Математическая Теория Игр и её Приложения, т.10, в.4, с. 3–15

УДК 519.86
ББК 22.18

МОДЕЛИ СОЧЕТАНИЯ ОБЩИХ И ЧАСТНЫХ ИНТЕРЕСОВ НЕЗАВИСИМЫХ АГЕНТОВ

Ольга И. Горбанева*
Институт математики, механики и компьютерных наук
им. И.И. Воровича
Южный федеральный университет
344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а
e-mail: gorbaneva@mail.ru

Статья посвящена исследованию моделей сочетания общих и частных интересов (далее, СОЧИ-моделей) с независимыми равноправными агентами. Доказано существование и единственность равновесия по Нэшу и Парето-оптимального равновесия в модели. Доказано, что найденные равновесия обладают свойством монотонности по ресурсам RM, но не обладают свойствами монотонности по населению PM и анонимности ANO. Также получен результат о возможностях системной согласованности модели.

Ключевые слова: СОЧИ-модели, функция общественного благосостояния, индекс системной согласованности, системно согласованная модель.

1. Введение

Статья посвящена исследованию моделей сочетания общих и частных интересов (далее, СОЧИ-моделей) с независимыми равноправными агентами. Эта модель является базовой для всего исследования.

---

* Исследование выполнено при поддержке РФФИ, проект № 18-010-00594

В первом параграфе описывается базовая исследуемая модель, приводятся условные обозначения, структура системы, вводятся целевые функции участников системы, функция общественного благосостояния, вводится определение системной согласованности модели, а также критерий эффективности «индекс системной согласованности».

Во втором параграфе исследуется базовая СОЧИ-модель. Доказано существование и единственность равновесия по Нэшу и Парето-оптимального равновесия в модели, которые обладают свойством монотонности по ресурсам RM, но не обладают свойствами монотонности по населению PM и анонимности ANO [10]. Также получен важный результат о системной согласованности модели, на основании которого исследование СОЧИ-модели с непрерывным множеством стратегий сводится к исследованию СОЧИ-модели с бинарным множеством стратегий, которая описывается и исследуется в третьем параграфе.

2. Модель

Обозначим через $M = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ – множество участников системы, где $\{0\}$ – Принципал (Ведущий, Центр, верхний уровень), а $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ – множество Агентов (подчиненных, элементы нижнего уровня).

Будем рассматривать целевые функции агентов в СОЧИ-модели в контексте распределения ресурсов между целевым и нецелевым использованием. Эти модели основаны на идее Гермейера–Вателя [2].

Имеется одноуровневая система управления, состоящая из нескольких равноправных агентов $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Каждый из этих агентов имеет некоторое количество ресурсов. Часть средств каждый из них передает для целевого использования, оставшуюся часть оставляет себе на нецелевые расходы. Все агенты участвуют в доходе от целевой деятельности и имеют свои функции выигрыша (рис. 1).

Рассмотрим статическую теоретико-игровую СОЧИ-модель в нормальной форме вида

$$g_i(u_1, \ldots, u_n) = p_i(r_i - u_i) + s_i c(u_1 + \ldots + u_n) \to \max, \quad (2.1)$$

$$0 \le u_i \le r_i, r_i \ge 0, s_i \ge 0, \sum_{j=1}^{n} s_j = \begin{cases} 1, & \exists i : s_i > 0, \\ 0, & \forall i : s_i = 0, \end{cases} \quad i = 1, \ldots, n. \quad (2.2)$$

