}{|\sum(N, \pi^j)|} \sum_{\sigma \in \sum(N, \pi^j)} \left(v^j(K_i(\sigma)) - v^j(K_i(\sigma) \setminus \{i\}) \right), \tag{2.1}$$

где $\sum(N, \pi^j)$ *– это множество всех перестановок* σ, *совместимых с коалиционной структурой* π^j, *т.е.* $\forall i, l \in B \in \pi^j$ *выполняется* $|\sigma(i) - \sigma(l)| < |B|$; $K_i(\sigma)$ *– множество игроков, которые в перестановке* σ *стоят до игрока* i, *включая его.*

Можно дать интерпретацию перестановок, которые участвуют при подсчете вектора Оуэна. Предположим, что игроки в случайном порядке входят в комнату. Игрок i, который вошел в комнату последним, решает пропускать или не пропускать следующего игрока j. Если i и j состоят в одной группе в коалиционном разбиении, то i пропускает j в комнату. Если i и j из разных групп, и группа игрока i находится в комнате не полностью, то i не пропускает j. Если все игроки из группы i находятся в комнате, то может войти любой игрок. Процесс пропуска повторяется до тех пор, пока все игроки не окажутся в комнате.

Значения Ауманна-Дрезе определяются по формуле

$$\phi_i^{\pi}(v) = \sum_{K \subseteq B(i), i \in K} \frac{(|B(i)| - |K|)! \cdot (|K|-1)!}{|B(i)|!} \cdot \big(v(K) - v(K \setminus \{i\})\big), \ \forall i \in N,$$

где $B(i) \in \pi, B(i)$ – коалиция, которая содержит в себе игрока i.

Дележи по Оуэну и Ауманну-Дрезе имеют эффективные приложения в задачах, где не все коалиции возможны. Например, это имеет место в играх с одним или несколькими сильными игроками. Такие задачи возникают в играх поиска [1].

Пример 1. Рассмотрим игру $\Gamma = \langle N, v^1(K), \pi^1 \rangle$, где $N = \{1,2,3\}$, $v^1(\emptyset) = 0, v^1(\{i\}) = v^1(\{2,3\}) = 0, v^1(\{1,2\}) = v^1(\{1,3\}) = $ $= v^1(\{1,2,3\}) = 1, \pi^1 = \{\{1,2\},\{3\}\}$. Вектор Оуэна и Ауманна-Дрезе соответственно равны $(0.75, 0.25, 0), (0.5, 0.5, 0)$. Заметим, что игроки 2 и 3 симметричны относительно характеристической функции. Если игрок 3 заинтересует игрока 1, то игрок 1 может выйти из коалиции $\{1,2\}$ и образовать коалицию с игроком 3. Чтобы коалиция $\{1,2\}$ не распалась, игрок 2 доплачивает игроку 1. По этой причине выигрыши игроков 1 и 2 в векторе Оуэна различны. Это отличает вектор Оуэна от Ауманна-Дрезе.

Для того, чтобы сформулировать определение вектора Оуэна для многокритериальных игр, введем некоторые обозначения: $\Sigma(N)$ – множество всех перестановок игроков из множества $N; \Sigma(N, \pi^j)$, $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ – множество перестановок игроков из множества N, где перестановки удовлетворяют коалиционному разбиению π^j $\Sigma(N, \pi) = \bigcup_{j=1}^{m} \Sigma(N, \pi^j)$.

Определение 2.2. *Вектором Оуэна для кооперативной игры с векторными платежами и векторным коалиционным разбиением (модифицированный вектор Оуэна) будем называть вектор*

$$Ow(N,v,\pi) = (Ow^1(N,v^1,\pi), Ow^2(N,v^1,\pi),\dots,Ow^m(N,v^1,\pi)),$$

где

$$Ow^j(N,v^j,\pi) = (Ow^j_1(N,v^j,\pi), Ow^j_2(N,v^j,\pi),\dots,Ow^j_n(N,v^j,\pi)),$$

$$Ow^j_i(N,v^j,\pi) = \frac{1}{|\Sigma(N,\pi)|}\sum_{\sigma\in\Sigma(N,\pi)}\left(v^j(K_i(\sigma)) - v^j(K_i(\sigma)\setminus\{i\})\right),$$

$$1\le j\le m. \quad (2.2)$$

Модифицированный вектор Оуэна отличается от обычного вектора Оуэна только тем, что в модифицированном участвуют перестановки, которые соответствуют хотя бы одному разбиению π^j, $j\in\{1,2,\dots,m\}$. Здесь так же существует интерпретация рассматриваемых перестановок с точки зрения вхождения игроков в комнату. Пусть игрок i находится в комнате. Игрок i пропускает j, если игроки i и j состоят в группе хотя бы в одном коалиционном разбиении. Если существует коалиционное разбиение $\pi^j, j\in\{1,2,\dots,m\}$, что $B(i)\in\pi^j$ и группа игроков $B(i)$ находится в комнате, то после игрока i может войти любой игрок.

Перечислим некоторые свойства модифицированного вектора Оуэна.

Свойство 1. *Если* $\forall j,l\in\{1,2,\dots,m\}:\pi^j=\pi^l$, *то* $Ow^j_i(N,v^j,\pi) = Ow^j_i(N,v^j,\pi^j)$.

Свойство 2. *Если* $\bigcup\limits_{j=1}^{m}\Sigma(N,\pi^j)=\Sigma(N)$, *то* $Ow^j_i(N,v^j,\pi)=\phi^j_i(v^j)$, *где* $\phi^j_i(v^j)$ *это* i*-ая компонента вектора Шепли в игре* $\langle N, v^j(K)\rangle$.

Свойство 3. *Если игрок* i *является болваном в игре* $\langle N,v^j(K)\rangle$, *то* $Ow^j_i(N,v^j,\pi)=0$.

Свойство 4. *Если* $v^j(S\cup\{i\}) = v^j(S\cup\{k\})$ $\forall S\in N\setminus\{i,k\}$, *то* $Ow^j_i(N,v^j,\pi) = Ow^j_k(N,v^j,\pi)$.

