Математическая Теория Игр и её Приложения, т.10, в.4, с. 59–99

УДК 519.866.2.
ББК 22.18

ГАРАНТИРОВАННЫЙ ДЕТЕРМИНИСТСКИЙ ПОДХОД К СУПЕРХЕДЖИРОВАНИЮ: МОДЕЛЬ РЫНКА, ТОРГОВЫЕ ОГРАНИЧЕНИЯ И УРАВНЕНИЯ БЕЛЛМАНА-АЙЗЕКСА

Сергей Н. Смирнов
Кафедра системного анализа
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова
119992, Москва, ГСП-1, Воробьевы горы, МГУ
e-mail: s.n.smirnov@gmail.com

Для задачи суперрепликации с дискретным временем предлагается гарантированная детерминистская постановка, альтернативная традиционному вероятностному подходу, основанному на использовании референтной меры. При детерминистском подходе референтная мера не используется, а задача состоит в гарантированном покрытии обусловленного обязательства по опциону при всех допустимых сценариях. Эти сценарии задаются при помощи априорно заданных компактов, зависящих от предыстории цен: приращения цен в каждый момент времени должны лежать в соответствующих компактах. Изложение фокусируется на обсуждении экономического смысла модели без претензии на максимально возможную общность;

этой целью обусловлен характер ряда предположений. Предполагается отсутствие транзакционных издержек, рассматривается рынок как без торговых ограничений, так и с торговыми ограничениями. Изначально постановка задачи носит теоретико-игровой характер, что позволяет, исходя из экономической интерпретации задачи, легко вывести соответствующие уравнения Беллмана–Айзекса для резервов в текущий момент времени, необходимых для гарантированного покрытия текущих и будущих обусловленных обязательств по (проданному) американскому опциону.

Ключевые слова: гарантированные оценки, детерминистская динамика цен, суперрепликация, опцион, арбитраж, отсутствие арбитражных возможностей, уравнение Беллмана–Айзекса, многозначное отображение.

1. Введение

Задача гарантированного оценивания опционов и хеджирования соответствующих обусловленных обязательств – суперрепликации, (superreplication) – была решена при помощи техники опционального разложения рядом авторов: Эль Каруи и Кенез [37] для диффузионной динамики цен базового актива, в общей семимартингальной постановке – Крамковым [40], а также Фельмером и Кабановым [34] для случая дискретного времени.

Модели такого рода обычно описываются на стандартном языке, принятом в теории случайных процессов – в терминах фильтрованного вероятностного пространства (см., например, Ширяев [15, 16]), с вероятностной мерой, определенной с точностью до эквивалентности (взаимной абсолютной непрерывности).[1] Современное изложение этого подхода представлено в книге Фёльмера и Шида [35]. Понимание соответствующих результатов подразумевает наличие определенной математической культуры и потому обычно затруднительно для экономистов. В настоящей работе предлагается альтернативный подход к постановке задачи оптимальной суперрепликации в рамках

[1] При этом, по существу, важен лишь класс «почти невозможных» событий (нулевой вероятности), сама же мера принципиального значения не имеет.

«детерминистского» теоретико-игрового подхода[2], предложенный автором в 1996-1997 году и используемый по настоящее время в лекциях по финансовой математике для студентов старших курсов кафедры системного анализа факультета ВМиК МГУ. На этой основе была также подготовлена публикация Захарова и Муссы [4] и диссертация Муссы [10]. Подход имеет также определенную дидактическую ценность, не только из-за того, что используемая математическая техника более доступна восприятию, но и потому, что подход позволяет дать прозрачную экономическую интерпретацию задачи, в том числе объяснить причину появления в проблеме ценообразования риск-нейтральной (мартингальной) вероятности.

Мотивацией для появления данной работы стал доклад Дмитрия Крамкова об опциональном разложении на семинаре в МИАН, во второй половине 90-х годов, в котором были отмечены затруднения в численном нахождении существенного супремума по множеству эквивалентных мартингальных мер для условного среднего функции выплат. Наш подход является более конструктивным и позволяет решать задачу численно, а по математической постановке представляет собой задачу управления[3] в условиях неопределенности[4] (с дискретным временем).

Некоторые излагаемые ниже результаты, включая идею использовать в «детерминистском» описании рынка теоретико-игровой подход, докладывались на семинаре франко-российского центра имени А.М. Ляпунова при МГУ в 2001 г., организованным академиком А.Б. Куржанским, в котором в частности участвовал Пьер Бернар[5]; на этом семинаре была представлена теорема об игровом равновесии и интерпретации риск-нейтральных мер как наиболее неблагоприят-

---

[2]В предлагаемом нами «детерминистском» походе, в отличие от «вероятностного» подхода, изначально не задается никакая референтная мера.

[3] Гарантированный подход для общего случая задачи управления в условиях неопределенности изложен в книге А.Б. Куржанского [8].

[4] Ряд авторов, в частности Фёльмер и Шид [35], квалифицируют постановки задачи, не относящиеся к вероятностным, как формализацию неопределенности по Найту (Knightian uncertainty). Такое название, однако, представляется некорректным, поскольку Найт в своей книге [38], в гл. 8, говорит о неопределенности, не поддающейся количественному измерению (в отличие от риска).

[5]В 2013 г. Пьер Бернар и еще шесть авторов опубликовали книгу [23], в которой имеются результаты близкие к нашим.

ных для «хеджера» стратегий рынка без торговых ограничений при гарантированной оценке обусловленного обязательства по опциону. Кроме того, результаты, относящиеся к данной работе, были также представлены на

- семинаре департамента риск-менеджмента Чикагской товарной биржи (CME) – Chicago, 2002;
- семинаре по математическим финансам в канадском университете University of Alberta (Edmonton), 2006;
- Первом Российском экономическом конгрессе – Москва, 2009;
- семинаре «Вероятностные проблемы управления и стохастические модели в экономике, финансах и страховании» под руководством В.И. Аркина и Э.Л. Пресмана (ЦЭМИ) – Москва, 2009, 2011;
- семинаре «Математическая экономика» под руководством В.И. Данилова и В.М. Полтеровича (ЦЭМИ) – Москва, 2011; тезисы этого доклада, «Теоретико-игровой подход в задаче гарантированного оценивания опционов и конструктивный метод расчета цены и стратегии хеджирования», состоявшегося 24.05.11 в ЦЭМИ РАН, опубликованы на сайте «Синергетика, нелинейная динамика и междисциплинарные исследования», на странице http://nonlin.ru/node/1984;
- семинаре факультета экономики Болонского университета (Workshop in Quantitative Finance) – Bologna, 2012;
- семинаре «Прикладные задачи системного анализа» под руководством А.Б. Куржанского (МГУ) – Москва, 2015;
- международной конференции по теории вероятностей и математической статистике, посвященной 100-летию Гванджи Мания – Тбилиси, 2018;
- ежегодной научной конференции «Тихоновские чтения» (МГУ) – Москва, 2018; совместный доклад: Андреев Н.А., Смирнов С.Н. «Гарантированный подход к задачам инвестирования и хеджирования» [1];

- Семинаре Института прикладных математических исследований Карельского научного центра Российской академии наук – Петрозаводск, 2018.

Однако материал не был опубликован в виде статей, а существовал только в виде лекционных записок, тезисов и презентаций.

Одной из первых публикаций по тематике, связанной с тематикой нашей работы, является статья [39], опубликованная в 1998 году; насколько нам известно, это первая работа, в которой явно формулируется детерминистский подход к ценообразованию и хеджированию обусловленных обязательств по опционам. Неявно, но фактически математический инструментарий для детерминистского подхода уже был представлен в 1994 году в разделах 1.1.6 и 1.2.4 книги [32], откуда, в частности, может быть получен результат первой части статьи [39], для случая одного рискового актива и выпуклой функции выплат по европейскому опциону.

Отметим также, что такой подход близок по духу к игровой постановке, независимо предложенной в 2004 г. в работе [14]; результаты подобного типа можно найти в работах [29], [30], [5, 6, 7] однако, все эти работы относятся к традиционному «вероятностному» подходу.

Идея «детерминистского» гарантированного оценивания опционов и некоторые из упомянутых ниже результатов использованы при разработке нового подхода к организации торгов срочными инструментами – биржевыми фьючерсами и опционами, на основе правил клиринга с оригинальной процедурой урегулирования ситуации с дефицитом маржи и системой портфельного маржирования, обеспечивающими эффективную и устойчивую работу в условиях низкой ликвидности рынка. Методика прошла апробацию в 2002 г. в департаменте риск-менеджмента Чикагской товарной биржи (CME), а в 2004 г. был получен патент РФ на изобретение [13].

Везде далее, если не оговорено противное, мы следуем «детерминистской» концепции (см. [22]). В рассматриваемой модели рынка с дискретным временем отсутствуют прямые и косвенные транзакционные издержки (связанные с ограниченной ликвидностью рынка), однако учитываются торговые ограничения. На эволюцию безрискового и рисковых активов заданы априорные ограничения на изменения цен: приращения цен базовых активов в следующий момент времени должны находиться в компакте, зависящем от предыстории цен. Требование компактности здесь существенно для получения нетривиальных результатов, поскольку без этого предположения типичной стратегией хеджирования будет “buy-and-hold”, см. например [31] и [29].

Ряд результатов нашей работы пересекается с независимо полученными Колокольцовым результатами в предположении отсутствия торговых ограничений, описанными в главах 11-14 книги [23]. В том числе, в работе Колокольцова содержится независимо открытая им игровая интерпретация[6] риск-нейтральных вероятностей. В главах 13 и 14 [23], где рассматриваются применения к задаче ценообразования опционов[7] – европейских и американских, – ограничения, накладываемые на логарифмы цен, предполагаются интервальными, т.е. вектор логарифмов приращение цен лежит в параллелепипеде, хотя теория, представленная в главе 12 [23] позволяет, в принципе, компактозначные ограничения на цены, как в нашей работе. Удивительно, что в этой статье, посвященной теоретико-игровому подходу, не используются, однако, собственно теоретико-игровые методы[8], что было с самого начало положено в основу нашей работы; вопросы игрового равновесия в смешанных стратегиях при торговых ограничениях и роль условия безарбитражности естественно изучать в рамках теоретико-игровой интерпретации. Отметим, что в главе 12 книги [23] определение 12.2, на наш взгляд, использует неудачную терминологию: по существу, с экономической точки зрения, речь идет о двух определениях арбитражных возможностей для приращений цен, лежащих в множестве K, в одношаговой модели

[6] В приглашенной статье [44], опубликованной в выпуске журнала Intelligent Risk, приуроченного к конференции “PRMIA’s Global Risk Conference”, посвященной 10-летнему юбилею международной ассоциации профессиональных риск-менеджеров (Professional Risk Managers’ International Association, PRMIA), представлены наши размышления о важности интерпретации понятий, предположений и математических результатов финансовых моделей, – в частности, в отношении риск-нейтрального оценивания финансовых инструментов. Показано, что это имеет принципиально значение для корректного понимания феномена «пузырей» на финансовых рынках.

