Математическая Теория Игр и её Приложения, т.10, в.4, с. 30–58

УДК 519.837
ББК 22.18

СОГЛАСОВАННОЕ ВЛИЯНИЕ НА МНЕНИЯ УЧАСТНИКОВ СОЦИАЛЬНОЙ СЕТИ*

Михаил А. Рогов
Санкт-Петербургский государственный университет
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9
Артем А. Седаков
Санкт-Петербургский государственный университет
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9
Школа математики и статистики, Университет Циндао
266071, Китай, Циндао
Институт прикладной математики Шаньдуна
266071, Китай, Циндао
e-mail: mrogov97@gmail.com, a.sedakov@spbu.ru

В работе исследуется согласованное влияние ряда участников социальной сети на мнения остальных ее членов в течение конечного промежутка времени посредством теории кооперативных динамических игр. Влияние выражается в декларировании мнений, которые участники сети взвешивают и впоследствии учитывают при формировании своих собственных. Ставится задача поиска декларируемых мнений, ориентируясь на связанные с этим затраты, а также на среднее отклонение мнений участников социальной сети от целевых. При согласованном поведении распределение суммарных затрат производится с помощью вектора Шепли. При невозможности нахождения степеней доверия участников сети друг другу строятся

*Исследование выполнено при поддержке Shandong Province “Double-Hundred Talent Plan” (No. WST2017009).

их оценки на основе выбранной меры центральности. Численное моделирование проводится на известном примере социальной сети университетского клуба карате и для графа решетки, часто используемого при описании пространственных сетей.

Ключевые слова: социальная сеть, влияние, динамика мнений, линейно-квадратичные игры, кооперация, равновесие, центральность.

1. Введение

Развитие моделей динамики мнений в социальных группах начиналось с вопросов достижимости в них консенсуса. Де Гроот в своей работе [11] привел простую модель динамики мнений, в которой предполагалось, что любой участник группы изменяет свое мнение согласно одному и тому же закону путем взвешивания собственного мнения и мнения непосредственно связанных с ним участников. Эта модель впоследствии дополнялась или видоизменялась при ряде новых предположений, в частности, с учетом приверженности участников социальной группы своим собственным взглядам [14, 15]. Задача достижимости консенсуса также решалась в [8, 9] для специальной структуры социальной группы с тремя типами участников и двумя центрами влияния на их мнения. Свойство «мудрости» социальных групп исследовалось в [7, 19]. Стоит отметить и другие значимые исследования в этой области [2, 5, 6].

Вышеупомянутые работы не затрагивают задачи конфликтного характера. В литературе есть довольно много работ, в которых рассматриваются игровые модели динамики мнений. В частности, в [3, 16] за основу берется модель Де Гроота, в [12] изложение строится на модели Хегзельмана–Краузе [18]. В настоящей работе мы исследуем игру согласованного влияния на мнения участников социальной сети как кооперативную линейно-квадратичную игру в дискретном времени, в которой цели игроков в некотором смысле близки к рассматриваемым в [20, 22]. В модели мы предполагаем, что некоторые участники сети согласованным способом декларируют свои мнения остальным участникам сети с той целью, чтобы сделать их «среднее» мнение как можно близким к желаемому. В рамках решения исследуемой игры при кооперативном поведении нам, как следствие, приходится находить решения этой игры и в некооперативной постановке, в частности, заниматься поиском равновесия по Нэшу. По этой причине мы не формулируем игру изначально как некооперативную, а сразу переходим к рассмотрению кооперативной формы поведения.

Статья имеет следующую структуру. В разделе 2 приводится математическая модель согласованного влияния. Нахождение решения описывается в разделе 3. В нем указывается способ отыскания кооперативной ситуации как в программных, так и в позиционных стратегиях, приводится схема распределения затрат на основе построенной характеристической функции игры, значения которой также отыскиваются для двух упомянутых классов стратегий. Некоторая модификация модели рассматривается в разделе 4, где отмечается ее связь с исходной постановкой. В тех случаях, когда нам не известны степени доверия участников сети друг другу, в разделе 5 строится их оценка на основе меры центральности. Раздел 6 посвящен численному моделированию на известном примере социальной сети университетского клуба карате и для графа решетки, часто используемого при описании пространственных сетей. В заключительном разделе 7 кратко приводятся результаты исследования.

2. Модель

Исследуется динамика мнений в социальной сети в течение конечного периода времени. Социальная сеть, далее просто *сеть*, представляется парой (V, g), где V — конечное множество ее участников (узлов), а g — граф связей, или множество направленных ребер между ними, отражающий структуру коммуникации внутри сети. Будем предполагать, что множество узлов может быть представлено в виде $V = A \cup N$, где $A \cap N = \varnothing$. Пусть $|A| = a$, $|N| = n$ и $a \gg n$. Узел из A будем ассоциировать с *агентом*, а узел из N — с *игроком*. Следовательно, участники сети разбиты на две группы, образующие множество агентов и множество игроков. Далее будем считать, что каждый агент $i \in A$ сети обладает собственным мнением о некоторой величине или некотором событии, которое выражается численно и может изменяться во времени, а рассматриваемый временной промежуток предполагается конечным с периодами $\mathcal{T} = \{0, 1, \ldots, T\}$. Пусть $x_{i0} \in [0, 1]$ обозначает начальное мнение агента i, а $x_i(t) \in [0, 1]$ — его мнение в период $t \in \mathcal{T} \setminus 0$. Пусть $x(t) = (x_i(t), i \in A)'$ и

$x_0 = (x_{i0}, i \in A)'$ отражают мнения агентов сети в период t и в начальным момент времени, соответственно.

Игроки могут влиять на мнения агентов сети. Обозначим через $u_i(t) \in [0,1]$ действие (или элементарную стратегию) игрока $i \in N$ в период $t \in \mathcal{T} \setminus T$, которое заключается в декларировании своего мнения остальным участникам сети. Пусть $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_n(t))$, $t \in \mathcal{T} \setminus T$. Агент учитывает не только свое мнение, но и может агрегировать мнения остальных участников сети. Простая модель агрегации мнений может быть описана следующей линейной разностной системой:

$$x_i(t+1) = \sum_{j \in A} w_{ij} x_j(t) + \sum_{j \in N} b_{ij} u_j(t), \quad t \in \mathcal{T} \setminus T$$

с начальным условием $x_i(0) = x_{i0}$, $i \in A$. Здесь $w_{ij} \in [0,1]$ представляет собой степень доверия агента $i \in A$ мнению агента $j \in A$, в то время как $b_{ij} \in [0,1]$ есть степень доверия агента $i \in A$ мнению игрока $j \in N$. Мы не требуем выполнения равенства $w_{ij} = w_{ji}$, но предполагаем, что $\sum\limits_{j \in A} w_{ij} + \sum\limits_{j \in N} b_{ij} = 1$ для любого $i \in A$. Собственные мнения самих игроков о рассматриваемой величине или событии в отличии от декларируемых ими мнений считаются не важными, и по этой причине они не включены в модель. Пусть $W = \{w_{ij}\}_{i,j \in A}$, $b_i = (b_{ji}, j \in A)'$, $i \in N$. Тогда динамика мнений агентов сети может быть записана в альтернативной форме:

$$x(t+1) = Wx(t) + \sum_{i \in N} b_i u_i(t), \quad t \in \mathcal{T} \setminus T, \quad x(0) = x_0.$$

Множество ребер g может быть разбито на два множества g_A и g_N, где g_A содержит только ребра между агентами, а g_N задает ребра типа «игрок–агент». Множество g можно ассоциировать с матрицей W и векторами b_i, $i \in N$: $w_{ij} > 0$ тогда и только тогда, когда $(j,i) \in g_A$; $b_{ij} > 0$ тогда и только тогда, когда $(j,i) \in g_N$.

Программной стратегией $u_i^{OL} = (u_i^{OL}(0), \ldots, u_i^{OL}(T-1))$ игрока $i \in N$ назовем отображение, которое каждому неокончательному периоду времени и начальному состоянию единственным образом предписывает действие, т. е. $u_i^{OL}(t) = \varphi_i(t, x_0)$ для любого $t \in \mathcal{T} \setminus T$, где $\varphi_i(\cdot,\cdot) : \mathcal{T} \setminus T \times [0,1]^a \mapsto [0,1]$. Ситуацией в программных стратегиях назовем набор программных стратегий $u^{OL} = (u_1^{OL}, \dots, u_n^{OL})$. *Позиционной стратегией* $u_i^{FB} = (u_i^{FB}(0), \dots, u_i^{FB}(T-1))$ игрока $i \in N$ назовем отображение, которое каждому неокончательному периоду и состоянию в этом периоде единственным образом предписывает действие, т. е. $u_i^{FB}(t) = \psi_i(t, x(t))$ для любого $t \in \mathcal{T} \setminus T$, где $\psi_i(\cdot, \cdot) : \mathcal{T} \setminus T \times [0,1]^a \mapsto [0,1]$. Ситуацией в позиционных стратегиях назовем набор позиционных стратегий $u^{FB} = (u_1^{FB}, \dots, u_n^{FB})$. При использовании программных стратегий игроки ориентируются лишь на начальные мнения агентов сети и номер периода, в то время как при использовании позиционных — на номер периода и мнения агентов сети в этом периоде. В дальнейшем мы не будем отмечать конкретный класс стратегий там, где это не принципиально. Траекторией, порожденной ситуацией u, будем называть набор $(x(0), \dots, x(T))$, где $x(0) = x_0$, а $x(t)$ для любого $t \in \mathcal{T} \setminus 0$ определяются последовательной подстановкой стратегий из этой ситуации в систему динамики мнений.