Свойство 5. *Пусть* $\forall j,l\in\{1,2,\dots,n\}, l\ne j:\Sigma(N,\pi^j)\cap\Sigma(N,\pi^l)=\emptyset$. *Тогда*

$$Ow_i^j(N, v^j, \pi) = \frac{\sum\limits_{k=1}^{m} |\Sigma(N, \pi^k)| \cdot Ow_i^j(N, v^j, \pi^k)}{\sum\limits_{k=1}^{m} |\Sigma(N, \pi^k)|}.$$

Истинность свойств 1–5 вытекает из определения модифицированного вектора Оуэна.

Чем больше отличий среди коалиционных структур, тем меньше компоненты модифицированного вектора Оуэна отличаются от соответствующих значений вектора Шепли. Это следует из свойства 2. Поэтому, модифицированный вектор Оуэна при достаточно малом числе игроков и достаточно большом значении m не зависит от коалиционных разбиений, при условии, что все коалиционные разбиения различны. Например, пусть в некоторой кооперативной игре трех лиц с векторными платежами существуют два коалиционных разбиения: $\pi^1 = \{\{1,2\},\{3\}\}, \pi^2 = \{\{1,3\},\{2\}\}$. В таком случае $\Sigma(N,\pi) = \Sigma(N)$. Значит, модифицированный вектор Оуэна не зависит от π^1, π^2. Из-за вида коалиционных разбиений, можно сказать, что игрок 1 имеет деловые отношения с игроками 2 и 3 в разных играх. Так как коалиционные разбиения рассматриваются совместно, то деловые отношения в одной игре стали играть роль в другой. Поэтому зависимость дележа от π^1 и π^2 исчезла.

Велика вероятность того, что существуют игроки, с которыми выгодно кооперироваться в одной игре и не выгодно в другой. Такие игроки будут требовать от своих одногруппников кооперироваться с ними в других играх. Модифицированный вектор Оуэна принимает во внимание такое предпочтение игроков, потому что учитываются перестановки, которые удовлетворяют всем коалиционным разбиениям. Значит, сильным игрокам нужно отслеживать с кем кооперироваться, чтобы их деловые отношения в одной игре отрицательно не повлияли на выигрыши в другой.

3. Определение устойчивого векторного коалиционного разбиения

Рассмотрим бикритериальную кооперативную игру $\Gamma = \langle N, v(K), \pi\rangle$, где $v(K) = (v^1(K), v^2(K))\,, K \subseteq N, \pi = (\pi^1, \pi^2)$. Будем предполагать следующее:

- каждая коалиционная структура состоит из одной или двух групп;
- 1 и 2 – игроки, которые образуют группы в играх $\Gamma_1 = \langle N, v^1(K), \pi^1 \rangle$ и $\Gamma_2 = \langle N, v^2(K), \pi^2 \rangle$, соответственно. Игрок $i \in \{1,2\}$ предлагает некоторым игрокам кооперироваться с ним в игре Γ_i. Те игроки, которым не было предложено кооперироваться с игроком i, образуют коалицию.

Игроков 1 и 2 будем называть координирующими игроками. Учитывая предположения, коалиционные разбиения примут вид

$$\pi^1 = \{\{1\} \cup B, N \setminus B \setminus \{1\}\},$$

$$\pi^2 = \{\{2\} \cup C, N \setminus C \setminus \{2\}\},$$

где $B \subseteq N \setminus \{1\}, C \subseteq N \setminus \{2\}$. Заметим, что B и C могут быть пустыми множествами. Если $i \in B, k \in C$, то обозначим

$$\pi^{1,-i} = \{\{1\} \cup B \setminus \{i\}, N \setminus B \setminus \{1\} \cup \{i\}\},$$

$$\pi^{2,-k} = \{\{2\} \cup C \setminus \{k\}, N \setminus C \setminus \{2\} \cup \{k\}\}.$$

Рассматриваемое множество коалиционных структур имеет вид

$$P = \{\pi | \pi = \{B, N \setminus B\}, B \subseteq N\}.$$

Определение 3.1. *Векторное коалиционное разбиение* (π^1_*, π^2_*), $\pi^1_* = \{\{1\} \cup B, N \setminus B \setminus \{1\}\}, \pi^2_* = \{\{2\} \cup C, N \setminus C \setminus \{2\}\}$ *будем называть устойчивым относительно модифицированного вектора Оуэна, если выполняются условия (i) и (ii).*
(i) Неравенства Нэша относительно коалиционных структур для координирующих игроков:

$$Ow^j_1(N, v^j, (\pi^1, \pi^2_*)) \le Ow^j_1(N, v^j, (\pi^1_*, \pi^2_*)) \; \forall j \in \{1,2\}, \forall \pi^1 \in P_1,$$

$$Ow^j_2(N, v^j, (\pi^1_*, \pi^2)) \le Ow^j_2(N, v^j, (\pi^1_*, \pi^2_*)) \; \forall j \in \{1,2\}, \forall \pi^2 \in P_2.$$

(ii) Индивидуальная рациональность для одногруппников координирующих игроков:
если $B \neq \emptyset$, *то* $\forall i \in B$

$$Ow^j_i(N, v^j, (\pi^1_*, \pi^2_*)) \ge Ow^j_i(N, v^j, (\pi^{1,-i}_*, \pi^2_*)) \; \forall j \in \{1,2\};$$

если $C \neq \emptyset$, *то* $\forall k \in C$

$$Ow_k^j(N, v^j, (\pi_*^1, \pi_*^2)) \geq Ow_k^j(N, v^j, (\pi_*^1, \pi_*^{2,-k})) \ \forall j \in \{1, 2\}.$$

Игроки 1 и 2 выбирают выгодное для себя коалиционное разбиение, что следует из условия (i). Игрокам из множеств B, C должно выть выгодно находиться в группах с соответствующими координирующими игроками, что следует из условия (ii). Так же стоит отметить, что игроки 1 и 2 это не обязательно приносят наибольший вклад в коалицию. Их особенность в том, что они способны формировать вокруг себя круг лиц, совместная работа с которыми максимизирует их выигрыш.

