

УДК 519.865+330.16

ББК 22.18 60.52 65.050 88.56

# АНАЛИЗ РАВНОВЕСИЙ В СИСТЕМАХ С ЭНДОГЕННЫМ ФОРМИРОВАНИЕМ ФУНКЦИЙ ПОЛЕЗНОСТИ

ГЕОРГИЙ В. КОЛЕСНИК

Финансовый университет при Правительстве РФ  
125993, Москва, Ленинградский проспект, 49  
e-mail: GVKolesnik@fa.ru

В статье исследуется механизм непосредственного воздействия на функции полезности агентов в социально - экономических системах. Данный механизм широко используется в различных формах органами власти, коммерческими и некоммерческими организациями с целью формирования желательного для себя поведения индивидуумов. Рассматривается теоретико-игровая модель иерархической системы, включающей в себя агентов и супериндивидуумов, которые имеют возможность модифицировать их функции полезности. Исследуются свойства равновесий в данной модели и проводится сравнительный анализ эффективности систем различной структуры. Установлено, что централизованное управление супериндивидуумами в определённых условиях является менее эффективным с точки зрения максимизации общественного благосостояния, нежели децентрализованные схемы участия в них. Данным свойством может объясняться наблюдаемое в реальности успешное развитие peer-to-peer рынков и механизмов децентрализованного финансирования проектов в различных сферах. Также установлено наличие в системе вертикальных эффектов конкуренции, приводящих к снижению эффективности равновесий с увеличением числа супериндивидуумов.

*Ключевые слова:* экономическое поведение, стимулирование, функция полезности, супериндивидум, мем, общественные интересы, иерархическая система, равновесие Нэша.

## 1. Введение

Особенностью социально-экономических систем, предопределяющей использование теоретико-игровых методов для их анализа, является зависимость полезности входящих в них субъектов от действий других сторон. Соответственно, у каждого субъекта имеются стимулы заставить других участников системы действовать таким образом, чтобы максимизировать свою функцию полезности.

Механизмы для достижения этого реализуются, например, на основе иерархического взаимодействия, при котором часть агентов имеет возможность стимулировать нужное им поведение других игроков. В работах [5, 6] выделяется два основных механизма такого стимулирования:

- механизм принуждения (административный), проявляющийся в воздействии на множество допустимых стратегий сторон;
- механизм побуждения (экономический), использующий побочные платежи, изменяющие предпочтительность отдельных альтернатив для агентов.

Данные механизмы в значительной мере исследованы различными разделами современной теории игр: теорией контрактов, теорией дизайна механизмов, теорией иерархических систем.

Намного менее исследованным представляется прямой механизм стимулирования желательного поведения агентов, заключающийся в непосредственном воздействии на их функции полезности [2]. В традиционных экономических моделях функции полезности субъектов предполагаются экзогенно заданными, а попытки ввести возможность их эндогенной модификации рассматриваются как некое мошенничество, с помощью которого можно получить любой интересующий исследователя результат.

Однако нельзя отрицать, что данный механизм широко используется в человеческом обществе. Непосредственная модификация функций полезности субъектов издавна осуществляется в интересах органов власти, различных коммерческих и некоммерческих организаций

с использованием таких инструментов, как идеология, реклама, традиции, нормы корпоративного поведения и многих других. С появлением современных методов изучения мозга интенсивное развитие получили исследования в области нейромаркетинга, призванные сделать данные инструменты более эффективными [13].

С механизмом прямого воздействия на функции полезности также связано объяснение многих случаев нерационального (с точки зрения классической экономической теории) поведения индивидуумов, в частности экстремальных его форм – наркомании, деятельности религиозных сект.

Фундаментальный характер этого механизма подтверждается также тем, что основанные на нём взаимоотношения встречаются в природе вне человеческого общества. К ним относятся способы, используемые организмами - паразитами для желательного изменения поведения хозяев. Примерами являются насекомое ломехуза [3] и гриб кордицепс [11], паразитирующие на муравьях; простейшее токсоплазма, воздействующее на поведение мышей [14] и человека [15].

Классическим результатом в области математического анализа поведения индивидуумов с модифицированными функциями полезности является модель Гермейера-Вателя [4]. В ней исследуется взаимодействие агентов с функциями полезности, включающими на индивидуальную составляющую (общие интересы), и формулируются условия существования и эффективности равновесия для определённого класса таких функций. Однако вопросы о том, кто и каким образом модифицирует эти функции полезности, в данной модели не рассматриваются.

В работах английского эволюционного биолога Р. Докинза [8, 9], посвящённых обобщённому описанию эволюции в биологических и социальных системах, в качестве модификаторов поведения индивидуумов рассматриваются *мемы*, определяемые автором как гипотетические единицы культурного наследования. Аналогично генам в биологической эволюции, мемы конкурируют за ресурсы окружающей среды, в качестве которой в данном случае выступает сознание индивидуумов. Использование такого подхода даёт возможность применять для исследования процессов модификации функций полезности индивидуумов теоретико-игровые методы анализа конкуренции.

В работе [3] данные идеи получают дальнейшее развитие в плане формулировки целей конкуренции мемов. В ней формулируется понятие *супериндивидуумов*, как самовоспроизводящихся структур, включающих в качестве компонентов или использующих в качестве ресурсов индивидуумов базовой популяции. Выдвигается гипотеза, что индивидуальные функции полезности агентов в значительной степени формируются супериндивидуумами с целью обеспечения своего роста и воспроизводства. В результате этого наиндивидуальная компонента функции полезности в модели Гермейера-Вателя превращается в набор функций полезности различных супериндивидуумов, которые могут оказывать влияние на агента.

В то же время, супериндивидуум не является самостоятельным субъектом принятия решений. «Мозгом» любого супериндивидуума является его топ-менеджмент, понимаемый здесь в широком смысле как лицо или группа лиц, имеющих заинтересованность в деятельности супериндивидуума и возможность принимать решения, определяющие режим его функционирования. В частности, топ-менеджментом принимаются решения о выделении ресурсов на деятельность по модификации функций полезности других индивидуумов, а также на другие нужды, включая собственное потребление.

Как и в любой организации, в процессе выработки управленческих решений топ-менеджмент супериндивидуума может руководствоваться частными интересами, в связи с чем реализуемая на практике стратегия будет отличаться от оптимальной для супериндивидуума. Глубина этих отличий определяется в терминологии Л.Н. Гумилёва «пассионарностью» топ-менеджмента, представляющей собой способность жертвовать своим индивидуальным благополучием ради достижения целей супериндивидуума [7].