Пусть *функция выигрыша* $J_i(u)$ игрока $i \in N$ имеет вид

$$J_i(u) = \sum_{t=0}^{T-1} h_{it}(x(t), u(t)) + h_{iT}(x(T)),$$

где функции $h_{it}(x(t), u(t))$, $t \in \mathcal{T} \setminus T$, и $h_{iT}(x(T))$ определяют выигрыши этого игрока в каждом периоде. Зададим эти функции в следующем виде:

$$h_{it}(x(t), u(t)) = \frac{1}{a} \sum_{j \in A} (x_j(t) - \hat{x}_i)^2 + c_i u_i^2(t), \quad t \in \mathcal{T} \setminus T,$$

$$h_{iT}(x(T)) = \frac{1}{a} \sum_{j \in A} (x_j(T) - \hat{x}_i)^2.$$

Здесь $\hat{x}_i \in [0,1]$ — изначально заданное для игрока $i \in N$ желаемое мнение, к которому он хочет приблизить исходные мнения агентов за рассматриваемый промежуток времени, выбирая стратегию u_i, а величина $c_i > 0$ характеризует собой затраты этого игрока, связанные с выбором u_i. Первые слагаемые в выражениях функций h_{it}, $t \in \mathcal{T} \setminus T$, как и функция h_{iT}, отвечают за затраты игрока i, связанные с отклонением мнений агентов (в среднеквадратическом смысле) от желаемого мнения этого игрока, и выражены в тех же единицах, что и вторые слагаемые в выражениях функций h_{it}, $t \in \mathcal{T} \setminus T$, представляющие собой непосредственные затраты игрока i на влияние.

В предположении трансферабельности выигрышей игроки, совместно выбирая стратегии u_i, $i \in N$, и учитывая динамику мнений агентов сети, стремятся минимизировать общие суммарные затраты, т. е. величину $\sum\limits_{i \in N} J_i(u)$. При такой постановке рассматриваемая задача является задачей оптимального управления, а именно, кооперативной линейно-квадратичной игрой двух лиц с дискретным временем. Функция выигрыша игрока i может быть переписана в более привычной для такого класса игр форме:

$$\begin{aligned} J_i(u) =& \sum_{t=0}^{T-1} \left(\frac{1}{a} x(t)' x(t) + c_i u_i^2(t) - \frac{2\hat{x}_i}{a} \mathbf{1}' x(t) \right) \\ & + \left(\frac{1}{a} x(T)' x(T) - \frac{2\hat{x}_i}{a} \mathbf{1}' x(T) \right) + (T+1)\hat{x}_i^2, \\ =& \sum_{t=0}^{T-1} \left(\frac{1}{2} x(t)' Q_i x(t) + c_i u_i^2(t) + q_i' x(t) \right) \\ & + \frac{1}{2} x(T)' Q_i x(T) + q_i' x(T) + (T+1)\hat{x}_i^2, \end{aligned}$$

где $\mathbf{1}$ обозначает вектор из единиц размерности a, $Q_i = \frac{2}{a} I$, матрица I — единичная матрица размерности a и $q_i = -\frac{2\hat{x}_i}{a}\mathbf{1}$. Тогда общая цель игроков принимает вид:

$$\begin{aligned} \sum_{i \in N} J_i(u) =& \sum_{t=0}^{T-1} \left(\frac{1}{2} x(t)' Q x(t) + \frac{1}{2} u(t)' C u(t) + q' x(t) \right) \\ & + \frac{1}{2} x(T)' Q x(T) + q' x(T) + (T+1)\hat{x}' \hat{x}. \end{aligned}$$

где $Q = \sum_{i \in N} Q_i$, $C = 2\,\mathrm{diag}\{c_1, \ldots, c_n\}$, $q = \sum_{i \in N} q_i$ и $\hat{x} = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n)'$. Заметим, что матрицы $Q_1, \ldots, Q_n, Q$ и C положительно определенные.

Набор стратегий $\bar{u} = \arg\min_u \sum\limits_{i \in N} J_i(u)$ назовем кооперативной ситуацией, стратегии игроков из этого набора — кооперативными стратегиями, а траекторию $(\bar{x}(0), \ldots, \bar{x}(T))$, порожденную кооперативной ситуацией, — кооперативной траекторией.

3. Решение

Мы далее будем опираться на теорию, представленную в [1, 4, 17].

3.1. Кооперативная ситуация в случае программных стратегий

Для поиска кооперативных программных стратегий игроков мы применим принцип максимума из теории оптимального управления. Определим гамильтониан $\mathcal{H}_N = \mathcal{H}_N(x(t), u(t), \lambda_N(t+1))$, $t \in \mathcal{T} \setminus T$:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_N = -\frac{1}{2}x(t)'Qx(t) - \frac{1}{2}u(t)'Cu(t) - q'x(t)\\ + \lambda_N(t+1)'\left(Wx(t) + Bu(t)\right),\end{aligned}$$

где через $\lambda_N(t+1)$ обозначен вектор сопряженных переменных размерности a, и $B = (b_1 \dots b_n)$ — матрица, образованная векторами $b_1, \dots, b_n$.

Утверждение 3.1. *Для того, чтобы набор программных стратегий $\bar{u}^{OL} = (\bar{u}_1^{OL}, \dots, \bar{u}_n^{OL})$ был кооперативной ситуацией, порождающей кооперативную траекторию $(\bar{x}^{OL}(0), \dots, \bar{x}^{OL}(T))$, где $\bar{x}^{OL}(0) = x_0$, необходимо существование ненулевого набора $\lambda_N(t)$, $t \in \mathcal{T} \setminus 0$, такого, что выполнены следующие условия:*

$$\begin{aligned}\bar{u}^{OL} &= \arg\max_u \mathcal{H}_N(\bar{x}^{OL}(t), u(t), \lambda_N(t+1))\\ \frac{\partial \mathcal{H}_N}{\partial x(t)} &= -\bar{x}^{OL}(t)'Q - q' + \lambda_N(t+1)'W = \lambda_N(t)', \quad t \in \mathcal{T} \setminus \{0, T\},\\ \lambda_N(T)' &= -\bar{x}^{OL}(T)'Q - q'.\end{aligned}$$

Систему уравнений из утверждения выше можно переписать в таком виде:

$$\begin{aligned}\bar{u}^{OL}(t) &= C^{-1}B'\lambda_N(t+1), \quad t \in \mathcal{T} \setminus T,\\ \lambda_N(t) &= -Q\bar{x}^{OL}(t) - q + W'\lambda_N(t+1), \quad t \in \mathcal{T} \setminus \{0, T\},\\ \lambda_N(T) &= -Q\bar{x}^{OL}(T) - q.\end{aligned}$$

Заметим, что $C^{-1} = \frac{1}{2}\,\mathrm{diag}\{1/c_1, \dots, 1/c_n\}$. При использовании игроками кооперативных программных стратегий $\bar{u}_i^{OL}$, $i \in N$, каждый из них в течение рассматриваемого промежутка времени привносит величину $J_i(\bar{u}^{OL})$, $i \in N$, в суммарный выигрыш игроков, при этом сумма $\sum\limits_{i \in N} J_i(\bar{u}^{OL})$ минимальна.

3.2. Кооперативная ситуация в случае позиционных стратегий

Для поиска кооперативных позиционных стратегий игроков мы применим принцип динамического программирования. Определим функцию $F(t,x)$ как минимальный суммарный выигрыш игроков за периоды с t по T при мнении агентов x. Эта функция удовлетворяет уравнению Беллмана:

$$F(t,x) = \min_{u(t)} \left(\frac{1}{2} x' Q x + \frac{1}{2} u(t)' C u(t) + q' x + \hat{x}' \hat{x} \right.$$
$$\left. + F(t+1, Wx + Bu(t)) \right)$$

с граничным условием $F(T,x) = \frac{1}{2} x' Q x + q' x + \hat{x}' \hat{x}$.

Предположив квадратичный вид функции $F(t,x) = \frac{1}{2} x' K(t) x + k(t)' x + \varkappa(t)$ и линейный вид набора кооперативных позиционных стратегий $\bar{u}^{FB}(t) = -P(t)x + p(t)$ игроков, что часто делается в линейно-квадратичной оптимизации, можно получить систему разностных уравнений для идентификации неизвестных матриц $K(t)$, $P(t)$, векторов $k(t)$, $p(t)$ и величин $\varkappa(t)$ в каждом периоде.