Определение 3.2. *Две кооперативные игры* $\langle N, v^j(K)\rangle, \langle N, w^j(K)\rangle$ *называются эквивалентными, если найдутся такие постоянные величины* $\alpha > 0$ *и* $c_i, i \in N$, *что будет иметь место соотношение*

$$v^j(K) = \alpha w^j(K) + \sum_{i \in K} c_i, \forall K \in N.$$

Определение 3.2 можно найти в [2]. Дадим подобное определение эквивалентности многокритериальных кооперативных игр.

Определение 3.3. *Две кооперативные многокритериальные игры* $\Gamma^1 = \langle N, v(K)\rangle, \Gamma^2 = \langle N, w(K)\rangle$ *называются эквивалентными, если найдутся такие постоянные величины* $\alpha^j > 0$ *и* $c_i^j, i \in N, j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ *что будет иметь место соотношение*

$$v^j(K) = \alpha^j w^j(K) + \sum_{i \in K} c_i^j, \forall K \in N, \forall j \in \{1, 2, \ldots, m\}.$$

Лемма 3.1. *Пусть многокритериальные игры* $\Gamma^1 = \langle N, v(K)\rangle$, $\Gamma^2 = \langle N, w(K)\rangle$ *являются эквивалентными. Тогда, если векторное коалиционное разбиение* π *устойчиво в игре* Γ^1, *то* π *так же устойчиво в* Γ^2.

Доказательство. Доказательство в приложении. □

Из Леммы 3.1 следует, что достаточно представить компоненты векторной характеристической функции в 0-1 редуцированной форме для изучения устойчивого коалиционного разбиения.

4. Устойчивые векторные коалиционные разбиения для трех игроков

Рассмотрим бикритериальную кооперативную игру с тремя игроками и векторным коалиционным разбиением $\Gamma = \langle N, v(K), \pi\rangle$, где $N = \{1,2,3\}, K \subseteq N, v(K) = (v^1(K), v^2(K)), \pi = (\pi^1, \pi^2)$. Игроки 1 и 2 по прежнему являются координирующими игроками. Характеристические функции $v^1(K), v^2(K)$ запишем в 0-1 редуцированной форме: $v^1(\emptyset) = v^1(\{1\}) = v^1(\{2\}) = v^1(\{3\}) = 0, v^1(\{1,2\}) = a_1$, $v^1(\{1,3\}) = b_1, v^1(\{2,3\}) = c_1, v^1(N) = 1; v^2(\emptyset) = v^2(\{1\}) = v^2(\{2\}) = v^2(\{3\}) = 0, v^2(\{1,2\}) = a_2, v^2(\{1,3\}) = b_2, v^2(\{2,3\}) = c_2, v^1(N) = 1$.

Множество рассматриваемых коалиционных разбиений имеет вид:

$$P = \{\{\{1,2,3\}\}, \{\{1\},\{2,3\}\}, \{\{1,2\},\{3\}\}, \{\{1,3\},\{2\}\}\}.$$

Формально, коалиционные разбиения $\pi^1 = \{\{1,3\},\{2\}\}$, $\pi^2 = \{\{2\},\{1,3\}\}$ равны. Однако, отличие между π^1 и π^2 заключается в различных условиях устойчивости, а именно, для игрока 3 в π^1 должно выполняться условие индивидуальной рациональности.

Так как $|P| = 4$, то всего существует 16 векторных коалиционных разбиений, каждое из которых может быть устойчивым. Все 16 векторных коалиционных разбиений пронумерованы в таблице 1.

Таблица 1. Нумерация векторных коалиционных разбиений

$\pi^1 \setminus \pi^2$	$\{\{2\},\{1,3\}\}$	$\{\{2,1\},\{3\}\}$	$\{\{2,3\},\{1\}\}$	$\{\{1,2,3\}\}$
$\{\{1\},\{2,3\}\}$	1	2	3	4
$\{\{1,2\},\{3\}\}$	5	6	7	8
$\{\{1,3\},\{2\}\}$	9	10	11	12
$\{\{1,2,3\}\}$	13	14	15	16

Вектор Шепли и вектор Оуэна для рассматриваемых коалиционных структур в игре $\langle N, v^1\rangle$ имеют следующий вид:

$$Ow(N, v^1, \{N\}) = \phi(v^1) =$$

$$= \left(\frac{a_1}{6} + \frac{b_1}{6} + \frac{1-c_1}{3}, \frac{a_1}{6} + \frac{c_1}{6} + \frac{1-b_1}{3}, \frac{b_1}{6} + \frac{c_1}{6} + \frac{1-a_1}{3}\right);$$

$$Ow(N, v^1, \{\{1\},\{2,3\}\}) = \left(\frac{1-c_1}{2}, \frac{a_1}{4} + \frac{c_1}{4} + \frac{1-b_1}{4}, \frac{b_1}{4} + \frac{c_1}{4} + \frac{1-a_1}{4}\right);$$

$$Ow(N, v^1, \{\{1,2\},\{3\}\}) = \left(\frac{a_1}{4} + \frac{b_1}{4} + \frac{1-c_1}{4}, \frac{a_1}{4} + \frac{c_1}{4} + \frac{1-b_1}{4}, \frac{1-a_1}{2}\right);$$

$$Ow(N, v^1, \{\{1,3\},\{2\}\}) = \left(\frac{a_1}{4} + \frac{b_1}{4} + \frac{1-c_1}{4}, \frac{1-b_1}{2}, \frac{b_1}{4} + \frac{c_1}{4} + \frac{1-a_1}{4}\right).$$

Теорема 4.1. *Справедливы следующие утверждения:*

- *если* $a_j + b_j + c_j = 1, \forall j \in \{1, 2\}$, *то коалиционные структуры с номерами 1-15 устойчивы;*
- *если* $a_j + b_j + c_j < 1, \forall j \in \{1, 2\}$, *то коалиционные структуры с номерами 1, 2, 5 устойчивы;*
- *если* $a_j + b_j + c_j > 1, \forall j \in \{1, 2\}$, *то коалиционная структура с номером 6 устойчива;*
- *коалиционная структура с номером 16 устойчива для любых значений параметров* $a_j, b_j, c_j, \forall j \in \{1, 2\}$.