[7] Речь идет об опционах “Raindow”.

[8] Возможно, связано это с тем, что в работе Колокольцова рассматривается только случай отсутствия торговых ограничений.

рынка (в нашей терминологии это условия отсутствия арбитражных возможностей (NDAO) и условия отсутствия гарантированного арбитража (NDSA).)[9] В нашей работе уравнения Беллмана получаются при игровом равновесии из уравнений Беллмана–Айзекса, изначально фигурирующих в постановке задачи. Такая постановка позволяет, в частности, применить доказанную нами при общих предположениях теорему о конечных носителях смешанных стратегий в антагонистической игре [11]. Кроме того, предлагаемая нами постановка задачи позволяет также установить связь с проблемой моментов Чебышева-Маркова. В работе Колокольцова, к сожалению, не обсуждается связь детерминированного и стохастического подходов. Вообще говоря, решения для этих подходов могут отличаться. Нами получены достаточные условия для их совпадения[10].

Уравнения Беллмана-Айзекса являются основой для дальнейшего изучения задачи, в частности, для изучения различных свойств гладкости решений, связанных со свойствами полунепрерывности, непрерывности или липшицевости многозначных отображений, описывающих неопределенность движения цен на рынке, а также торговые ограничения.

В последние несколько лет возрос интерес к новому подходу моделирования неопределенности на рынке, называемому робастным (robust) или (менее удачно, на наш взгляд) свободным от модели (model independent). Поскольку гарантированный детерминистский подход по своему смыслу может считаться робастным, это свидетельствует об актуальности данной тематики. Это также явилось стимулом для принятия автором решения о публикации соответствующих результатов в рамках гарантированного детерминистского подхода в серии статей.

---

[9] По терминологии из главы 12 из [23] K является “strongly positively complete” для NDAO и “positively complete” для NDSA. Акронимы NDAO и NDSA образованы от “No Deterministic Arbitrage Opportunities” и “No Deterministic Sure Arbitrage” соответственно.

[10] Модель из [23], гл. 13 и 14, отвечает достаточно регулярному поведению (липшицевости) многозначных отображений, так что детерминистическая модель Колокольцова, как правило, приводит к совпадению результатов со стохастическим подходом (вопрос также зависит от «гладкости» функций выплат, что может приводить к несовпадению результатов двух подходов, например, для бинарных опционов).

Работы, относящиеся к робастному подходу, могут быть условно разделены на два направления: квази-достоверный (quasi-sure) подход и потраекторный (pathwise) подход. Отметим, что обычно в этих работах в портфеле различают две категории финансовых инструментов: первая – торговая, состоящая из инструментов, торгуемых динамически (базовые активы), и вторая – статическая, основанная на стратегии покупки с последующим удержанием (buy and hold strategies), как правило, использующая европейские опционы на покупку и продажу с фиксированным временем до исполнения. Идея изучения такого сорта портфелей принадлежит Хобсону [36]. Связь потраекторного подхода с квази-достоверным изучается в работе [43].

Квази-достоверный подход вводит класс вероятностных мер, описывающих возможный сценарий поведения рынка. С математической точки зрения, в отличие от традиционного вероятностного подхода, этот класс может содержать взаимно сингулярные меры, что создает серьезные осложнения в математическом плане. Для модели с дискретным временем эта идея была введена в работе [25]. Выбор класса вероятностных мер порождает широкий диапазон спецификаций динамики рынка; такой подход был использован для описания неопределенности рынка в ряде работ, например, в [20, 19].

Потраекторный подход к описанию неопределенности в моделировании рынка задется посредством конкретных рыночных сценариев, без использования вероятностных мер. Общая теория потраекторного подхода для модели с дискретным временем была построена в [26] на основе более ранних разработок в [28, 27]. Работа Колокольцова [23] и наше исследование формально могут быть отнесены к потраекторному направлению, однако отличаются постановкой, использующей «локальные по времени» ограничения на возможные траектории, что приводит к более простой экономической интерпретации и удобному использованию на практике. При этом статическая часть портфеля финансовых инструментов в моделях не рассматриваются.

В работе [18] продолжены исследования [25] и [28]; для дискретного времени получены общие результаты, касающиеся дуальности для ценообразования для американских опционов; удалось добиться выполнения принципа динамического программирования путем фиктивного расширения рынка, где все финансовые инструменты торгуются динамически.

Отметим что техника многих работ, в том числе [18] подразумевает использование аналитических множеств и их свойств, в духе книги [24], а также абстрактных теорем об измеримых селекторах, что носит ярко выраженный неконструктивный характер. В этом плане наш подход с одной стороны, позволяет получать ряд содержательных результатов без требования измеримости; к таким результатам относятся уравнения Беллмана-Айзекса, а также результаты, которые мы отразим в последующих публикациях - об игровом равновесии, о свойстве дуальности относительно класса вероятностных мер, сосредоточенных в конечном множестве точек. С другой стороны, в целом наш подход позволяет упростить математическую сторону дела, по крайней мере, по формулировкам результатов, и потому представляется более понятным для экономистов-прикладников.

Кроме того, мы считаем важным для приложений включить в модель экономически оправданные предположения о характере рынка. По нашему мнению, например, модель нереалистична, если многозначное отображение с замкнутыми значениями, описывающее неопределенность движения (изменения цен) в зависимости от предыстории цен таково, что не найдется вероятностных (в частности и детерминированных) непрерывно зависящих от предыстории сценариев движения, не выводящего за пределы заданного компакта. Другими словами, вряд ли можно построить пример реалистичной модели цен, описываемой стохастическим процессом, когда (регулярные) условные распределения цен при известной предыстории цен не имеют феллеровского варианта (эти условные распределения определены с точностью до почти наверное относительно распределения предыстории цен, однако если феллеровский вариант существует, то он определен однозначно). С экономической точки зрения: какие объективные причины на финансовом рынке могли бы объяснить ситуацию, когда малые изменения в предыстории цен способны существенно изменить характер поведения текущих (или будущих) цен? При этом, разумеется, технический анализ к научным объяснениям относить не стоит[11]. Кстати, для случая непрерывного времени классическая модель

[11] Однако, честный экономист может все же теоретически признать (но не обосновать) такую возможность, в очень краткосрочной перспективе, учитывая

Башелье-Самуэльсона, а в более общем случае стохастической динамики цен, описываемой невырожденным многомерным диффузионным процессом, случайный процесс является марковским с сильно феллеровскими переходными вероятностями, по теореме Гирсанова-Молчанова [9]. Нами получены (при достаточно общих предположениях о топологических пространствах) результаты о необходимых и о достаточных условиях существования феллеровских переходных ядер [12]; для случая, когда фазовое пространство является конечномерным евклидовым, соответствующим критерием будет полунепрерывность снизу указанного выше многозначного отображения (ставящего в соответствие начальному состоянию топологические носители вероятностных мер переходного ядра).

Другое наше наблюдение состоит в том, что поскольку описание неопределенности на рынке не может быть точным на практике[12], то фундаментальные свойства, такие как «безарбитажность» рынка (в том или ином смысле), не должны меняться при малых возмущениях модели рынка. В этой связи мы ввели новое понятие грубости (структурной устойчивости) «безарбитажности» рынка и установили для этого свойства критерии геометрического характера. Оказывается, что именно условия такого типа играют важную роль для установления свойств гладкости решений уравнений Беллмана-Айзекса, например, в присутствии торговых ограничений, это грубое условие отсутствия гарантированного арбитража с неограниченной прибылью (RNDSAUP)[13], что будет подробно изложено в одной из последующих публикаций.

В первой из публикаций вышеупомянутых статей описывается модель рынка с «неопределенными» ценами (вместо «случайных») и возможными торговыми ограничениями. Изложение построено с акцентом на обсуждение экономических посылок, явно или неявно использующихся в постановке задачи.

возросшую в последние годы роль алгоритмической (высокочастотной) торговли, способной, как показывает практика, при некоторой (пока не вполне ясной) ситуации на рынке спровоцировать резкий обвал цен (flash crash).

[12] В частности, в рамках робастного подхода для случая непрерывного времени, рядом авторов изучались модели с неопределенной волатильностью (volatility uncertainty), см. например [33], [47], [41].

[13] Акроним от “Robust No Deterministic Sure Arbitrage with Unbounded Profit”.

Следуя стандартному приему, мы переходим к дисконтированным ценам, что для самофинансируемых стратегий позволяет понизить размерность задачи на единицу и рассматривать только дисконтированные цены рисковых активов.

В терминах дисконтированных цен непосредственно, исходя из экономического смысла задачи, выписываются уравнения Беллмана - Айзекса для минимального[14] капитала на данный момент, гарантирующего покрытие обусловленного обязательства (в терминах наилучшей хеджирующей стратегии, ориентированной на наихудший сценарий изменения цен).

Автор благодарен за обсуждения А.Б. Куржанскому, Пьеру Бернару, В.М. Полтеровичу, В.Н. Колокольцову, В.М. Хаметову, В.И. Аркину, Э.Л. Пресману, А.А. Шананину, Н.С. Кукушкину, В.И. Тариеладзе, В.В. Мазалову, М.З. Курбангалееву, В.А. Лапшину, Н.А. Андрееву, И.В. Полиматиди, А.В. Захарову, Али Муссе, А.В. Чигодаеву.

2. Описание детерминистской модели рынка: динамика цен и торговые ограничения

Основное внимание в этом разделе мы уделим предположениям, экономический смысл которых зачастую игнорируется в работах по финансовой математике.

Рассматривается модель с дискретным временем и конечным временным горизонтом[15], то есть время t пробегает множество возможных значений $\{0, 1, \dots, N\}$. Предполагается, что операции проводятся на рынке из $n+1$ активов (или, в более общем случае, финансовых инструментов), где $n \geq 1$. Рыночную цену[16] единицы i-го актива в

---

[14] В действительности речь идет о граничном значении, определяемом как некоторая точная нижняя грань; при определенных условиях “гладкости” решений она может достигаться (и тогда корректно говорить о минимуме).

[15] В отличие от моделей классической механики, где непрерывное время является естественным, а дискретное время появляется при численном решении, в финансовых моделях, по нашему мнению, естественным время будет дискретное, а непрерывное время появляется при аппроксимации.

[16] Само понятие рыночной цены неоднозначно – это может быть (для разных целей) цена закрытия, текущая цена или же цена, определенная регулятором рынка как «рыночная», см. например, информацию о ценовых показателях на сайте Московской Биржи.

момент времени t обозначим X_t^i , $i = 0, 1, \dots, n$; при этом, эти цены будем интерпретировать как «неопределенные» величины[17] – значение X_t^i становится известным только к моменту времени t.