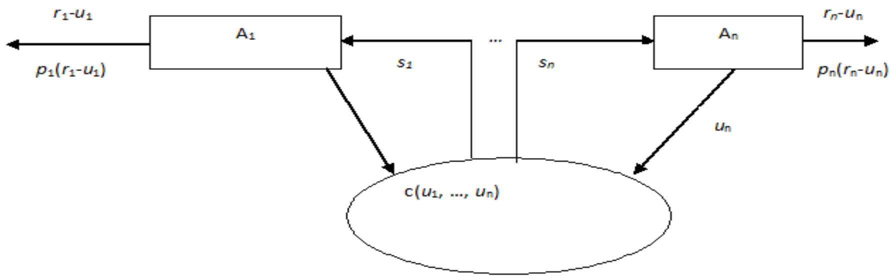

Рисунок 1. Структура незавсимых агентов в СОЧИ-модели

Здесь $M = \{i, \ldots, n\}$ – конечное множество игроков (активных агентов); $U_i = [0, r_i]$ – множество допустимых действий (стратегий) i-го игрока; r_i – ресурс, которым располагает i-й игрок; u_i – количество ресурсов, которое агент выделяет на общие цели (стратегия i-го участника игры), $u_i \in U_i$; $g_i(u_1, \ldots, u_n)$ – функция выигрыша i-го игрока; $p_i(r_i - u_i)$ – функция частных интересов i-го игрока, аргументом которой является количество ресурсов $(r_i - u_i)$, оставленное на частные цели; $c(u_1 + \ldots + u_n)$ – функция общественного дохода; s_i – доля общественного дохода, выделяемая игроку i; $s_i c(u_1 + \ldots + u_n)$ – общественная составляющая выигрыша i-го игрока.

Таким образом, в СОЧИ–модели каждый игрок делит свой ресурс r_i между общественными (в количестве u_i) и частными (в количестве $r_i - u_i$) интересами.

Предполагается, что

- функция c монотонно возрастает по всем u_i, $c(0, \ldots, 0) = 0$;
- функции $p_i(r_i - u_i)$ монотонно возрастают по $r_i - u_i$, $p_i(0) = 0$;
- функции p_i и c вогнуты по своим аргументам;
- если $u_i > 0$, то $s_i > 0$. Таким образом, вариант $\sum\limits_{i=1}^{n} u_i = 0$ отвечает случаю, когда $\forall i \; u_i = 0$; тогда общественный доход не создается и делить нечего.

Заметим, что все ограничения агентов $0 \le u_i \le r_i$ являются локальными, агенты независимы, глобальных ограничений на стратегии агентов нет. Возможно создание коалиций как в игре в нормальной форме, так и в иерархической игре.

Также введем утилитарную функцию общественного благосостояния, которая выражает интересы общества М в виде суммы целевых функций всех его членов (агентов):

$$g(u_1, \ldots, u_n) = \sum_{i=1}^{n} g_j(u_1, \ldots, u_n) = \sum_{j=1}^{n} p_j(r_j - u - j) + c(u_1, \ldots, u_n) \tag{2.3}$$

3. Системная согласованность

Для оценки различных механизмов функционирования в теории управления организационными системами используются различные относительные критерии эффективности [1].

Рассмотрим игру (2.1)–(2.2) и введем в нее относительный критерий эффективности. Будем использовать следующие обозначения. $NE = \{u_{(1)}^{NE}, \ldots, u_{(k)}^{NE}\}$ – множество равновесий по Нэшу в игре (2.1)–(2.2), $u_{(j)} = \{u_{(j)1}, \ldots, u_{(j)n}\}$ – исход игры, $g_{\min}^{NE} = \min\{g(u_{(1)}^{NE}), \ldots, g(u_{(k)}^{NE})\}$, $g_{\max} = g(u_1^{\max}, \ldots, u_n^{\max})$, где величина $u_{(i)}^{\max}$ отражает действие агента, желательное для общества – план [1]. Так как утилитарная функция общественного благосостояния является суммой целевых функций всех участников системы, то план оптимален по Парето.

В качестве относительного критерия эффективности в модели (2.1)–(2.3) возьмем индекс системной согласованности.

Определение 3.1. *Индексом системной согласованности назовем отношение наименьшего значения функции общественного благосостояния при независимом поведении агентов к ее максимальному значению, т.е.*

$$ISS = \frac{g_{\min}^{NE}}{g_{\max}}.$$

В литературе соответствующей тематики есть достаточно аналогов введенного критерия. Кроме самого раннего названия «относительной эффективности», введенного Бурковым В.Н. [1], также используются названия «идеальной согласованности» [7] и «цены анархии» [11].

Очевидно, что $ISS \leq 1$ (как и любой относительный критерий эффективности). Если ISS близко к единице, то эффективность равновесий высока и потребность в координации в модели (2.1)–(2.3) низка или вовсе отсутствует (при $ISS = 1$); чем меньше ISS, тем больше потребность в координации. Т.е. этот критерий эффективности является показателем выполнения плана.

Определение 3.2. *Модель системно согласована, если $ISS = 1$.*

Отметим, что в теории управления организационными системами имеется понятие «совершенно согласованного плана» [1], который определяется как «план, выгодный агенту», т.е. условием согласованного планирования является достижение в плане максимального значения целевой функции агента.