Доказательство. Доказательство в приложении. □

Поясним результат теоремы 4.1. При фиксированных значениях a_j, b_j, c_j равенство $a_j + b_j + c_j = 1$ $\forall j \in \{1, 2\}$ справедливо редко. Чаще выполняется неравенство $a_j + b_j + c_j \leq 1$ или $a_j + b_j + c_j \geq 1$. Значит, векторные коалиционные структуры с номерами 1, 2, 5, 6 являются устойчивыми часто. Их объединяет то, что в каждом коалиционном разбиении координирующие игроки образуют группу друг с другом или не кооперируются ни с кем. Поэтому, каждый координирующий игрок должен получить как можно больше информации о другом координирующем игроке чтобы узнать, возможна ли коалиция между ними в играх $\langle N, v^1, \pi^1 \rangle$ и $\langle N, v^2, \pi^2 \rangle$. Если кооперация между координирующими игроками невозможна, то кооперация с не координирующим игроком будет неустойчива. Стоит отметить, что такой результат справедлив для трех игроков.

5. Условия устойчивости коалиционных структур в олигополии Курно для трех игроков

Пусть $N = \{1, 2, 3\}$ множество игроков (фирм), q_i – количество товара, которое произвела фирма $i \in N, q_i \in [0; 2u_i], u_i > 0$. Введем в рассмотрение векторную характеристическую функцию

$$v(K) = (v^1(K), v^2(K)),$$

$$v^1(K) = \min_{q_i, i \in N \setminus K} \max_{q_i, i \in K} \left(2p - \sum_{i=1}^{n} q_i\right) \sum_{k \in K} q_k,$$

$$v^2(K) = -c_K \cdot \min_{q_i, i \in N \setminus K} \sum_{i \in K} q_i^*,\ q_i^* \in \operatorname*{argmax}_{q_i, i \in K} \left\{ \left(2p - \sum_{i=1}^{n} q_i\right) \sum_{k \in K} q_k \right\}.$$

Функция $v^1(K)$ это гарантированный выигрыш коалиции K, $K \subseteq N$ в олигополии Курно. Значение c_K это затраты коалиции K на реализацию одной единицы продукции,
$c_K \leq \sum\limits_{i \in K} c_i$. Тогда $v^2(K)$ – отрицательные расходы коалиции K.

Утверждение 5.1. *Компоненты бикритериальной характеристической функции $v(K)$ вычисляются по формулам*

$$v^1(K) = \left(p - \sum_{i \in N \setminus K} u_i\right)^2, v^2(K) = -c_K \cdot \left(p - \sum_{i \in N \setminus K} u_i\right).$$

Доказательство. Доказательство в приложении. □

Обозначим $w(K) = (w^1(K), w^2(K)), K \subseteq N$ бикритериальную характеристическую функцию, которая является 0-1 редуцированной формой функций $v(K) = (v^1(K), v^2(K))$. Верны следующие равенства

$$\forall i \in N : w^1(\{i\}) = w^2(\{i\}) = 0, w^1(N) = w^2(N) = 1,$$

$$w^1(\{12\}) = \frac{(p-u_3)^2 - (p-u_2-u_3)^2 - (p-u_1-u_3)^2}{p^2 - (p-u_2-u_3)^2 - (p-u_1-u_3)^2 - (p-u_1-u_2)^2},$$

$$w^1(\{13\}) = \frac{(p-u_2)^2 - (p-u_2-u_3)^2 - (p-u_1-u_2)^2}{p^2 - (p-u_2-u_3)^2 - (p-u_1-u_3)^2 - (p-u_1-u_2)^2},$$

$$w^1(\{23\}) = \frac{(p-u_1)^2 - (p-u_1-u_3)^2 - (p-u_1-u_2)^2}{p^2 - (p-u_2-u_3)^2 - (p-u_1-u_3)^2 - (p-u_1-u_2)^2},$$

$$w^2(\{12\}) = \frac{-c_{12}(p-u_3)+c_1(p-u_2-u_3)+c_2(p-u_1-u_3)}{-c_{123}p+c_1(p-u_2-u_3)+c_2(p-u_1-u_3)+c_3(p-u_1-u_2)},$$
$$w^2(\{13\}) = \frac{-c_{13}(p-u_2)+c_1(p-u_2-u_3)+c_3(p-u_1-u_2)}{-c_{123}p+c_1(p-u_2-u_3)+c_2(p-u_1-u_3)+c_3(p-u_1-u_2)},$$
$$w^2(\{23\}) = \frac{-c_{23}(p-u_1)+c_2(p-u_1-u_3)+c_3(p-u_1-u_2)}{-c_{123}p+c_1(p-u_2-u_3)+c_2(p-u_1-u_3)+c_3(p-u_1-u_2)}.$$

Утверждение 5.2. *Пусть* $\forall K \subseteq N, K \neq \emptyset : c_K = \sum_{i \in K} c_i$. *Коалиционные структуры с номерами 1–16 устойчивы, если*

$$p = u_1 + u_2 + u_3.$$

Доказательство. Доказательство в приложении. □

6. Заключение

Вопрос устойчивости коалиционных структур занимает центральное место в кооперативной теории игр. Так как в многокритериальных играх коалиционных структур может быть несколько, стоит вопрос о том, что понимать под устойчивой коалиционной структурой. В данной работе определение устойчивости основано на существовании координирующих игроков.

Понятие вектора Оуэна расширено для многокритериальных игр. Особенность предложенного дележа состоит в том, что при вычислении выигрышей игроков учитываются все компоненты векторного коалиционного разбиения.

Для модели Курно найдены условия, при которых любые коалиционные структуры будут устойчивы. Это может быть использовано для дизайна стабильного рынка. Если ограничения на производство товаров согласованы с ценой товара, как в утверждении 5.2, то сложившееся на рынке коалиционное разбиение будет устойчивым.