В модели будет предполагаться, что:

наблюдаемая информация[18] к моменту времени t представляет из себя цены $n + 1$ активов в моменты времени $0, \dots, t$. (AI)

Хотя такое предположение характерно для конкретных моделей в финансовой математике, обычно не отмечается, что это предположение неявно вписывается в концепцию «слабой» информационной эффективности рынка по Фама[19]. В действительности, для хеджирования может быть полезна иная (дополнительная) информация, например, новостная, если она позволяет предсказывать характер изменения цен или их волатильности (это соответствует «средней»[20] информационной эффективности рынка).

Примем предположение[21]:

актив с нулевым индексом[22] предполагается безрисковым (на один шаг), то есть его цена становится известной на шаг ранее. (RA)

Другими словами, наблюдаемая информация (о ценах активов) в моменты $0, 1, \dots, t - 1$ достаточна для определения X_t^0 для $t \geq 1$.

---

[17] Предполагается, что некоторая (неполная) информация о поведении цен имеется; это будет формализовано в Предположении (UD) далее. При этом неопределенные величины можно будет считать случайным, когда будут введены смешанные стратегии.

[18] Это означает не только доступность этой информации, но и то, что именно эта информация будет использоваться при описании ограничений на приращения цен, торговых ограничений и стратегий хеджирования.

[19] См., например, обзор в [2].

[20] «Средняя» информационная эффективность на английском языке “semi-strong efficiency”, а «слабая» – “weak efficiency”.

[21] Предположение о наличии безрискового актива является стандартным в финансовой теории, хотя на практике, в особенности после глобального финансового кризиса, признается его отсутствие. Теория может быть построена и без предположения (RA), но ценой технического усложнения, в частности, в связи с необходимостью рассмотрения арбитража первого и второго рода.

[22] При отсутствии торговых ограничений наличие хотя бы двух безрисковых

Договоримся использовать в обозначениях конвенцию, аналогичную используемой в теории вероятностей: будем обозначать неопределенные величины (например X_t^i) заглавными буквами, а их значения – строчными.

Обозначим $\hat{X}_t = (X_t^0, X_t^1, \ldots, X_t^n)$ – вектор цен в момент времени t. Будем считать, что

цены принимают неотрицательные значения, т.е. $X_t^i \geq 0$, $i = 0, \ldots, n,\ t = 0, \ldots, N.$ (NNP)

Это очевидное требование, поскольку отрицательные цены лишены экономического смысла[23]. Однако, при построении “неопределенной” динамики цен разумно потребовать от модели выполнения более сильного свойства:

цены принимают положительные значения, т.е. $X_t^i > 0$, $i = 0, \ldots, n,\ t = 0, \ldots, N.$ (PP)

Обычным предположение в финансовой математике, безо всяких комментариев, является (неявное) предположение о том, что

цены могут принимать (произвольные) вещественные значения, удовлетворяющие условию (NNP), или же более сильному требованию (PP). (PC)

На первый взгляд, Предположение (PC) может показаться совершенно невинным, но на практике, а также в исследованиях по микроструктуре финансового рынка, дискретность цен и размер тика может играть существенную роль. Например, в 2005 году было введено Правило 612 SEC[24] (также называемое “Sub-Penny Rule”), которое, в частности, гласит, что минимально изменение цен акций стоимостью более 1,00 долл. США должно составлять 0,01 долл. США, а

активов, ведущих себя по разному, привело бы к арбитражным возможностям — это стандартное экономическое рассуждение для обоснования существования единственного безрискового актива в модели рынка.

[23] Нулевые цены могут приводить к арбитражным возможностям, если в последствии могут принимать положительные значения.

[24] Комиссия по ценным бумагам и биржам (США) (англ. The United States Securities and Exchange Commission) — агентство правительства США, осуществляющее функции надзора и регулирования американского рынка ценных бумаг.

для акций стоимостью менее 1,00 долл. США — 0,0001 долл. США. Отметим, однако, что правило касается только котировок, а не торговли.

Европейцы пошли дальше, чем американцы, и в 2016 году законодательно установили режимы для размера тика в зависимости от активности рынка, действующие с начала 2018 года[25]. С 1 ноября 2018 года Московская биржа использует аналогичную практику.

Структура портфеля в момент времени $t = 0, 1, \ldots, N$ будет задаваться вектором $\hat{H}_t = (H_t^0, H_t^1, \ldots, H_t^n)$, где H_t^i – количество единиц i-го актива в портфеле в момент времени t, причем H_t становится известным на шаг ранее[26], т.е. в момент $t-1$. Другими словами, если известна предыстория цен $\hat{X}_0 = \hat{x}_0, \ldots, \hat{X}_{t-1} = \hat{x}_{t-1}$, то $\hat{H}_t$ является функцией от $\hat{x}_0, \ldots, \hat{x}_{t-1}$. Разумеется, $\hat{H}_t$ может в реальности принимать целые значения, однако можно считать, что торговые операции ориентированы на «лоты» (не менее определенного количества актива), поэтому единица актива является дробной величиной лота; везде далее мы принимаем упрощающее предположение о «бесконечной дробимости» активов, неявно предполагая, что позиции $\hat{H}_t$ достаточно большие:

$$H_t^i \in \mathbb{R};\ i = 0, \ldots, n;\ t = 0, \ldots, N. \tag{AD}$$

Торговые ограничения будем задавать при помощи выпуклых множеств $\hat{D}_t \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, которые, так же как и $\hat{H}_t$, становятся известными на шаг ранее, т.е. если для $t \geq 1$ известно $\hat{X}_0 = \hat{x}_0, \ldots, \hat{X}_{t-1} = \hat{x}_{t-1}$,

---

[25] Свежую информацию можно получить из документа Final Report – Amendment to Commission Delegated Regulation (EU) 2017/588 (RTS 11), 12 December 2018, ESMA 70-156-834.

[26] Используя вероятностную терминологию, можно сказать, что процесс $\hat{H}$ (также как и цена безрискового актива X_0) является предсказуемым относительно фильтрации, порожденной процессом цен активов. Вероятностный способ описания зависимостей через измеримость относительно σ-алгебр, порожденных случайными элементами, математически более элегантен, однако мы последовательно придерживаемся детерминистского способа описания, через функциональную зависимость. Во всяком случае, логического противоречия здесь нет: случайная величина η измерима относительно σ-алгебры $\mathcal{F}_\xi$, порожденной случайным элементом ξ со значениями в измеримом пространстве $(E, \mathcal{E})$, если и только если она представима в виде измеримой функции φ от ξ, т.е. $\eta = \varphi \circ \xi$, см. например, [17, Гл. II, § 4, Теорема 3].

то $\hat{D}_t = \hat{D}_t(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_{t-1}) = \hat{D}_t(\cdot)$. Здесь и везде далее будем обозначать точкой текущую переменную – известную предысторию цен. Таким образом, допустимой структурой портфеля в момент t считается $\hat{H}_t \in \hat{D}_t(\hat{X}_1, \ldots, \hat{X}_{t-1})$.

Сделаем важное предположение о характере торговых ограничений: всегда допустимо вкладывать все средства в безрисковый актив, т.е.

$$\{\hat{h}_t \in \hat{D}_t(\cdot) : h_t^1 = h_t^2 = \ldots = h_t^n = 0\} \neq \emptyset. \tag{2.1}$$

Весьма существенное упрощение модели дает следующее (часто используемое в финансовых моделях) предположение.

Транзакционные издержки (прямые или косвенные) отсутствуют. (TC)

В частности, с Предположением (TC) связано (обычно принимаемое по умолчанию) соглашение, что стоимость портфеля в момент времени t задается величиной, которую можно назвать “бухгалтерской стоимостью”[27]:

$$V_t = \hat{H}_t \hat{X}_t, \quad t = 0, \ldots, N. \tag{L}$$

Здесь и далее мы используем обозначение для скалярного произведения вида hx. Однако, иногда бывает удобней использовать обозначения вида $\langle h, x\rangle$ вместо hx. В формуле (L) имеем $\hat{H}_t \in \mathbb{R}^{n+1}$ и $\hat{X}_t \in \mathbb{R}^{n+1}$, а $\hat{H}_t\hat{X}_t = \langle \hat{H}_t, \hat{X}_t\rangle = \sum_{i=1}^{n+1} H_t^i X_t^i$.

Несмотря на кажущуюся самоочевидность, формула (L) отражает свойство аддитивности стоимости портфеля (если портфель разделить на два подпортфеля, его стоимость равна сумме стоимостей подпортфелей). С экономической точки зрения, однако, стоимость торгового портфеля есть его ликвидационная стоимость. Поэтому с учетом (ограниченной) ликвидности рынка аддитивность, вообще говоря, нарушается, поскольку игнорируются косвенные издержки. Тем самым, (L) является неявным предположением о высокой ликвидности рынка.

Стандартным (и вполне оправданным с экономической точки зрения, если речь идет о хеджировании обусловленного обязательства

[27] Англ. “book value”.

по внебиржевому опциону) является предположение о самофинансируемости портфеля: если при перестройке портфеля в момент $t-1$ новая структура портфеля $\hat{H}_t$ создается без притока или оттока капитала, с использованием средств в размере стоимости портфеля V_{t-1} и по ценам, сложившимся в момент времени $t-1$, т.е. $\hat{X}_{t-1}$; учитывая (TC), это бюджетное ограничение имеет вид[28] :

$$\hat{H}_t\hat{X}_{t-1} = \hat{H}_{t-1}\hat{X}_{t-1}, \quad t = 1, \ldots, N. \tag{2.2}$$

Напомним, что при перестройке портфеля $\hat{H}_t$ выбирается с использованием информации, доступной в момент $t-1$, причем $\hat{H}_t \in \hat{D}_t(\cdot)$.

С учетом (L), очевидно, (2.2) равносильно

$$\Delta V_t = \hat{H}_t \ \Delta\hat{X}_t, \quad t = 1, \ldots, N. \tag{2.3}$$

Здесь и далее Δ означает разность назад, то есть $\Delta V_t = V_t - V_{t-1}$.

Далее, следуя стандартной процедуре, можно перейти к дисконтированным ценам, понизив размерность задачи на единицу. Это означает, что безрисковый актив выбирается в качестве “numéraire”, то есть дисконтированная стоимость портфеля выражается в «единицах» безрискового актива[29]:

$$\tilde{V}_t = \frac{1}{X_t^0}V_t = \hat{H}_t\left(\frac{1}{X_t^0}\hat{X}_t\right) = \hat{H}_t\tilde{X}_t, \quad t = 0, \ldots, N,$$

где $\tilde{X}_t = (\tilde{X}_t^0, \tilde{X}_t^1, \ldots, \tilde{X}_t^n)^T$ и $\tilde{X}_t^i = \frac{1}{X_t^0}X_t^i$, при этом вид условий (L), (2.2) и (2.3) в дисконтированных ценах $\tilde{X}_t$, очевидно, сохраняется, т.е.

$$\tilde{V}_t = \hat{H}_t\tilde{X}_t, \quad t = 0, \ldots, N. \tag{L$'$}$$

$$\hat{H}_t\tilde{X}_{t-1} = \hat{H}_{t-1}\tilde{X}_{t-1}, \quad t = 1, \ldots, N. \tag{2.2$'$}$$

$$\Delta\tilde{V}_t = \hat{H}_t \ \Delta\tilde{X}_t, \quad t = 1, \ldots, N. \tag{2.3$'$}$$

---

[28] Таким образом, (2.2), также как и (L), опирается на Предположение (TC) об отсутствии прямых или косвенных транзакционных издержек.