Утверждение 3.2. *Набор кооперативных позиционных стратегий $\bar{u}^{FB} = (\bar{u}_1^{FB}, \ldots, \bar{u}_n^{FB})$ является единственным и имеет вид:*

$$\bar{u}^{FB}(t) = -(C + B' K(t+1) B)^{-1} B' \left[K(t+1) W x(t) + k(t+1) \right],$$

для $t \in \mathcal{T} \setminus T$, где

$$\begin{aligned}
P(t) &= (C + B' K(t+1) B)^{-1} B' K(t+1) W, \\
p(t) &= -(C + B' K(t+1) B)^{-1} B' k(t+1), \\
K(t) &= Q + P(t)' C P(t) + (W - BP(t))' K(t+1) (W - BP(t)), \\
k(t) &= -P(t)' C p(t) + q + (W - BP(t))' \left[K(t+1) B p(t) + k(t+1) \right], \\
\varkappa(t) &= \frac{1}{2} p(t)' C p(t) + \frac{1}{2} (Bp(t))' K(t+1) B p(t) + k(t+1)' B p(t) \\
&\quad + \varkappa(t+1) + \hat{x}' \hat{x},
\end{aligned}$$

с граничным условием: $K(T) = Q$, $k(T) = q$, $\varkappa(T) = \hat{x}'\hat{x}$, *при этом* $\sum\limits_{i\in N} J_i(\bar{u}^{FB}) = F(0, x_0) = \frac{1}{2}x_0'K(0)x_0 + k(0)'x_0 + \varkappa(0)$.

При использовании игроками кооперативных позиционных стратегий $\bar{u}_i^{FB}$, $i \in N$, каждый из них в течение рассматриваемого промежутка времени привносит величину $J_i(\bar{u}^{FB})$, $i \in N$, в суммарный выигрыш, при этом сумма $\sum\limits_{i\in N} J_i(\bar{u}^{FB})$, на которую ориентируются игроки, минимальна. Дополнительно известно, что $\sum\limits_{i\in N} J_i(\bar{u}^{OL}) = \sum\limits_{i\in N} J_i(\bar{u}^{FB})$.

3.3. Распределение кооперативного выигрыша

В теории кооперативных динамических игр принято распределять суммарный кооперативный выигрыш между игроками, основываясь на заранее оговоренном игроками кооперативном решении. По этой причине для распределения величины $\sum\limits_{i\in N} J_i(\bar{u}^{OL})$ (или $\sum\limits_{i\in N} J_i(\bar{u}^{FB})$) строится необходимая вспомогательная игра с трансферабельной полезностью. Пусть (N, v) — такая игра, в которой N, как и прежде, обозначает множество игроков, а v — *характеристическая функция*, которая каждому подмножеству множества N, называемому коалицией, ставит в соответствие ее «силу», выражаемую вещественным числом. Естественно считать, что сила коалиции N есть величина, которую игроки хотят между собой распределить, т. е. $v(N) = \sum\limits_{i\in N} J_i(\bar{u})$. Здесь и далее мы будем опускать верхний индекс OL или FB, где изложение одинаково справедливо как для программных, так и для позиционных стратегий, понимая под $\bar{u}$ набор стратегий, минимизирующий сумму $\sum\limits_{i\in N} J_i(u)$. Естественно также считать, что $v(\varnothing) = 0$. Для произвольной непустой коалиции $S \subset N$ значение характеристической функции $v(S)$ мы определим в соответствии с γ-подходом, предложенным в [23] для модели олигополии и широко используемым впоследствии, в частности, в [10] применительно к модели природоохранного характера. Согласно γ-подходу величина $v(S)$ есть выигрыш коалиции S в ситуации равновесия по Нэшу в игре $n - |S| + 1$ лица, в которой коалиция S выступает одним игроком, стараясь минимизировать величину $\sum\limits_{i\in S} J_i(u)$, а игрок $i \in N \setminus S$

нацелен минимизировать $J_i(u)$. Для коалиции S набор стратегий u будем записывать также через стратегии игроков из этой коалиции, u_S, и стратегии игроков из ее дополнения, $u_{N\setminus S}$, в виде $u = (u_S, u_{N\setminus S})$. Более формально, для непустой коалиции $S \subset N$ ее сила $v(S)$ определяется как $v(S) = \sum_{i\in S} J_k(\tilde{u}^S)$, где набор стратегий $\tilde{u}^S = (\tilde{u}_1^S, \ldots, \tilde{u}_n^S)$ определяется из равенств:

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_S^S &= \arg\min_{u_S} \sum_{i\in S} J_i(u_S, \tilde{u}_{N\setminus S}^S),\\
\tilde{u}_i^S &= \arg\min_{u_i} J_i(u_i, \tilde{u}_{N\setminus\{i\}}^S), \text{ для любого } i \notin S.
\end{aligned}$$

Тогда заключаем:

$$v(S) = \begin{cases} \sum\limits_{i\in N} J_i(\bar{u}), & S = N,\\ \sum\limits_{i\in S} J_i(\tilde{u}^S), & S \subset N,\\ 0, & S = \varnothing. \end{cases}$$

Дележом в игре (N, v) назовем вектор $\xi[v] = (\xi_1[v], \ldots, \xi_n[v])$, который удовлетворяет свойствам: эффективности, т. е. $\sum_{i\in N} \xi_i[v] = v(N)$, и индивидуальной рациональности, т. е. $\xi_i[v] \leqslant v(\{i\})$ для любого $i \in N$.[1] Множество дележей в игре (N, v) обозначим через $\mathcal{I}[v]$. *Кооперативным решением* игры (N, v) называется правило, которое этой игре ставит в соответствие некоторое подмножество $\mathcal{M}[v] \subseteq \mathcal{I}[v]$. Таким образом игроки, выбрав заранее некоторое кооперативное решение $\mathcal{M}[v]$, совместно реализуют кооперативную ситуацию $\bar{u}$ и, получив в качестве общего суммарного выигрыша величину $v(N)$, далее ее распределяют между собой в виде некоторого одного дележа $\xi[v] \in \mathcal{M}[v]$. Величина $\xi_i[v]$ и будет считаться выигрышем игрока i, который он получает от кооперации с остальными игроками. Например, если в качестве кооперативного решения $\mathcal{M}[v]$ выбрать вектор Шепли, то оно состоит из единственного дележа $\mathrm{Sh}[v] = (\mathrm{Sh}_1[v], \ldots, \mathrm{Sh}_n[v])$, компоненты которого определяются как

$$\mathrm{Sh}_i[v] = \sum_{S\subseteq N,\, i\in S} \frac{(n - |S|)!(|S| - 1)!}{n} (v(S) - v(S \setminus \{i\})), \quad i \in N.$$

---

[1]Напомним, что цель игроков состоит в минимизации суммы их выигрышей.

В частности, для игры двух лиц, т. е. игры, в которой только два игрока могут влиять на мнения остальных участников социальной сети, величина $v(\{i\})$, $i = 1, 2$, есть выигрыш игрока i в равновесии по Нэшу $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$. Тогда

$$v(S) = \begin{cases} J_1(\bar{u}_1, \bar{u}_2) + J_2(\bar{u}_1, \bar{u}_2), & S = \{1, 2\}, \\ J_i(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2), & S = \{i\},\ i = 1, 2, \\ 0, & S = \varnothing, \end{cases} \tag{3.1}$$

а вектор Шепли $\mathrm{Sh}[v] = (\mathrm{Sh}_1[v], \mathrm{Sh}_2[v])$ в кооперативной игре двух лиц примет вид:

$$\begin{cases} \mathrm{Sh}_1[v] = \dfrac{v(\{1,2\}) + v(\{1\}) - v(\{2\})}{2}, \\ \mathrm{Sh}_2[v] = \dfrac{v(\{1,2\}) - v(\{1\}) + v(\{2\})}{2}. \end{cases} \tag{3.2}$$

Случай игры двух лиц мы рассмотрим ниже в разделе 6 при проведении численного моделирования.

Далее для игры (не обязательно двух лиц) мы построим характеристическую функцию в соответствии с γ-подходом для двух классов стратегий: программных и позиционных, поскольку известно, что выигрыши игроков в равновесии по Нэшу в одной и той же игре при использовании игроками стратегий из этих классов могут различаться [25].

3.4. Построение характеристической функции в случае программных стратегий

Для поиска набора программных стратегий $\tilde{u}^{S,OL}$, $S \subset N$, мы снова применим принцип максимума. Однако сначала рассмотрим сумму:

$$\sum_{i \in S} J_i(u) = \sum_{i \in S} \left(\sum_{t=0}^{T-1} \left(\frac{1}{2} x(t)' Q_i x(t) + c_i u_i^2(t) + q_i' x(t) \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} x(T)' Q_i x(T) + q_i' x(T) + (T+1) \hat{x}_i^2 \right)$$

$$= \sum_{t=0}^{T-1} \left(\frac{1}{2} x(t)' Q_S x(t) + \frac{1}{2} u_S(t)' C_S u_S(t) + q_S' x(t) \right) \\ + \frac{1}{2} x(T)' Q_S x(T) + q_S' x(T) + (T+1) \sum_{i \in S} \hat{x}_i^2,$$

где $Q_S = \sum\limits_{i \in S} Q_i$, $C_S = 2 \operatorname{diag}\{c_i, i \in S\}$ и $q_S = \sum\limits_{i \in S} q_i$. Важно, чтобы порядок игроков коалиции S как в наборе u_S, так и в определении диагональной матрицы C_S был одинаковым.

Определим для коалиции S и любого игрока $i \in N \setminus S$ гамильтонианы $\mathcal{H}_S = \mathcal{H}_S(x(t), u(t), \lambda_S(t+1))$ и $\mathcal{H}_i = \mathcal{H}_i(x(t), u(t), \lambda_i(t+1))$ для всех $t \in \mathcal{T} \setminus T$:

$$\mathcal{H}_S = -\sum_{i \in S} \left(\frac{1}{2} x(t)' Q_S x(t) + \frac{1}{2} u_S(t)' C_S u_S(t) + q_S' x(t) \right) \\ + \lambda_S(t+1)' \left(W x(t) + B u(t) \right),$$

$$\mathcal{H}_i = -\frac{1}{2} x(t)' Q_i x(t) - c_i u_i^2(t) - q_i' x(t) + \lambda_i(t+1)' \left(W x(t) + B u(t) \right),$$

где через $\lambda_S(t+1)$ и $\lambda_i(t+1)$ обозначены вектора сопряженных переменных размерности a.

