Математическая Теория Игр и её Приложения, т.10, в.1, с. 40–64

УДК 519.83, 519.86
ББК 22.18

ИГРОВЫЕ РАВНОВЕСИЯ И ПЕРЕХОДНАЯ ДИНАМИКА В ДИАДЕ С ГЕТЕРОГЕННЫМИ АГЕНТАМИ

Алексей О. Киселев
Николай И. Юрченко
Национальный исследовательский университет
Высшая Школа Экономики в Санкт-Петербурге
190008, Санкт-Петербург, ул. Кантемировская, 3
e-mail: a.o.kiselev@bk.ru, kolika895@gmail.com

В статье рассматривается развитие игровой модели с производством и экстерналиями знаний на сети с двумя временными периодами, сформулированной в статьях В.Д. Матвеенко и А.В. Королева, которая обобщает двухпериодную модель П. Ромера. Рассматривается самая простая полная сеть с гетерогенными агентами – диада. Агенты различаются продуктивностью. Рассматривается динамика в диаде. Найдены все возможные игровые равновесия в диаде и условия их существования. Определены условия динамической устойчивости равновесий.

Ключевые слова: сеть, игровое равновесие, гетерогенные агенты, продуктивность, диада.

1. Введение

В последние десятилетия бурно развиваются такие исследовательские области, как анализ социальных сетей, экономика сетей и игры на сетях (см., например, [1–7]). Многочисленные теоретические результаты в этих областях стали широко использоваться при анализе реально существующих сетей, таких как Интернет, отношения людей в коллективах и поселениях, отношения стран и т.д. Однако до сих пор в литературе недостаточное внимание уделяется сетям с производством. В [8] предложена модель с производством и экстерналиями на сети с двумя временными периодами, которая обобщает модель [10], где, по существу, рассматривается частный случай полной сети. Однако, в [8] и [10] у всех агентов были одинаковые продуктивности.

В [9] рассматривается обобщение модели [8], в которой продуктивности агентов различны. Так же, как и в [8], в вершинах сети произвольного вида располагаются агенты, которые в первом периоде получают доход, который распределяют между инвестициями в знания и потреблением. Потребление второго периода определяется производством, которое зависит как от собственных инвестиций, так и от инвестиций, сделанных ближайшими соседями по сети. Полезность агента определяется его потреблением в двух периодах.

В [8] введена концепция равновесия Нэша с экстерналиями, где, как и в обычном равновесии Нэша, агенты максимизируют свой выигрыш (полезность), и ни один из агентов не находит выгодным изменить свое поведение, если другие не меняют поведение. Однако в [8] предполагается, что агент не способен совершенно произвольно менять свое поведение, как это допускает концепция равновесия Нэша, а, в определенной степени, «привязан» к равновесной ситуации игры. Именно, в [8] предполагается, что агент принимает решение, находясь в определенной среде, формируемой им самим и его ближайшими соседями по сети, и, хотя он и участвует в формировании среды, в момент принятия решения агент считает среду экзогенно заданной.

В [9] установлены условия, при которых агент ведет себя в равновесии тем или иным образом: пассивен (не инвестирует), активен (инвестирует часть дохода), гиперактивен (инвестирует целиком весь доход). Также найдены условия внутреннего равновесия (т.е. равновесия с активными агентами) для ряда сетей и доказана теорема о сравнении полезностей агентов.

В данной статье рассматривается самый простой случай полной сети с гетерогенными агентами – диада с различными продуктивностями агентов. Определяется динамика в диаде, перечисляются возможные равновесия и условия их существования, выясняются условия устойчивости равновесий.

2. Описание модели

Имеется сеть (неориентированный граф) с n вершинами $i = 1, 2, \ldots, n$, в которых находятся агенты. В период 1 каждый агент i наделен начальным запасом блага e. Агент может использовать этот запас частично для потребления в первом периоде c_1^i, а частично для инвестиций в знания k_i, которые используются при производстве блага для потребления во втором периоде – c_2^i. Инвестиции немедленно превращаются в запас знаний.

Предпочтения агента i описываются квадратичной функцией полезности:

$$U_i(c_1^i, c_2^i) = c_1^i(e - ac_1^i) + b_i c_2^i,$$

где $b_i > 0$, a – коэффициент насыщения, b – параметр, характеризующий ценность потребления во втором периоде жизни агента. Данный параметр в некотором смысле аналогичен коэффициенту дисконтирования будущего потребления. Но в отличие от последнего он может быть больше единицы, если агент ценит свой покой и благополучие в старости больше, чем потребление в молодости и готов поэтому больше инвестировать в знания. Предполагается, что при $c_1^i \in [0, e]$ полезность возрастает по c_1^i, и что полезность имеет убывающую отдачу по c_1^i. Эти предположения эквивалентны условию $0 < a < 1/2$.

Средой агента i будем называть сумму K_i инвестиций в знания соседей данного агента плюс его собственные инвестиции.