Кроме того, принятие решений происходит в условиях конкуренции за ресурсы со стороны других супериндивидуумов. В результате этого система приобретает иерархическую структуру, на нижнем уровне которой находятся индивидуумы, принимающие решения о распределении имеющихся у них ресурсов, на верхнем – супериндивидуумы (в лице топ-менеджмента), принимающие решения о выделении ресурсов на модификацию функций полезности (рис. 1).

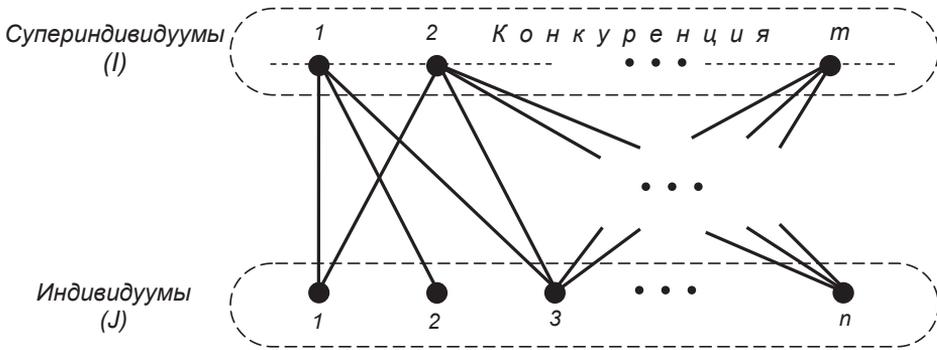


Рисунок 1. Структура иерархической системы

В настоящей работе формулируется теоретико-игровая модель данной иерархической системы, исследуются эффекты, связанные с воздействием супериндивидуумов на функции полезности агентов и проводится сравнительный анализ эффективности равновесий, возникающих при различной организации взаимодействия участников системы.

## 2. Описание и анализ модели

Рассмотрим систему, состоящую из множества супериндивидуумов  $I$  и базовой популяции индивидуумов  $J$ . Каждый индивидуум располагает некоторым ресурсом в объёме  $r_j$ , который распределяется между личным потреблением и поддержкой супериндивидуумов. В данной модели ресурс предполагается трансферабельным (деньги), однако при её небольшой модификации может быть рассмотрена и нетрансферабельная форма ресурса (например, личное время субъекта, которое он уделяет деятельности по поддержке супериндивидуума, его голос в случае выборов и т.д.).

Суммарные ресурсы, выделяемые всеми субъектами в рассматриваемой системе на поддержку  $i$ -го супериндивидуума, составляют

$$C_i = \sum_{j \in J} c_{ij}.$$

Чтобы абстрагироваться от эффектов, связанных с конфликтом интересов менеджеров (что заслуживает отдельного исследования), рассмотрим простейшую ситуацию, когда топ-менеджмент каждого супериндивидуума состоит из одного агента, которого мы будем отождествлять с управляемым им супериндивидуумом  $i \in I$ . Топ-менеджер принимает решение о распределении выделенных супериндивидууму  $i$  ресурсов, назначая величину  $w_i$ , расходуемую на модификацию функций полезности индивидуумов. Оставшаяся часть ресурсов расходуется на личное потребление топ-менеджера:

$$f_i(C_i, w_i) = C_i - w_i. \quad (2.1)$$

Совокупная полезность любого индивидуума  $j \in J$ , как и в модели Гермейера-Вателя, складывается из индивидуальной составляющей – полезности от личного потребления и надиндивидуальной – полезности от участия в различных супериндивидуумах:

$$g_j(\mathbf{c}, \mathbf{w}) = u_j(r_j - \sum_{i \in I} c_{ij}) + \sum_{i \in I} \lambda_{ij}(\mathbf{w}) v_{ij}(\mathbf{c}), \quad (2.2)$$

где  $u_j$  – полезность от личного потребления;  $\mathbf{c} = (\mathbf{c}_j)_{j \in J}$  – распределение ресурсов индивидуумами, каждый элемент которого  $\mathbf{c}_j = (c_{ij})_{i \in I}$  представляет объём ресурсов, выделяемых на поддержку супериндивидуумов  $j$ -м субъектом;  $\lambda_{ij}$  – коэффициент значимости  $i$ -го супериндивидуума в функции полезности  $j$ -го субъекта;  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)$  – вектор объёмов ресурсов, выделяемых супериндивидуумами с целью расширения своего влияния;  $v_{ij}$  – полезность, получаемая  $j$ -м субъектом от участия в  $i$ -м супериндивидууме.

Коэффициент значимости  $\lambda_{ij}(\mathbf{w})$  представляет собой вес, с которым учитывается в функции  $g_j(\mathbf{c}, \mathbf{w})$  полезность, получаемая от участия в поддержке  $i$ -го супериндивидуума. Конкретный вид этого коэффициента определяется как внешними факторами (традициями, культурными нормами общества, конкуренцией супериндивидуумов за влияние), так и индивидуальными особенностями каждого субъекта (например, восприимчивостью к используемым супериндивидуумами инструментам расширения влияния). Чем выше коэффициент значимости, тем больше степень удовлетворённости субъекта от понесённых им затрат ресурсов на поддержку соответствующего супериндивидуума.

Функции полезности топ-менеджеров  $G_i(\mathbf{c}, \mathbf{w})$  имеют форму, аналогичную (2.2):

$$G_i(\mathbf{c}, \mathbf{w}) = U_i(R_i + f_i(C_i, w_i)) + \Lambda_i(\mathbf{w})V_i(\mathbf{c}). \quad (2.3)$$

где  $U_i$  – полезность от личного потребления;  $R_i$  – начальный запас ресурса;  $\Lambda_i$  – уровень пассионарности  $i$ -го топ-менеджера;  $V_i$  – наиндивидуальная полезность, получаемая  $i$ -м топ-менеджером от участия в супериндивидууме.

Стратегией менеджера является выбор объёма ресурсов  $w_i$ , направляемых на расширение влияния управляемого им супериндивидуума.

Выбор  $w_i > \sum_{l \in J} c_{il}$  соответствует затратам собственных ресурсов менеджера для поддержки супериндивидуума  $i$ , обратное неравенство – использованию средств, выделенных другими субъектами, для увеличения личного потребления менеджера.

