

УДК 517.978.2
ББК В173.134.31

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР БЫСТРОДЕЙСТВИЯ С ЛИНИЕЙ ЖИЗНИ

НАТАЛЬЯ В. МУНЦ
СЕРГЕЙ С. КУМКОВ*

Институт математики и механики
им. Н.Н. Красовского УрО РАН

620990, Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, 16
e-mail: natalymunts@gmail.com, sskumk@gmail.com

В статье рассматриваются дифференциальные игры оптимального быстрогодействия с линией жизни. В таких играх наряду с целевым множеством, куда стремится как можно быстрее привести систему первый игрок, а второй игрок препятствует этому, присутствует другое множество — линия жизни, — при достижении системой которого выигрывает второй игрок. Предлагается численный метод решения дифференциальных игр быстрогодействия с линией жизни. Данный метод строит функцию цены как вязкостное решение соответствующей краевой задачи для уравнения Гамильтона–Якоби. В статье доказывается сходимости этого метода.

Ключевые слова: численные методы, дифференциальные игры оптимального быстрогодействия с линией жизни, функция цены, уравнения Гамильтона–Якоби, вязкостные решения.

©2018 Н.В. Мунц, С.С. Кумков

* Работа проведена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект №18-01-00410.

1. Введение

В данной статье рассматриваются дифференциальные игры быстрого действия с линией жизни и численная схема для построения функции цены таких игр. В играх этого типа первый игрок старается как можно скорее привести систему на заданное замкнутое терминальное множество; при этом траектория системы должна оставаться внутри некоторого открытого множества, на котором происходит игра. Второй игрок препятствует этому: он выигрывает, как только траектория системы покидает это открытое множество или если ему удастся бесконечно удерживать систему вне терминального множества.

По всей видимости, первым задачи с линией жизни сформулировал Р. Айзекс в своей книге [1,18]. В его формулировках под линией жизни понималось множество, при достижении которого, второй игрок безусловно выигрывал. Значительный вклад в исследование игр с линией жизни сделал Л.А. Петросян (см., например, [2,5,6,23]). Однако авторам неизвестны работы, в которых исчерпывающе рассматривались бы игры такого типа: Л.А. Петросян в основном исследовал задачи, где игроки имели динамику простых движений, то есть управлениями являлись скорости объектов, управляемых игроками. В книгах [3,19] Н.Н. Красовского и А.И. Субботина такого рода задачи рассматриваются как задачи с фазовыми ограничениями: первый игрок не должен выводить систему за границу заданного множества.

Задачи, идеологически весьма близкие к играм с линией жизни, изучались французскими математиками Р. Cardaliaguet, М. Quincampoix и Р. Saint-Pierre [12-15]. Для случая управляемых систем, пользуясь комплексным анализом, теорией дифференциальных включений и теорией выживаемости, они рассматривали множества (ядра выживаемости), в которых управляющий субъект может бесконечно удерживать систему. В дифференциальных играх французские авторы рассматривали ситуации с двумя целевыми множествами: одно для первого, другое для второго игрока, соответственно, к которым игроки старались привести систему, избегая при этом целевого множества противника. Другой вариант игры, который изучался в этих работах — игра с фазовыми ограничениями для первого игрока. В такой ситуации главной целью является изучение множеств выигрыша игроков, то есть множеств, из которых игрок может достичь целе-

вого множества, не попав при этом в целевое множество противника (или не нарушив фазовые ограничения). Также в терминах теории выживаемости верхняя цена таких игр (гарантированный результат первого игрока) характеризуется как функция, чей надграфик является множеством выживаемости первого игрока. Ими были предложены сеточно-геометрические алгоритмы для аппроксимации ядер выживаемости и, следовательно, для аппроксимации верхней цены. Тем не менее, мы не нашли статьи данных авторов, в которых бы доказывалось существование функции цены для игр такого типа и/или ее совпадение с обобщенным решением соответствующей краевой задачи для уравнения Гамильтона–Якоби (хотя такая связь упоминается).

Главный стимул для изучения дифференциальных игр быстрого действия с линией жизни — это исследование вопроса, связанного с численными методами решения классических игр быстрого действия. В частности, в работе [9] итальянские математики М. Vardi, М. Falcone и Р. Soravia предлагают теоретический метод построения функции цены игры быстрого действия как обобщенного (вязкостного) решения соответствующей краевой задачи для уравнения Гамильтона–Якоби. Предложенные процедуры являются сеточными, их сходимость (точечная в целом и равномерная на любом компактном множестве) доказана в предположении, что сетка является бесконечной и покрывает все пространство игры. Но практические компьютерные реализации могут иметь дело лишь с конечной сеткой, которая покрывает только некоторую ограниченную часть пространства. Возникает вопрос о том, какие граничные условия следует наложить на внешней границе области, покрытой сеткой. М. Vardi и М. Falcone предлагают положить эти условия равными $+\infty$, то есть считают, что второй игрок выигрывает, как только система достигает внешней границы множества игры. Таким образом, практическая реализация этой процедуры фактически имеет дело с играми с линией жизни, однако не обоснована для этого класса игр. Поэтому авторы данной статьи решили восполнить пробелы, связанные с задачей быстрого действия с линией жизни в достаточно общей формулировке: обосновать существование функции цены игры с линией жизни в случае нелинейной динамики общего вида, существование обобщенного решения соот-

ветствующей краевой задачи для уравнения Гамильтона–Якоби, явно сформулировать численную схему для такой краевой задачи и доказать сходимость численной схемы к обобщенному решению.

В данной статье предлагается численный метод, строящий функцию цены дифференциальной игры быстрогодействия с линией жизни как вязкостное решение соответствующей краевой задачи для уравнения Гамильтона–Якоби, и доказывается его сходимость к функции цены, в целом, поточечная и равномерная на любом компактном множестве.

2. Формулировка задачи

Рассмотрим задачу быстрогодействия

$$\dot{x} = f(x, a, b), \quad t \geq 0, \quad a \in A, \quad b \in B, \quad (2.1)$$

где $x \in \mathbb{R}^d$ — фазовый вектор системы, a, b — управления первого и второго игроков, стесненные компактными множествами A и B в своих евклидовых пространствах. Имеются компактное множество \mathcal{T} и открытое множество $\mathcal{W} \subset \mathbb{R}^d$ такое, что $\mathcal{T} \subset \mathcal{W}$. Обозначим $\mathcal{G} := \mathcal{W} \setminus \mathcal{T}$ и $\mathcal{F} := \mathbb{R}^d \setminus \mathcal{W}$ (см. рис. 1). Будем считать, что игра происходит на множестве \mathcal{G} : первый игрок, распоряжающийся управлением a , стремится как можно скорее перевести систему на множество \mathcal{T} , сохраняя при этом траекторию движения в множестве \mathcal{G} ; второй игрок, в чьем распоряжении находится управление b , стремится вывести движение на множество \mathcal{F} , или, если это невозможно, то отсрочить как можно дольше (возможно, до бесконечности) достижение системой множества \mathcal{T} .

Такую игру можно называть *игрой с линией жизни*: граница $\partial\mathcal{F}$ множества \mathcal{F} — это линия жизни, то есть область, где второй игрок безоговорочно выигрывает.

Предположим выполнение следующих условий:

С.1 функция $f : \mathbb{R}^d \times A \times B \mapsto \mathbb{R}^d$ непрерывна по совокупности переменных и удовлетворяет условию Липшица по переменной x : для всех $x^{(1)}, x^{(2)} \in \mathbb{R}^d, a \in A, b \in B$

$$\|f(x^{(1)}, a, b) - f(x^{(2)}, a, b)\| \leq L\|x^{(1)} - x^{(2)}\|; \quad (2.2)$$

кроме того, она удовлетворяет условию седловой точки в маленькой игре [3, стр. 56] (условию Айзекса):

$$\min_{a \in A} \max_{b \in B} \langle p, f(x, a, b) \rangle = \max_{b \in B} \min_{a \in A} \langle p, f(x, a, b) \rangle \quad \forall p \in \mathbb{R}^d. \quad (2.3)$$

Здесь и далее символ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение.

С.2 граница $\partial \mathcal{G}$ множества \mathcal{G} (то есть множество, составленное из $\partial \mathcal{T}$ и $\partial \mathcal{F}$) гладкая и компактная.