7. Приложение

Доказательство Леммы 3.1. По условию, π является устойчивым в Γ^1, значит выполняется неравенство

$$Ow_1^j(N, v^j, (\pi^1, \pi_*^2)) \leq Ow_1^j(N, v^j, (\pi_*^1, \pi_*^2)) \; \forall j \in \{1,2\}, \forall \pi^1 \in P_1;$$

$$\frac{1}{|\Sigma(N,(\pi^1,\pi^2_*))|}\sum_{\sigma\in\Sigma(N,(\pi^1,\pi^2_*))}\big(v^j(K_1(\sigma))-v^j(K_1(\sigma)\setminus\{1\})\big)\le$$

$$\le\frac{1}{|\Sigma(N,(\pi^1_*,\pi^2_*))|}\sum_{\sigma\in\Sigma(N,(\pi^1_*,\pi^2_*))}\big(v^j(K_1(\sigma))-v^j(K_1(\sigma)\setminus\{1\})\big)\,\forall\pi^1\in P_1;$$

$$v^j(K_1(\sigma))-v^j(K_1(\sigma)\setminus\{1\})=\left(\alpha^j w^j(K_1(\sigma))+\sum_{i\in K_1(\sigma)}c^j_i\right)-$$

$$-\left(\alpha^j w^j(K_1(\sigma)\setminus\{1\})+\sum_{i\in K_1(\sigma)\setminus\{1\}}c^j_i\right)=$$

$$\alpha^j\left(w^j(K_1(\sigma))-w^j(K_1(\sigma)\setminus\{1\})\right)+c^j_1;$$

$$\frac{\alpha^j}{|\Sigma(N,(\pi^1,\pi^2_*))|}\sum_{\sigma\in\Sigma(N,(\pi^1,\pi^2_*))}\big(w^j(K_1(\sigma))-w^j(K_1(\sigma)\setminus\{1\})\big)+c^j_1\le$$

$$\le\frac{\alpha^j}{|\Sigma(N,(\pi^1_*,\pi^2_*))|}\sum_{\sigma\in\Sigma(N,(\pi^1_*,\pi^2_*))}\big(w^j(K_1(\sigma))-w^j(K_1(\sigma)\setminus\{1\})\big)+c^j_1$$

$$\forall\pi^1\in P_1.$$

После сокращения c^j_1 и деления неравенства на положительное число α^j, получим неравенство Нэша из условия (i) для игрока 1 в игре Γ^2. Аналогичным образом доказывается неравенство Нэша для игрока 2 и условие индивидуальной рациональности. Значит, π является устойчивым в игре Γ^2. $\square$

Доказательство Теоремы 4.1. Из свойств 1 и 2 следует равенство

$$Ow^j_i(N,v^j,(\pi^1,\pi^2))=\begin{cases}Ow^j_i(N,v^j,\pi^1), & \pi^1=\pi^2;\\ \phi^j_i(v^j), & \pi^1\neq\pi^2.\end{cases}$$

Рассмотрим 16 случаев. Нумерация коалиционных структур представлена в таблице 1. Неравенства со знаком $\le,\ge$ в первой системе каждого случая эквивалентны условию $(i),(ii)$, соответственно.

1) $\pi^1_*=\{\{1\},\{2,3\}\},\pi^2_*=\{\{2\},\{1,3\}\}$.

$$\begin{cases}Ow^j_1(N,v^j,\{\{2\},\{1,3\}\})\le\phi^j_1(v^j);\\ Ow^j_2(N,v^j,\{\{1\},\{2,3\}\})\le\phi^j_2(v^j).\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{a_j}{4} + \frac{b_j}{4} + \frac{1-c_j}{4} \leq \frac{a_j}{6} + \frac{b_j}{6} + \frac{1-c_j}{3}; \\ \frac{a_j}{4} + \frac{c_j}{4} + \frac{1-b_j}{4} \leq \frac{a_j}{6} + \frac{c_j}{6} + \frac{1-b_j}{3}. \end{cases} \Leftrightarrow a_j + b_j + c_j \leq 1.$$

2) Пусть $\pi = \{\pi_*^1, \pi_*^2\}, \pi_*^1 = \{\{1\},\{2,3\}\}, \pi_*^2 = \{\{2,1\},\{3\}\}$. Тогда $\forall j \in \{1,2\}:$

$$\begin{cases} Ow_1^j(N, v^j, \{\{2,1\},\{3\}\}) \leq \phi_1^j(v^j); \\ Ow_2^j(N, v^j, \{\{1\},\{2,3\}\}) \leq \phi_2^j(v^j); \\ \phi_1^j \geq \phi_1^j. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{a_j}{4} + \frac{b_j}{4} + \frac{1-c_j}{4} \leq \frac{a_j}{6} + \frac{b_j}{6} + \frac{1-c_j}{3}; \\ \frac{a_j}{4} + \frac{c_j}{4} + \frac{1-b_j}{4} \leq \frac{a_j}{6} + \frac{c_j}{6} + \frac{1-b_j}{3}. \end{cases} \Leftrightarrow a_j + b_j + c_j \leq 1.$$

3) $\pi_*^1 = \{\{1\},\{2,3\}\}, \pi_*^2 = \{\{2,3\},\{1\}\}$.

$$\begin{cases} \phi_1^j(v^j) \leq Ow_1^j(N, v^j, \{\{1\},\{2,3\}\}); \\ \phi_2^j(v^j) \leq Ow_2^j(N, v^j, \{\{1\},\{2,3\}\}); \\ Ow_3^j(N, v^j, \{\{1\},\{2,3\}\}) \geq \phi_3^j. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{a_j}{6} + \frac{b_j}{6} + \frac{1-c_j}{3} \leq \frac{1-c_j}{2}; \\ \frac{a_j}{6} + \frac{c_j}{6} + \frac{1-b_j}{3} \leq \frac{a_j}{4} + \frac{c_j}{4} + \frac{1-b_j}{4}; \\ \frac{b_j}{6} + \frac{c_j}{6} + \frac{1-a_j}{3} \leq \frac{b_j}{4} + \frac{c_j}{4} + \frac{1-a_j}{4}. \end{cases} \Leftrightarrow a_j + b_j + c_j = 1.$$