Таким образом, рассматриваемое взаимодействие представляет собой двухшаговую игру.

1. Топ-менеджеры  $i \in I$  выбирают значения величин  $w_i$  для управляемых ими супериндивидуумов таким образом, чтобы максимизировать свою полезность  $G_i(\mathbf{c}, \mathbf{w})$ .

2. При заданных  $w_i$  все индивидуумы  $j \in J$  выбирают величину ресурсов  $c_{ij}$ , которые они готовы потратить на поддержку супериндивидуумов. При этом они решают задачу максимизации функций полезности  $g_j(\mathbf{c}, \mathbf{w})$  по переменным  $c_{ij}$ ,  $i \in I$ .

Определим условия, при которых возникает равновесие в этой системе. Будем предполагать, что функции полезности индивидуумов  $g_j(\mathbf{c}, \mathbf{w})$  вогнуты по стратегическим переменным  $c_{ij}$  и непрерывно дифференцируемы во внутренних точках множества стратегий. Тогда условия оптимальности первого порядка для задач их максимизации по  $c_{ij}$  приводят к системе уравнений, описывающих распределение субъектами имеющихся ресурсов на втором этапе данного взаимодействия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_j}{\partial c_{ij}} &= -u'_j(r_j - \sum_{i \in I} c_{ij}) + \\ &+ \lambda_{ij}(\mathbf{w}) \frac{\partial v_{ij}}{\partial c_{ij}} = 0, \quad i \in I, \quad j \in J. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Решение этой системы  $\mathbf{c}_j^*(\mathbf{w}) = (c_{ij}^*(\mathbf{w}))_{i \in I}$  представляет собой оптимальное с точки зрения  $j$ -го субъекта распределение имеющихся у него ресурсов между личным потреблением и поддержкой супериндивидуумов при заданных стратегиях  $\mathbf{w}$ .

Подставляя профиль стратегий  $\mathbf{c}^*(\mathbf{w}) = (\mathbf{c}_j^*(\mathbf{w}))_{j \in J}$  в функции полезности топ-менеджеров (2.3), получим

$$G_i^*(\mathbf{w}) = G_i(\mathbf{c}^*(\mathbf{w}), \mathbf{w}) = U_i(R_i + f_i(C_i^*(\mathbf{w}), \mathbf{w})) + \Lambda_i(\mathbf{w})V_i(\mathbf{c}^*(\mathbf{w})).$$

Максимизация  $G_i^*(\mathbf{w})$  по переменной  $w_i$  приводит к оптимальному с точки зрения топ-менеджера распределению собранных ресурсов между деятельностью по расширению влияния управляемого им супериндивидуума и личным потреблением.

Для случая субпассионарного топ-менеджера, заинтересованного только в максимизации личного потребления, функция полезности принимает вид

$$G_i^*(\mathbf{w}) = U_i(R_i + f_i(C_i^*(\mathbf{w}), \mathbf{w})).$$

Так как функция  $U_i$  является монотонно возрастающей, задача топ-менеджера в этом случае превращается в максимизацию величины  $f_i(C_i^*(\mathbf{w}), \mathbf{w})$ , условие оптимальности первого порядка для которой

$$\sum_{l \in J} \frac{\partial c_{il}^*(\mathbf{w})}{\partial w_i} - 1 = 0. \quad (2.5)$$

Исследуем с использованием данных условий равновесия в системах с различной структурой и оценим масштабы деятельности супериндивидуумов по модификации функций полезности и её влияние на принимаемые субъектами решения по объёмам поддержки и личного потребления.

Рассмотрим систему с  $m$  супериндивидуумами и  $n$  индивидуумами. Каждый индивидуум  $j \in J$  имеет в своём распоряжении  $r_j = 1$  ресурса, который он может распределить между личным потреблением и взносами в поддержку супериндивидуумов.

Изучим симметричный случай, когда все индивидуумы в системе одинаковы. Положим коэффициент значимости  $i$ -го супериндивиду-

ума  $\lambda_i$  в их функциях полезности равным

$$\lambda_i(\mathbf{w}) = \frac{w_i}{1 + \sum_{k=1}^m w_k}.$$

Эта величина равна нулю при  $w_i = 0$  (супериндивидуум  $i$  не оказывает воздействия на функции полезности) и стремится к 1 при  $w_i \rightarrow \infty$ , т.е. значимость участия в супериндивидууме не может превышать значимость индивидуального потребления, но приближается к ней с увеличением масштабов деятельности супериндивидуума по расширению своего влияния.

Такая форма коэффициента значимости также отражает конкуренцию между супериндивидуумами по привлечению ресурсов: с ростом усилий других супериндивидуумов  $w_k$ ,  $k \neq i$  привлекательность поддержки  $i$ -го супериндивидуума для субъектов снижается.

Функцию полезности субъекта  $j$  от участия в  $i$ -м супериндивидууме запишем в форме

$$v_{ij}(\mathbf{c}) = \ln C_i + \ln c_{ij}. \quad (2.6)$$

Данная функция учитывает два фактора: «авторитет» супериндивидуума, определяемый общей величиной собранных им ресурсов  $C_i$  и «вовлечённость» индивидуума  $j$ , определяемую количеством ресурсов  $c_{ij}$ , затраченных им лично. Чем более авторитетен супериндивидуум и более вовлечён в него субъект – тем выше оказывается его полезность от участия.

Учёт в наиндивидуальной составляющей функции полезности обоих этих факторов важен для обеспечения соответствия рассматриваемой модели разумным предположениям о реальном поведении агентов. Так, исключение слагаемого, зависящего от «авторитета» супериндивидуума, приводит к тому, что субъекты становятся безразличными к уровню влияния соответствующих супериндивидуумов и получают полезность только от собственного участия в них. Эта ситуация соответствует «фанатичному» поведению индивидуума, когда он выделяет ресурсы на поддержку супериндивидуума независимо от отношения к деятельности этого супериндивидуума со стороны других участников системы.

Исключение из функции  $v_{ij}$  слагаемого, зависящего от «вовлечённости» индивидуума, приводит к обратной ситуации «оппортунистического» поведения, когда он ориентируется только на успешность соответствующего супериндивидуума и не получает дополнительной полезности от своего участия в нём. В этом случае имеет место классическая проблема «безбилетника», когда агент перестаёт участвовать в деятельности достаточно успешных супериндивидуумов, получая от них полезность, как от стандартного общественного блага.