Формализовать такие цели игроков в виде функции платы можно следующим образом. Для заданных стратегий игроков $a(\cdot)$ и $b(\cdot)$ и для начальной точки x_0 определим величины

$$t_* = t_*(x_0, a(\cdot), b(\cdot)) = \min \{ t \geq 0 : x(t; x_0, a(\cdot), b(\cdot)) \in \mathcal{T} \},$$

$$t^* = t^*(x_0, a(\cdot), b(\cdot)) = \min \{ t \geq 0 : x(t; x_0, a(\cdot), b(\cdot)) \in \mathcal{F} \}$$

— первые моменты, когда траектория $x(\cdot; x_0, a(\cdot), b(\cdot))$, порождаемая стратегиями $a(\cdot)$ и $b(\cdot)$, попадает на множества \mathcal{T} и \mathcal{F} , соответственно. Если траектория не приходит на множество \mathcal{T} (\mathcal{F}), тогда величина t_* (t^*) полагается равной $+\infty$. Рассмотрения можно проводить как в формализации с неупреждающими стратегиями, так и в позиционной формализации Н.Н. Красовского и А.И. Субботина [3, 19]. В последнем случае под стратегиями обратной связи первого и второго игрока подразумеваются функции $a(\cdot) : \mathbb{R}^d \mapsto A$ и $b(\cdot) : \mathbb{R}^d \mapsto B$ соответственно.

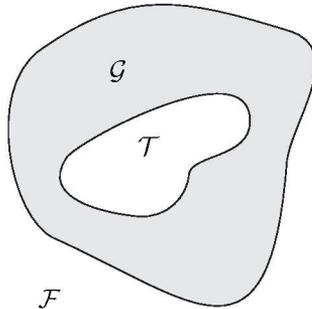


Рисунок 1. множества \mathcal{T} , \mathcal{F} и \mathcal{G}

Определим результат игры как

$$\tau(x_0, a(\cdot), b(\cdot)) = \begin{cases} +\infty, & \text{если } t_* = +\infty \text{ или } t^* < t_*, \\ t_*, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (2.4)$$

В статье [20] авторами доказано существование функции цены для такой игры:

$$T(x) = \inf_{a(\cdot) \in \mathcal{A}} \sup_{b(\cdot) \in \mathcal{B}} \tau(x, a(\cdot), b(\cdot)) = \sup_{b(\cdot) \in \mathcal{B}} \inf_{a(\cdot) \in \mathcal{A}} \tau(x, a(\cdot), b(\cdot)).$$

Здесь нахождение экстремумов происходит по классам \mathcal{A} и \mathcal{B} всех допустимых стратегий первого и второго игроков (неупреждающих или обратной связи).

Определенное неудобство с точки зрения численного исследования игры (2.1), (2.4) представляет неограниченность значений функций платы и цены. Поэтому часто с помощью замены *Кружкова* от неограниченной функции платы переходят к ограниченной:

$$J(x_0, a(\cdot), b(\cdot)) = \begin{cases} 1 - \exp(-\tau(x_0, a(\cdot), b(\cdot))), & \text{если } \tau(x_0, a(\cdot), b(\cdot)) < +\infty, \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (2.5)$$

При этом функция цены

$$v(x) := \inf_{a(\cdot) \in \mathcal{A}} \sup_{b(\cdot) \in \mathcal{B}} J(x, a(\cdot), b(\cdot)) = \sup_{b(\cdot) \in \mathcal{B}} \inf_{a(\cdot) \in \mathcal{A}} J(x, a(\cdot), b(\cdot)) \quad (2.6)$$

также становится ограниченной, и ее значения лежат в диапазоне от нуля до единицы.

3. Численная схема

В целом, построение численной схемы и обоснование ее сходимости проводятся аналогично тому, как в статье [9] строится и обосновывается численная схема для классической задачи быстрогодействия. При этом функция цены игры строится как обобщенное (вязкостное) решение соответствующей краевой задачи для уравнения Гамильтона – Якоби (ГЯ).

3.1. Дискретная схема

Заменим непрерывную динамику дискретной с шагом по времени $h > 0$:

$$x_n = x_{n-1} + hf(x_{n-1}, a_{n-1}, b_{n-1}), \quad n = 1, \dots, N, \quad x_0 \text{ задано,}$$

где $a_n \in A$ и $b_n \in B$.

Можно получить следующее представление для $w_h(\cdot)$ — функции цены дискретной задачи:

$$w_h(x) = \begin{cases} \gamma \max_{b \in B} \min_{a \in A} w_h(z(x, a, b)) + 1 - \gamma, & \text{если } x \in \mathcal{G}, \\ 0, & \text{если } x \in \mathcal{T}, \\ 1, & \text{если } x \in \mathcal{F}. \end{cases}$$

Здесь $\gamma = e^{-h}$, $z(x, a, b) = x + hf(x, a, b)$. Это представление основано на принципе динамического программирования.

Затем проведем дискретизацию по пространству с шагом k . Накинем на пространство \mathbb{R}^n сетку \mathcal{L} с шагом k , состоящую из узлов $q_{i_1, \dots, i_n} = (x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$, $i_1, \dots, i_n \in \mathbb{Z}$, $x_{i_j} = ki_j$. (В принципе, шаги сетки по разным координатным направлениям могут быть различными, но это не меняет идеи построения численной схемы.) Ниже для узлов решетки \mathcal{L} в основном будет использоваться линейная индексация q_ν , $\nu \in \mathbb{Z}$. Символ $\mathcal{L}_{\mathcal{T}}$ обозначает множество тех узлов решетки \mathcal{L} , которые попадают в множество \mathcal{T} , символ $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}$ — множество узлов, попавших в множество \mathcal{G} , а $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ — множество узлов, попавших в множество \mathcal{F} . В теоретических построениях сетка предполагается бесконечной.

Для любой точки $x \in \mathbb{R}^d$ можно найти симплекс $S(x)$ с вершинами $\{q_l(x)\}$ из \mathcal{L} такой, что точка x принадлежит симплексу $S(x)$ и $S(x)$ не содержит других узлов сетки. Предполагается, что вместе с введением сетки \mathcal{L} мы выбрали и разбиение пространства на симплексы с вершинами в узлах этой сетки. Далее можно получить *барицентрические (локальные) координаты* $\lambda_l(x)$ точки x относительно вершин $q_l(x)$ симплекса $S(x)$:

$$x = \sum_{l=1}^{n+1} \lambda_l(x) q_l(x), \quad \lambda_l(x) \geq 0, \quad \sum_{l=1}^{n+1} \lambda_l(x) = 1.$$

Иногда аргументы коэффициентов λ и вершин q будут опускаться, если из контекста ясно, для какой точки строятся локальные координаты.

Заменим функцию $w_h(\cdot)$ новой функцией $w(\cdot)$, значения $w(q_\nu)$ которой на узлах q_ν сетки \mathcal{L} заданы и формируют бесконечный вектор $W = (w(q_\nu))_{\nu \in \mathbb{Z}}$. Значение $w(x)$ в какой-то точке x , которая не является узлом решетки, восстанавливается с помощью кусочно-линейной аппроксимации на основе локальных координат точки x :

$$w_{loc}(x, W) = \sum_{l=1}^{n+1} \lambda_l w(q_l). \quad (3.1)$$

Тем самым получена следующая характеристика функции цены полностью дискретизированной задачи:

$$w(q_\nu) = \begin{cases} \gamma \max_{b \in B} \min_{a \in A} w_{loc}(z(q_\nu, a, b), W) + 1 - \gamma, & \text{если } q_\nu \in \mathcal{L}_G, \\ 0, & \text{если } q_\nu \in \mathcal{L}_T, \\ 1, & \text{если } q_\nu \in \mathcal{L}_F. \end{cases}$$

Данная характеристика имеет рекурсивный характер: значение $w(q_\nu)$ в узле q_ν зависит от значения локальной реконструкции w_{loc} , которое, в свою очередь, зависит от значений функции $w(\cdot)$ в узлах сетки, в том числе, возможно, в узле q_ν . Такой вид получаемых соотношений характерен для применения принципа динамического программирования. В дальнейшем на основе этой формулы будет предложен итерационный численный метод построения вектора W и функции w . Кроме того, из этой характеристики видно, что при задании функции $w(\cdot)$ при практической реализации метода необходимо хранить только значения на узлах из части сетки \mathcal{L}_G , попадающих в множество \mathcal{G} . Если множество \mathcal{G} ограничено, то \mathcal{L}_G содержит лишь конечное число узлов и может быть представлено в компьютере.