Утверждение 3.3. *Для того, чтобы набор программных стратегий* $\tilde{u}^{S,OL} = (\tilde{u}_1^{S,OL}, \ldots, \tilde{u}_n^{S,OL})$ *был равновесием по Нэшу в игре* $n - |S| + 1$ *лица, в которой коалиция* S *выступает одним игроком, порождающим траекторию* $(\tilde{x}^{S,OL}(0), \ldots, \tilde{x}^{S,OL}(T))$, *где* $\tilde{x}^{S,OL}(0) = x_0$, *необходимо существование ненулевых наборов* $\lambda_S(t)$, $\lambda_i(t)$, $i \in N \setminus S$, $t \in \mathcal{T} \setminus 0$ *таких, что выполнены следующие условия:*

$$\tilde{u}_S^{S,OL} = \arg\max_{u_S} \mathcal{H}_S(\tilde{x}^{S,OL}(t), u_S(t), \tilde{u}_{N \setminus S}^{S,OL}, \lambda_S(t+1)),$$

$$\tilde{u}_i^{S,OL} = \arg\max_{u_i} \mathcal{H}_i(\tilde{x}^{S,OL}(t), u_i(t), \tilde{u}_{N \setminus \{i\}}^{S,OL}, \lambda_i(t+1)), \quad i \in N \setminus S,$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}_S}{\partial x(t)} = -\tilde{x}^{S,OL}(t)' Q_S - q_S' + \lambda_S(t+1)' W = \lambda_S(t)', \quad t \in \mathcal{T} \setminus \{0, T\},$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}_i}{\partial x(t)} = -\tilde{x}^{S,OL}(t)' Q_i - q_i' + \lambda_i(t+1)' W = \lambda_i(t)', \quad i \in N \setminus S, \\ t \in \mathcal{T} \setminus \{0, T\},$$

$$\lambda_S(T)' = -\tilde{x}^{S,OL}(T)'Q_S - q_S',$$
$$\lambda_i(T)' = -\tilde{x}^{S,OL}(T)'Q_i - q_i', \quad i \in N \setminus S.$$

Пусть $B_S = (b_i,\, i \in S)$ — матрица, образованная векторами b_i, где $i \in S$. Последовательность игроков при составлении этой матрицы также должна совпадать с их последовательностью при составлении u_S. Систему уравнений из утверждения выше можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_S^{S,OL}(t) &= C_S^{-1}B_S'\lambda_S(t+1), \quad t \in \mathcal{T} \setminus T,\\
\tilde{u}_i^{S,OL}(t) &= \frac{1}{2c_i}b_i'\lambda_i(t+1), \quad i \in N \setminus S,\ t \in \mathcal{T} \setminus T,\\
\lambda_S(t) &= -Q_S\tilde{x}^{S,OL}(t) - q_S + W'\lambda_S(t+1), \quad t \in \mathcal{T} \setminus \{0, T\},\\
\lambda_i(t) &= -Q_i\tilde{x}^{S,OL}(t) - q_i + W'\lambda_i(t+1), \quad i \in N \setminus S,\ t \in \mathcal{T} \setminus \{0, T\},\\
\lambda_S(T) &= -Q_S\tilde{x}^{S,OL}(T) - q_S,\\
\lambda_i(T) &= -Q_i\tilde{x}^{S,OL}(T) - q_i, \quad i \in N \setminus S.
\end{aligned}$$

Заметим, что $C_S^{-1} = \frac{1}{2}\operatorname{diag}\{1/c_i,\, i \in S\}$. При использовании игроками равновесных по Нэшу стратегий $\tilde{u}_i^{S,OL}$, $i \in N$, каждый игрок из коалиции S в течение рассматриваемого промежутка времени привносит величину $J_i(\tilde{u}^{S,OL})$, $i \in S$, в суммарный выигрыш этой коалиции, и, следовательно, сила этой коалиции есть $v^{OL}(S) = \sum\limits_{i \in S} J_i(\tilde{u}^{S,OL})$.

3.5. Построение характеристической функции в случае позиционных стратегий

Для поиска набора позиционных стратегий игроков $\tilde{u}^{S,FB}$, $S \subset N$, мы используем следующие результаты, основываясь на свойствах матриц Q_S, C_S и Q_i, $i \in N \setminus S$.

Утверждение 3.4. *Для того, чтобы набор позиционных стратегий* $\tilde{u}^{S,FB} = (\tilde{u}_1^{S,FB}, \ldots, \tilde{u}_n^{S,FB})$ *являлся равновесием по Нэшу, необходимо и достаточно существование функций* $F_S(t, \cdot)$, $F_i(t, \cdot)$, $i \in N \setminus S$, *таких, что выполнены следующие рекуррентные соотноше-*

ния:

$$F_S(t,x) = \min_{u_S(t)} \Bigg(\frac{1}{2} x' Q_S x + \frac{1}{2} u_S(t)' C_S u_S(t) + q_S' x + \sum_{i \in S} \hat{x}_i^2$$

$$+ F_S(t+1, Wx + B_S u_S(t) + B_{N\setminus S} \tilde{u}^{S,FB}_{N \setminus S}(t)) \Bigg),$$

$$F_i(t,x) = \min_{u_i(t)} \Bigg(\frac{1}{2} x' Q_i x + c_i u_i^2(t) + q_i' x + \hat{x}_i^2$$

$$+ F_i(t+1, Wx + b_i u_i(t) + B_{N\setminus\{i\}} \tilde{u}^{S,FB}_{N\setminus\{i\}}(t)) \Bigg), \ i \in N \setminus S,$$

с граничным условием: $F_S(T,x) = \frac{1}{2} x' Q_S x + q_S' x + \sum_{i \in S} \hat{x}_i^2$, $F_i(T,x) = \frac{1}{2} x' Q_i x + q_i' x + \hat{x}_i^2$.

Снова будем предполагать квадратичный вид функций $F_S(t,x) = \frac{1}{2} x' K_S(t) x + k_S(t)' x + \varkappa_S(t)$ и $F_i(t,x) = \frac{1}{2} x' K_i(t) x + k_i(t)' x + \varkappa_i(t)$, $i \in N \setminus S$, а также линейный вид набора равновесных позиционных стратегий $\tilde{u}^{S,FB}_S(t) = -P_S(t)x + p_S(t)$ и $\tilde{u}^{S,FB}_i(t) = -P_i(t)x + p_i(t)$ для $i \in N \setminus S$.

Утверждение 3.5. *Для того, чтобы набор позиционных стратегий* $\tilde{u}^{S,FB} = (\tilde{u}^{S,FB}_1, \ldots, \tilde{u}^{S,FB}_n)$ *являлся единственным равновесием по Нэшу, необходимо и достаточно существование функций* $F_S(t,\cdot)$, $F_i(t,\cdot)$, $i \in N \setminus S$, *таких, что выполнены следующие рекуррентные соотношения:*

$$P_S(t) = (C_S + B_S' K_S(t+1) B_S)^{-1} B_S' K_S(t+1) \Big[W - \sum_{j \notin S} b_j P_j(t) \Big],$$

$$P_i(t) = \frac{1}{2c_i + b_i' K_i(t+1) b_i} b_i' K_i(t+1) \Big[W - B_S P_S(t) - \sum_{j \notin S \cup \{i\}} b_j P_j(t) \Big],$$

$$p_S(t) = -(C_S + B_S' K_S(t+1) B_S)^{-1} B_S' \Big[k_S(t+1) + K_S(t+1) \sum_{j \notin S} b_j p_j(t) \Big],$$

$$p_i(t) = -\frac{1}{2c_i + b_i' K_i(t+1) b_i}$$

$$\times b_i' \Big[k_i(t+1) + K_i(t+1) \Big(B_S p_S(t) + \sum_{j \notin S \cup \{i\}} b_j p_j(t) \Big) \Big],$$

$$
\begin{aligned}
K_S(t) &= Q_S + P_S(t)'C_S P_S(t) + \Big(W - B_S P_S(t) - \sum_{j\notin S\cup\{i\}} b_j P_j(t)\Big)' \\
&\quad \times K_S(t+1)\Big(W - B_S P_S(t) - \sum_{j\notin S\cup\{i\}} b_j P_j(t)\Big), \\
K_i(t) &= Q_i + 2c_i P_i(t)'P_i(t) + \Big(W - B_S P_S(t) - \sum_{j\notin S\cup\{i\}} b_j P_j(t)\Big)' \\
&\quad \times K_i(t+1)\Big(W - B_S P_S(t) - \sum_{j\notin S\cup\{i\}} b_j P_j(t)\Big), \\
k_S(t) &= -P_S(t)'C_S p_S(t) + q_S + \Big(W - B_S p_S(t) - \sum_{j\notin S\cup\{i\}} b_j p_j(t)\Big)' \\
&\quad \times \Big[K_S(t+1)\Big(B_S p_S(t) + \sum_{j\notin S\cup\{i\}} b_j p_j(t)\Big) + k_S(t+1)\Big], \\
k_i(t) &= -2c_i P_i(t)'p_i(t) + q_i + \Big(W - B_S p_S(t) - \sum_{j\notin S\cup\{i\}} b_j p_j(t)\Big)' \\
&\quad \times \Big[K_i(t+1)\Big(B_S p_S(t) + \sum_{j\notin S\cup\{i\}} b_j p_j(t)\Big) + k_i(t+1)\Big],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\varkappa_S(t) &= \varkappa_S(t+1) + \frac{1}{2}p_S(t)'C_S p_S(t) + \Big(B_S p_S(t) + \sum_{j\notin S\cup\{i\}} b_j p_j(t)\Big)' \\
&\quad \times \Big[\frac{1}{2}K_S(t+1)\Big(B_S p_S(t) + \sum_{j\notin S\cup\{i\}} b_j p_j(t)\Big) + k_S(t+1)\Big] + \sum_{i\in S}\hat{x}_i^2, \\
\varkappa_i(t) &= \varkappa_i(t+1) + c_i p_i(t)'p_i(t) + \Big(B_S p_S(t) + \sum_{j\notin S\cup\{i\}} b_j p_j(t)\Big)' \\
&\quad \times \Big[\frac{1}{2}K_i(t+1)\Big(B_S p_S(t) + \sum_{j\notin S\cup\{i\}} b_j p_j(t)\Big) + k_i(t+1)\Big] + \hat{x}_i^2,
\end{aligned}
$$