Таким образом, наиндивидуальная функция полезности в форме (2.6) представляет компромисс между данными типами поведения. При этом различная степень «фанатизма» или «оппортунизма» в поведении индивидуумов может моделироваться с использованием весовых коэффициентов при данных слагаемых

При сделанных предположениях функции полезности индивидуумов (2.2) будут иметь вид

$$g_j(\mathbf{c}, \mathbf{w}) = \ln\left(1 - \sum_{k=1}^m c_{kj}\right) + \sum_{i=1}^m \frac{w_i}{1 + \sum_{k=1}^m w_k} \left(\ln \sum_{s=1}^n c_{is} + \ln c_{ij}\right),$$

$j = 1, \dots, n.$  (2.7)

В такой постановке участие в супериндивидууме может рассматриваться как приобретение товара с сетевыми экстреналиями [16]. Однако в отличие от классических моделей таких рынков полезность данного товара для потребителя регулируется его производителем путём изменения коэффициента значимости  $\lambda_{ij}$ .

Непосредственным вычислением гессиана функции (2.7) нетрудно проверить, что она вогнута по стратегическим переменным  $c_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, m$  при фиксированных значениях  $w_i$ . Тогда из условий (2.4) можно получить, что в симметричном случае, когда взносы всех индивидуумов одинаковы, оптимальное распределение ресурсов для  $j$ -го индивидуума будет

$$c_{ij}^*(\mathbf{w}) = \frac{(n+1)w_i}{(n+1)mw_i + n\left(1 + \sum_{k=1}^m w_k\right)}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Личное потребление топ-менеджеров (2.1) запишется как

$$f_i(\mathbf{w}) = \sum_{j=1}^n c_{ij}^*(\mathbf{w}) - w_i = \frac{n(n+1)w_i}{(n+1)mw_i + n(1 + \sum_{k=1}^m w_k)} - w_i,$$

$$i = 1, \dots, m.$$

Данная функция вогнута по переменной  $w_i$ , поэтому для нахождения оптимальной стратегии можно воспользоваться условиями первого порядка (2.5). В результате получим, что наилучший ответ топ-менеджера  $i$ -го супериндивидуума на стратегии других супериндивидуумов будет иметь вид:

$$\tilde{w}_i(W_{-i}) = \frac{(\sqrt{(n+1)(W_{-i}+1)} - W_{-i} - 1)n}{mn + n + m}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (2.8)$$

где  $W_{-i} = \sum_{k \neq i} w_k$ .

Это выражение положительно, если  $W_{-i} < n$ . Но последнее неравенство выполнено в любых допустимых ситуациях, так как суммарные ресурсы индивидуумов составляют  $n$  и часть этих ресурсов должна расходоваться на личное потребление. Следовательно, в системе должно быть внутреннее равновесие Нэша, в котором все супериндивидуумы тратят ненулевые ресурсы для повышения своего влияния и получают ненулевые взносы от индивидуумов.

В силу того, что супериндивидуумы имеют одинаковые характеристики, будем отыскивать симметричное равновесие, в котором все величины  $w_i^*$  одинаковы. Решая уравнение (2.8) при  $W_{-i} = (m-1)w_i$ , можно получить аналитическое выражение для оптимальных затрат ресурсов на расширение влияния супериндивидуума  $w_i^*$  как функции от параметров системы  $(n, m)$ . Данное выражение является очень громоздким, поэтому в статье не приводится. Графики данной функции, а также других параметров симметричных равновесий представлены на рис. 2.

Оценим эффективность найденных равновесий. В качестве точки *status-quo* рассмотрим ситуацию, когда супериндивидуумы не ведут деятельности по модификации функций полезности. В этом случае наиндивидуальная составляющая в функциях полезности (2.7)

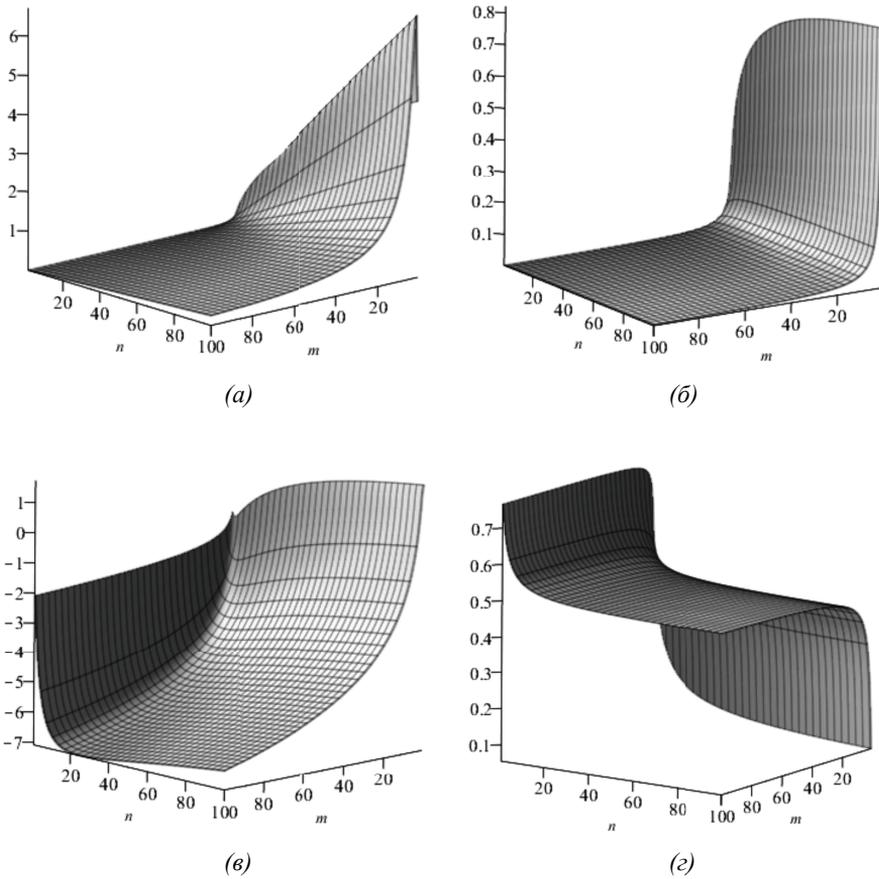


Рисунок 2. Параметры симметричных равновесий: (а) затраты супериндивидуумов на модификацию функции полезности  $w_i^*$ ; (б) взносы индивидуумов  $c_{ij}^*$ ; (в) полезность индивидуума  $g_j^*$ ; (г) доля целевого использования ресурсов топ-менеджерами

отсутствует и оптимальным решением является индивидуальное потребление имеющихся ресурсов, дающее нулевую полезность.