Для выбранной сетки $\mathcal{L} = \{q_\nu\}_{\nu \in \mathbb{Z}}$ обозначим через \mathcal{M} множество всех бесконечных векторов $W = (w(q_\nu))_{\nu \in \mathbb{Z}}$. Обозначим через \mathcal{M}_1 те векторы в \mathcal{M} , элементы $w(q_\nu)$ которых подчиняются неравенству $0 \leq w(q_\nu) \leq 1$. С использованием вектора $W = (w(q_\nu))_{\nu \in \mathbb{Z}}$ для каждого

$s \in \mathbb{Z}$ определим оператор $F_s : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$F_s(W) = \begin{cases} \gamma \max_{b \in B} \min_{a \in A} w_{loc}(z(q_s, a, b), W) + 1 - \gamma, & \text{если } q_s \in \mathcal{L}_G, \\ 0, & \text{если } q_s \in \mathcal{L}_T, \\ 1, & \text{если } q_s \in \mathcal{L}_F. \end{cases}$$

Здесь $w_{loc} : \mathbb{R}^d \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ — это локальная реконструкция (3.1) функции $w(\cdot)$, определенной с помощью вектора W . Совокупность значений операторов F_s по всем индексам s (по всем узлам q_s) определяет оператор $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$.

В множестве \mathcal{M} можно ввести частичный порядок поэлементного сравнения: $W_1 \leq W_2 \Leftrightarrow \forall \nu \in \mathbb{Z} w_1(q_\nu) \leq w_2(q_\nu)$. Также в этом множестве разумно ввести норму $\|W\|_\infty = \sup \{|w(q_\nu)| : \nu \in \mathbb{Z}\}$.

Докажем лемму об операторе F , аналогичную [9, стр. 124–125, Proposition 2.1].

Лемма 3.1. *Оператор $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ имеет следующие свойства:*

1. $F : \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_1$;
2. F — монотонный по отношению к частичному порядку в \mathcal{M} ;
3. F — сжимающее отображение по норме $\|\cdot\|_\infty$.

Доказательство. В основном, доказательство повторяет аналогичное в [9].

1. Пусть $W \in \mathcal{M}_1$ и $q_s \in \mathcal{L}_G$.

$$F_s(W) = \gamma \max_{b \in B} \min_{a \in A} \sum_{m=1}^{n+1} \lambda_m(z(q_s, a, b)) W_m(z(q_s, a, b)) + 1 - \gamma.$$

Здесь $W_m(z)$ — это элемент вектора W , соответствующий узлу, который является m -й вершиной симплекса $S(z(q_s, a, b))$.

Поскольку верно, что $\lambda_m(z(q_s, a, b)) \geq 0$, $\sum \lambda_m(z(q_s, a, b)) = 1$ и $0 \leq W_m \leq 1$, то

$$0 \leq F_s(W) \leq \gamma \max_{b \in B} \min_{a \in A} \sum_{m=1}^{n+1} \lambda_m(z(q_s, a, b)) + 1 - \gamma = \gamma + 1 - \gamma = 1.$$

Если $q_s \notin \mathcal{L}_G$, то $F_s(W) = 0$ или $F_s(W) = 1$, поэтому получаем, что $F : \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_1$.

2. Пусть $U, V \in \mathcal{M}$ и $U \geq V$. Если $q_s \in \mathcal{L}_G$, тогда

$$F_s(V) - F_s(U) = \gamma \max_{b \in B} \min_{a \in A} \sum_{m=1}^{n+1} \lambda_m(z(q_s, a, b)) V_m(z(q_s, a, b)) - \\ - \gamma \max_{b \in B} \min_{a \in A} \sum_{m=1}^{n+1} \lambda_m(z(q_s, a, b)) U_m(z(q_s, a, b)).$$

Возьмем управление $\bar{a}(b)$ первого игрока, доставляющее минимум в выражении для $F_s(U)$ для фиксированного b . Тогда первое слагаемое в выражении увеличится, так как $\bar{a}(b)$ не обязательно доставляет минимум для $F_s(V)$, а второе слагаемое не изменится. Получим

$$\gamma \max_{b \in B} \min_{a \in A} \sum_{m=1}^{n+1} \lambda_m(z(q_s, a, b)) V_m(z(q_s, a, b)) - \\ - \gamma \max_{b \in B} \min_{a \in A} \sum_{m=1}^{n+1} \lambda_m(z(q_s, a, b)) U_m(z(q_s, a, b)) \leq \\ \leq \gamma \max_{b \in B} \sum_{m=1}^{n+1} \lambda_m(z(q_s, \bar{a}(b), b)) V_m(z(q_s, \bar{a}(b), b)) - \\ - \gamma \max_{b \in B} \sum_{m=1}^{n+1} \lambda_m(z(q_s, \bar{a}(b), b)) U_m(z(q_s, \bar{a}(b), b)).$$

Теперь возьмем управление \bar{b} второго игрока, доставляющее максимум в выражении для уменьшаемого, то есть

$$\bar{b} \in \text{Arg max}_{b \in B} \left[\gamma \sum_{m=1}^{n+1} \lambda_m(z(q_s, \bar{a}(b), b)) V_m(z(q_s, \bar{a}(b), b)) \right].$$

Отсюда

$$\gamma \max_{b \in B} \sum_{m=1}^{n+1} \lambda_m(z(q_s, \bar{a}(b), b)) V_m(z(q_s, \bar{a}(b), b)) - \\ - \gamma \max_{b \in B} \sum_{m=1}^{n+1} \lambda_m(z(q_s, \bar{a}(b), b)) U_m(z(q_s, \bar{a}(b), b)) \leq$$

$$\leq \gamma \sum_{m=1}^{n+1} \lambda_m(z(q_s, \bar{a}(\bar{b}), \bar{b})) \left(V_m(z(q_s, \bar{a}(\bar{b}), \bar{b})) - U_m(z(q_s, \bar{a}(\bar{b}), \bar{b})) \right) \leq 0.$$

Если $q_s \in \mathcal{L}_{\mathcal{T}}$ или $q_s \in \mathcal{L}_{\mathcal{F}}$, то $F_s(V) - F_s(U) = 0$, поэтому F — монотонный оператор.

3. Пусть $U, V \in \mathcal{M}$. Если $q_s \in \mathcal{L}_{\mathcal{G}}$, тогда

$$\begin{aligned} |F_s(V) - F_s(U)| &\leq \gamma \sum_{m=1}^{n+1} \lambda_m(z(q_s, \bar{a}(\bar{b}), \bar{b})) \times \\ &\quad \times |V_m(z(q_s, \bar{a}(\bar{b}), \bar{b})) - U_m(z(q_s, \bar{a}(\bar{b}), \bar{b}))| \leq \\ &\leq \gamma \max_m |V_m(z(q_s, \bar{a}(\bar{b}), \bar{b})) - U_m(z(q_s, \bar{a}(\bar{b}), \bar{b}))| \times \\ &\quad \times \sum_{m=1}^{n+1} \lambda_m(z(q_s, \bar{a}(\bar{b}), \bar{b})) \leq \gamma \|V - U\|_{\infty}. \end{aligned}$$

Это выполнено для любого $s \in \mathbb{Z}$.

Если $q_s \in \mathcal{L}_{\mathcal{T}}$ или $q_s \in \mathcal{L}_{\mathcal{F}}$, тогда $F_s(V) - F_s(U) = 0$. Отсюда следует, что F — сжимающее отображение, так как $\gamma = e^{-h} < 1$.

□

Заметим, что пункты 1 и 2 леммы 3.1 выполняются даже для операторов из \mathcal{M} в \mathcal{M} , а не только для операторов из \mathcal{M}_1 в \mathcal{M}_1 .