Это влечет за собой $ISS = 1$, в связи с чем модель системно согласована, если в ней существует план, являющийся совершенно согласованным для всех агентов, т.е. если $u_i^{NE} = u_i^{\max}$.

4. Исследование модели

Исследуем игры (2.1)–(2.2) и (2.2)–(2.3). Для этого введем в рассмотрение два множества агентов: множество индивидуалистов I и множество коллективистов C.

Определение 4.1. *Индивидуалистами назовем тех агентов, которые тратят все имеющиеся у них ресурсы на частные цели: $I = \{i | u_i = 0\}$.*

Определение 4.2. *Коллективистами назовем тех агентов, которые тратят все имеющиеся у них ресурсы на общие цели: $C = \{i | u_i = r_i\}$.*

Теорема 4.1. *При $n \geq 2$ в игре (2.1)–(2.2) существует единственное равновесие по Нэшу.*

Доказательство. Найдем равновесие по Нэшу. Для этого составим условия первого порядка

$$\frac{\partial g_i}{\partial u_i} = s_i c' \left(\sum_{i=1}^{n} u_i \right) - p_i'(r_i - u_i) = 0, i = 1, \ldots, n, \tag{4.1}$$

получаем стационарную точку $u_i^* = \left(s_i c' \left(\sum\limits_{i=1}^n u_i \right) - p_i'(r_i - u_i) \right)^{-1} (0)$, которая является точкой максимума в силу того, что

$$\frac{\partial g_i^2}{\partial u_i^2} = s_i c'' \left(\sum_{i=1}^n u_i \right) + p_i''(r_i - u_i) < 0.$$

Функция $s_i c' \left(\sum\limits_{i=1}^n u_i \right) - p_i'(r_i - u_i)$ убывает по u_i при фиксированных стратегиях других игроков $u_{-i} = (u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_n)$, следовательно решение уравнения (4.1) или не существует, или единственно. Если решение (4.1) не существует, то функция g_i монотонна и решение достигается на концах отрезка $0 \leq u_i \leq r_i$. Если $\frac{\partial g_i}{\partial u_i} > 0$, то решение достигается на правом конце $u_i = r_i$, в случае же $\frac{\partial g_i}{\partial u_i} < 0$ - на левом конце, т.е. $u_i = 0$. А так как функция непрерывна, то производная функции не может менять знак, минуя ноль. Следовательно, с учетом ограничения $0 \leq u_i \leq r_i$, равновесие по Нэшу единственно и выглядит следующим образом:

$$u_i^{NE} = \begin{cases} 0, & u_i^* < 0, \\ u_i^*, & 0 < u_i^* < r_i, \\ r_i, & u_i^* > r_i. \end{cases} \tag{4.2}$$

где $u_i^* = \left(s_i c' \left(\sum\limits_{i=1}^n u_i \right) - p_i'(r_i - u_i) \right)^{-1} (0)$. □

Теорема 4.2. *При $n \geq 2$ в игре (2.2)–(2.3) существует единственное Парето-оптимальное равновесие.*

Доказательство. Доказательство проводится по аналогии с доказательством утверждения 4.1 с той лишь разницей, что вместо функции (2.1) учитывается функция (2.3). В итоге существует единственное Парето-оптимальное равновесие

$$u_i^{\max} = \begin{cases} 0, & u_i^{**} < 0, \\ u_i^{**}, & 0 < u_i^{**} < r_i, \\ r_i, & u_i^{**} > r_i. \end{cases} \tag{4.3}$$

где $u_i^{**} = \left(c' \left(\sum\limits_{i=1}^n u_i \right) - p_i'(r_i - u_i) \right)^{-1} (0)$. □

Определение 4.3. *(Э. Мулен [10]). Правило разделения ресурсов является монотонным по ресурсам (RM), если при увеличении количества делимого ресурса полезность агента не убывает.*

Определение 4.4. *(Э. Мулен [10]). Правило разделения ресурсов является монотонным по населению (PM), если при увеличении количества элементов, между которыми делится ресурс, полезность агента не возрастает.*

Теорема 4.3. *Процедура распределения ресурсов каждым агентом между общими и частными интересами при помощи распределения по Нэшу является монотонной по ресурсам (RM).*