Деятельность супериндивидуумов оказывает два противоположно направленных воздействия на полезность субъектов в равновесии: она снижается за счёт уменьшения личного потребления и увеличивается за счёт наиндивидуальной составляющей (рис. 2в). Если число индивидуумов в системе мало, их полезность в равновесии оказывается отрицательной, т.е. деятельность супериндивидуу-

мов приводит к возникновению неэффективных равновесий. Неучастие в супериндивидууме при положительной величине  $w_i$  невозможно, так как в этом случае при  $c_{ij} \rightarrow 0$  полезность индивидуума  $g_j(\mathbf{c}, \mathbf{w}) \rightarrow -\infty$ . В связи с этим индивидуумы оказываются вынуждены выделять ресурсы на поддержку супериндивидуумов, несмотря на снижение своей полезности.

В больших группах сетевые эффекты от участия в супериндивидууме превышают затраты на его поддержку, в результате чего благосостояние индивидуума становится положительным.

Увеличение количества супериндивидуумов в системе  $m$  приводит к снижению благосостояния в равновесии. Данный эффект обусловлен уже упомянутой необходимостью участия индивидуума в поддержке всех супериндивидуумов, для которых  $w_i > 0$ . В результате этого с увеличением числа супериндивидуумов необходимость их поддержки растёт опережающими темпами, не компенсируясь возникающими при этом сетевыми эффектами. Так, при  $m = 1$  нулевой уровень полезности индивидуума в равновесии достигается при  $n \geq 14$ , а при  $m = 2$  – уже когда  $n \geq 34$ .

Таким образом, данная система характеризуется положительными вертикальными эффектами конкуренции, при которых обострение конкуренции на уровне супериндивидуумов с ростом их числа  $m$  сопровождается снижением благосостояния агентов на другом уровне иерархии [10].

Положительным эффектом от увеличения числа супериндивидуумов является снижение уровня нецелевого использования выделенных ресурсов (рис. 2г). В условиях более острой конкуренции топ-менеджеры вынуждены тратить большую долю ресурсов не на собственное потребление, а на обеспечение деятельности супериндивидуума. С ростом числа индивидуумов в системе  $n$  эта доля уменьшается, то есть в системах большого масштаба централизованное управление характеризуется более высоким уровнем оппортунизма топ-менеджеров.

### 3. Децентрализованная поддержка супериндивидуумов

Теперь сравним полученные равновесия с ситуацией, когда сбор ресурсов на поддержку супериндивидуумов осуществляется децентрализованно. В классических моделях социально-экономических си-

стем децентрализованные схемы финансирования общего блага, как правило, менее эффективны, нежели централизованные из-за наличия «проблемы безбилетника» [12]. Однако интенсивное развитие в последнее десятилетие децентрализованных (peer-to-peer) рынков и механизмов финансирования проектов (краудфандинг) свидетельствует о том, что по крайней мере в некоторых областях человеческой деятельности они могут работать эффективнее традиционных централизованных структур [17 - 19].

В рассматриваемой системе децентрализованная схема реализуется, если топ-менеджеры отсутствуют и все затраченные субъектами ресурсы полностью расходуются на поддержку супериндивидуумов. В этом случае каждый субъект  $j \in J$  решает задачу максимизации своей функции полезности  $g_j(\mathbf{c}, \mathbf{w})$  по переменным  $c_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, m$  при условиях

$$w_i = \sum_{s \in J} c_{is}, \quad i = 1, \dots, m.$$

При  $c_{is} = 0$  для  $s \neq j$  слагаемое  $\lambda_i v_{ij}(\mathbf{c})$  в функции полезности индивидуума (2.7) имеет предел справа по стратегической переменной  $c_{ij}$

$$\lim_{c \rightarrow 0^+} \lambda_i v_{ij}(\mathbf{c}) = 0. \quad (3.1)$$

В результате этого, если ни один субъект в системе не выделяет ресурсов  $i$ -му супериндивидууму, то их функции полезности совпадают с таковыми для системы с  $(m - 1)$  супериндивидуумом. Справедлив следующий результат.

**Утверждение 3.1.** Пусть профиль стратегий  $\mathbf{h} = (h_{ij}; i \in I, j \in J)$  является равновесием в системе с децентрализованным финансированием, содержащей  $m'$  супериндивидуумов. Тогда стратегии из  $\mathbf{h}$  будут также входить в равновесия для систем с множеством индивидуумов  $J$  и  $m > m'$  супериндивидуумами.

*Доказательство.* Пусть  $m = m' + 1$ . Рассмотрим для системы с  $m$  супериндивидуумами профиль стратегий  $\mathbf{c}$ , такой, что  $\forall j \in J$   $c_{ij} = h_{ij}$  для  $i < m$  и  $c_{mj} = 0$ .

Из (3.1) следует, что на подмножестве ситуаций, таких, что  $c_{mj} = 0 \forall j \in J$ , функции полезности индивидуумов будут совпадать с таковыми для системы с  $m'$  супериндивидуумами. Так как  $h_{ij}$  – страте-

гии, входящие в равновесие в этой системе, то отклонения в рамках данного подмножества от использования профиля  $\mathbf{c}$  будут невыгодны индивидуумам.

Теперь предположим, что некоторый индивидуум  $j \in J$  использует стратегию  $\tilde{\mathbf{c}}_j = (\tilde{c}_{1j}, \dots, \tilde{c}_{mj})$ , такую, что  $\tilde{c}_{mj} > 0$ . Тогда его полезность будет равна:

$$g_j(\tilde{\mathbf{c}}_j, \mathbf{c}_{-j}) = \ln\left(1 - \sum_{k=1}^m \tilde{c}_{kj}\right) + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\sum_{s \neq j} c_{is} + \tilde{c}_{ij}}{1 + \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{s \neq j} c_{ks} + \sum_{k=1}^m \tilde{c}_{kj}} \times$$

$$\times \left( \ln\left(\sum_{s \neq j} c_{is} + \tilde{c}_{ij}\right) + \ln \tilde{c}_{ij} \right) + 2 \ln(\tilde{c}_{mj}) \frac{\tilde{c}_{mj}}{1 + \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{s \neq j} c_{ks} + \sum_{k=1}^m \tilde{c}_{kj}},$$

где  $\mathbf{c}_{-j}$  – стратегии остальных субъектов кроме  $j$ -го, входящие в профиль  $\mathbf{c}$ .