4) $\pi_*^1 = \{\{1\},\{2,3\}\}, \pi_*^2 = \{\{2,1,3\}\}$.

$$\begin{cases} \phi_1^j(v^j) \leq \phi_1^j(v^j); \\ Ow_2^j(N, v^j, \{\{1\},\{2,3\}\}) \leq \phi_2^j(v^j); \\ \phi_1^j(v^j) \geq Ow_1^j(N, v^j, \{\{1\},\{2,3\}\}); \\ \phi_3^j(v^j) \geq \phi_3^j(v^j). \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{a_j}{4} + \frac{c_j}{4} + \frac{1-b_j}{4} \leq \frac{a_j}{6} + \frac{c_j}{6} + \frac{1-b_j}{3}; \\ \frac{a_j}{6} + \frac{b_j}{6} + \frac{1-c_j}{3} \geq \frac{1-c_j}{2}. \end{cases} \Leftrightarrow a_j + b_j + c_j = 1.$$

5) $\pi_*^1 = \{\{1,2\},\{3\}\}, \pi_*^2 = \{\{2\},\{1,3\}\}$.

$$\begin{cases} Ow_1^j(N, v^j, \{\{2\},\{1,3\}\}) \leq \phi_1^j(v^j); \\ Ow_2^j(N, v^j, \{\{1\},\{2,3\}\}) \leq \phi_2^j(v^j); \\ \phi_2^j \geq \phi_2^j. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{a_j}{4}+\frac{b_j}{4}+\frac{1-c_j}{4} \le \frac{a_j}{6}+\frac{b_j}{6}+\frac{1-c_j}{3}; \\ \frac{a_j}{4}+\frac{c_j}{4}+\frac{1-b_j}{4} \le \frac{a_j}{6}+\frac{c_j}{6}+\frac{1-b_j}{3}. \end{cases} \Leftrightarrow a_j+b_j+c_j \le 1.$$

6) $\pi_*^1 = \{\{1,2\},\{3\}\}, \pi_*^2 = \{\{2,1\},\{3\}\}$.

$$\begin{cases} \phi_1^j(v^j) \le Ow_1^j(N, v^j, \{\{1,2\},\{3\}\}); \\ \phi_2^j(v^j) \le Ow_2^j(N, v^j, \{\{1,2\},\{3\}\}); \\ Ow_2^j(N, v^j, \{\{1,2\},\{3\}\}) \ge \phi_2^j; \\ Ow_1^j(N, v^j, \{\{1,2\},\{3\}\}) \ge \phi_1^j. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{a_j}{6}+\frac{b_j}{6}+\frac{1-c_j}{3} \le \frac{a_j}{4}+\frac{b_j}{4}+\frac{1-c_j}{4}; \\ \frac{a_j}{6}+\frac{c_j}{6}+\frac{1-b_j}{3} \le \frac{a_j}{4}+\frac{c_j}{4}+\frac{1-b_j}{4}. \end{cases} \Leftrightarrow a_j+b_j+c_j \ge 1.$$

7) $\pi_*^1 = \{\{1,2\},\{3\}\}, \pi_*^2 = \{\{2,3\},\{1\}\}$.

$$\begin{cases} Ow_1^j(N, v^j, \{\{1\},\{2,3\}\}) \le \phi_1^j(v^j); \\ Ow_2^j(N, v^j, \{\{1,2\},\{3\}\}) \le \phi_2^j(v^j); \\ \phi_2^j(v^j) \ge Ow_2^j(N, v^j, \{\{1\},\{2,3\}\}); \\ \phi_3^j(v^j) \ge \phi_3^j(v^j). \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{1-c_1}{2} \le \frac{a_j}{6}+\frac{b_j}{6}+\frac{1-c_j}{3}; \\ \frac{a_j}{4}+\frac{c_j}{4}+\frac{1-b_j}{4} \le \frac{a_j}{6}+\frac{c_j}{6}+\frac{1-b_j}{3}; \\ \frac{a_j}{6}+\frac{c_j}{6}+\frac{1-b_j}{3} \ge \frac{a_j}{4}+\frac{c_j}{4}+\frac{1-b_j}{4}. \end{cases} \Leftrightarrow a_j+b_j+c_j = 1.$$

8) $\pi_*^1 = \{\{1,2\},\{3\}\}, \pi_*^2 = \{\{2,1,3\}\}$.

$$\begin{cases} \phi_1^j(v^j) \le \phi_1^j(v^j); \\ Ow_2^j(N, v^j, \{\{1,2\},\{3\}\}) \le \phi_2^j(v^j); \\ \phi_2^j(v^j) \ge \phi_2^j(v^j); \\ \phi_1^j(v^j) \ge \phi_1^j(v^j); \\ \phi_3^j(v^j) \ge Ow_3^j(N, v^j, \{\{1,2\},\{3\}\}). \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{a_j}{4}+\frac{c_j}{4}+\frac{1-b_j}{4} \le \frac{a_j}{6}+\frac{c_j}{6}+\frac{1-b_j}{3}; \\ \frac{b_j}{6}+\frac{c_j}{6}+\frac{1-a_j}{3} \ge \frac{1-a_j}{2}. \end{cases} \Leftrightarrow a_j+b_j+c_j = 1.$$

9) $\pi_*^1 = \{\{1,3\},\{2\}\}, \pi_*^2 = \{\{2\},\{1,3\}\}$.