с граничным условием: $K_S(T) = Q_S$, $k_S(T) = q_S$, $\varkappa_S(T) = \sum_{i\in S}\hat{x}_i^2$ *и* $K_i(T) = Q_i$, $k_i(T) = q_i$, $\varkappa_i(T) = \hat{x}_i^2$; *при этом* $\sum_{i\in S} J_i(\tilde{u}^{S,FB}) = F_S(0, x_0) = \frac{1}{2}x_0' K_S(0)x_0 + k_S(0)'x_0 + \varkappa_S(0)$.

При использовании игроками равновесных по Нэшу стратегий $\tilde{u}_i^{S,FB}$, $i \in N$, каждый игрок из коалиции S в течение рассматриваемого промежутка времени привносит величину $J_i(\tilde{u}^{S,FB})$, $i \in S$, в суммарный выигрыш этой коалиции, и, следовательно, сила этой коалиции есть $v^{FB}(S) = \sum\limits_{i \in S} J_i(\tilde{u}^{S,FB})$.

3.6. Равновесие по Нэшу

Используя приведенную выше схему мы также находим равновесие по Нэшу в игре n лиц, как если бы мы изначально рассматривали некооперативную игру. Для поиска равновесия по Нэшу достаточно выбрать одноэлементную коалицию, причем не важно какую именно. Тогда сила любого игрока определяется как его выигрыш в равновесии по Нэшу в некооперативной игре n лиц при выбранном классе стратегий.

4. Модификация модели: другой критерий

Рассмотрим модифицированный критерий игрока. В отличие от введенного выше критерия, основанного на среднем отклонении мнений агентов сети от целевого мнения этого игрока, в настоящем разделе мы предложим критерий, который учитывает отклонение среднего мнения агентов социальной сети от целевого мнения игрока. Пусть для игрока $i \in N$ его функция выигрыша в рассматриваемой модификации принимает вид:

$$\tilde{J}_i(u) = \sum_{t=0}^{T-1} \tilde{h}_{it}(x(t), u(t)) + \tilde{h}_{iT}(x(T)),$$

где выигрыши $\tilde{h}_{it}(x(t), u(t))$, $t \in \mathcal{T} \setminus T$, и $\tilde{h}_{iT}(x(T))$ заданы в виде:

$$\tilde{h}_{it}(x(t), u(t)) = \left(\frac{1}{a} \sum_{j \in A} x_j(t) - \hat{x}_i \right)^2 + c_i u_i^2(t), \quad t \in \mathcal{T} \setminus T,$$

$$\tilde{h}_{iT}(x(T)) = \left(\frac{1}{a} \sum_{j \in A} x_j(T) - \hat{x}_i \right)^2.$$

Для $t \in \mathcal{T}$ справедливо:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{a} \sum_{j \in A} x_j(t) - \hat{x}_i \right)^2 &= \left(\frac{1}{a} \sum_{j \in A} x_j(t) \right)^2 - \frac{2\hat{x}_i}{a} \mathbf{1}' x(t) + \hat{x}_i^2 \\ &= \frac{1}{a^2} x(t)' \mathbf{1}\mathbf{1}' x(t) - \frac{2\hat{x}_i}{a} \mathbf{1}' x(t) + \hat{x}_i^2, \end{aligned}$$

тогда, используя представление выше, получаем:

$$\begin{aligned} J_i(u) = &\sum_{t=0}^{T-1}\left(\frac{1}{a^2}x(t)'\mathbf{1}\mathbf{1}'x(t) + c_i u_i^2(t) - \frac{2\hat{x}_i}{a}\mathbf{1}'x(t)\right) \\ &+ \frac{1}{a^2}x(T)'\mathbf{1}\mathbf{1}'x(T) - \frac{2\hat{x}_i}{a}\mathbf{1}'x(T) + (T+1)\hat{x}_i^2 \\ = &\sum_{t=0}^{T-1}\left(\frac{1}{2}x(t)'\tilde{Q}_i x(t) + \frac{1}{2}C_i u_i^2(t) + q_i' x(t)\right) \\ &+ \frac{1}{2}x(T)'\tilde{Q}_i x(T) + q_i' x(T) + (T+1)\hat{x}_i^2, \end{aligned}$$

где $\tilde{Q}_i = \frac{2}{a^2}\mathbf{1}\mathbf{1}'$, и, следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{i\in N} J_i(u) = &\sum_{t=0}^{T-1}\left(\frac{1}{2}x(t)'\tilde{Q}x(t) + \frac{1}{2}u(t)'Cu(t) + q'x(t)\right) \\ &+ \frac{1}{2}x(T)'\tilde{Q}x(T) + q'x(T) + (T+1)\hat{x}'\hat{x}. \end{aligned}$$

Здесь $\tilde{Q} = \sum\limits_{i\in N}\tilde{Q}_i = \frac{2n}{a^2}\mathbf{1}\mathbf{1}'$. Матрицы $\tilde{Q}_1, \ldots, \tilde{Q}_n$ и $\tilde{Q}$ являются неотрицательно определенными, поскольку матрица $\mathbf{1}\mathbf{1}'$ (матрица единиц) имеет собственные числа a кратности 1 и 0 кратности $a-1$.

Как легко заметить, приведенная модификация функций выигрыша существенным образом не влияет на условия, позволяющие находить кооперативные стратегии игроков, а также все их стратегии, необходимые для определения характеристической функции. Чтобы определить искомые стратегии игроков, следует лишь заменить матрицы $Q_1, \ldots, Q_n, Q$ матрицами $\tilde{Q}_1, \ldots, \tilde{Q}_n, \tilde{Q}$, соответственно.

5. Оценка уровней доверия

В случае, когда степени доверия участников сети друг другу не известны, т. е. когда матрицы W и B изначально не заданы, мы предложим способ их оценивания на основе меры центральности. Пусть $\mathcal{A}$ — матрица смежности графа связей g, т. е. ее компоненты $a_{ij} = 1$, если ребро $(i,j) \in g$, и $a_{ij} = 0$ в противном случае. Напомним, что в рамках модели игроки могут влиять только на мнения агентов сети.

Центральность показывает степень «важности» или «влиятельности» узла сети. Мы рассмотрим центральность по близости[2] [13,

---

[2]Closeness centrality.

21, 24]. Путем между вершинами i и j в g, который будем обозначать через $i \xrightarrow{g} j$, назовем последовательность направленных ребер $(i, i_1), (i_1, i_2), \ldots, (i_\ell, j)$. Пусть $V_i^{out}(g) = \{j \in V \setminus \{i\} : i \xrightarrow{g} j\}$, $N_i^{in}(g) = \{j \in V \setminus \{i\} : (j, i) \in g\}$, и $\mathrm{dist}(i, j)$ обозначает количество ребер в кратчайшем пути между вершинами i и j. Центральность по близости $\varsigma_i(g)$ узла $i \in V$ сети есть величина

$$\varsigma_i(g) = \begin{cases} \left(\dfrac{|V_i^{out}(g)|}{|V| - 1}\right)^2 \cdot \dfrac{1}{\sum\limits_{j \in V_i^{out}(g)} \mathrm{dist}(i, j)}, & V_i^{out}(g) \neq \varnothing, \\ 0, & V_i^{out}(g) = \varnothing. \end{cases}$$

Надо отметить, что в качестве меры центральности можно выбрать и другую адекватную меру, характеризующую влиятельность узла сети. В рамках исследуемой постановки выбор центральности по близости оправдан, поскольку для выбранного узла сети эта мера учитывает количество узлов, на которые может повлиять этот узел с учетом их удаленности от него.

Определим степени доверия агента $i \in A$ как другим агентам сети, так и игрокам. Положим:

$$w_{ij} = \begin{cases} \dfrac{\varsigma_j(g)}{\varsigma_i(g) + \sum\limits_{\ell \in N_i^{in}(g)} \varsigma_\ell(g)}, & j \in A \cap N_i^{in}(g), \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$b_{ij} = \begin{cases} \dfrac{\varsigma_j(g)}{\varsigma_i(g) + \sum\limits_{\ell \in N_i^{in}(g)} \varsigma_\ell(g)}, & j \in N \cap N_i^{in}(g), \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

По построению требуемое равенство $\sum\limits_{j \in A} w_{ij} + \sum\limits_{j \in N} b_{ij} = 1$ будет выполнено для любого $i \in A$.