Как следствие из этой леммы имеем, что существует единственная неподвижная точка \mathbf{W} оператора F , которая определяет функцию $\mathbf{w}(\cdot)$ в \mathbb{R}^n . Эта функция зависит от шагов дискретизации по времени h и пространству k исходной задачи:

$$\mathbf{w}(x) = \begin{cases} \sum_m \lambda_m \mathbf{w}(q_m), & \text{если } x \notin \mathcal{L} \text{ и } x = \sum_m \lambda_m q_m, \\ \gamma \max_{b \in B} \min_{a \in A} \mathbf{w}_{loc}(z(q_s, a, b), \mathbf{W}) + 1 - \gamma, & \text{если } q_s \in \mathcal{L}_{\mathcal{G}}, \\ 0, & \text{если } q_s \in \mathcal{L}_{\mathcal{T}}, \\ 1, & \text{если } q_s \in \mathcal{L}_{\mathcal{F}}. \end{cases} \quad (3.2)$$

3.2. Вязкостное решение уравнения ГЯ

Рассмотрим следующую краевую задачу для уравнения ГЯ:

$$\begin{aligned} z + H(x, Dz) &= 0, \quad x \in \mathcal{G}, \\ z(x) &= 0 \text{ при } x \in \partial\mathcal{T}, \\ z(x) &= 1 \text{ при } x \in \partial\mathcal{F}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь символ Dz обозначает градиент функции z . Функция H называется *гамильтонианом* и в случае динамики (2.1) определяется как

$$H(x, p) = \min_{a \in A} \max_{b \in B} \langle -f(x, a, b) \cdot p \rangle - 1, \quad x \in \mathcal{G}, \quad p \in \mathbb{R}^d. \quad (3.4)$$

Вид уравнения (3.3) (в частности, наличие слагаемого z) обуславливается тем, что уравнение выписано для функции цены после замены Кружкова.

Сложность решения задач данного вида заключается в том, что необходимое условие существования классического решения дифференциального уравнения в частных производных — дважды дифференцируемость функции в левой части уравнения. Но в случае игры быстрого действия можно говорить лишь о непрерывности гамильтониана, поэтому нет гарантии, что уравнение ГЯ имеет классическое решение.

Для преодоления этой проблемы было использовано понятие *обобщенного вязкостного решения*, введенное в [16]. В книге [7] был предложен альтернативный подход к получению обобщенного решения уравнения ГЯ, который называется *обобщенным минимаксным решением*. Также в [7] доказывается, что вязкостные и минимаксные решения совпадают в точках непрерывности.

В [4] авторы доказали, что цена игры (2.1), (2.5) является вязкостным решением задачи (3.3). Имеющееся доказательство было проведено в предположении динамического преимущества каждого из игроков на границе соответствующего множества:

$$\begin{aligned} \forall x \in \partial\mathcal{T} \quad \min_{a \in A} \max_{b \in B} \langle n_{\mathcal{T}}(x), f(x, a, b) \rangle &< 0, \\ \forall x \in \partial\mathcal{F} \quad \max_{b \in B} \min_{a \in A} \langle n_{\mathcal{F}}(x), f(x, a, b) \rangle &< 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Здесь $n_{\mathcal{T}}(x)$ ($n_{\mathcal{F}}(x)$) — вектор нормали к границе $\partial\mathcal{T}$ ($\partial\mathcal{F}$) множества \mathcal{T} (\mathcal{F}) в точке x , направленный вовне соответствующего множества или, что то же самое, внутрь множества \mathcal{G} . Смысл этих соотношений в том, что если система оказалась на границе множества \mathcal{T} (\mathcal{F}), то у первого (второго) игрока достаточно динамических возможностей, чтобы направить движение внутрь соответствующего множества вне зависимости от действий противника. Сочетание таких предположений фактически приводит к предположению о непрерывности функции цены внутри множества \mathcal{G} .

Определение 3.1. Будем называть полунепрерывную сверху функцию $u(\cdot) : \text{cl}\Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ нижним вязкостным решением уравнения (3.3) в области Ω , если для любой функции $\varphi \in C^1(\Omega)$ и для любой точки $y \in \Omega$, где достигается локальный максимум для функции $u - \varphi$, выполняется неравенство $u(y) + H(y, D\varphi(y)) \leq 0$.

Определение 3.2. Будем называть полунепрерывную снизу функцию $u(\cdot) : \text{cl}\Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ верхним вязкостным решением уравнения (3.3) в области Ω , если для любой функции $\varphi \in C^1(\Omega)$ и для любой точки $y \in \Omega$, где достигается локальный минимум для функции $u - \varphi$, выполняется неравенство $u(y) + H(y, D\varphi(y)) \geq 0$.

Определение 3.3. Рассмотрим две последовательности вещественных чисел $h_n > 0$ и $k_n > 0$ (шаги дискретизации по времени и пространству). Будем называть их допустимыми, если $h_n \rightarrow 0$ и $k_n/h_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Рассмотрим допустимые последовательности вещественных чисел $h_n > 0$, $k_n > 0$ и последовательность решений \mathbf{w}_n задачи (3.2), им соответствующую.

Доказательство последующих фактов опирается на понятие слабого предела в вязкостном смысле, введенное в [10]. Верхний и нижний слабые пределы последовательности \mathbf{w}_n в вязкостном смысле определяются как

$$\begin{aligned} \limsup_{(y,n) \rightarrow (x,\infty)} \mathbf{w}_n(y) &:= \lim_{\delta \rightarrow 0+} \sup \{ \mathbf{w}_n(y) : |x - y| \leq \delta, n \geq 1/\delta \}, \\ \liminf_{(y,n) \rightarrow (x,\infty)} \mathbf{w}_n(y) &:= \lim_{\delta \rightarrow 0+} \inf \{ \mathbf{w}_n(y) : |x - y| \leq \delta, n \geq 1/\delta \}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Следует отметить, что условие С.2 требуется, в частности, для

существования этих пределов.

Определение 3.4. Полунепрерывная сверху функция $\bar{v} : \text{cl } \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет на границе Ω неравенству $\bar{v} + H(x, D\bar{v}) \leq 0$ в вязкостном смысле, если $\forall \varphi \in C^1(\text{cl } \Omega)$ и точки $x \in \partial\mathcal{T}$, в которой функция $\bar{v} - \varphi$ достигает локального максимума, выполняется неравенство $\bar{v}(x) + H(x, D\varphi(x)) \leq 0$.

Определение 3.5. Полунепрерывная снизу функция $\bar{v} : \text{cl } \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет на границе Ω неравенству $\bar{v} + H(x, D\bar{v}) \geq 0$ в вязкостном смысле, если $\forall \varphi \in C^1(\text{cl } \Omega)$ и точки $x \in \partial\mathcal{T}$, в которой функция $\bar{v} - \varphi$ достигает локального минимума, выполняется неравенство $\bar{v}(x) + H(x, D\varphi(x)) \geq 0$.

4. Сходимость численной схемы

Для задачи быстрогодействия с линией жизни сформулируем и докажем лемму, аналогичную [9, стр. 127, Lemma 2.2]. В оригинальной лемме были опущены некоторые выкладки, например: отсутствовало доказательство для верхнего вязкостного решения, доказательство неравенств, аналогичных неравенствам (4.6) и (4.7), было проведено не полностью, отсутствовали некоторые существенные замечания (например, в оригинальной лемме функция φ определена на замыкании области игры, но используется так, будто определена на всем \mathbb{R}^n). Авторы данной статьи восстановили все необходимые выкладки и пояснения.

Лемма 4.1. Рассмотрим допустимые последовательности вещественных чисел $h_n > 0$ и $k_n > 0$, и пусть \mathbf{w}_n — соответствующая им последовательность решений (3.2). Обозначим

$$\bar{v}(x) := \limsup_{(y,n) \rightarrow (x,\infty)} \mathbf{w}_n(y), \quad \underline{v}(x) := \liminf_{(y,n) \rightarrow (x,\infty)} \mathbf{w}_n(y).$$

Функции \bar{v} и \underline{v} являются, соответственно, нижним и верхним вязкостным решением краевой задачи (3.3) с граничными условиями

$$\underline{v} \geq 0 \text{ на } \partial\mathcal{T}, \quad (4.1)$$

$$\bar{v} \leq 0 \text{ или } \bar{v} + H(x, D\bar{v}(x)) \leq 0 \text{ на } \partial\mathcal{T}, \quad (4.2)$$

$$\underline{v} \geq 1 \text{ или } \underline{v} + H(x, D\underline{v}(x)) \geq 0 \text{ на } \partial\mathcal{F}, \quad (4.3)$$

$$\bar{v} \leq 1 \text{ на } \partial\mathcal{F}. \quad (4.4)$$

Вторые неравенства в (4.2) и (4.3) понимаются в вязкостном смысле.