Доказательство. На общие и на частные интересы агентом направляется количество ресурсов в размерах u_i^{NE} из (4.2) и $r_i - u_i^{NE}$, соответственно. Пусть $r_i^1 < r_i^2$. Докажем, что при выполнении двух условий: условия $0 < \left(s_i c'\left(\sum\limits_{i=1}^n u_i\right) - p_i'(r_i^1 - u_i)\right)^{-1}(0) < r_i^1$ и условия $0 < \left(s_i c'\left(\sum\limits_{i=1}^n u_i\right) - p_i'(r_i^2 - u_i)\right)^{-1}(0) < r_i^1$ выполняется соотношение $\left(s_i c'\left(\sum\limits_{i=1}^n u_i\right) - p_i'(r_i^2 - u_i)\right)^{-1}(0) > \left(s_i c'\left(\sum\limits_{i=1}^n u_i\right) - p_i'(r_i^1 - u_i)\right)^{-1}(0)$. Так как p_i' убывает по своему аргументу, а, следовательно, и по r_i, то, следовательно, $-p_i'$ возрастает по r_i.

Тогда, $s_i c'\left(\sum\limits_{i=1}^n u_i\right) - p_i'(r_i^2 - u_i) > s_i c'\left(\sum\limits_{i=1}^n u_i\right) - p_i'(r_i^1 - u_i)$, а в силу убывания этих функций прообраз большей функции больше прообраза меньшей функции. Тогда графически $u_i^{NE}(r_i^1)$ и $u_i^{NE}(r_i^2)$ схематически можно изобразить рисунком 2, откуда видно, что величины u_i^{NE} по r_i на оставшихся частях области определения убывают. Полезность от использования ресурсов в общих целях монотонно возрастает по u_i, следовательно, $c(\sum u_i)$ также монотонно возрастает по r_i.

Теперь докажем возрастание величины $(r_i - u_i^{NE}(r_i))$ по r_i. При выполнении $r_i^1 < r_i^2$, $0 < r_i^1 - \left(s_i c'\left(\sum\limits_{i=1}^n u_i\right) - p_i'(r_i^1 - u_i)\right)^{-1}(0) < r_i^1$ и $0 < r_i^2 - \left(s_i c'\left(\sum\limits_{i=1}^n u_i\right) - p_i'(r_i^2 - u_i)\right)^{-1}(0) < r_i^1$ докажем, что выполняется следующее соотношение: $r_i^2 - \left(s_i c'\left(\sum\limits_{i=1}^{n} u_i\right) - p_i'(r_i^2 - u_i)\right)^{-1}(0) >$ $r_i^1 - - \left(s_i c'\left(\sum\limits_{i=1}^{n} u_i\right) - p_i'(r_i^1 - u_i)\right)^{-1}(0)$.

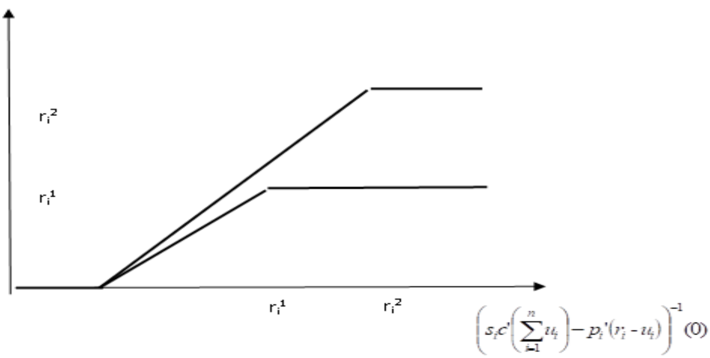

Рисунок 2. Неубывание стратегий агентов по r_i

Введем переменную v_i, которая будет отвечать за количество ресурсов, выделенных агентами на частные цели. Тогда проведем замену переменных в модели (2.1)–(2.2):

$$g_i(v1, \ldots, v_n) = p_i(v_i) + s_i c(r_1 - v_1, \ldots, r_n - v_n) \to \max,$$
$$0 \le v_i \le r_i.$$

Найдя в ней равновесие по Нэшу, докажем его монотонность по r_i:

$$v_i^{NE} = \begin{cases} 0, & v_i^* < 0, \\ v_i^*, & 0 < v_i^* < r_i, \\ v_i, & v_i^* > r_i. \end{cases} \tag{4.4}$$

где $v_i^* = \left(p_i'(v_i) - s_i c'\left(\sum\limits_{i=1}^{n}(r_u - v_i)\right)\right)^{-1}(0)$.