6. Численное моделирование

6.1. Университетский клуб карате

Модель университетского клуба карате является известной классической задачей в моделировании социальных систем. Социальная сеть клуба, состоящая из 34 участников, изучалась У. Закари [26], который зафиксировал взаимодействия между ними. В результате конфликта между тренером и президентом клуба участники разделились на две группы. Мы рассмотрим эту сеть применительно на нашей модели. Будем считать тренера и президента клуба игроками (1 и 2, соответственно), а остальных участников сети — агентами. Под мнением агента будем понимать вероятность, с которой он пересматривает участие в клубе. В качестве параметров модели выберем следующие: $T = 15$, $n = 2$, $a = 32$, $c_1 = 0.4$, $c_2 = 0.3$, $\hat{x}_1 = 0.6$, $\hat{x}_2 = 0.4$. Начальные мнения агентов генерируются случайным образом при помощи равномерного распределения на единичном отрезке.

Поскольку у нас нет информации о степени доверия участников сети друг другу, мы будет использовать подход, предложенный в разделе 5. На рис. 1 приведена визуализация связей участников сети: цвет вершин отражает мнения агентов в начальный момент времени, размер узла соответствует центральности вершины[3]. Для большей наглядности мы убрали индикацию в ориентации ребер: ориентация ребер сохранена согласно оригинальной работе [26], однако с учетом специфики текущей модели игроки имеют лишь исходящие ребра.

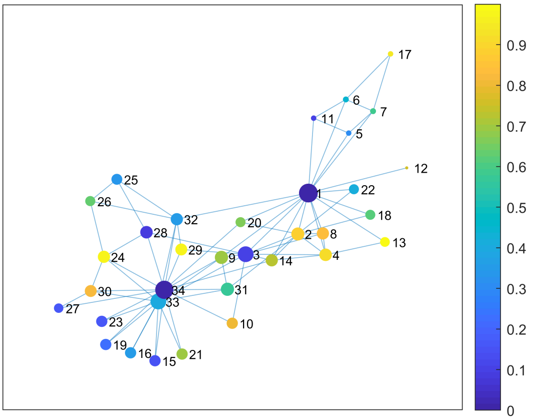

Рис. 1: Начальные мнения участников, x_0

На рис. 2–3 представлены кооперативные стратегии игроков и их стратегии в равновесии по Нэшу в случае как программных, так и позиционных стратегий для основной и модифицированной модели.

[3]В электронной версии статьи все рисунки представлены в цвете.

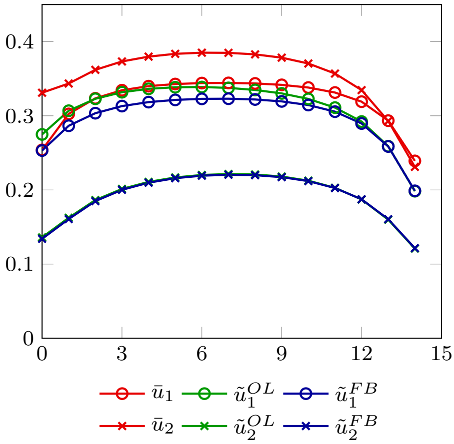

Рис. 2: Кооперативные и равновесные по Нэшу стратегии в основной модели

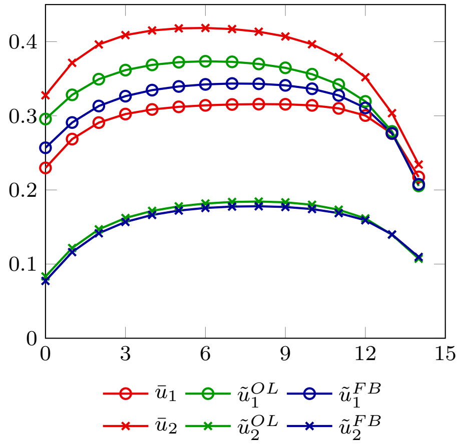

Рис. 3: Кооперативные и равновесные по Нэшу стратегии в модификации модели

Конечные мнения агентов сети $\bar{x}(T)$ в случае кооперации для двух вариантов модели изображены на рис. 4–5. Конечные мнения агентов $\tilde{x}^{OL}(T)$ и $\tilde{x}^{FB}(T)$ в равновесии по Нэшу для двух вариантов модели и разных классов стратегий изображены на рис. 6–9. Отметим, что в равновесии по Нэшу они в достаточной мере близки для рассматриваемых классов стратегий. Это наблюдается в двух моделях.

Ниже приведены числовые характеристики основной модели, рассчитанные по формулам (3.1)–(3.2): выигрыши игроков при кооперации, их выигрыши в равновесии по Нэшу (в программных и позиционных стратегиях) и вектора Шепли для двух способов построения характеристической функции:

$$\begin{aligned}
J_1(\bar{u}) &= 1.5312, & J_2(\bar{u}) &= 0.7228, & J_1(\bar{u}) + J_2(\bar{u}) = 2.2540,\\
J_1(\tilde{u}^{OL}) &= 2.1027, & J_2(\tilde{u}^{OL}) &= 0.5031,\\
J_1(\tilde{u}^{FB}) &= 2.1087, & J_2(\tilde{u}^{FB}) &= 0.5167,\\
\mathrm{Sh}_1[v^{OL}] &= 1.9268, & \mathrm{Sh}_2[v^{OL}] &= 0.3272,\\
\mathrm{Sh}_1[v^{FB}] &= 1.9230, & \mathrm{Sh}_2[v^{FB}] &= 0.3310.
\end{aligned}$$

Далее для сравнения мы приводим те же самые характеристики для модифицированной модели:

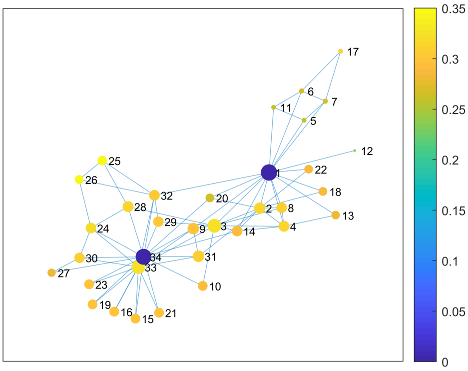

Рис. 4: $\bar{x}(T)$ в основной модели

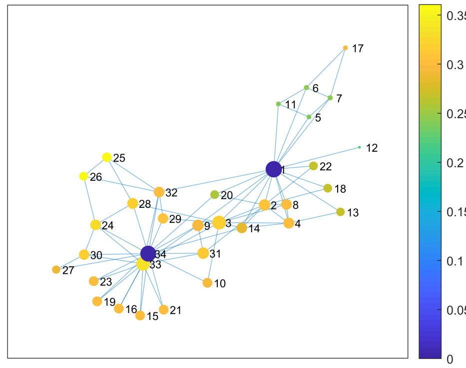

Рис. 5: $\bar{x}(T)$ в модификации модели

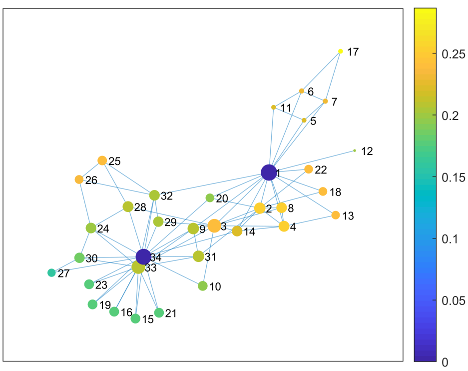

Рис. 6: $\tilde{x}^{OL}(T)$ в основной модели при программных стратегиях

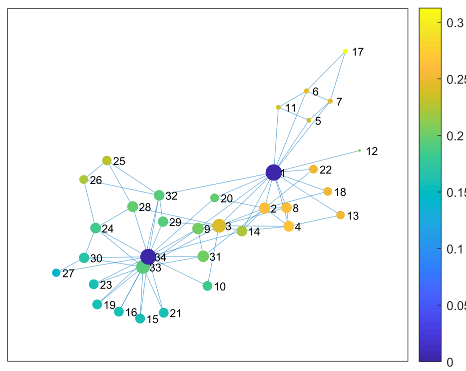

Рис. 7: $\tilde{x}^{OL}(T)$ в модификации модели при программных стратегиях

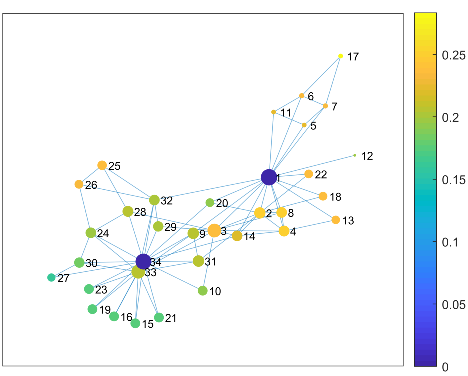

Рис. 8: $\tilde{x}^{FB}(T)$ в основной модели при позиционных стратегиях

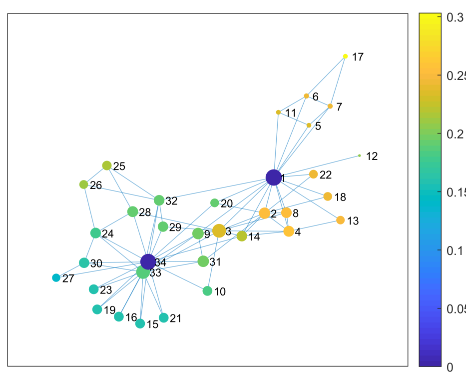

Рис. 9: $\tilde{x}^{FB}(T)$ в модификации модели при позиционных стратегиях

$$
\begin{aligned}
&J_1(\bar u) = 1.4512, && J_2(\bar u) = 0.8203, && J_1(\bar u) + J_2(\bar u) = 2.2715,\\
&J_1(\tilde u^{OL}) = 2.2662, && J_2(\tilde u^{OL}) = 0.4837,\\
&J_1(\tilde u^{FB}) = 2.2836, && J_2(\tilde u^{FB}) = 0.5115,\\
&\mathrm{Sh}_1[v^{OL}] = 2.0270, && \mathrm{Sh}_2[v^{OL}] = 0.2445,\\
&\mathrm{Sh}_1[v^{FB}] = 2.0218, && \mathrm{Sh}_2[v^{FB}] = 0.2497.
\end{aligned}
$$