Последнее слагаемое в этой функции, соответствующее полезности от участия в супериндивидууме  $m$ , будет отрицательно, так как  $\tilde{c}_{mj} < r_j = 1$ . Для остальных слагаемых в силу того, что  $\tilde{c}_{mj} > 0$ , справедливо неравенство:

$$\ln\left(1 - \sum_{k=1}^m \tilde{c}_{kj}\right) + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\sum_{s \neq j} c_{is} + \tilde{c}_{ij}}{1 + \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{s \neq j} c_{ks} + \sum_{k=1}^m \tilde{c}_{kj}} \times$$

$$\times \left( \ln\left(\sum_{s \neq j} c_{is} + \tilde{c}_{ij}\right) + \ln \tilde{c}_{ij} \right) < \ln\left(1 - \sum_{k=1}^{m-1} \tilde{c}_{kj}\right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\sum_{s \neq j} c_{is} + \tilde{c}_{ij}}{1 + \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{s \neq j} c_{ks} + \sum_{k=1}^{m-1} \tilde{c}_{kj}} \left( \ln\left(\sum_{s \neq j} c_{is} + \tilde{c}_{ij}\right) + \ln \tilde{c}_{ij} \right),$$

Последняя величина представляет собой полезность индивидуума  $j$  в системе с  $(m - 1)$  супериндивидуумом, если он использует стратегию  $\tilde{\mathbf{c}}_j$ , а остальные – стратегии из профиля  $\mathbf{h}$ . Но согласно предположению его оптимальная стратегия в такой системе – это

$h_j$ , поэтому данная величина не может быть больше значения его функции полезности на стратегии  $c_j$ .

Таким образом, индивидуумам оказывается невыгодно отклоняться от использования стратегий  $c_j$ , т.е. они образуют равновесие, в котором  $m$ -й супериндивидуум не получает ресурсов.  $\square$

В частности, если положить  $m' = 0$ , то реализуется ситуация *status-quo*, когда оптимальным решением задачи индивидуума будет полностью тратить имеющиеся ресурсы на личное потребление. Тогда из доказанного утверждения следует наличие в системе при любом  $m > 0$  вырожденного равновесия, при котором ни один супериндивидуум не получает ресурсов.

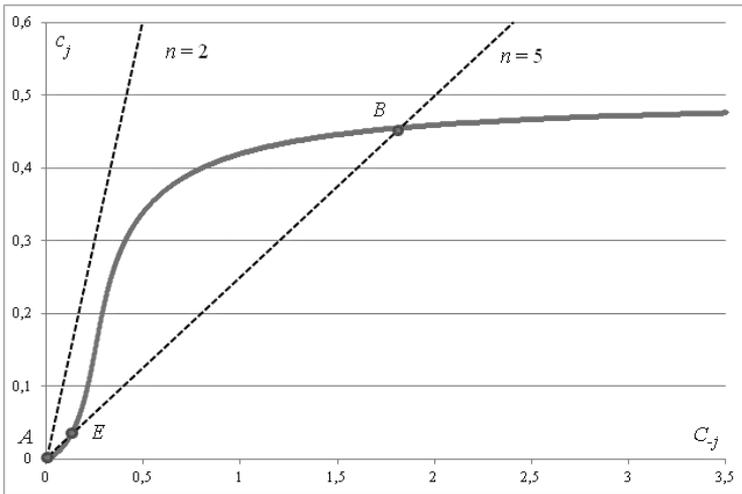
Если хотя бы один из субъектов передаёт ресурсы супериндивидууму  $i \in I$ , то всем остальным также оказывается выгодно его поддерживать, так как при  $w_i > 0$  функция полезности  $g_j(\mathbf{c}, \mathbf{w})$  неограниченно убывает, когда  $c_{ij} \rightarrow 0$ . Поэтому в данной системе следует также ожидать наличия внутреннего равновесия Нэша, в котором поддерживаются все супериндивидуумы. Если такое равновесие существует при некотором  $m$ , то из утверждения следует, что во всех системах с числом супериндивидуумов, большим  $m$ , будут существовать также гибридные равновесия, в которых поддерживается только  $m$  супериндивидуумов.

К сожалению, даже в простейшем случае, когда  $m = 1$ , найти аналитически внутреннее равновесие не удаётся. Проведённое численное моделирование кривой наилучших ответов индивидуумов позволило установить, что такое равновесие существует, если число индивидуумов в системе не слишком мало.

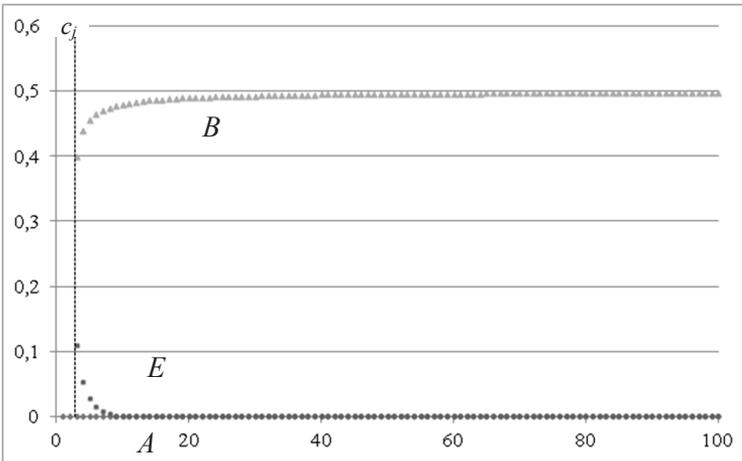
На рис. 3а в качестве примера представлена кривая наилучших ответов индивидуума на суммарные взносы остальных участников  $C_{-j}$  для случая  $m = 1$ , а также параметры симметричных равновесий при различных  $n$ . Видно, что вырожденное равновесие имеет место при любых  $n$  (точка А). При  $n \geq 3$  дополнительно появляется внутреннее симметричное равновесие (точка В). При этом для систем с небольшим числом индивидуумов данное равновесие доминируется по Парето вырожденным равновесием.