[29] Если все цены X_t^i выражены в единой валюте (что мы и будем предполагать), то дисконтированные цены являются безразмерными величинами.

Дисконтированный безрисковый актив при этом имеет цену, тождественно равную единице, и $\Delta\tilde{X}_t^0 = 0$ для $t = 1, \dots, N$. Поэтому достаточно рассмотреть n «рисковых» активов, при этом $H_{t+1}^1, \dots, H_{t+1}^n$ выбираются на шаге t (на шаг вперед) произвольно, а вложение в безрисковый актив H_{t+1}^0 определяется из условия самофинансируемости:

$$H_{t+1}^0 = \tilde{V}_t - \sum_{i=1}^{n} H_{t+1}^i \tilde{X}_t^{\,i}, \quad t = 0, \dots, N-1; \tag{2.4}$$

при этом $\hat{H}_{t+1} = (H_{t+1}^0, \dots, H_{t+1}^n) \in \hat{D}_{t+1}(\cdot)$.

Можно, не ограничивая общности, сразу считать, что

$$X_t^0 \equiv 1,\ t = 0, \dots, N, \tag{RN}$$

что мы и будем делать далее. Это позволит везде далее опускать знак «тильда» вверху (переход к дисконтированным ценам); концентрируя теперь внимание на рисковых активах (в количестве n), будем использовать обозначения[30]

$$\begin{aligned} X_t &= (X_t^1, \dots, X_t^n), \\ H_t &= (H_t^1, \dots, H_t^n). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Конвенция (RN) и обозначения (2.5) позволяют переписать условие самофинансируемости (2.4) в виде:

$$H_t^0 = V_{t-1} - H_t X_{t-1},\ t = 1, \dots, N. \tag{SF}$$

Кроме того, конвенция (RN) и обозначения (2.5) позволяют переписать формулу (2.3′) в виде:

$$\Delta V_t = H_t \Delta X_t. \tag{2.6}$$

Если известна траектория цен $X_0 = x_0, \dots, X_t = x_t$, то, используя обозначения[31]

$$V_t = v_t(x_0, \dots, x_t), \tag{2.7}$$

[30] Обозначения $\hat{X}_t$, $\hat{H}_t$ и $\hat{D}_t$ использовались для $n+1$ активов, включая безрисковый.

[31] Выбранные обозначения для неопределенных величин допускают некоторую аналогию с условным математическим ожиданием случайных величин; для случайной величины Y найдется измеримая функция φ, такая что $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_X} Y = \mathbb{E}(Y|X) = \varphi(X)$ п.н., и $\mathbb{E}(Y|X = x) = \varphi(x)$ (последнее равенство также определено с точностью до почти всюду, относительно меры P_X — распределения X).

ограничения на рисковые активы, с учетом $X_t^0 \equiv 1$, имеют следующий вид:

$$D_t(\cdot) = \{h = (h^1, \ldots, h^n) \in \mathbb{R}^n : (v_{t-1}(\cdot) - \sum_{i=1}^{n} h^i x_{t-1}^i, h^1, \ldots, h^n) \in \hat{D}_t(\cdot)\}, \tag{2.8}$$

где $t = 1, \ldots, N$.

Отметим, что $D_t(\cdot)$ будет выпуклым, если таковым было $\hat{D}_t(\cdot)$. При этом в выражение (2.4) для D_t, торговых ограничений в момент t, вообще говоря, входит стоимость портфеля $V_{t-1} = v_{t-1}$ в предыдущий момент времени $t-1$. Мы сделаем упрощающее предположение[32] о том, что любые позиции по безрисковому активу (как длинные, так и короткие) допустимы и не оказывают влияния на ограничения по рисковым активам. Это означает, что торговые ограничения $\hat{D}_t$ представимы в виде

$$\hat{D}_t = \mathbb{R} \times D_t, \quad D_t = D_t(x_0, \ldots, x_{t-1}). \tag{T}$$

Условие (2.1) допустимости вложения средств полностью в безрисковый актив можно теперь записать в виде

$$0 \in D_t(\cdot),\ t = 0, \ldots, N. \tag{R}$$

Условие выпуклости торговых ограничений имеет определенный экономический смысл, связанный с возможностями диверсификации. Пусть H_t' и H_t'' – допустимые в момент времени t структуры портфеля вложений в рисковые активы, т.е. $H_t'., H_t'' \in D_t(\cdot)$. Интерпретируя это как два фонда, с данными структурами портфелей, выпуклость множества $D_t(\cdot)$ означает, что допустимо сформировать портфель, доля q_t' которого вложена в фонд со структурой H_t', а доля q_t'' вложена в фонд со структурой H_t''; $q_t' + q_t'' = 1$, $q_t' \geq 0$, $q_t'' \geq 0$ (тем самым , портфель со структурой $q_t'H_t' + q_t''H_t''$ является допустимым, т.е. входит в $D_t(\cdot)$).

$$\text{Множество } D_t(\cdot) \text{ – выпукло},\ t = 0, \ldots, N. \tag{D}$$

Основное предположение о динамике цен X_t, которое мы делаем в этой работе, состоит в том, что мы задаем априорно известные

[32] Постановка задачи без этого упрощающего предположения возможна и обсуждается в разделе 3 данной статьи.

зависящие от предыстории цен ограничения на возможные значения приращений цен.

К моменту времени $t-1$ (где $t = 1, \ldots, N$) с использованием доступной к этому моменту предыстории цен $X_0 = x_0, \ldots, X_{t-1} = x_{t-1}$ известно, что приращения вектора цен ΔX_t лежат в априорно заданном непустом множестве $K_t(x_0, \ldots, x_{t-1}) \subseteq \mathbb{R}^n$.

(UD)

При этом будем по умолчанию считать, что многозначные отображения $\overline{x}_{t-1} \mapsto D_t(\overline{x}_{t-1})$ и $\overline{x}_{t-1} \mapsto K_t(\overline{x}_{t-1})$, где $\overline{x}_{t-1} = (x_0, \ldots, x_{t-1})$, заданы для любых траекторий цен из предыстории, т.е. для любого $\overline{x}_{t-1} = (x_0, \ldots, x_{t-1}) \in \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n)^t$ (здесь декартово произведение берется t раз). Будем считать, что $X_0 \in K_0$, где K_0 – некоторое множество. В ряде случаев, однако, можно (и удобно) считать, что $X_0 = x_0$ задано, - это равносильно предположению, что K_0 содержит единственную точку. В действительности, часть траекторий будет нереализуемой, если фиксировать начальную цену X_0 или K_0. В зависимости от решаемой задачи, бывает полезным рассматривать только «возможные траектории», см. раздел 3 данной статьи.

Важнейшим предположением, позволяющим построить содержательную теорию для описания неопределенности на рынке в виде Предположения (UD), является следующее требование.

Множества K_0, $K_1(x_0)$, …, $K_N(x_0, \ldots, x_{N-1})$ являются компактными. (C)

Предположение (UD) в совокупности с Предположением (C) отвечает «детерминистской» постановке задачи, в отличие от «вероятностной» постановки, где задается референтная вероятностная мера.

При этом «вероятностным» аналогом рассматриваемой «детерминистской» задачи является динамика цен с такой референтной мерой, для которой $K_t(\cdot)$ является носителем[33] условного распределения[34]

[33]Здесь и далее под термином «носитель» имеется в виду топологический носитель – наименьшее замкнутое множество полной меры; совпадает с множеством точек роста распределения, то есть таких точек, каждая окрестность которой имеет положительную вероятность.

[34]Речь идет о регулярных условных распределениях, которые определены с точностью до почти наверное относительно референтной вероятностной меры.

приращений (дисконтированных) цен ΔX_t при заданной предыстории $X_0 = x_0, \ldots, X_{t-1} = x_{t-1}$ к моменту $t-1$.

Предположение (C) о компактности является существенным для того, чтобы задача суперрепликации носила содержательный характер, поскольку в случае неограниченных носителей условных распределений приращений цен при заданной предыстории следует, как правило, ожидать вырожденных результатов хеджирования, типа описанных в работе [29]. Собственно по этой причине авторы работы [30] предполагают ограниченность приращений в задаче суперрепликации (в «вероятностной» постановке и одномерном случае, т.е. с одним рисковым активом).

Особо отметим, что «вероятностный» подход с референтной мерой, заданной на конечном пространстве элементарных событий совпадает с «детерминистским» (множество нулевой вероятности будет пустым). В нашей постановке этот случай возникает, в частности, когда вектор начальных цен, x_0 фиксирован, а все множества $K_t(x_0, \ldots, x_{t-1}) = K_t(\cdot)$ имеют конечное число элементов; кстати, модель Кокса–Росса–Рубинштейна как раз вписывается в эту схему и возникает в ряде естественных моделей при «детерминистском» подходе.

Предположение (UD) можно переписать в виде аддитивного представления процесса цен X_t для заданного процесса неопределенных величин Y_t, $t = 1, \ldots, N$

$$X_t = X_{t-1} + Y_t,\ Y_t \in K_t(\cdot),\ t = 1, \ldots, N. \tag{2.9}$$

Аддитивное представление (2.9) удобно в особенности для анализа условий безарбитражности, представленных в разделе 2 данной статьи. Для ряда прикладных моделей удобно также использовать мультипликативное представление:

$$X_t^i = M_t^i X_{t-1}^i,\ M_t = (M_t^1, \ldots, M_t^n) \in C_t(\cdot), \tag{2.10}$$

где $C_t(\cdot)$ – компактное подмножество $\mathbb{R}^n$; неопределенные величины M_t^i назовем мультипликативными факторами. Для $M_t = (M_1, \ldots, M_n)$ $\in \mathbb{R}^n$ обозначим через $\Lambda(M)$ диагональную матрицу вида

$$\Lambda(M)_{ij} = \begin{cases} M_i, & \text{если } i = j; \\ 0, & \text{если } i \neq j, \end{cases}$$

тогда (2.10) можно записать в матричном виде:

$$X_t = \Lambda(M_t)X_{t-1}. \qquad (2.10')$$

Очевидно, аддитивное представление связано с мультипликативным соотношениями

$$Y_t = [\Lambda(M_t) - I]X_{t-1},$$

где I – единичная матрица;

$$K_t(x_0, \ldots, x_{t-1}) = \{y \in \mathbb{R}^n : \ y = [\Lambda(m) - I]x_{t-1}, \ m \in C_t(x_0, \ldots, x_{t-1})\}.$$

Пользуясь некоторой аналогией между неопределенными и случайными величинами, будем говорить, что динамика цен (торговые ограничения) относятся к марковскому типу, если $K_t(\cdot)$ (соответственно $D_t(\cdot)$) зависят только от значения цен в предыдущий момент времени, т.е. $K_t(\cdot)$ (соответственно $D_t(\cdot)$) представимы в виде $K_t(x_0, \ldots, x_{t-1}) = \check{K}_t(x_{t-1})$ (соответственно $D_t(x_0, \ldots, x_{t-1}) = \check{D}_t(x_{t-1})$). Скажем, что динамика цен относится к мультипликативно-независимому типу, если в мультипликативном представлении (2.10) отображение $C_t(\cdot)$ не зависит от предыстории цен, т.е. $C_t(\cdot)$ представимо в виде $C_t(x_0, \ldots, x_{t-1}) = \check{C}_t$; очевидно, в этом случае динамика цен относится к марковскому типу. Аналогично, торговые ограничения отнесем к независимому типу, если $D_t(x_0, \ldots, x_{t-1})$ не зависит от предыстории $\bar{x}_{t-1} = (x_0, \ldots, x_{t-1})$. Динамику цен (торговые ограничения), относящиеся к марковскому типу, будем называть однородными по времени, если $\check{K}_t(\cdot)$ (соответственно $\check{D}_t(\cdot)$) не зависит от времени t. Отметим, что модели рынка, рассматриваемые в главах 13 и 14 из книги [23], относятся к мультипликативно-независимому и однородному по времени типу. При этом множество $\check{C}$ выбирается в виде параллелепипеда.[35]

В заключении параграфа отметим, что зависимость торговых ограничений от времени и предыстории цен может возникать вследствие требований регулятора, ограничивающего леверидж, или требований риск-менеджмента, ограничивающих рыночный риск портфеля. Приведем несколько вариантов торговых ограничений.