6.2. Граф решетки

При исследовании пространственных сетей часто за основу берется граф решетки. В частности, такой граф используется при изучении проблемы сегрегации в крупных городах [27]. Предполагается, что узлом решетки является некоторое домовладение, а ребра показывают соседние. В своем большинстве каждый узел имеет четыре соседних домовладения. В рамках моделирования мы рассмотрим квадратную решетку из ста узлов. Каждый узел имеет от двух до четырех соседей. Будем считать, что игроками (1 и 2, соответственно) являются узлы 12 и 67. Остальные участники — агенты. Под мнением агента будем понимать вероятность, с которой он готов остаться в своем домовладении. В качестве модельных параметров выберем следующие: $T = 10$, $n = 2$, $a = 98$, $c_1 = 0.02$, $c_2 = 0.05$, $\hat x_1 = 0.5$, $\hat x_2 = 0.7$. Начальные мнения агентов могут принимать два значения: либо 0, либо 1, и они равновероятны.

Степени доверия участников сети друг другу мы будем снова определять при помощи меры центральности по близости. На рис. 10 приведена визуализация связей участников сети: цвет вершин отражает мнения агентов в начальный момент времени. Для большей наглядности мы не используем индикацию в ориентации ребер, но подразумеваем, что если на рисунке изображены два связанных агента $i, j \in A$, то ребра $(i, j) \in g_A$ и $(j, i) \in g_A$, а если на рисунке изображены связанные игрок $i \in N$ и агент $j \in A$, то ребро $(i, j) \in g_N$.

На рис. 11–12 представлены кооперативные стратегии игроков и их стратегии в равновесии по Нэшу для случаев программных и позиционных стратегий для основной и модифицированной модели. Отметим близость равновесных значений в разных классах стратегий.

Конечные мнения агентов сети $\bar x(T)$, $\tilde x^{OL}(T)$ и $\tilde x^{FB}(T)$ для двух вариантов модели изображены на рис. 13–18.

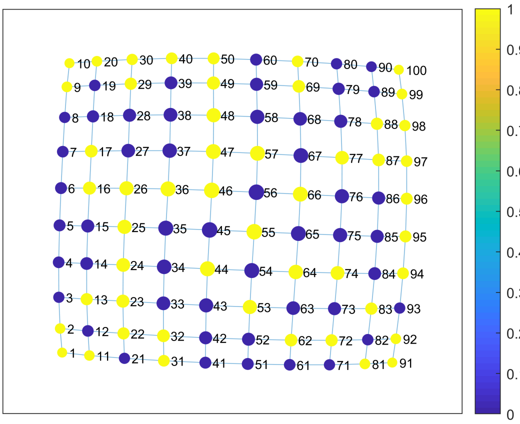

Рис. 10: Начальные мнения участников, x_0

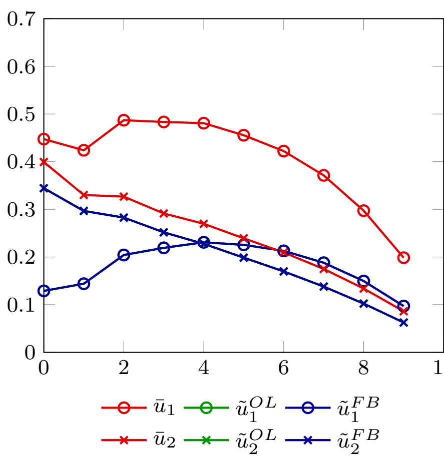

Рис. 11: Кооперативные и равновесные по Нэшу стратегии в основной модели

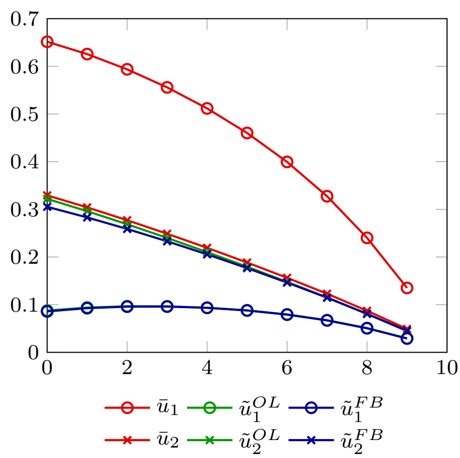

Рис. 12: Кооперативные и равновесные по Нэшу стратегии в модификации модели

Далее приведены числовые характеристики основной модели, рассчитанные по формулам (3.1)–(3.2): выигрыши игроков при кооперации, их выигрыши в равновесии по Нэшу (в программных и позиционных стратегиях) и вектора Шепли для двух способов построения характеристической функции:

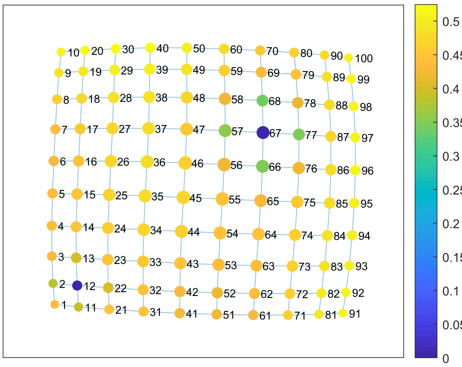

Рис. 13: $\bar{x}(T)$ в основной модели

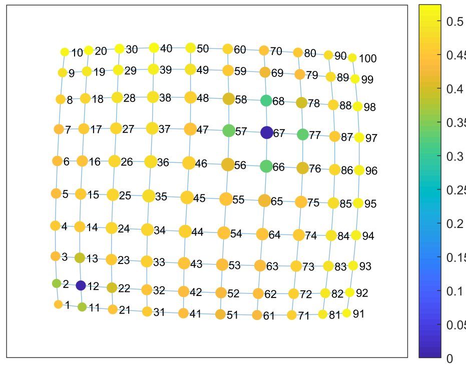

Рис. 14: $\bar{x}(T)$ в модификации модели

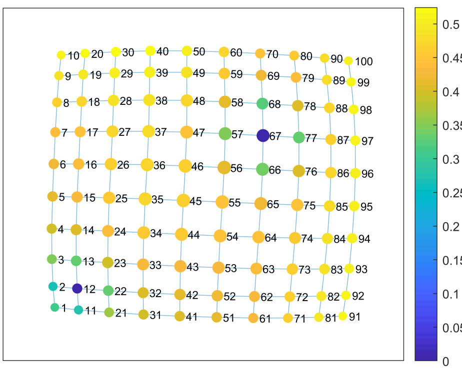

Рис. 15: $\tilde{x}^{OL}(T)$ в основной модели при программных стратегиях

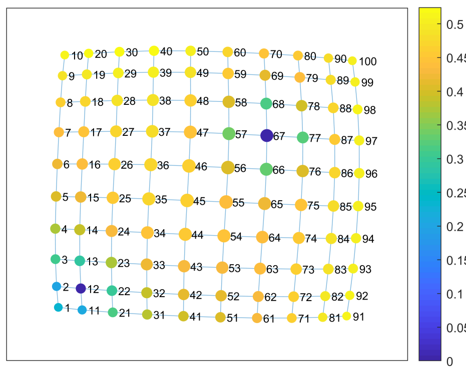

Рис. 16: $\tilde{x}^{OL}(T)$ в модификации модели при программных стратегиях

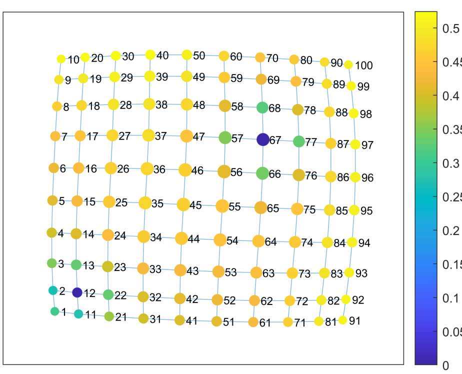

Рис. 17: $\tilde{x}^{FB}(T)$ в основной модели при позиционных стратегиях

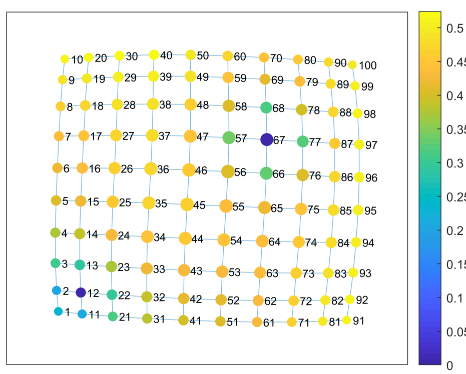

Рис. 18: $\tilde{x}^{FB}(T)$ в модификации модели при позиционных стратегиях

$$\begin{aligned}
J_1(\bar{u}) &= 0.3966, & J_2(\bar{u}) &= 0.9220, & J_1(\bar{u}) + J_2(\bar{u}) = 1.3186,\\
J_1(\tilde{u}^{OL}) &= 0.3798, & J_2(\tilde{u}^{OL}) &= 0.9661,\\
J_1(\tilde{u}^{FB}) &= 0.3798, & J_2(\tilde{u}^{FB}) &= 0.9661,\\
\mathrm{Sh}_1[v^{OL}] &= 0.3662, & \mathrm{Sh}_2[v^{OL}] &= 0.9524,\\
\mathrm{Sh}_1[v^{FB}] &= 0.3662, & \mathrm{Sh}_2[v^{FB}] &= 0.9524.
\end{aligned}$$

В виду округления замечаем, что выигрыши игроков совпадают для разных классов стратегий, а следовательно компоненты векторов Шепли для разных классов стратегий также будут совпадать. Для сравнения мы приводим те же самые характеристики для модифицированной модели, где уже отмечаем различие выигрышей игроков и векторов Шепли для разных классов стратегий:

$$\begin{aligned}
J_1(\bar{u}) &= 0.4123, & J_2(\bar{u}) &= 0.9118, & J_1(\bar{u}) + J_2(\bar{u}) = 1.3241,\\
J_1(\tilde{u}^{OL}) &= 0.3845, & J_2(\tilde{u}^{OL}) &= 0.9896,\\
J_1(\tilde{u}^{FB}) &= 0.3849, & J_2(\tilde{u}^{FB}) &= 0.9899,\\
\mathrm{Sh}_1[v^{OL}] &= 0.3595, & \mathrm{Sh}_2[v^{OL}] &= 0.9646,\\
\mathrm{Sh}_1[v^{FB}] &= 0.3596, & \mathrm{Sh}_2[v^{FB}] &= 0.9645.
\end{aligned}$$

7. Заключение

Рассмотрена модель согласованного влияния на мнения агентов социальной сети как кооперативная линейно-квадратичная игра. При выборе уровней влияния игроки учитывают не только затраты с ними связанные, но и среднее отклонение мнений агентов от заданных. В дополнение рассматривается и модифицированный критерий игроков, при котором игроки фокусируются на отклонении среднего мнения агентов социальной сети от заданных мнений. Характеристическая функция игры построена в соответствии с γ-подходом, и ее значения определены как для класса программных стратегий, так и для позиционных. При распределении кооперативного выигрыша используется вектор Шепли. Предложен способ оценки степеней доверия участников сети друг другу на основе меры центральности, в частности, центральности по близости, хорошо подходящей для рассматриваемой постановки. Для численного моделирования выбраны примеры социальной сети университетского клуба карате и графа решетки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болтянский В. Г. *Оптимальное управление дискретными системами*, М: Наука, 1973.

2. Acemoglu D., Ozdaglar A. *Opinion dynamics and learning in social networks* // Dynamic Games and Applications. 2011. Vol. 1. No. 1. PP. 3–49.

3. Barabanov I. N., Korgin N. A., Novikov D. A., Chkhartishvili A. G. *Dynamic models of informational control in social networks* // Automation and Remote Control. 2010. Vol. 71. No. 11. PP. 2417–2426.

4. Başar T., Olsder G. J. *Dynamic Noncooperative Game Theory*, 2nd edition. USA: Academic Press, 1999.

5. Bauso D., Cannon M. *Consensus in opinion dynamics as a repeated game* // Automatica. 2018. Vol. 90. PP. 204–211.

6. Bindel D., Kleinberg J., Oren S. *How bad is forming your own opinion?* // Games and Economic Behavior. 2015. Vol. 92. PP. 248–265.

7. Buechel B., Hellmann T., Klößner S. *Opinion dynamics and wisdom under conformity* // Journal of Economic Dynamics and Control. 2015. Vol. 52. PP. 240–257.

8. Bure V., Parilina E., Sedakov A. *Consensus in social networks with heterogeneous agents and two centers of influence.* Stability and Control Processes in Memory of V. I. Zubov (SCP), 2015 International Conference. 2015. PP. 233–236.

9. Bure V., Parilina E., Sedakov A. *Consensus in a social network with two principals* // Automation and Remote Control. 2017. Vol. 78. No. 8. PP. 1489–1499.

10. Chander P., Tulkens H. *A core of an economy with multilateral environmental externalities* // International Journal of Game Theory. 1997. Vol. 26. PP. 379–401.

11. DeGroot M. H. *Reaching a Consensus* // Journal of the American Statistical Association. 1974. Vol. 69. No. 345. PP. 118–121.

12. Etesami S. R., Başar T. *Game-theoretic analysis of the Hegselmann–Krause model for opinion dynamics in finite dimensions* // IEEE Transactions on Automatic Control. 2015. Vol. 60. No. 7. PP. 1886–1897.

13. Freeman L. C. *Centrality in Social Networks Conceptual Clarification* // Social Networks. 1978. Vol. 1. No. 3. PP. 215–239.

14. Friedkin N. E., Johnsen E. C. *Social influence and opinions* // Journal of Mathematical Sociology. 1990. Vol. 15. No. 3–4. PP. 193–206.

15. Ghaderi J., Srikant R. *Opinion dynamics in social networks with stubborn agents: Equilibrium and convergence rate* // Automatica. 2014. Vol. 50. No. 12. PP. 3209–3215.

16. Gubanov D. A., Novikov D. A., Chkhartishvili A. G. *Informational influence and informational control models in social networks* // Automation and Remote Control. 2011. Vol. 72. No. 7. PP. 1557–1597.

17. Haurie A., Krawczyk J., Zaccour G. *Games and dynamic games.* Singapore: World Scientific, 2012.

18. Hegselmann R., Krause U. *Opinion dynamics and bounded confidence models, analysis, and simulation* // Journal of Artificial Societies and Social Simulation. 2002. Vol. 5. No. 3.

19. Golub B., Jackson M. O. *Naive learning in social networks and the wisdom of crowds* // American Economic Journal: Microeconomics. 2010. Vol. 2. No. 1. PP. 112–49.

20. Krawczyk J. B., Tidball M. *A discrete-time dynamic game of seasonal water allocation* // Journal of Optimization Theory and Applications. 2006. Vol. 128. No. 2. PP. 411–429.

21. Lin N. *Foundations of social research.* McGraw-Hill, 1976.

22. Niazi M. U. B., Özgüler A. B., Yıldız A. *Consensus as a Nash Equilibrium of a Dynamic Game*, 12th International Conference on Signal-Image Technology & Internet-Based Systems. 2016. PP. 365–372.

23. Rajan R. *Endogenous Coalition Formation in Cooperative Oligopolies* // International Economic Review. 1989. Vol. 30. No. 4. PP. 863–876.

24. Sabidussi G. *The centrality index of a graph* // Psychometrika. 1966. Vol. 31. No. 4. PP. 581–603.

25. Starr A. W., Ho Y. C. *Further Properties of Nonzero-Sum Differential Games* // Journal of Optimization Theory and Applications. 1969. Vol. 3. No. 4. PP. 207–219.

26. Zachary W. W. *An Information Flow Model for Conflict and Fission in Small Groups* // Journal of Anthropological Research. 1977. Vol. 33. No. 4. PP. 452–473.

27. Zhang J. *Tipping and Residential Segregation: A Unified Schelling Model* // Journal of Regional Science. 2011. Vol. 51. No. 1. PP. 167–193.

COORDINATED INFLUENCE ON THE BELIEFS OF SOCIAL NETWORK MEMBERS

Mikhail A. Rogov, Saint Petersburg State University, Saint Petersburg, Russia (mrogov97@gmail.com);
Artem A. Sedakov, Cand.Sc., Saint Petersburg State University, Saint Petersburg, Russia; School of Mathematics and Statistics, Qingdao University, Qingdao, China; Institute of Applied Mathematics of Shandong, Qingdao, China (a.sedakov@spbu.ru)

Abstract: In this paper, we examine a model of the coordinated influence in a social network in which several its members, called players, can jointly influence the beliefs of other members, called agents, during a finite number of periods. The model is considered as a cooperative dynamic game. The influence of players is expressed by declaring their beliefs which are then considered and weighted by the agents to form their own beliefs. Our goal is to find the declared beliefs of players focusing only on associated costs as well as on the average deviation of agents beliefs from the desired ones. Under coordination, the total costs of players are allocated using the Shapley value. When we have no information regarding the levels of trust for agents to each other, we estimate these values by means of a centrality measure. Numerical simulation is carried out for a well-known social network of a university karate club and for a lattice often used for modeling spatial networks.

Keywords: social network, influence, opinion dynamics, linear-quadratic games, cooperation, equilibrium, centrality.