При $r_i^1 < r_i^2$ сравним значения величин $v_i^{NE}(r_i^1)$ и $v_i^{NE}(r_i^2)$ в средних ветках. Так как c' убывает по своему аргументу, а, следовательно, и по r_i, то, следовательно, $-c'$ возрастает по r_i. Следовательно, выполняется соотношение $p_i'(v_i) - s_i c\left(\sum\limits_{j=1 j \ne i}^{n}(r_j - v_j) + (r_i^2 - v_i)\right) >$ $> p_i'(v_i) - s_i c\left(\sum\limits_{j=1 j \ne i}^{n}(r_j - v_j) + (r_i^1 - v_i)\right)$, а в силу убывания этих функций прообраз большей функции больше прообраза меньшей функции. Полезность же от использования ресурсов в частных целях выражается величиной $p_i(v_i)$, которая возрастает по величине v_i, а, следовательно, по r_i. Следовательно, полученное распределение монотонно по ресурсам и удовлетворяет свойству RM. $\square$

Аналогично доказывается

Теорема 4.4. *Процедура распределения ресурсов каждым агентом между общими и частными интересами при помощи Парето-оптимального распределения является монотонной по ресурсам (RM).*

Социально-экономическая интерпретация результатов утверждений 4.3-4.4 довольна проста: чем больше ресурсов выделено агенту, тем больше он получит дохода как от частной, так и от общей деятельностей как по отдельности, так и в совокупности.

Теорема 4.5. *Процедура распределения ресурсов каждым агентом при помощи распределения по Нэшу является не монотонной по населению (PM).*

Доказательство. Начнем с количества ресурсов, направленных на общие цели. Докажем, что величина $\left(s_i c'\left(\sum\limits_{i=1}^{n} u_i\right) - p_i'(r_i - u_i)\right)^{-1}(0)$ монотонно убывает по n, то есть при $n_1 < n_2$ должно выполняться соотношение следующего вида: $\left(s_i c'\left(\sum\limits_{i=1}^{n_1} u_i\right) - p_i'(r_i - u_i)\right)^{-1}(0) >$ $> \left(s_i c'\left(\sum\limits_{i=1}^{n_1} u_i + \sum\limits_{i=n_1+1}^{n_2} u_i\right) - p_i'(r_i - u_i)\right)^{-1}(0)$. Так как c' убывает по своему аргументу, то выполняется $s_i c'\left(\sum\limits_{i=1}^{n_1} u_i\right) - p_i'(r_i - u_i) >$ $> s_i c'\left(\sum\limits_{i=1}^{n_1} u_i + \sum\limits_{i=n_1+1}^{n_2} u_i\right) - p_i'(r_i - u_i)$, а в силу убывания этих функций прообраз большей функции больше прообраза меньшей функции. Теперь перейдем к количеству ресурсов, потраченных на частные цели. Для монотонности по населению необходимо, чтобы выполнялось следуюшее условие: $r_i - \left(s_i c'\left(\sum\limits_{i=1}^{n_1} u_i\right) - p_i'(r_i - u_i)\right)^{-1}(0) >$ $> r_i - \left(s_i c'\left(\sum\limits_{i=1}^{n_1} u_i + \sum\limits_{i=n_1+1}^{n_2} u_i\right) - p_i'(r_i - u_i)\right)^{-1}(0)$, но этого быть не может, учитывая рассуждения выше. □

Аналогично доказывается

Теорема 4.6. *Процедура распределения ресурсов каждым агентом при помощи Парето-оптимального распределения является не монотонной по населению (PM).*

Социально-экономическая интерпретация результатов утверждений 4.5 и 4.6: большее количество агентов способствует большему доходу от реализации частных интересов, но меньшему доходу от реализации общих интересов.

Следствие 4.1. *Из теоремы 4.5 следует, что равновесная по Нэшу процедура распределения ресурсов агентом между частными и общими интересами не является анонимной.*

Следствие 4.2. *Из теоремы 4.6 следует, что Парето-оптимальная процедура распределения ресурсов агентом между частными и общими интересами не является анонимной.*

Следствия можно интерпретировать следующим образом: агент никогда не сможет относиться к общим интересам так же, как к частным. Это можно объяснить тем, что если при создании дохода в общих интересах можно рассчитывать на помощь других агентов, то при создании дохода от частной деятельности обычно надеяться на такую помощь не приходится. То есть, для получения одного и того же финансового результата, частная деятельность требует больших усилий со стороны агента, чем реализация общего интереса.

Приведем формулировку теоремы, доказательство которой приведено в [5].