---

[35] До определенной степени, выбор параллелепипеда в качестве $\check{C}$ можно было бы охарактеризовать как координатную независимость мультипликативных факторов, во всяком случае, когда речь идет о выполнении условий «безарбитражности» покоординатно.

Пример 2.1.

1) Классический случай «отсутствия торговых ограничений»:

$$\hat{D}_t \equiv \mathbb{R}^{n+1}.$$

2) Случай, когда торговые ограничения не зависят от времени и предыстории:

$$\hat{D}_t \equiv \mathbb{R} \times D, \quad D \subseteq \mathbb{R}^n,$$

где D – постоянные торговые ограничения на рисковые активы.

3) Частный случай примера 2) – запрет коротких позиций по рисковым активам: это соответствует множеству

$$D = [0, \infty)^n.$$

4) Предположим, что риск-менеджмент компании устанавливает лимиты на портфель хеджирующего подразделения, рассчитывая Value-at-Risk (VaR), исходя из предположений модели Башелье, т.е. в предположении независимости и однородности приращений цен (процесс Леви) и существования модификации процесса, имеющей непрерывные траектории цен (последнее влечет гауссовость приращений для процесса Леви)[36]. В этом случае VaR портфеля с заданным уровнем значимости и горизонтом в один шаг (это может быть, например, один день) будет пропорционален среднеквадратичному отклонению стоимости портфеля. Предположим, что оценка B_t ковариационной матрицы для приращений ΔX_t рекуррентно рассчитывается с использованием экспоненциально взвешенных скользящих средних (что является распространенной практикой), причем начальные значения для эмпирического среднего M_0 и эмпирической ковариационной матрицы B_0 заданы (например, определены по предшествующим рассматриваемому периоду историческим данным), т.е. имеют место соотношения[37]:

$$M_t = \varkappa \Delta X_{t-1} + (1 - \varkappa) M_{t-1}, \tag{2.11}$$

$$B_t = \varkappa (\Delta X_{t-1} - M_t)(\Delta X_{t-1} - M_t)^T + (1 - \varkappa) B_{t-1}, \tag{2.12}$$

---

[36] Тем самым процесс, описывающий динамику цен, является многомерным броуновским движением.

[37] В формулах(2.11) и (2.12) мы интерпретируем ΔX_t и M_t в матричной форме, как векторы-столбцы; знак T используется как символ транспонирования матрицы.

где $\varkappa \in (0,1)$ – параметр экспоненциального взвешивания.

В этом случае $B_t = B_t(x_1, \dots, x_{t-1}) = B_t(\cdot)$; торговое ограничение D_t имеет вид:

$$\gamma\sqrt{H_t B_t(\cdot) H_t^T} \leq L, \tag{2.13}$$

где L – устанавливаемый риск–менеджментом лимит, γ – квантиль стандартного нормального распределения, соответствующая заданному уровню значимости VaR. Таким образом, в этом случае множества $D_t(\cdot)$ представляют из себя компактные множества – эллипсоиды, зависящие от предыстории цен в силу определения параметров B_t посредством соотношений (2.11) и (2.12).

5) В заключение, приведем пример, не укладывающийся[38] в предположении (T).

В случае маржинальной торговли устанавливается критический уровень маржи[39] $\mu \in (0,1)$, который надлежит поддерживать, чтобы брокер не потребовал внесения дополнительного обеспечения:[40] стоимость портфеля должна быть более, чем $100\mu\%$ стоимости его длинных позиций.[41] Тем самым при перестройке портфеля в момент $t-1$ необходимо удовлетворить требованию

$$V_{t-1} \geq \mu \sum_{i:H_t^i>0} H_t^i X_{t-1}^i, \tag{2.14}$$

□

3. Гарантированная оценка американского опциона - постановка задачи

Рассмотрим опцион американского типа[42] с потенциальными выплатами G_t в момент времени t, где $t = 1, \dots, N$; по смыслу задачи

$$G_t \geq 0,\ t = 1, \dots, N. \tag{A}$$

---

[38] Постановка задачи для этого примера обсуждается в разделе 3 данной статьи.

[39] Анг. maintenance margin.

[40] Анг. margin call.

[41] На практике не исключено, что маржинальная торговля возможна только по части позиций.

[42] В действительности, как мы увидим далее, эта постановка при определенных условиях «безарбитражности» покрывает случаи выплат в отдельные моменты времени, включая опционы европейского и бермудского типов.

Для американского опциона момент выплаты (исполнения контракта) определяется контрагентом – покупателем опциона. Здесь $G_t = g_t(X_0, \dots, X_t)$, то есть значение G_t определяется по наблюдаемой вплоть до момента t траектории цен рисковых активов. Неотрицательные функции g_t будем называть функциями выплат. Везде далее будем предполагать, что X_t – дисконтированные цены активов (цены X_t – безразмерные, измеряются в количестве безрискового актива или, что равносильно, цена безрискового актива постоянна и равна единице – безразмерной величине).

Если потенциальные выплаты G_t зависят не только от цен рисковых активов, но и от постоянных[43], однако размерных величин, измеримых в денежных единицах (в той же валюте, что G_t и X_t), причем G_t являются однородной функцией от размерных величин с размерностью денежных единиц (как переменных, т.е. цен базовых активов, так и постоянных), то при дисконтировании G_t происходит также дисконтирование указанных размерных величин.

Обозначим V_t – стоимость в момент t портфеля, который формирует продавец опциона, получивший в начальный момент премию V_0 и использующий стратегию $H = (H_1, \dots, H_N)$ с целью хеджирования обусловленного обязательства.

Поскольку контрагент может выбрать момент исполнения контракта произвольным образом, гарантированный хедж обусловленного обязательства по опциону, т.е. гарантированное покрытие потенциальных выплат, равносильно тому, что стоимость портфеля V_t удовлетворяет требованию:

$$V_t \geq G_t, \quad t = 1, \dots, N. \tag{SH}$$

Стратегии H, удовлетворяющие (SH), будем называть суперхеджирующими.

В начальный момент, т.е. при $t = 0$, обычно не предполагается производить какие-либо выплаты по обусловленному обязательству; для удобства можно формально положить $G_0 = -\infty$.

[43] Обычно такими величинами являются цены исполнения (strike prices); например для “plain vanilla” американских опционов “call” $G_t = (X_t - S_t)_+$, а для “put” $G_t = (S_t - X_t)_+$ – величины S_t являются постоянными, выраженными в денежных единицах.

Определение 3.1. *Назовем траекторию на временном интервале* $[0,t]$ *цен активов* $(x_0,\ldots,x_t)=\overline{x}_t$ *возможной, если* $x_0\in K_0$, $x_1\in K_1(x_0)$, $\ldots$, $x_t\in K_t(x_0,\ldots,x_{t-1})$; $t=0,1,\ldots,N$.

Обозначим B_t – множество возможных траекторий цен активов на временном интервале $[0,t]$. Сделаем предположение о равномерной ограниченности функций g_t.

Найдутся константы $C_t\geq 0$ такие, что для каждого $t=1,\ldots,N$ и всех возможных траекторий $\overline{x}_t=(x_0,\ldots,x_t)\in B_t$ выполнено $g_t(x_0,\ldots,x_t)\leq C_t$.

(B)

Далее везде будем выбирать константу C_t минимально возможной, т.е.

$$C_t=\sup_{x_t\in B_t}|g_t(\bar{x}_t)|.$$

Будем обозначать

$$C=\bigvee_{t=1}^{N}C_t.$$

При достаточно слабых требованиях к «гладкости» функций g_t, а также к «гладкости» зависимости $K_t(\cdot)$ от предыстории[44], предположение об ограниченности функций выплат (B) выполняется и поэтому не выглядит обременительно. Предположение (B) позволяет сделать вывод о том, что при достаточно большой премии множество стратегий H, удовлетворяющих условию мажорирования (SH), непусто: достаточно выбрать $V_0\geq C$ и $H_t\equiv 0$, для $t=1,\ldots,N$, то есть взять у контрагента достаточную премию, не меньшую чем C, вложить в безрисковый актив, что возможно благодаря предположению (R), и больше не перестраивать портфель. Естественно поставить вопрос о минимальных требованиях к премии, позволяющей покрывать обязательства в любой момент времени, то есть когда выполняется условие мажорирования (SH). Удобно, однако, рассматривать подобную величину, определенную не только в начальный, а в любой момент времени, а именно, определим для $t=0,1,\ldots,N$ «минимальные» требования к уровню средств на момент времени

[44] Достаточно полунепрерывности сверху функций $g_t(\cdot)$ и полунепрерывности сверху в смысле многозначных отображений $K_t(\cdot)$, что будет показано в отдельной публикации.

t, который гарантирует исполнение обязательства, которые обозначены V_t^*, которые более строго можно сформулировать следующим образом:

V_t^* – точная нижняя грань стоимости V_t портфеля в момент времен t, гарантирующего исполнение текущих и будущих обязательств, касающихся потенциальных выплат при исполнении опциона, для стратегий суперхеджирования. (VF)

Функцию цен V_t^* будем называть также гарантированной оценкой стоимости хеджирования, при этом V_0^* — величина (начальной) премии.

Принцип оптимальности в динамическом программировании был введен Беллманом в начале 1950-х годов и в оригинале (см. [21], стр. 83) сформулирован следующим образом.