С ростом числа индивидуумов качественный состав равновесий не изменяется (рис. 3б). Сохраняется вырожденное равновесие А, а

объём финансирования супериндивидуума в невырожденном равновесии  $B$  увеличивается из-за роста его привлекательности, обусловленной сетевыми эффектами. Также здесь показана ветвь неустойчивых равновесий  $E$ , соответствующая границе областей притяжения вырожденного и внутреннего равновесий.



(a)



(б)

Рисунок 3. Кривая наилучших ответов индивидуума при децентрализованном распределении ресурсов (а) и стратегии, соответствующие симметричным равновесиям (б)

Для систем с  $m > 1$  также установлено существование симметричных внутренних равновесий, если количество индивидуумов в них не слишком мало (табл. 1).

Таблица 1: Минимальное число индивидуумов, при котором существуют внутренние равновесия в системе с децентрализованным распределением ресурсов ( $n_{\min}$ )

Число супериндивидуумов $m$	$n_{\min}$
1	3
2-5	4
6-16	5
17-59	6
60-254	7

В качестве примера на рис. 4 представлены параметры равновесий для системы с  $m = 2$  в условиях централизованного и децентрализованного распределения ресурсов: величина взносов  $c_{ij}^*$  и суммарное благосостояние индивидуумов.

Видно, что децентрализованное распределение оказывается более эффективным с точки зрения максимизации общественного благосостояния как при малом количестве индивидуумов, когда внутреннее равновесие отсутствует (область *I* на графиках), так и при достаточно большом числе индивидуумов в системе (область *III*).

Область *I* соответствует случаю, когда в децентрализованной системе имеется только вырожденное равновесие, т.е. супериндивидуумы не получают ресурсов. При этом сетевые экстерналии от участия в них не компенсируют снижения полезности от индивидуального потребления. В централизованной системе топ-менеджеры, заинтересованные в получении ресурсов, вынуждают индивидуумов делать вложения, назначая  $w_i > 0$ , что приводит к снижению их благосостояния по сравнению с децентрализованным случаем.

В области *III* наблюдается иная ситуация. Здесь имеется достаточно большое число индивидуумов, чтобы сделать участие в супериндивидууме выгодным. Однако в централизованной системе нецелевое использование топ-менеджерами выделенных ресурсов приво-

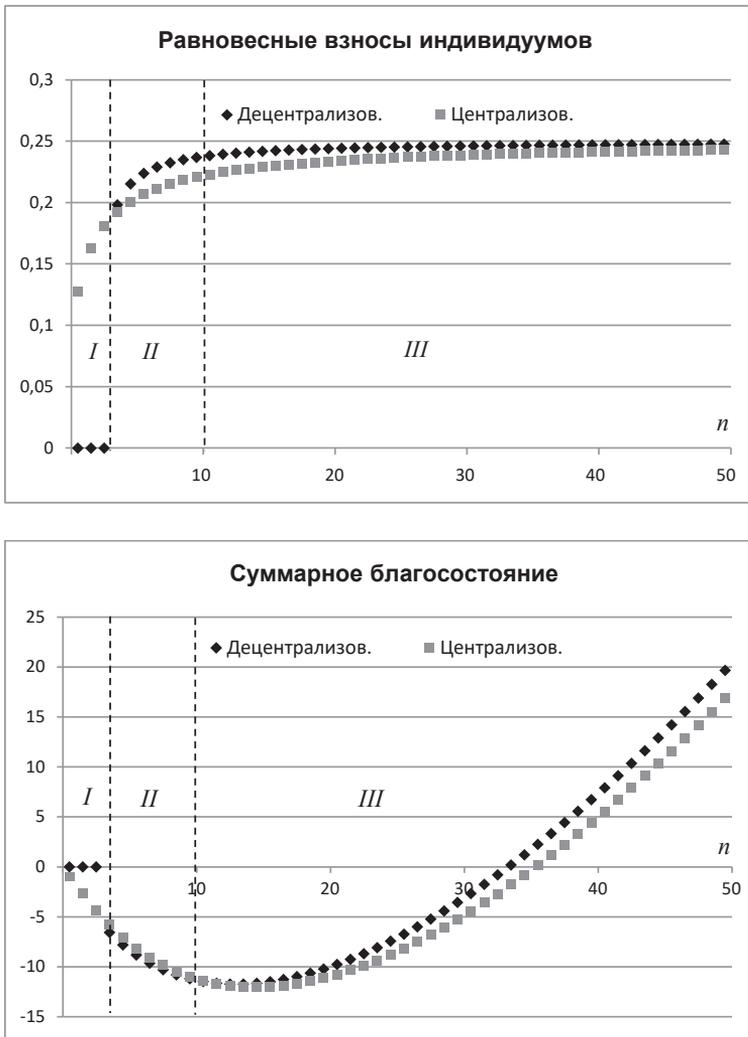


Рисунок 4. Равновесный размер взносов и благосостояние индивидуумов в централизованной и децентрализованной системе ( $m = 2$ )

дит к равновесиям, общественные потери в которых превышают издержки, связанные с «проблемой безбилетника» при децентрализованном распределении ресурсов.

#### 4. Выводы

Полученные результаты свидетельствуют о том, что механизм прямого воздействия на функции полезности индивидуумов является мощным инструментом модификации их поведения, позволяя, в частности, обеспечивать выбор в равновесии стратегий, неоптимальных с точки зрения максимизации их индивидуального благосостояния. Более того, его использование даёт возможность субпассионарным топ-менеджерам увеличивать своё личное потребление за счёт снижения общественного благосостояния.

Анализ равновесий показывает, что в таких системах централизованное управление субпассионарным менеджментом может быть менее эффективным с общественной точки зрения, нежели децентрализованные схемы поддержки супериндивидуумов. Это обусловлено тем, при достижении определённого масштаба деятельности издержки, связанные с «проблемой безбилетника» при децентрализованном финансировании становятся ниже, чем издержки оппортунистического поведения топ-менеджеров.

Данным эффектом может отчасти объясняться тот факт, что в настоящее время в различных сферах человеческой деятельности peer-to-peer системы и механизмы децентрализованного финансирования (краудсорсинг, краудфандинг) демонстрируют более высокую эффективность по сравнению с традиционными централизованными формами организации бизнеса.