$$\begin{cases} \phi_1^j(v^j) \le Ow_1^j(N, v^j, \{\{2\},\{1,3\}\}); \\ \phi_2^j(v^j) \le Ow_2^j(N, v^j, \{\{2\},\{1,3\}\}); \\ Ow_3^j(N, v^j, \{\{2\},\{1,3\}\}) \ge \phi_3^j(v^j); \\ Ow_3^j(N, v^j, \{\{2\},\{1,3\}\}) \ge \phi_3^j(v^j). \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{a_j}{6} + \frac{b_j}{6} + \frac{1-c_j}{3} \le \frac{a_j}{4} + \frac{b_j}{4} + \frac{1-c_j}{4}; \\ \frac{a_j}{6} + \frac{c_j}{6} + \frac{1-b_j}{3} \le \frac{1-b_j}{2}; \\ \frac{b_j}{4} + \frac{c_j}{4} + \frac{1-a_j}{4} \ge \frac{b_j}{6} + \frac{c_j}{6} + \frac{1-a_j}{3}. \end{cases} \Leftrightarrow a_j + b_j + c_j = 1.$$

10) $\pi_*^1 = \{\{1,3\},\{2\}\}, \pi_*^2 = \{\{2,1\},\{3\}\}$.

$$\begin{cases} Ow_1^j(N, v^j, \{\{1,2\},\{3\}\}) \le \phi_1^j(v^j); \\ Ow_2^j(N, v^j, \{\{1,3\},\{2\}\}) \le \phi_2^j(v^j); \\ \phi_3^j(v^j) \ge \phi_3^j(v^j); \\ \phi_1^j(v^j) \ge Ow_1^j(N, v^j, \{\{1,3\},\{2\}\}). \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{a_j}{4} + \frac{b_j}{4} + \frac{1-c_j}{4} \le \frac{a_j}{6} + \frac{b_j}{6} + \frac{1-c_j}{3}; \\ \frac{1-b_j}{2} \le \frac{a_j}{6} + \frac{c_j}{6} + \frac{1-b_j}{3}; \\ \frac{a_j}{6} + \frac{b_j}{6} + \frac{1-c_j}{3} \ge \frac{a_j}{4} + \frac{b_j}{4} + \frac{1-c_j}{4}. \end{cases} \Leftrightarrow a_j + b_j + c_j = 1.$$

11) $\pi_*^1 = \{\{1,3\},\{2\}\}, \pi_*^2 = \{\{2,3\},\{1\}\}$.

$$\begin{cases} Ow_1^j(N, v^j, \{\{1\},\{2,3\}\}) \le \phi_1^j(v^j); \\ Ow_2^j(N, v^j, \{\{1,3\},\{2\}\}) \le \phi_2^j(v^j); \\ \phi_3^j(v^j) \ge Ow_3^j(N, v^j, \{\{1\},\{2,3\}\}); \\ \phi_3^j(v^j) \ge Ow_3^j(N, v^j, \{\{2\},\{1,3\}\}). \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{1-c_1}{2} \le \frac{a_j}{6} + \frac{b_j}{6} + \frac{1-c_j}{3}; \\ \frac{1-b_1}{2} \le \frac{a_j}{6} + \frac{c_j}{6} + \frac{1-b_j}{3}; \\ \frac{b_j}{6} + \frac{c_j}{6} + \frac{1-a_j}{3} \ge \frac{b_j}{4} + \frac{c_j}{4} + \frac{1-a_j}{4}; \\ \frac{b_j}{6} + \frac{c_j}{6} + \frac{1-a_j}{3} \ge \frac{b_j}{4} + \frac{c_j}{4} + \frac{1-a_j}{4}. \end{cases} \Leftrightarrow a_j + b_j + c_j = 1.$$

12) $\pi_*^1 = \{\{1,3\},\{2\}\}, \pi_*^2 = \{\{1,2,3\}\}$.

$$\begin{cases} \phi_1^j(v^j) \le \phi_1^j(v^j); \\ Ow_2^j(N, v^j, \{\{1,3\},\{2\}\}) \le \phi_2^j(v^j); \\ \phi_3^j(v^j) \ge \phi_3^j(v^j); \\ \phi_2^j(v^j) \ge Ow_2^j(N, v^j, \{\{2\},\{1,3\}\}); \\ \phi_3^j(v^j) \ge \phi_3^j(v^j). \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} Ow_2^j(N, v^j, \{\{1,3\},\{2\}\}) \le \phi_2^j(v^j); \\ \phi_2^j(v^j) \ge Ow_2^j(N, v^j, \{\{2\},\{1,3\}\}). \end{cases} \Leftrightarrow a_j + b_j + c_j = 1.$$

13) $\pi_*^1 = \{\{1,2,3\}\}, \pi_*^2 = \{\{2\},\{1,3\}\}$.

$$\begin{cases} Ow_1^j(N, v^j, \{\{1,3\},\{2\}\}) \le \phi_1^j(v^j); \\ \phi_2^j(v^j) \le \phi_2^j(v^j); \\ \phi_2^j(v^j) \ge Ow_2^j(N, v^j, \{\{2\},\{1,3\}\}); \\ \phi_3^j(v^j) \ge \phi_3^j(v^j). \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{a_j}{4} + \frac{b_j}{4} + \frac{1-c_j}{4} \le \frac{a_j}{6} + \frac{b_j}{6} + \frac{1-c_j}{3}; \\ \frac{a_j}{6} + \frac{c_j}{6} + \frac{1-b_j}{3} \ge \frac{1-b_1}{2}. \end{cases} \Leftrightarrow a_j + b_j + c_j = 1.$$

14) $\pi_*^1 = \{\{1,2,3\}\}, \pi_*^2 = \{\{2,1\},\{3\}\}$.

$$\begin{cases} Ow_1^j(N, v^j, \{\{1,2\},\{3\}\}) \le \phi_1^j(v^j); \\ \phi_2^j(v^j) \le \phi_2^j(v^j); \\ \phi_2^j(v^j) \ge \phi_2^j(v^j); \\ \phi_3^j(v^j) \ge Ow_3^j(N, v^j, \{\{1,2\},\{3\}\}). \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{a_j}{4} + \frac{b_j}{4} + \frac{1-c_j}{4} \le \frac{a_j}{6} + \frac{b_j}{6} + \frac{1-c_j}{3}; \\ \frac{b_j}{6} + \frac{c_j}{6} + \frac{1-a_j}{3} \ge \frac{1-a_1}{2}. \end{cases} \Leftrightarrow a_j + b_j + c_j = 1.$$