“An optimal policy has the property that whatever the initial state and initial decision are, the remaining decisions must constitute an optimal policy with regard to the state resulting from the first decision”.[45] Для конкретных классов прикладных задач этот принцип допускает ту или иную формализацию. Применимость этого принципа чаще всего связана со свойствами целевой функции (также называемой функцией цены), представляющей собой функционал от траектории системы на заданном интервале времени, который подлежит глобальной оптимизации. В нашем случае применимость принципа оптимальности динамического программирования напрямую связана с экономической интерпретацией задачи, а также с формальным определением функции цены, где оптимизация носит локальный (по времени) характер. Простые рассуждения, основанные на обратной индукции, позволяют получить основные уравнения, которые мы будем везде далее называть уравнениями Беллмана-Айзекса. Это название связано с игровой интерпретацией гарантированного подхода, состоящего в выборе наилучшей стратегии (хеджирования обусловленного обязательства по опциону) при наихудшем сценарии (движения цен на рынке).

[45] Оптимальная стратегия обладает тем свойством, что независимо от начального состояния и начального решения последующие решения должны составлять оптимальную стратегию в отношении состояния, возникающего в результате первого решения.

Будем использовать следующие обозначения: $v_t^*(x_0, \dots, x_t)$ – значение V_t^* при известных ценах $X_0 = x_0, \dots, X_t = x_t$ (при этом $V_t^* = v_t^*(X_0, \dots, X_t)$); $g_t(x_1, \dots, x_t)$ – значение G_t при известных ценах $X_0 = x_0, \dots, X_t = x_t$ (т.е. $G_t = g_t(X_0, \dots, X_t)$).

Имеет место следующий результат.

Теорема 3.1. *Пусть для модели рынка с дискретным временем и конечным горизонтом выполняются:*

- *Предположение* (TC) *об отсутствии транзакционных издержек*[46]*;*
- *Предположение* (AI) *о наблюдаемой информации в виде предыстории цен;*
- *Предположение* (NNP) *о неотрицательности цен;*
- *Предположение* (RA) *о наличии одного безрискового актива;*
- *Предположение* (RN) *о выборе безрискового numéraire (дисконтирование цен);*
- *Предположение* (R) *о допустимости вложения всех средств в безрисковый актив;*
- *Предположение* (T) *о виде торговых ограничений (не затрагивающих безрисковый актив);*
- *Предположение* (SF) *о самофинансируемости;*
- *Предположение* (UD) *об априорной информации, описывающей неопределенность движения цен;*
- *Предположение* (A) *о неотрицательности функции выплат по опциону американского типа;*
- *Предположение* (SH) *о гарантированном покрытии обусловленных обязательств по опциону (т.е. о суперхеджировании);*

[46] Как следствие, формула (L) имеет место.

- *Предположение* (B) *об ограниченности функций выплат на множестве возможных траекторий.*

Тогда для функции цен, определенной (VF), *выполняются неравенства*

$$0 \le v_t^*(\bar{x}_t) \le C,\ t = 0, \ldots, N$$

и выполнены следующие рекуррентные соотношения[47]*:*

$$\begin{gathered} v_N^*(\bar{x}_N) = g_N(\bar{x}_N), \\ v_{t-1}^*(\bar{x}_{t-1}) = g_{t-1}(\bar{x}_{t-1}) \vee \inf_{h \in D_t(\bar{x}_{t-1})} \sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} \bigl[v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y) - hy\bigr], \\ t = N, \ldots, 1, \end{gathered} \tag{BA}$$

где $\bar{x}_{t-1} = (x_0, \ldots, x_{t-1})$ *описывает предысторию по отношению к настоящему моменту* t. *При этом можно формально считать* $g_0 = -\infty$ *(отсутствие обязательств по выплатам в начальный момент времени).*[48] *Многозначные отображения* $x \mapsto K_t(x)$ *и* $x \mapsto D_t(x)$*, а также функции* $x \mapsto g_t(x)$*, предполагаются заданными для всех* $x \in (\mathbb{R}^n)^t$, $t = 1, \ldots, N$*, так что функции* $x \mapsto v_t^*(x)$ *задаются уравнениями* (BA) *для всех* $x \in (\mathbb{R}^n)^t$.

Доказательство. Установим сначала неравенство

$$v_t^*(\cdot) \le C. \tag{3.1}$$

Для этого используем возможность вложения всех средств в безрисковый актив (R) (в предположении (T) о виде торговых ограничений). Достаточно выбрать $H_t \equiv 0$, $t = 1, \ldots, N$, тогда по формуле[49]

---

[47] Знак $\bigvee$ обозначает максимум, hy — скалярное произведение вектора h на вектор y.

[48] В уравнениях (BA) функции v_t^*, а также соответствующие точные верхние и нижние грани принимают значения в расширенном множестве вещественных чисел $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = [-\infty, +\infty]$ – двухточечной компактификации $\mathbb{R}$ (т.е. окрестность точек $-\infty$ и $+\infty$ имеют вид $[\infty, a)$, $a \in \mathbb{R}$ и $(b, +\infty]$, $b \in \mathbb{R}$ соответственно). Принимается также конвенция $a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty$ для $a \in (-\infty, +\infty]$ и $b + (-\infty) = (-\infty) + b = -\infty$ для $b \in [-\infty, +\infty)$.

[49] Опирающейся на Предположение (TC) об отсутствии транзакционных издержек.

(2.6) стоимость хеджирующего портфеля V_t со временем не изменяется, т.е. $V_t \equiv V_0$, $t = 1, \ldots, N$, а для начального капитала $V_0 = C$ стратегия $H_t \equiv 0$, $t = 1, \ldots, N$ оказывается суперхеджирующей: из условия ограниченности функций выплат (B) следует $G_t \leq C = V_t$, и по определению (VF) имеем $V_t^* \leq V_t \equiv C$, т.е. неравенство (3.1) имеет место.

С другой стороны, поскольку задача состоит в суперхеджировании американского опциона, то из (VF), с учетом (A) и (SH), получаем

$$v_t^*(\cdot) \geq 0, \ t = 0, \ldots, N. \tag{3.2}$$

Очевидно, для $t = N$

$$v_N^* = G_N.$$

Рассмотрим случай $t < N$ и в рассуждениях ниже будем будем опираться на принцип оптимальности Беллмана, сопоставляя ε-оптимальные стратегии суперхеджирования на интервалах[50] $[t, N]$ и $[t-1, N]$, где $t = 1, \ldots, N-1$. Пусть известна история цен $X_0 = x_0, \ldots, X_{t-1} = x_{t-1}$, а $H_s = h_s(x_0, \ldots, x_{s-1}) = h_s(\bar{x}_{s-1})$ — стратегия суперхеджирования для $s \in [t-1, N]$ (тогда на интервале $[t, N]$ это тоже стратегия супержеджирования) с соответствующей стоимостью хеджирующего портфеля V_s. Тогда для любого допустимого сценария $y = \Delta x_t \in K_t(\bar{x}_{t-1})$ движения цен на шаге t имеем

$$v_{t-1}(\bar{x}_{t-1}) + h_t(\bar{x}_{t-1})y = v_t(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y) \geq v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} v_{t-1}(\bar{x}_{t-1}) &\geq \sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} [v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y) - h_t(\bar{x}_{t-1})y] \\ &\geq \inf_{h \in D_t(\bar{x}_{t-1})} \sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} [v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y) - hy]. \end{aligned}$$

Следовательно, по определению (VF),

$$v_{t-1}^*(\bar{x}_{t-1}) \geq \inf_{h \in D_t(\bar{x}_{t-1})} \sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} [v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y) - hy].$$

---

[50] Здесь имеются в виду интервалы на множестве целых неотрицательных чисел.

Кроме того, из (SH) вытекает

$$v_{t-1}^*(\bar{x}_{t-1}) \geq g_{t-1}(\bar{x}_{t-1}).$$

Таким образом,

$$v_{t-1}^*(\bar{x}_{t-1}) \geq g_{t-1}(\bar{x}_{t-1}) \bigvee \inf_{h \in D_t(\bar{x}_{t-1})} \sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} [v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1}+y) - hy]. \tag{3.3}$$

По определению (VF) для фиксированной предыстории цен $\bar{x}_t$ и произвольного $\varepsilon > 0$ найдется суперхеджирующая стратегия $h_{t+1}^{(\varepsilon)}(\bar{x}_t)$, …, $h_N^{(\varepsilon)}(\bar{x}_{N-1})$ на интервале $[t, N]$, такая что стоимость $v_t^{(\varepsilon)}(\bar{x}_t)$ соответствующего хеджирующего портфеля в момент времени t удовлетворяет неравенству

$$v_t^{(\varepsilon)}(\bar{x}_t) \leq v_t^*(\bar{x}_t) + \varepsilon.$$

Далее, для фиксированной ранее предыстории цен $\bar{x}_t$ и произвольного $\delta > 0$ выберем $h_t^{(\delta)}(\bar{x}_{t-1})$ — стратегию на шаге t, такую что

$$\begin{aligned} &\sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} [v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1}+y) - h_t^{(\delta)}(\bar{x}_{t-1})y] \leq \\ &\delta + \inf_{h \in D_t(\bar{x}_{t-1})} \sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} [v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1}+y) - hy]. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Если снабдить хеджера к моменту времени $t-1$ капиталом в размере

$$v_{t-1}^{\varepsilon,\delta}(\bar{x}_{t-1}) = g_{t-1}(\bar{x}_{t-1}) \bigvee \Big\{\varepsilon + \sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} [v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1}+y) - h_t^{(\delta)}(\bar{x}_{t-1})y]\Big\},$$

то стратегия $h_t^{(\delta)}(\bar{x}_{t-1}), h_{t+1}^{(\varepsilon)}(\bar{x}_t), \ldots, h_N^{(\varepsilon)}(\bar{x}_{N-1})$ будет суперхеджирующей на интервале $[t-1, N]$, поскольку

$$v_{t-1}^{\varepsilon,\delta}(\bar{x}_{t-1}) + h_t^{(\delta)}(\bar{x}_{t-1})\Delta x_t \geq v_t^*(\bar{x}_t) + \varepsilon \geq v_t^{\varepsilon}(\bar{x}_t)$$

для любого возможного сценария приращения цен $\Delta x_t \in K_t(\bar{x}_t)$. В то же время, из (3.4) следует

$$\begin{aligned} v_{t-1}^*(\bar{x}_{t-1}) \leq v_{t-1}^{\delta,\varepsilon}(\bar{x}_{t-1}) \leq \varepsilon + \delta + g_{t-1}(\bar{x}_{t-1}) \bigvee \\ \bigvee \inf_{h \in D_t(\bar{x}_{t-1})} \sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} [v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1}+y) - hy]. \end{aligned}$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ получаем неравенства, противоположные к (3.3), а значит и равенства вида (BA) для $t = 0, \ldots, N-1$, фигурирующие в утверждении теоремы. □

Замечание 3.1.