Доказательство. Доказательства того, что выполнены граничные условия (4.1), (4.2), и того, что \bar{v} — нижнее решение, проводятся аналогично доказательствам в статье [9]. Последнее условие (4.4) очевидно из построения функции \bar{v} . Следовательно, нужно показать, что функция \underline{v} — верхнее вязкостное решение и что выполнено граничное условие (4.3). Докажем это одновременно (в (4.3) будем доказывать второе неравенство).

Возьмем любую функцию $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n)$ и точку y — точку локального минимума для функции $\underline{v} - \varphi$. Хотя в определении верхнего вязкостного решения функция φ рассматривается только на множестве $\text{cl } \mathcal{G}$, мы определяем ее на всем пространстве \mathbb{R}^n , так как это понадобится нам в дальнейшем; сужение функции φ на множество $\text{cl } \mathcal{G}$ — гладкая функция. Поскольку от прибавления константы к функции φ свойство точки y не меняется, будем считать, что $\varphi(y) = \underline{v}(y)$. Точка y может либо принадлежать множеству \mathcal{G} , либо лежать на $\partial\mathcal{F}$. Случай, когда точка y принадлежит $\partial\mathcal{T}$, рассматривать не нужно, так как он учтен в условии (4.1). Если $y \in \partial\mathcal{F}$ и $\underline{v}(y) \geq 1$, то неравенство (4.3) выполнено, поэтому в дальнейшем будем предполагать, что $\underline{v}(y) < 1$, если $y \in \partial\mathcal{F}$, и $\underline{v}(y) \leq 1$, если $y \in \mathcal{G}$.

Нужно доказать, что $\underline{v}(y) + H(y, D\varphi(y)) \geq 0$. Выберем последовательность точек x_n таких, что

$$\min_{\text{cl}(\mathcal{G} \cap B(y, 1))} (\mathbf{w}_n - \varphi) = (\mathbf{w}_n - \varphi)(x_n).$$

Здесь и далее $B(z, r)$ — замкнутый шар радиуса r с центром в точке z . Базовое свойство слабых пределов в вязкостном смысле [8,11,17] — существование подпоследовательности (считаем, что это сама последовательность x_n) такой, что $x_n \rightarrow y$ и $\mathbf{w}_n(x_n) \rightarrow \underline{v}(y)$ при $n \rightarrow \infty$.

Значит, можно выбрать такое $\varepsilon > 0$, что $B(y, \varepsilon) \subset \mathcal{G}$, если $y \in \mathcal{G}$, или $\varphi(y) < 1 - \varepsilon$ для любого $y \in B(y, \varepsilon)$, если $y \in \partial\mathcal{F}$. За счет уменьшения ε этого всегда можно добиться, так как если $y \in \partial\mathcal{F}$, то $\varphi(y) = \underline{v}(y) < 1$. Более того, можно выбрать такое достаточно большое n , что выполняются следующие условия:

- а) $x_n \in B(y, \varepsilon/3)$ — выполнится из-за сходимости последовательности x_n к точке y при $n \rightarrow \infty$;
- б) $|h_n f(x_n, a, b)| \leq \varepsilon/3$ — выполнится из-за стремления h_n к 0;
- в) $(2 + \sigma)k_n \leq \varepsilon/3$ — выполнится из-за стремления k_n к 0; здесь $\sigma = \max \{|D\varphi(z)| : z \in B(y, 1)\}$;
- г) $\varphi(x_n) - \mathbf{w}_n(x_n) > -\varepsilon$ — выполнится, так как мы предположили, что $\varphi(y) = \underline{v}(y)$, тогда $\varphi(x_n) < \mathbf{w}_n(x_n)$ (так как $\varphi(x_n) < \underline{v}(x_n)$ и $\underline{v}(x_n) \leq \mathbf{w}_n(x_n)$ в окрестности точки y).

Следующие выкладки проводятся для фиксированного n , поэтому временно опустим этот индекс в $h_n, k_n, \mathbf{w}_n, x_n$.

1. Пусть $y \in \mathcal{G}$. Запишем локальные координаты точки x через вершины q_s соответствующего симплекса: $x = \sum_s \lambda_s q_s$. Отметим, что $q_s \in B(y, \varepsilon)$, так как $x \in B(y, \varepsilon/3)$ и $(2 + \sigma)k \leq \varepsilon/3$. Поэтому $q_s \in \mathcal{G}$, откуда следует, что для $\mathbf{w}(q_s)$ справедливо следующее представление:

$$\mathbf{w}(q_s) = \gamma \max_{b \in B} \min_{a \in A} \mathbf{w}_{loc}(z(q_s, a, b), \mathbf{W}) + 1 - \gamma.$$

2. Пусть $y \in \partial\mathcal{F}$. Тогда $-\varepsilon < \varphi(x) - \mathbf{w}(x) < 1 - \varepsilon - \mathbf{w}(x) \Rightarrow \mathbf{w}(x) < 1$. Поэтому, если $x = \sum_s \lambda_s q_s$, то найдется узел q_s такой, что $\lambda_s \neq 0$ и $\mathbf{w}(q_s) < 1$. Тогда, снова, для $\mathbf{w}(q_s)$ справедливо следующее представление:

$$\mathbf{w}(q_s) = \gamma \max_{b \in B} \min_{a \in A} \mathbf{w}_{loc}(z(q_s, a, b), \mathbf{W}) + 1 - \gamma.$$

Отметим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(q_s) &= \gamma \max_{b \in B} \min_{a \in A} \mathbf{w}_{loc}(z(q_s, a, b), \mathbf{W}) + 1 - \gamma \geq \\ &\geq \gamma \min_{a \in A} \mathbf{w}_{loc}(z(q_s, a, b), \mathbf{W}) + 1 - \gamma \end{aligned}$$

для любого $b \in B$. Кроме того, для любого $\rho > 0$ существует такое $a_s(\rho)$ (например, то, на котором достигается минимум), что выполняется неравенство:

$$\gamma \min_{a \in A} \mathbf{w}_{loc}(z(q_s, a, b), \mathbf{W}) + 1 - \gamma > \gamma \mathbf{w}_{loc}(z(q_s, a_s(\rho), b), \mathbf{W}) + 1 - \gamma - \rho h.$$

Обозначим $z_s(\rho) = z(q_s, a_s(\rho), b) = q_s + hf(q_s, a_s(\rho), b)$. Отсюда получаем, что любого $\rho > 0$ выполнено соотношение

$$\mathbf{w}(q_s) - \gamma \mathbf{w}_{loc}(z_s(\rho), \mathbf{W}) - (1 - \gamma) > -\rho h \quad \forall b \in B \quad (4.5)$$

Пусть $z_s = \sum_p \mu_p q_p$. Докажем теперь, что

$$\mathbf{w}(x) - \varphi(x) \leq \mathbf{w}_{loc}(z_s(\rho), \mathbf{W}) - \varphi(z_s(\rho)) + \sigma k + o_1, \quad (4.6)$$

где $o_1 = o(|z_s(\rho) - q_{p^*}|)$, а q_{p^*} — такая вершина симплекса $S(z_s(\rho))$, что $\varphi(q_{p^*})$ — это минимальное значение φ на вершинах этого симплекса. Здесь и далее все o -величины рассматриваются при $n \rightarrow \infty$.

Если $z_s(\rho) \in \text{cl } \mathcal{G}$, то в силу условия 3 имеем $z_s(\rho) \in B(q_s, \varepsilon/3)$. Так как $q_s \in B(x, \varepsilon/3)$, то $z_s(\rho) \in B(x, 2\varepsilon/3) \subset B(x, \varepsilon)$. Тогда неравенство (4.6) выполняется, поскольку x — точка локального минимума функции $\mathbf{w} - \varphi$.