Другим интересным свойством рассмотренной модели является наличие положительных вертикальных эффектов конкуренции, возникающих с увеличением числа супериндивидуумов в системе. В результате этого снижается общественная эффективность равновесий с ростом конкуренции супериндивидуумов, несмотря на то, что при этом также уменьшается доля нецелевого использования топ-менеджерами собранных средств.

Это явление можно объяснить используемой в модели формой функции полезности агентов, в которой наиндивидуальная составляющая, зависящая от «вовлечённости» индивидуума, соответствует набору взаимодополняющих благ. Для взаимозамещающих проектов (например, политических движений), исход конкуренции супериндивидуумов будет иметь качественно иной характер.

В заключение отметим, что рассмотренная модель описывает систему, в которой эффективность супериндивидуумов целиком определяется их деятельностью по модификации функций полезности агентов, т.е. функционирующую в соответствии с первым законом Скотта: «Неважно, что что-то идет неправильно. Возможно, это хорошо выглядит...» [1]. В современном обществе такая ситуация является распространённой среди организаций непромышленной сферы (политические партии, общественные и религиозные организации, отчасти – государственные структуры и т.д.), оценка результатов функционирования которых носит преимущественно субъективный характер и определяется в основном производимым ими новостным фоном, а не реальной деятельностью. В производственной сфере на заинтересованность агентов и их желание вкладывать ресурсы в поддержку того или иного супериндивидуума существенное влияние будет оказывать также итог его производственной деятельности, которая здесь не рассматривается. Анализ совместного воздействия на поведение индивидуумов как производимой супериндивидуумом информации, так и фактических результатов его деятельности является одним из перспективных направлений дальнейших исследований данного механизма.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Блох А. *Закон Мерфи*. Минск: Попурри, 2005.
2. Васин А.А. *Эволюционная теория игр и экономика. Часть 1. Принципы оптимальности и модели динамики поведения* // Журнал Новой экономической ассоциации. 2009. № 3-4. С. 10-27.
3. Васин А.А. *Эволюционная теория игр и экономика. Часть 2. Устойчивость равновесий. Особенности эволюции социального поведения* // Журнал Новой экономической ассоциации. 2010. № 5. С. 10-27.
4. Гермейер Ю.Б., Ватель И.А. *Игры с иерархическим вектором*

- интересов* // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1974. № 3. С. 54–69.
5. Горбанева О.И., Угольницкий Г.А. *Цена анархии и механизмы управления в моделях согласования общественных и частных интересов* // Математическая теория игр и ее приложения. 2015. Т. 7. № 1. С. 50–73.
  6. Горбанева О.И., Угольницкий Г.А. *Статические модели согласования общественных и частных интересов при распределении ресурсов* // Математическая теория игр и ее приложения. 2016. Т. 8. № 2. С. 28–57.
  7. Гумилёв Л. Н. *Этногенез и биосфера Земли*. СПб.: Кристалл, 2001.
  8. Докинз Р. *Расширенный фенотип: Длинная рука гена*. М.: АСТ, 2010.
  9. Докинз Р. *Эгоистичный ген*. М.: АСТ, 2010.
  10. Колесник Г.В. *Моделирование конкуренции в иерархических социально-экономических системах*. М.: Ленанд, 2015.
  11. Andersen S.B. et al. *The Life of a Dead Ant: The Expression of an Adaptive Extended Phenotype* // The American Naturalist, 2009. Vol. 174. No. 3. P. 424-433.
  12. Cornes R., Sandler T. *The Theory of Externalities, Public Goods and Club Goods*. Cambridge Univ. Press, 1996.
  13. Fisher C., Chin L., Klitzman R. *Defining Neuromarketing: Practices and Professional Challenges* // Harvard Review Of Psychiatry. 2010. Vol. 18. No. 4. P. 230-237.
  14. Ingram W.M., et al. *Mice infected with low-virulence strains of Toxoplasma gondii lose their innate aversion to cat urine, even after extensive parasite clearance* // PLoS One. 2013 Sep., 18. Vol. 8. No. 9. doi: 10.1371/journal.pone.0075246. eCollection 2013.

15. Johnson S.K., et al. *Risky business: linking Toxoplasma gondii infection and entrepreneurship behaviours across individuals and countries* // Proc. of the Royal Society: Biological Sciences. 2018. doi: 10.1098/rspb.2018.0822.
16. Katz M.L., Shapiro C. *Network Externalities, Competition, and Compatibility* // American Economic Review. 1985. Vol. 75. No. 3. P. 424-440.
17. Kuti M., Madarasz G. *Crowdfunding* // Public Finance Quarterly. 2014. Vol. 59. No. 3. P. 355-366.
18. Pagallo U., Durante M. *Three Roads to P2P Systems and Their Impact on Business Practices and Ethics* // Journal of Business Ethics. 2009. Vol. 90. No. 4. P. 551-564.
19. Vulkan N., Astebro T., Sierra M.F. *Equity crowdfunding: A new phenomena* // Journal of Business Venturing Insights. 2016. Vol. 5(C). P. 37-49.

## THE ANALYSIS OF EQUILIBRIA IN SYSTEMS WITH ENDOGENOUS FORMATION OF UTILITY FUNCTIONS

**Georgiy V. Kolesnik**, Financial University, Dr.Sc.  
(GVKolesnik@fa.ru).

*Abstract:* The article studies the direct mechanism of influence on the utility functions of agents in social and economic systems. This mechanism is widely used in various forms by the authorities, commercial and non-profit organizations in order to form the desired behavior of individuals. The game-theoretic model is considered of the hierarchical system that includes agents and superindividuals who have the ability to modify their utility function. The properties of equilibria in this model are studied and the comparative analysis of the efficiency of systems of different structures is carried out. It is established that the centralized management of superindividuals in certain conditions may be less effective in terms of maximizing social welfare than decentralized schemes of participation in them. This property, in particular, can explain the successful development of peer-to-peer markets and mechanisms of decentralized financing of projects in various spheres of human activity. It is also established the presence of vertical competition effects in the system which lead to a decrease in the efficiency of the equilibrium as the number of superindividuals increases.

*Keywords:* economic behavior, motivation, utility function, super-individual, meme, public interest, hierarchical system, Nash equilibrium.