1) Отметим, что в Теореме 3.1 не использовались:

- Предположение (C) о компактности множеств $K_t(\cdot)$, $t = 0, \ldots, N$, описывающих неопределенность движения цен в Предположения (UD);
- Предположение (D) о выпуклости множеств $D_t(\cdot)$, описывающих торговые ограничения;
- Предположение (PC) о непрерывности шкалы цен;
- Предположение (AD) о бесконечной дробимости активов.

Эти предположения, однако, будут играть роль в дальнейшем для изучения свойств уравнений (BA); особо важным для содержательной теории, как уже отмечалось ранее, является Предположение (C).

Вместе с тем, отметим, что если (PC) в целом приемлемо как приближение к реальности, то (AD) может быть неадекватным для малых портфелей, а задачу более естественно ставить как решение (BA) с целочисленной оптимизацией[51] в отношении суперхеджирующей стратегии $h \in D_t(\cdot)$.

2) Для справедливости уравнений (BA) не требуется никаких предположений типа «безарбитражности» рынка. Однако свойства такого сорта, разумеется, имеют принципиальное значение для изучения свойств уравнений (BA) и хеджирующих стратегий, что будет отражено в последующих публикациях.

3) Отметим, что требования измеримости не фигурируют в формулировке Теоремы 3.1. Однако «свойства гладкости» решений уравнений (BA) представляют прикладной интерес и зависят от «свойств гладкости» многозначных отображений $x \mapsto K_t(x)$ и $x \mapsto D_t(x)$, а также функций выплат $g_t(\cdot)$; этот вопрос будет исследован в последующих публикациях.

4) Формально, уравнения (BA) можно использовать и для функции цены европейского опциона, полагая $g_0 = \ldots, g_{N-1} \equiv -\infty$, а

---

[51] Именно посредством решения задачи целочисленной оптимизации определялась стратегия проведения центральным контрагентом балансирующих сделок для дефолтера с дефицитом обеспечения в уже упомянутом изобретении [13].

$g_N = g \geq 0$ – функция выплат в терминальный момент (момент исполнения опциона).

Аналогично, можно использовать уравнения (BA) для функции цен бермудского опциона, полагая $g_s \equiv -\infty$ для тех моментов времени s, в которые выплаты не предусмотрены.

При этом, разумеется, неравенство $v_t^*(\cdot) \geq 0$ более не будет, вообще говоря, выполняться (без дополнительных предположений), а неравенство $v_t^*(\cdot) \leq C$ сохраняется.

5) Чтобы оправдать название (BA) как «уравнений Беллмана-Айзекса», заметим, что $g_{t-1}(\cdot)$ можно «перенести» под знак «минимакса»,[52] т.е.

$$v_{t-1}^*(\cdot) = \inf_{h \in D_t(\cdot)} \sup_{y \in K_t(\cdot)} g_{t-1}(\cdot) \vee \left[v_t^*(\cdot, x_{t-1} + y) - hy\right], \text{ для } t = N, \dots, 1.$$

Это вытекает из того, что для неубывающей полунепрерывной сверху функции $\varphi : [\infty, +\infty] \mapsto [\infty, +\infty]$ справедливо равенство

$$\varphi\big(\inf_{h \in A} f(h)\big) = \inf_{h \in A} \varphi\big(f(h)\big),$$

применяя в нашем случае к непрерывной неубывающей функции $\varphi(u) = g \vee u$, а также из очевидного тождества

$$g \bigvee \sup_{y \in B} f(y) = \sup_{y \in B} [g \bigvee f(y)].$$

6) Отметим, что при детерминистском подходе уравнения Беллмана–Айзекса получаются из экономического смысла чрезвычайно легко, а доказательство носит стандартный и элементарный характер. Вероятностный же аналог этих уравнений, напротив, требует математически продвинутых результатов, таких как опциональное разложение, см., например, [35].

7) Условия ограниченности функции выплат (B) и допустимости вложения всех средств в безрисковый актив (R) при выводе уравнений (BA) используется только лишь для того, чтобы показать существование суперхеджирующей стратегии. От предположений (B) и (R) в формулировке Теоремы 3.1 можно отказаться, заменив их на

---

[52] Впрочем, с точки зрения аналитического исследования уравнений (BA) вряд ли этот «перенос» может быть полезным.

(менее конструктивное) предположение о существовании допустимой суперхеджирующей стратегии $h_t(\bar{x}_{t-1}) \in D_t(\bar{x}_{t-1})$, $t = 1, \ldots, N$, обеспечивающей конечность функции $v_t^*(\cdot)$, $t = 0, \ldots, N$. Например, для опциона call такой стратегией будет "buy and hold", если таковая будет допустимой (например, если торговые ограничения позволяют занимать сколь угодно большие длинные позиции по рисковому активу).

Исходя из аддитивного представления (2.9), для удобства обозначений мы можем сделать «аддитивную» замену в последней переменной функций v_t^*, полагая

$$w(\bar{x}_{t-1}, y) = w_t(x_1, \ldots, x_{t-1}, y) = v^*(x_1, \ldots, x_{t-1}, x_{t-1} + y), \qquad \text{(T)}$$

поскольку зачастую удобно анализировать правую часть уравнения Белмана–Айзекса (BA) в терминах функций w_t, $t = N - 1, \ldots, 0$, т.е. в виде:

$$v_{t-1}^*(\cdot) = g_{t-1}(\cdot) \bigvee \inf_{h \in D_t(\cdot)} \sup_{y \in K_t(\cdot)} \big[w_t(\cdot, y) - hy \big], \quad t = N, \ldots, 1. \qquad (3.5)$$

Хорошо известно, что в теории динамического программирования с дискретным временем возникает абстрактная проблема, связанная с тем, что проекция (в более общем случае, непрерывный образ) борелевского множества не является, вообще говоря, борелевским множеством, а лишь аналитическим. Эта проблематика и соответствующая теория изложены, например, в книге [3], в разделе 7.6 – 7.7 и в приложении Б.[53]

С нашей точки зрения, для прикладных задач это не представляет большого интереса, поскольку наличие «проблем» с измеримостью в основном связано с использованием аксиомы выбора. Эта аксиома приводит к «патологическим» примерам (в частности, относящимся к существованию неизмеримых по Лебегу множеств). Однако, это «существование» носит неконструктивный характер. При замене аксиомы выбора на альтернативные аксиомы, сохраняющие счетную аксиому выбора (а, значит, и традиционный математический анализ) эти «патологические» примеры исчезают. Например, это имеет место

---

[53] Одно из предложенных решений проблемы – использование универсальной измеримости.

для аксиомы зависимого выбора[54], см. [46]. Аналогичная ситуация имеет место для аксиомы детерминированности, см. [42]. Поэтому вопрос о «существовании патологических примеров» скорее философский, чем математический. А в конкретных прикладных задачах постановка, разумеется, задается конструктивно.

В этом плане, изучение свойств «гладкости» решений, таких как полунепрерывность, непрерывность или липшицевость, является полезным для приложений, чему будут посвящены следующие публикации.

В то же время, возможны такие постановки задачи, когда вопрос об измеримости вообще не имеет значения, в частности, для определенной формулировки игрового равновесия, что также будет отражено в последующих публикациях.

В заключение обсудим, как постановка задачи динамического программирования (3.5) может быть модифицирована в случае торговых ограничений на безрисковый актив, а также для примера 2.1, пункт 5), в случае маржинальной торговли. Речь идет о возможности понижения размерности задачи с $n+1$ до n, однако в этом случае уравнения Беллмана-Айзекса приобретают модифицированную форму, по сравнению с (3.5).

Исходя из соотношения (2.8), для учета торговых ограничений на безрисковый актив надо использовать соотношение:

$$\big(v_{t-1}(\bar{x}_{t-1}) - h\bar{x}_{t-1}, h\big) \in \hat{D}_t(\bar{x}_{t-1}); \tag{3.6}$$

будем при этом считать $\hat{D}_t(\cdot)$ выпуклыми множествами $t = 1, \ldots, N$. Обозначим[55] для $h \in \mathbb{R}^n$, $t = N, \ldots, 1$:

$$\begin{gathered} A_t(h) = \{h^0 \in \mathbb{R} :\ (h^0, h) \in \hat{D}_t(\cdot)\} \subseteq \mathbb{R}, \\ \alpha_t(h, \cdot) = \inf A_t(h, \cdot), \\ \beta_t(h, \cdot) = \sup A_t(h, \cdot), \\ E_t(\cdot) = \{h \in \mathbb{R}^n :\ A_t(h, \cdot) \neq \emptyset\} \subseteq \mathbb{R}^n. \end{gathered}$$

Отметим, что функция $h \mapsto \alpha_t(h, \cdot)$ является выпуклой, а функция $h \mapsto \beta_t(h, \cdot)$ – вогнутой, см. [45], теорема 5.3. Множество $E_t(\cdot)$, очевид-

---

[54] Такая замена аксиомы не приводит к противоречию в рамках аксиоматики Цермело-Френкеля.

[55] Принимаем конвенцию $\inf \emptyset = +\infty$, $\sup \emptyset = -\infty$.

но, является выпуклым и $0 \in E_t(\cdot)$ в силу предположения (1.1). Рекуррентные уравнения соответствующей задачи динамического программирования, с использованием обозначений (T), могут быть записаны в виде:

$$\begin{gathered} v_N^*(\bar{x}_N) = g_N(\bar{x}_N), \\ v_{t-1}^*(\bar{x}_{t-1}) = g_{t-1}(\bar{x}_{t-1}) \bigvee \\ \bigvee \inf_{h \in E_t(\bar{x}_{t-1})} \Big\{ \big[\sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} (w_t(\bar{x}_{t-1}, y) - hy) \bigvee (h\bar{x}_{t-1} + \alpha_t(h, \bar{x}_{t-1}))\big] \bigwedge \\ \bigwedge (h\bar{x}_{t-1} + \beta_t(h, \bar{x}_{t-1}))\Big\}. \end{gathered} \tag{3.7}$$

С экономической точки зрения, однако, ограничения сверху на вложения в безрисковый актив не имеют смысла, так что для приложений разумно считать, что $\beta_t(h, \bar{x}_{t-1}) = +\infty$, а $\alpha_t(h, \bar{x}_{t-1}) \leq 0$, что позволяет упростить (3.7), в частности $E_t(\cdot) \equiv \mathbb{R}^n$.