Пусть теперь $z_s(\rho) \notin \text{cl } \mathcal{G}$. Возможны два случая:

1. Найдется такой член в представлении z_s , что $\mu_p \neq 0$ и $q_p \in \text{cl } \mathcal{G}$. Тогда аналогично имеем $q_p \in B(z_s(\rho), \varepsilon/3)$, $z_s(\rho) \in B(q_s, \varepsilon/3)$, $q_s \in B(x, \varepsilon/3)$. Отсюда $q_p \in B(x, \varepsilon)$, а значит, $\mathbf{w}(x) - \varphi(x) \leq \mathbf{w}(q_p) - \varphi(q_p)$, так как x — точка локального минимума $\mathbf{w} - \varphi$.
2. Для всех p таких, что $\mu_p \neq 0$, имеем $q_p \notin \text{cl } \mathcal{G}$. Напомним, что φ определена на всем пространстве \mathbb{R}^n и что для любого $y \in B(y, \varepsilon)$ выполняется условие $\varphi(y) < 1 - \varepsilon$. Тогда в силу условия 4 имеем

$$\mathbf{w}(x) - \varphi(x) < \varepsilon < 1 - \varphi(q_p) = \mathbf{w}(q_p) - \varphi(q_p),$$

так как в узле $q_p \in \mathcal{F}$ функция $\mathbf{w}(q_p) = 1$.

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(x) - \varphi(x) &\leq \sum_p \mu_p (\mathbf{w}(q_p) - \varphi(q_p)) = \sum_p \mu_p \mathbf{w}(q_p) - \sum_p \mu_p \varphi(q_p) \leq \\ &\leq \mathbf{w}_{loc}(z_s(\rho), \mathbf{W}) - \sum_p \mu_p \varphi(q_{p^*}) = \mathbf{w}_{loc}(z_s(\rho), \mathbf{W}) - \varphi(q_{p^*}), \end{aligned}$$

где индекс p^* определен выше.

Заметим, что

$$\begin{aligned} |\varphi(z_s(\rho)) - \varphi(q_{p^*})| &\leq \\ &\leq \sigma |z_s(\rho) - q_{p^*}| + o(|z_s(\rho) - q_{p^*}|) < \sigma k + o(|z_s(\rho) - q_{p^*}|). \end{aligned}$$

Тогда $-\varphi(q_{p^*}) \leq -\varphi(z_s(\rho)) + \sigma k + o_1$. Отсюда получаем неравенство (4.6).

Покажем теперь, что $|\mathbf{w}(x) - \mathbf{w}(q_s)| \leq \sigma k$.

Так как x, q_s принадлежат одному симплексу S , то функция \mathbf{w} является аффинной на отрезке $X = [x, q_s]$. Так как функция $(\mathbf{w} - \varphi)|_X$ достигает минимума в точке x , мы получаем

$$\|D_X \mathbf{w}\|_{C(\mathcal{G})} = |D_X \mathbf{w}| = |D_X \varphi| \leq \sigma.$$

Символ $D_X g$ означает производную сужения функции g на отрезок X как производную функции одного переменного.

Также отметим, что

$$\begin{aligned} |\varphi(z_s(\rho)) - \varphi(x + hf(x, a_s(\rho), b))| &\leq \sigma |z_s(\rho) - x + hf(x, a_s(\rho), b)| + o_2 \leq \\ &\leq \sigma |q_s + hf(q_s, a_s(\rho), b) - x - hf(x, a_s(\rho), b)| + o_2 \leq \\ &\leq \sigma (|q_s - x| + h|f(q_s, a_s(\rho), b) - f(x, a_s(\rho), b)|) + o_2 \leq \sigma(k + hLk) + o_2, \end{aligned} \tag{4.7}$$

где $o_2 = o(|z_s(\rho) - x - hf(x, a_s(\rho), b)|)$.

Теперь применим к (4.5) полученные неравенства:

$$-\rho h < \mathbf{w}(q_s) - \gamma \mathbf{w}_{loc}(z_s(\rho), \mathbf{W}) - (1 - \gamma) \leq$$

так как $|\mathbf{w}(x) - \mathbf{w}(q_s)| \leq \sigma k$

$$\leq \mathbf{w}(x) - \gamma \mathbf{w}_{loc}(z_s(\rho), \mathbf{W}) - (1 - \gamma) + \sigma k =$$

добавим и вычтем $\gamma \mathbf{w}(x)$

$$= (1 - \gamma) \mathbf{w}(x) + \gamma \left(\mathbf{w}(x) - \mathbf{w}_{loc}(z_s(\rho), \mathbf{W}) \right) - (1 - \gamma) + \sigma k \leq$$

по неравенству (4.6)

$$\leq (1 - \gamma) \mathbf{w}(x) + \gamma \left(\varphi(x) - \varphi(z_s(\rho)) \right) - (1 - \gamma) + (1 + \gamma) \sigma k + \gamma o_1 \leq$$

по неравенству (4.7)

$$\begin{aligned} &\leq (1 - \gamma) \mathbf{w}(x) + \gamma \left(\varphi(x) - \varphi(x + hf(x, a_s, b)) \right) - \\ &\quad - (1 - \gamma) + (1 + 2\gamma + \gamma hL) \sigma k + \gamma(o_1 + o_2), \end{aligned}$$

где L — константа Липшица для функции f из условия (2.2).

Поскольку ρ любое, то

$$\begin{aligned} 0 \leq &\frac{1 - \gamma_n}{h_n} \mathbf{w}_n(x^n) + \\ &+ \min_{b \in B} \max_{a \in A} \left\{ \gamma_n \frac{\varphi(x^n) - \varphi(x^n + h_n f(x^n, a, b))}{h_n} - \frac{1 - \gamma_n}{h_n} \right\} + \\ &+ \sigma \frac{k_n}{h_n} (1 + 2\gamma_n + \gamma_n h_n L) + \gamma(o_1 + o_2). \end{aligned}$$

Устремляя n к бесконечности, получаем $0 \leq \underline{v}(y) + H(y, D\varphi(y))$. Тем самым доказано соотношение (4.3), а с ним и тот факт, что \bar{v} и \underline{v} — нижнее и верхнее вязкостное решение задачи (3.3) с граничными условиями (4.1)–(4.4) в вязкостном смысле. \square

Теперь можно доказать теорему о сходимости предложенной численной схемы, аналогичную [9, стр.125–129, Theorem 2.3]. Перед этим стоит отметить, что доказательство вспомогательного утверждения, соответствующего теореме [9, стр.117–118, Theorem 1.10], но для задачи быстрогодействия с линией жизни, проводится аналогично, с заменой множества Ω на множество \mathcal{G} .

Теорема 4.1. *Предположим, что выполняются условия С.1 и С.2. Также считаем, что функция цены v (2.6) игры (2.1), (2.5) непрерывна на $\text{cl } \mathcal{G}$. Тогда \mathbf{w}_n сходится к функции $v = \bar{v} = \underline{v}$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно на любом компактном множестве \mathcal{K} в \mathbb{R}^n , на котором функция цены непрерывна.*

Заметим, что непрерывность функции цены v имеет место при выполнении предположений (3.5).

Доказательство. По лемме 4.1 функция \bar{v} — нижнее решение краевой задачи (3.3), а функция v является верхним решением в силу утверждения [9, стр.115–116, Theorem 1.6], общего для краевых задач для уравнения ГЯ. Тогда, применяя утверждение, аналогичное утверждению [9, стр.117–118, Theorem 1.10], получаем, что $\bar{v} \leq v$ на $\text{cl } \mathcal{G}$. Таким же образом доказывается, что $v \leq \underline{v}$, и так как $\underline{v} \leq \bar{v}$, то мы получаем, что $\underline{v} = \bar{v} = v$.

Проверим, что \mathbf{w}_n равномерно сходится к v на компактных множествах. Докажем это от противного: предположим, что существуют $\varepsilon > 0$, $n_m \rightarrow \infty$ и $x_m \in \mathcal{K}$ такие, что $x_m \rightarrow x$, $|\mathbf{w}_{n_m}(x_m) - v(x_m)| > \varepsilon$.