15) $\pi_*^1 = \{\{1,2,3\}\}, \pi_*^2 = \{\{2,3\},\{1\}\}$.

$$\begin{cases} Ow_1^j(N, v^j, \{\{1\},\{2,3\}\}) \le \phi_1^j(v^j); \\ \phi_2^j(v^j) \le \phi_2^j(v^j); \\ \phi_2^j(v^j) \ge \phi_2^j(v^j); \\ \phi_3^j(v^j) \ge \phi_3^j(v^j); \\ \phi_3^j(v^j) \ge \phi_3^j(v^j). \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1-c_1}{2} \le \frac{a_j}{6} + \frac{b_j}{6} + \frac{1-c_j}{3} \Leftrightarrow a_j + b_j + c_j = 1.$$

16) $\pi^1_* = \{\{1,2,3\}\}, \pi^2_* = \{\{1,2,3\}\}$. Если хотя бы одно из разбиений π^1, π^2_* равно $\{1,2,3\}$, то модифицированный вектор Оуэна тождественен вектору Шепли. Условия $(i), (ii)$ выполняются, потому что в левой и в правой частях неравенств будут стоять одинаковые компоненты вектора Шепли. □

Доказательство Утверждения 5.1.

$$v^1(K) = \min_{q_i, i\in N\setminus K} \max_{q_i, i\in K} \left(2p - \sum_{i=1}^{n} q_i\right) \sum_{k\in K} q_k = \frac{1}{4} \cdot \min_{q_i, i\in N\setminus K} \left(2p - \sum_{i\in N\setminus K} q_i\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\left(2p - \sum_{i\in N\setminus K} 2u_i\right)^2 = \left(p - \sum_{i\in N\setminus K} u_i\right)^2,$$

$$v^2(K) = -c_K \cdot \min_{q_i, i\in N\setminus K} \frac{2p - \sum\limits_{i\in N\setminus K} q_i}{2} = -c_K \cdot \frac{2p - \sum_{i\in N\setminus K} 2u_i}{2} =$$

$$= -c_K \cdot \left(p - \sum_{i\in N\setminus K} u_i\right).$$

□

Доказательство Утверждения 5.2. Для доказательства воспользуемся Теоремой 4.1. Если
$w^j(\{12\}) + w^j(\{12\}) + w^j(\{23\}) = 1 \ \forall j \in \{1,2\}$, то коалиционные структуры с номерами 1–15 устойчивы. Верна следующая последовательность равенств

$$w^1(\{12\}) + w^1(\{13\}) + w^1(\{23\}) = 1 \Leftrightarrow (p-u_1)^2 + (p-u_2)^2 + (p-u_3)^2 -$$

$$-2(p-u_1-u_2)^2 - 2(p-u_1-u_3)^2 - 2(p-u_2-u_3)^2 = p^2 - (p-u_1-u_2)^2 -$$

$$-(p-u_1-u_3)^2 - (p-u_2-u_3)^2 \Leftrightarrow 2p(u_1+u_2+u_3) =$$

$$= p^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + 2(u_2u_3 + u_1u_3 + u_1u_2) \Leftrightarrow (p-u_1-u_2-u_3)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow p = u_1 + u_2 + u_3.$$

Для любых допустимых значений параметров $w^2(\{12\}) + w^2(\{13\}) + w^2(\{23\}) = 1$ выполняется. Следовательно, по теореме 1, для устойчивости рассматриваемых коалиционных структур достаточно выполнение $p = u_1 + u_2 + u_3$. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gusev V.V. *Shapley, Owen and Aumann–Dreze values in a patrolling game with coalition structure* // Automation and Remote Control. 2017. Vol. 78. N 10. P. 1883–1891.

2. Mazalov V. *Mathematical game theory and applications.* John Wiley & Sons, 2014.

3. Monroy L., Fernandez F.R. *Weighted multi-criteria simple games and voting systems* // Foundations of Computing and Decision Sciences. 2007. Vol. 32. N 4. P. 295–313.

4. Fernandez F., Monroy L. *Multi-criteria simple games* // Multiobjective programming and goal programming: theoretical results and practical applications. 2009.

5. Patrone F., Pusillo L., Tijs S. *Multicriteria games and potentials* // Top. 2007. Vol. 15. N 1. P. 138–145.

6. Pieri G., Pusillo L. *Multicriteria partial cooperative games* // Applied Mathematics. 2015. Vol. 6. N 12. P. 2125.

7. Puerto J., Perea F. *On minimax and pareto optimal security payoffs in multicriteria games* // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2018. Vol. 457. N 2. P. 1634–1648.

8. Rettieva A. *Dynamic Multicriteria Games with Finite Horizon* // Mathematics. 2018. Vol. 6. N 9. P. 156.

9. Rettieva A. *Equilibria in dynamic multicriteria games* // International Game Theory Review. 2017. Vol. 19. N 01. P. 1750002.

10. Sasaki Y. *Rationalizability in multicriteria games* // International Journal of Game Theory. 2018. P. 1–13.

11. Shapley L. S., Rigby F. D. *Equilibrium points in games with vector payoffs* // Naval Research Logistics Quarterly. 1959. Vol. 6. N 1. P. 57–61.

OWEN-STABLE COALITION PARTITIONS IN GAMES WITH VECTOR PAYOFFS

Vasily V. Gusev, IAMR KarRC RAS, Cand.Sc.
(gusev@krc.karelia.ru)
Vladimir V. Mazalov, IAMR KarRC RAS, Dr.Sc., professor
(vmazalov@krc.karelia.ru),

Abstract: The paper is devoted to the study of multicriteria cooperative games with vector payoffs and coalition partition. The imputation which is based on the concept of the Owen value is proposed. We use it for the definition of stable coalition partition for bicriteria games. In three person cooperative game with 0-1 characteristic function the conditions under which the coalition partition is stable are found.

Keywords: Owen value, coalition partition stability, multicriteria cooperative game.