Что касается примера с маржинальной торговлей, то условие (3.6) в данном случае принимает вид:

$$v_{t-1} \geq \mu h^{\oplus} \bar{x}_{t-1}, \; \mu \in [0, 1), \tag{3.8}$$

где $h^{\oplus} = \big((h^1)^+, \ldots, (h^n)^+\big)$, $(a)^+ = 0 \bigvee a$, $a \in \mathbb{R}$. Поэтому рекуррентные уравнения для соответствующей задачи динамического программирования в данном случае примут вид:

$$\begin{gathered} v_N^*(\bar{x}_N) = g_N(\bar{x}_N), \\ v_{t-1}^*(\bar{x}_{t-1}) = g_{t-1}(\bar{x}_{t-1}) \bigvee \inf_{h \in \mathbb{R}^n} \big[\sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} (w_t(\bar{x}_{t-1}, y) - hy) \bigvee \mu h^{\oplus} \bar{x}_{t-1}\big]. \end{gathered} \tag{3.9}$$

Если одновременно с торговыми ограничениями, свойственными маржинальной торговле, наложить ограничения на заимствования безрискового актива посредством задания выпуклой по h функции $\alpha_t(h, \bar{x}_{t-1}) \leq 0$, то можно записать, с использованием обозначений (T), соответствующие уравнения Беллмана-Айзекса с дополнительными ограничениями $h \in D_t(\cdot)$ в виде

$$v^*_N(\bar{x}_N) = g_N(\bar{x}_N),$$

$$v^*_{t-1}(\bar{x}_{t-1}) = g_{t-1}(\bar{x}_{t-1}) \bigvee \inf_{h \in D_t(\bar{x}_{t-1})} \Big[\sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} (w_t(\bar{x}_{t-1}, y) - hy) \bigvee \mu h^{\oplus} \bar{x}_{t-1} \bigvee (h\bar{x}_{t-1} + \alpha_t(h, \bar{x}_{t-1}))\Big]. \quad (3.10)$$

Замечание 3.2.

1) Отметим, что уравнения (3.5) являются частным случаем (3.10) при $\mu = 0$, $\alpha_t \equiv -\infty$.

2) Выражение в квадратных скобках, по которому производится минимизация по h в формуле (3.10), является выпуклой функцией от h.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андреев Н.А., Смирнов С.Н. Гарантированный подход к задачам инвестирования и хеджирования. В кн.: «Тихоновские чтения»: научная конференция: тезисы докладов: посвящается памяти академика Андрея Николаевича Тихонова: 29 октября-2 ноября 2018 г. М: МАКС Пресс, 2018. с.11.

2. Архипов В. М., Захаров И.Ю., Науменко В.В., Смирнов С.Н. Предпосылки введения количественных мер эффективности для ГЭР // Высшая школа экономики. Препринт, серия WP16 «Финансовая инженерия, риск-менеджмент и актуарная наука». 2007. № WP16/2007/05.

3. Бертсекас Д., Шрив .С. Стохастическое оптимальное управление: случай дискретного времени. Перевод с англ./Под ред. А.А. Юшкевича. М.: Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы. 1985. 287 с.

4. Захаров А.В., Мусса, Д.А. Гарантированный подход к задаче ценообразования и хеджирования для случая обусловленного обязательства с несколькими рисковыми активами. Деп. ВИНИТИ, № 1092 – В01, 2001. 19 с.

5. Зверев О.В., Хаметов В.М. Минимаксное хеджирование опционов европейского типа на неполных рынках (дискретное время) // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2011. Т. 18, № 1. С. 26–54.

6. Зверев О.В., Хаметов В.М. Минимаксное хеджирование опционов европейского типа на неполных рынках (дискретное время). II // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2011. Т. 18, № 2. С. 193–204.

7. Зверев О.В., Хаметов В.М. Минимаксное хеджирование опционов европейского типа на компактном (1,S)-рынке // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2011. Т. 18, № 11. С 121–122.

8. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1977. 392 с.

9. Молчанов С.А. Сильно феллеровское свойство диффузионных процессов на гладких многообразиях // Теория вероятностей и ее применения. 1968. Т. 13, № 3. С. 493–498.

10. Мусса, Д.А. Моделирование финансовых рынков методами стохастических дифференциальных уравнений: диссертация канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. М., 2001. 72 с.

11. Смирнов С.Н. Общая теорема теории антагонистических игр о конечном носителе смешанной стратегии // Доклады Академии Наук. 2018. Т. 480, № 1. С. 25–28.

12. Смирнов С.Н. Феллеровское переходное ядро с носителями мер, заданными многозначным отображением // Труды института математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25, № 1.

13. Смирнов С.Н., Захаров А.В., Полиматиди И.В., Балабушкин А.Н. Способ электронной биржевой торговли производными финансовыми инструментами, способы определения уровня депозитной маржи, способы урегулирования ситуации с дефицитом маржи. Патент #2226714. 2004.

14. Хаметов В.М., Чалов Д.М. Европейский опцион - это бесконечная антагонистическая игра // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2004. Т. 11, № 2. С. 264–265.

15. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Том 1. Факты. Модели. М.: ФАЗИС, 1998. с. 512.

16. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Том 2. Теория. М.: ФАЗИС, 1998. 544 с.

17. Ширяев А.Н. Вероятность – 1. М.: МЦНМО. 2004. 520 с.

18. Aksamit A., Deng S., Obloj J. Tan X. Robust pricing–hedging duality for American options in discrete time financial markets // Financial Mathematics. 2018. DOI: 10.1111/mafi.12199.

19. Bayraktar E., Zhang Y. Fundamental theorem of asset pricing under transaction costs and model uncertainty // Mathematics of Operations Research. 2016. Vol. 41, № 3. P. 1039–1054.

20. Bayraktar E., Zhou Z. On arbitrage and duality under model uncertainty and portfolio constraints // Mathematical Finance. 2017. Vol. 27. № 4. P. 988–1012.

21. Bellman R. Dynamic Programming. Princeton: Princeton Univ. Press, 1957. 363 p.

22. Bernhard P. The robust control approach to option pricing and interval models: An overview // In Breton, M. and Ben-Ameur, H., editors. Numerical Methods in Finance. New York: Springer. 2005. P. 91–108.

23. Bernhard P., Engwerda J.C., Roorda B., Schumacher J., Kolokoltsov V., Saint-Pierre P., and Aubin J.-P. The Interval Market Model in Mathematical Finance: Game-Theoretic Methods. New York: Springer, 2013. 348 p.

24. Bertsekas D.P., Shreve S.E. Stochastic Optimal Control: The Discrete-Time Case. Academic Press. 1978. 340 p.

25. Bouchard B., Nutz M. Arbitrage and duality in nondominated discrete-time models // Annals of Applied Probability. 2015. Vol. 25, № 2. P. 823–859.

26. Burzoni M., Frittelli M., Hou Z., Maggis M., Obloj J. Pointwise arbitrage pricing theory in discrete time // arXiv preprint. arXiv:1612.07618. 2016.

27. Burzoni M., Frittelli M., Hou Z., Maggis M. Universal arbitrage aggregator in discrete-time markets under uncertainty //Finance and Stochastics. 2016. Vol. 20. № 1. P. 1–50.

28. Burzoni M, Frittelli M., Maggis M. Model-free superhedging duality // The Annals of Applied Probability. 2017. Vol. 27, № 3. P. 1452–1477.

29. Carassus L., Gobet E., Temam, E. A class of financial products and models where super-replication prices are explicit // The 6th the Ritsumeikan International Conference on Stochastic processes and applications to mathematical finance. 2006.

30. Carassus L., Vargiolu, T. Super-replication price for asset prices having bounded increments in discrete time. 2010. hal.archives-ouvertes.fr/hal-0051166

31. Cvitanić J., Shreve S., Soner H. There is no nontrivial hedging portfolio for option pricing with transaction costs // Annals of Applied Probability. 1995. Vol. 5. P. 327–355.

32. Dana R.-A., Jeanblanc-Picqué M. Marchés financiers en temps continu, 1st edition. Paris: Economica, 1994. 330 p.

33. Denis L., Martini C. A theoretical framework for the pricing of contingent claims in the presence of model uncertainty // Annals of Applied Probability. 2006. Vol. 16, № 2. P. 827—852.

34. Föllmer H., Kabanov Y. Optional decomposition and Lagrange multipliers // Finance and Stochastics. 1997. Vol. 2, № 1. P. 69–81.

35. Föllmer H., Schied, A. Stochastic Finance. An Introduction in Discrete Time, 4nd edition. New York: Walter de Gruyter, 2016. 608 p.

36. Hobson D. Robust hedging of the lookback option //Finance and Stochastics. 1998. Vol. 2, № 4. P. 329–347.

37. Karoui N.E., Quenez M. Dynamic programming and pricing of contingent claims in an incomplete market // SIAM journal on Control and Optimization. 1995. Vol. 33, № 1. P. 29–66.

38. Knight F.H. Risk, uncertainty and profit. New York: Houghton Mifflin Co. 1921. 381 p.

39. Kolokoltsov V.N. Nonexpansive maps and option pricing theory // Kybernetika. 1998, Vol. 34, № 6, P. 713–724.

40. Kramkov D. Optional decomposition of supermartingales and hedging contingent claims in incomplete security markets // Probability Theory and Related Fields. 1996. Vol. 105, № 4. P. 459–479.

41. Neufeld A., Nutz M. Superreplication under volatility uncertainty for measurable claims // Electronic Journal of Probability. Vol. 18, № 48. P. 1-–14.

42. Mycielski J., Sẃierczkowski S. On the Lebesgue measurability and the axiom of determinateness // Fundamenta Mathematicae, 1964. Vol. 54, № 1. P. 67–71.

43. Obloj J., Wiesel J. A unified Framework for Robust Modelling of Financial Markets in discrete time. arXiv preprint. 2018. arXiv:1808.06430.

44. Smirnov S.N. Thoughts on Financial Risk Modeling: the Role of Interpretation // Intelligent Risk. 2012. Vol. 2, № 2. P. 12–15.

45. Rockafellar R.T. Convex Analysis. Princeton: Princeton University Press, 1970. 451 p.

46. Solovay R. A model of set-theory in which every set of reals is Lebesgue measurable // Ann. Math. 1970. Vol. 92, № 1. P. 1–56.

47. Soner H.M., Touzi N., Zhang J. Dual formulation of second order target problems // Annals of Applied Probability. 2013. Vol. 23, № 1. P. 308–347.

A GUARANTEED DETERMINISTIC APPROACH TO SUPERHEDGING: FINANCIAL MARKET MODEL,TRADING CONSTRAINTS AND BELLMAN-ISAACS EQUATIONS

Sergey N. Smirnov, Department of System Analysis, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University, Cand.Sc., associate professor (s.n.smirnov@gmail.com).

Abstract: A guaranteed deterministic problem setting of super-replication with discrete time is proposed, as an alternative to the traditional probabilistic approach based on the use of the reference measure. Within the proposed framework, the reference measure is not needed, and aim of hedging of contingent claim is to guarantee coverage of possible payout under the option contract for all admissible scenarios. These scenarios are given by means of a priori given compacts, that depend on the prehistory of prices: the increments of the price at each moment of time must lie in the corresponding compacts. The presentation focuses on achieving clarity, without aiming the greatest possible generality; this is the reason for the nature of a number of assumptions. The absence of transaction costs is assumed, the market is considered both with trade restrictions, and without trade restrictions. The game-theoretical approach immediately allows us to write down the corresponding Bellman-Isaac equations using economic interpretation of the problem.

Keywords: guaranteed estimates, deterministic price dynamics, super-replication, option, arbitrage, absence of arbitrage opportunities, Bellman-Isaacs equations, multi-valued mapping.