Вообще говоря, вязкостные пределы определяются как супремум и инфимум значений функции по сжимающейся окрестности точки — см. соотношения (3.6), — однако мы рассматриваем точку непрерывности функции цены и, как следствие, верхнего и нижнего вязкостных решений. Поэтому от рассмотрения пределов в вязкостном смысле можно перейти к рассмотрению классических пределов, что и сделано.

Перейдем в этом неравенстве к пределу по m и, пользуясь непрерывностью функции v , получим $|\bar{v}(x) - v(x)| \geq \varepsilon$, что приводит к противоречию. \square

5. Численные примеры

Авторами была создана собственная реализация описанного выше алгоритма для Microsoft Windows с использованием технологий .Net 4.0 и C#. Вначале, программа была написана как однопоточная, а затем была сделана многопоточной с помощью средств языка C# для ускорения вычислений на многоядерных процессорах.

Далее, в этом разделе приводятся результаты вычислений для трех классических систем. Первый пример представляет собой игру «шофер-убийца», предложенную Р.Айзексом [1], для некоторого набора параметров. Второй пример рассматривают управляемую систему «машина Дубинса» — простейшую модель движения автомобиля, самолета или морского судна. Третий пример — классическая модельная задача управления «материальная точка». Формально, два

последних примера не являются игровыми, однако могут быть преобразованы к игровому виду аддитивным введением в какое-либо место динамики фиктивной помехи, ограниченной одноточечным множеством, состоящим из нуля пространства.

Также следует отметить, что формально рассматриваемые примеры не относятся к тому классу игр, для которого доказана сходимость численного метода: функция оптимального результата во всех примерах разрывна, поскольку нарушено первое из условий (3.5) — допустимость всей границы терминального множества \mathcal{T} . Кроме того, на внешней границе множества \mathcal{G} (на линии жизни $\partial\mathcal{F}$) нарушено второе из условий (3.5). Тем не менее, сравнение результатов, полученных предложенным численным методом и полученных другими методами [21, 22], показывает достаточно хорошее их совпадение. Исследование задач игрового быстрогодействия с линией жизни в случае разрывной функции оптимального результата является предметом дальнейших исследований.

5.1. Игра «шофер-убийца»

В игре «шофер-убийца» преследователь — который является автомобилем с ограниченным радиусом разворота — пытается догнать убегающего с динамикой простых движений.

Редуцированная динамика системы имеет следующий вид [1]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -5ya + \frac{1}{2} \sin(b), \\ \dot{y} &= 5xa + \frac{1}{2} \cos(b) - 1, \end{aligned}$$

где $a \in [-1, 1]$, $b \in [-\pi, \pi]$. Константа 5 характеризует радиус разворота первого игрока, а $1/2$ — максимальную скорость движения второго игрока. Терминальное множество \mathcal{T} — круг с центром в начале координат радиуса 0.1. Множество \mathcal{G} — это квадрат с центром в начале координат и сторонами длины 1. Количество итераций $n = 300$. Шаг по времени $h = 0.05$, шаг по пространству $k = 0.015$. Время вычисления составило 7 часов с четвертью. На рис. 2 показаны линии уровня функции цены, аппроксимированной при помощи локальной реконструкции на базе полученных значений в узлах решетки. С этим связана некоторая их «угловатость». Линии уровня выведены для значений функции цены $3.5 \cdot i/200$, $i = 0, 1, \dots, 200$.

Белый «круг» в центре рисунка — целевое множество \mathcal{T} , где функция цены равна нулю (и отсутствуют линии уровня). Белое плато в нижней части рисунка отвечает значению функции цены $+\infty$. В игре с такой динамикой и возможностями игроков, но без линии жизни, убегающий ловится за конечное время из любой начальной точки, то есть в игре без линии жизни функции цены меньше $+\infty$. Возникновение бесконечных значений при введении линии жизни объясняется тем, что оптимальные траектории, выпущенные из некоторых начальных точек, выходят на линию жизни $\partial\mathcal{F}$ и в этих точках выигрывает второй игрок.

В связи с последним обстоятельством возникает вопрос совпадения функций цены в играх с и без линии жизни, но с одинаковыми динамиками, терминальными множествами и динамическими возможностями игроков. У авторов имеются результаты относительно этой проблемы.

Видна общая несимметричность картинке относительно вертикальной оси, хотя исходная задача симметрична. Скорее всего, этот

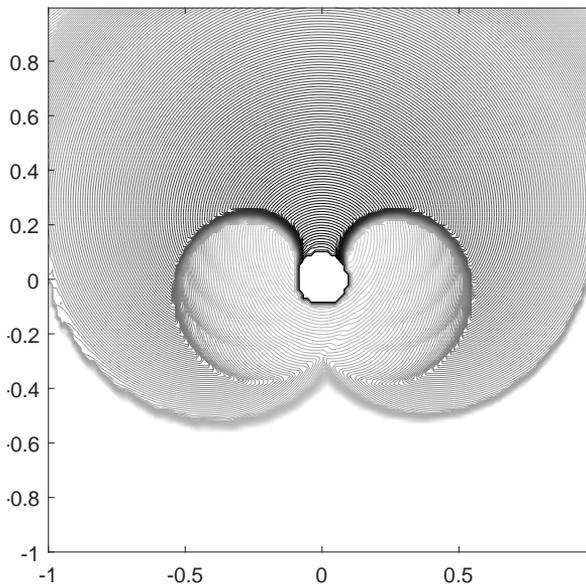


Рисунок 2. Игра «шофер-убийца», множество уровня функции цены

эффект вызван тем, что несимметричным относительно вертикальной оси является разбиение плоскости на симплексы (треугольники), в которых проводится кусочно-линейная аппроксимация вычисляемой функции. В качестве базовых симплексов брались прямоугольные треугольники, которые получаются расщеплением квадратной сетки линиями, параллельными биссектрисе второго и четвертого координатных углов и проходящими через вершины сетки. Для получения симметричного результата следует применять решетку и метод аппроксимации, которые соответствуют осям симметрии задачи, например, можно использовать шестиугольную сетку равносторонних треугольников или же на квадратной сетке применять билинейную аппроксимацию. Однако из-за доказанной несимметричности будет уменьшаться при уменьшении шагов дискретизации и сходимости численно полученной функции цены к идеальной.

5.2. Машина Дубинса

Редуцированная динамика системы задается следующим обра-

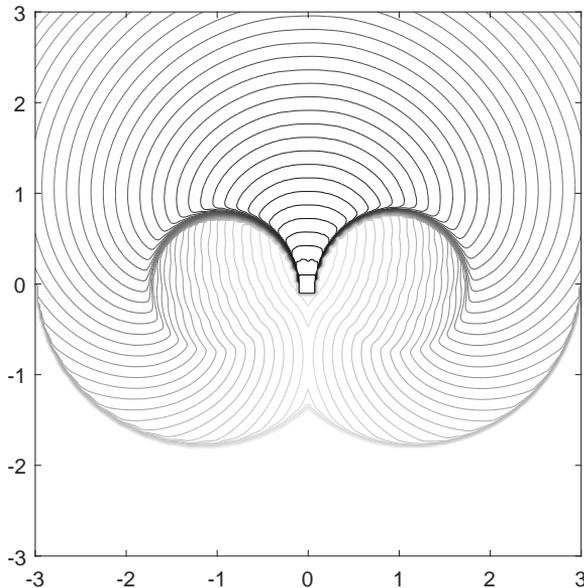


Рисунок 3. Машина Дубинса, множество уровня функции цены

зом [1]:

$$\dot{x} = -ya, \quad \dot{y} = xa - 1.$$

Здесь $a \in [-1, 1]$. Шаг по времени $h = 0.15$, шаг по пространству $k = 0.025$. Целевое множество $\mathcal{T} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|, |y|\} \leq 0.1\}$. Множество \mathcal{G} — квадрат с центром в начале координат и сторонами длиной 6. Количество итераций $n = 50$. Фактически, машина Дубинса — это задача управления, но мы рассматриваем ее как дифференциальную игру с фиктивным вторым игроком. На рис. 3 показаны линии уровня функции оптимального результата для значений $7 \cdot i/50$, $i = 0, 1, \dots, 50$.

Белое плато в нижней части рисунка отвечает значению функции цены $+\infty$, белый квадрат в центре — целевое множество.