Теорема 4.7. *При $n \geq 2$ системная согласованность в модели может иметь место только при определенном разбиении множества агентов на два класса: класс индивидуалистов и класс коллективистов (M=CUI).*

СОЧИ-модели (2.1)–(2.2), где в качестве функций полезности общей и частной деятельностей взяты различные сочетания вогнутой степенной и линейной, рассмотрены в [3–6,8,9].

5. Заключение

1. Доказаны существование и единственность равновесия по Нэшу и Парето-оптимального равновесия в играх (2.1)–(2.3).

2. Доказано, что равновесие по Нэшу и Парето-оптимальное равновесие монотонны по ресурсам (обладают свойством RM), но не монотонны по населению (не обладают свойством PM), а также не являются анонимными процедурами распределения ресурсов (не обладают свойством ANO). Это говорит о том, что увеличение количества ресурсов, имеющегося у агента, увеличивает как выигрыш агента от общего дохода, так и его выигрыш от частного дохода. А вот уменьшение агентов в системе может увеличить только выигрыш агента от общего дохода и уменьшить выигрыш от частного дохода.

3. Системная согласованность возможна только в случаях, когда все агенты являются либо коллективистами, либо индивидуалистами, либо если в системе имеется один агент.

4. Модель с непрерывным множеством стратегий участников в условиях поиска системной согласованности сводится к модели с бинарным множеством стратегий, при которой агент имеет всего две возможные стратегии: либо быть коллективистом, либо быть индивидуалистом.

5. Выявлены условия выгодности выбора агентом оптимального поведения в случае бинарного множества стратегий участников.

6. Агент неравнозначно относится к достижению частных и общих целей. При реализации частных интересов достижение фиксированного результата требует больших усилий от агентов, чем при реализации общих интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бурков В.Н., Кондратьев В.В. *Механизмы функционирования организационных систем.* М: Наука, 1981.

2. Гермейер Ю.Б., Ватель И.А. *Игры с иерархическим вектором интересов* // Известия Академии наук СССР. Техническая кибернетика. 1974. № 3. С. 54–69.

3. Горбанева О.И., Угольницкий Г.А. *Механизмы согласования интересов в модели распределения ресурсов* // Системы управления и информационные технологии. 2014. №57(3.2). С. 225–232.

4. Горбанева О.И., Угольницкий Г.А. *Модели согласования общественных и частных интересов в системах интересов в системах управления* // В сборнике: XII всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014 Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН. 2014. P. 5282-5289.

5. Горбанева О.И., Угольницкий Г.А. *Модели согласования общих и частных интересов I: системная согласованность* // Экономика и менеджмент систем управления. 2017. №4.1(26). С. 194–200.

6. Горбанева О.И., Угольницкий Г.А. *Цена анархии и механизмы управления в моделях согласования общественных и частных интересов* // Математическая теория игр и ее приложения. 2015. №7:1. С. 50—73.

7. Горелик В.А., Горелов М.А., Кононенко А.Ф. *Анализ конфликтных ситуаций в системах управления.* М.: Радио и связь, 1991.

8. Gorbaneva O.I., Ougolnitsky G.A. *Models of concordance of public and private interests in control systems* // Contributions to Game Theory and Management. 2015. V8. P. 47—57.

9. Gorbaneva O.I., Ougolnitsky G.A. *System compatibility, price of anarchy and control mechanisms in the models of concordance of private and public interests* // Advances in System Science and Applications. 2015. V.15(1). P. 45–59.

10. Moulin H., Thomson W. *Can Everyone Benefit from Growth? Two Difficulties* // Journal of Mathematical Economics. 1988. V. 17. P. 339–345.

11. Papadimitriou C.H. *Algorithms, games, and the Internet* // Proc. 33th Symposium Theory of Computing. 2001. P. 749–753.

MODELS OF SOCIAL AND PRIVATE INTERESTS COMBINING WITH INDEPENDED AGENTS

Olga I. Gorbaneva, Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences, South Federal University, Cand.Sc., asociate professor (gorbaneva@mail.ru).

Abstract: The paper is devoted to the investigation of models of social and private interests combining (SPICE-models) with equal independent agents. Existence and uniqueness of Nash and Pareto-optimal equilibria are proved. These equilibria are resource monotonous (RM), but not population monotonous (PM) and anonimous (ANO). The result about ability of system compatibility in the model is obtained.

Keywords: SPIC-models, social welfare, index of system compatibility, system compatability of model .