Рассмотрение дифференциальной игры быстрогодействия с линией жизни и фиктивным вторым игроком соответствует рассмотрению управляемой системы с фазовыми ограничениями. Поэтому появление внизу области с бесконечными значениями функции оптимального результата связано с невозможностью перевода системы оттуда на терминальное множество траекториями, остающимися внутри выбранного квадрата.

5.3. Материальная точка

Данная задача управления имеет простейшую линейную динамику:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = a,$$

где $a \in [-1, 1]$. Целевое множество \mathcal{T} — квадрат с центром в начале координат и сторонами длиной 1. Множество \mathcal{G} — тоже квадрат, но со сторонами длиной 3. Количество итераций $n = 100$. Шаг по времени $h = 0.02$, шаг по пространству $k = 0.025$. Время вычисления составило чуть меньше получаса. На рис. 4 показаны линии уровня функции оптимального результата для значений $3.5 \cdot i/200$, $i = 0, 1, \dots, 200$. Белые участки в левой нижней и правой верхней частях рисунка отвечают значению функции цены $+\infty$, белый квадрат в центре — целевое множество.

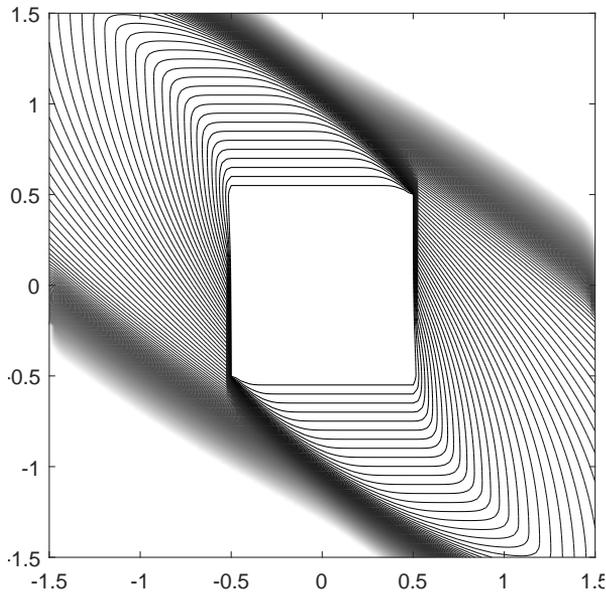


Рисунок 4. Материальная точка, множество уровня функции цены

6. Заключение

В данной статье предложен численный метод, строящий функцию цены дифференциальной игры быстрого действия с линией жизни как обобщенное (вязкостное) решение соответствующей краевой задачи для уравнения ГЯ, и доказана его сходимость. Ранее авторами было показано существование обобщенного решения и его совпадение с функцией цены в весьма сильных предположениях динамического преимущества каждого из игроков на границе соответствующего множества (3.5). Известно, что из одновременного выполнения этих двух неравенств следует непрерывность функции цены, и в этом предположении доказана сходимость численного метода. В дальнейшем планируется доказать существование обобщенного решения и его совпадение с функцией цены с использованием более слабых предположений и предложить численный метод, сходящийся к разрывной функции цены игры быстрого действия с линией жизни.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айзекс Р. *Дифференциальные игры*. М.: Мир, 1967. 480 с.
2. Дуткевич Ю.Г., Петросян Л.А. *Игра с «линией жизни». Случай l-захвата* // Вестн. Ленингр. ун-та., №13, 1969. С. 31–38.
3. Красовский Н.Н., Субботин А.И. *Позиционные дифференциальные игры*. Москва: Наука, 1974.
4. Мунц Н.В., Кумков С.С. *О совпадении минимаксного решения и функции цены игры быстрого действия с линией жизни*. Труды Института математики и механики УрО РАН. Том 24, № 2. Екатеринбург: УрО РАН, 2018. С. 200–214.
5. Петросян Л.А. *Дисперсионные поверхности в одном семействе игр преследования* // Доклады Академии наук Армянской ССР. 1966. Т. 43, №4. С. 193–197.
6. Петросян Л.А. *Дифференциальные игры преследования*. Ленинград: Издательство ЛГУ, 1977.
7. Субботин А.И. *Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации*. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
8. Bardi M., Capuzzo-Dolcetta I. *Optimal Control and Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman Equations*. Boston: Birkhäuser, 1997.
9. Bardi M., Falcone M., Soravia P. *Numerical Methods for Pursuit-Evasion Games via Viscosity Solutions* // Annals of the International Society of Dynamic Games. 1999. Vol. 6: Stochastic and Differential Games, edited by M. Bardi, T. Parthasarathy and T.E.S. Raghavan, Birkhäuser, Boston. P. 105–175.
10. Barles G., Perthame B. *Discontinuous solutions of deterministic optimal stopping time problems* // RAIRO Model. Math. Anal. 1987. N. 21. P. 557–579.

11. Barles G. *Solutions de viscosite des equations de Hamilton-Jacobi* // Mathematiques et Applications. Paris: Springer. 1994. Vol. 17.
12. Cardaliaguet P., Quincampoix M., Saint-Pierre P. *Some algorithms for differential games with two players and one target* // RAIRO – Modélisation mathématique et analyse numérique. 1994. Vol. 28, №4. P. 441–461.
13. Cardaliaguet P., Quincampoix M., Saint-Pierre P. *Set-Valued Numerical Analysis for Optimal Control and Differential Games* // Annals of the International Society of Dynamic Games. 1999. Vol. 4. P. 177–247.
14. Cardaliaguet P., Quincampoix M., Saint-Pierre P. *Pursuit differential games with state constraints* // SIAM J. Control and Optimization. 2001. Vol. 39, №5. P. 1615–1632
15. Cardaliaguet P., Quincampoix M., Saint-Pierre P. *Differential Games Through Viability Theory: Old and Recent Results* // Annals of the International Society of Dynamic Games. 2007. Vol. 9. P. 3–35.
16. Crandall M.G., Evans L.C., Lions P.-L. *Some properties of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations* // Transactions of the American Mathematical Society. 1984. Vol. 282, N. 2. P. 487–502.
17. Crandall M.G., Ishii H., Lions P.L. *User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations* // Bull. Amer. Math. Soc. 1992. N. 27. P. 1–67.
18. Isaacs R. *Differential Games*. New York: John Wiley and Sons, 1965.
19. Krasovskii N.N., Subbotin. A.I. *Game-Theoretical Control Problems*. New York: Springer-Verlag, 1988.
20. Munts N.V., Kumkov S.S. *Existence of value function in time-optimal game with life line (Существование функции цены в игре быстрогодействия с линией жизни)* // Proceedings of the 47th International Youth School-conference «Modern Problems in Mathematics and its Applications». 2016. Yekaterinburg, Russia, January 31 – February 6. С. 94–99.

21. Patsko V.S., Turova V.L. *Level Sets of the Value Function in Differential Games with the Homicidal Chauffeur Dynamics* // International Game Theory Review. 2001. Vol. 3, № 1. P. 67–112.
22. Patsko, V.S., Turova V.L. *Numerical Study of Differential Games with the Homicidal Chauffeur Dynamics*. Ekaterinburg: Institute of mathematics and mechanics, UrB of RAS, 2000.
sector3.imm.uran.ru/preprint2000_01/preprint2000.pdf
23. Petrosjan L.A. *A family of differential survival games in the space \mathbb{R}^n* // Soviet Math. Dokl. 1965. №6. С. 377–380.

NUMERICAL METHOD FOR SOLVING TIME-OPTIMAL DIFFERENTIAL GAMES WITH LIFELINE

Natal'ya V. Munts, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of RAS (natalymunts@gmail.com),

Sergei S. Kumkov, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of RAS, Cand.Sc. (sskumk@gmail.com).

Abstract: This paper discusses classic time-optimal differential games with lifeline. In such games, together with a target set, whereto the first player tries to guide the system, another set is chosen (namely, it is called lifeline), with reaching which the second player wins. Numerical method solving time-optimal games with lifeline is suggested. This method constructs the value function as a viscosity solution of the corresponding boundary value problem for the Hamilton–Jacobi equation. A convergence of the method is proved.

Keywords: numerical methods, time-optimal differential games with lifeline, value function, Hamilton–Jacobi equations, viscosity solutions.