Производство в вершине i описывается производственной функцией

$$F(k_i, K_i) = B_i k_i K_i, \;\; B_i > 0,$$

зависящей от состояния знаний k_i в данной вершине и от среды K_i, т.е. суммы инвестиций в знания самого агента и его соседей (агентов, находящихся в смежных вершинах сети). Здесь B_i – технологический коэффициент. Произведение $b_i B_i$ для удобства мы обозначаем как A_i и всегда предполагаем, что $a < A_i$. Поскольку увеличение каждого из параметров b_i, B_i способствует увеличению потребления второго периода, будем говорить о величине A_i как о «продуктивности».

Если $A_i > 2a$, будем говорить, что *имеет место продуктивность.* Если $A_i < 2a$, будем говорить, что *продуктивность отсутствует.*

Агент называется *пассивным*, если он делает нулевые инвестиции в знания, $k_i = 0$; активным – если $0 < k_i < e$; *гиперактивным* – если он делает максимально возможные инвестиции в знания, $k_i = e$ (т.е. не потребляет в первом периоде).

Рассмотрим следующую игру. Игроками являются агенты, $i = 1, 2, \ldots, n$. Стратегиями игрока i являются значения инвестиций k_i из промежутка $[0, e]$. *Равновесием Нэша с экстерналиями* называется набор уровней знаний (инвестиций) $k_1^*, k_2^*, \ldots, k_n^*$, такой, что каждое K_i^* является решением задачи максимизации функции полезности i-го игрока при данной среде K_i:

$$U_i(c_1^i, c_2^i) \underset{c_1^i, c_2^i}{\longrightarrow} max$$

$$\begin{cases} c_1^i \leq e - k_i, \\ c_2^i \leq F(k_i, K_i), \\ c_1^i \geq 0, c_2^i \geq 0, k_i \geq 0, \end{cases}$$

где среда K_i определяется набором $k_1^*, k_2^*, \ldots, k_n^*$, т.е. имеет место согласованность: $K_i = k_i^* + \tilde{K}_i$, где $\tilde{K}_i$ – сумма инвестиций в знания соседей игрока i. Величину $\tilde{K}_i$ будем называть *чистой экстерналией.*

Если все решения игроков являются внутренними ($0 < k_i^* < e$), т.е. все игроки являются активными, то равновесие будем также называть *внутренним.* В противном случае будем называть равновесие *угловым.* Угловое равновесие, в котором уровень знаний в каждой вершине равен 0 или e, т.е. все игроки пассивны или гиперактивны, будем называть *чисто угловым равновесием.*

Ясно, что внутреннее равновесие Нэша с экстерналиями (если оно существует при данных значениях параметров) определяется системой уравнений (см. [8], [9])

$$D_1 V(k_1, K_1) = 0, \ i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.1}$$

которое принимает форму:

$$(\tilde{A} - 2aE)k + \tilde{A}Mk = \bar{e}, \tag{2.2}$$

где $\tilde{A}$ – диагональная матрица, на главной диагонали которой стоят числа $A_1, A_2, \ldots, A_n$, I – единичная $n \times n$-матрица, M – матрица смежности сети. В этой матрице $M_{ij} = M_{ji} = 1$, если в сети имеется ребро, соединяющее вершины i и j, и $M_{ij} = M_{ji} = 0$ – в противном случае. Полагается $M_{ij} = 0$ при всех $i = 1, 2, \ldots, n$. Здесь $k = (k_1, k_2, \ldots, k_n)^T$, $\bar{e} = \big(e(1-2a), e(1-2a), \ldots, e(1-2a)\big)^T$.

Система уравнений (2.2) имеет единственное решение k^s, компоненты которого мы будем называть стационарными значениями инвестиций:

$$k_i^S = \frac{e(2a-1) + A_i\tilde{K}_i}{2a - A_i} \tag{2.3}$$

где $\tilde{K}_i$ – чистая экстерналия i-го агента. Во внутреннем равновесии $k_i^* = k_i^S$; $i = 1, 2, \ldots, n$.

3. Стандартные инструменты анализа модели

В [8] доказана теорема 2.2, которая служит инструментом при сравнении полезностей в сетях с постоянным значением продуктивности. Смысл ее в том, что при сравнении сетей, находящихся в равновесии, полезность монотонно зависит от среды. Из доказательства данной теоремы совершенно очевидно, что в случае различных значений продуктивности она остается верной со следующей модификацией.

Теорема 3.1. *Пусть W^* и W^{**} – пара сетей, находящихся в равновесии, i – некоторая вершина сети W^*, а j – некоторая вершина сети W^{**}; причем обе эти вершины имеют одинаковую величину продуктивности $A_i = A_j$; k_i^*, K_i^*, U_i^* – равновесные значения уровня знаний, среды и полезности в вершине i, причем $k_i^* \in (0, e]$; k_j^{**}, K_j^{**}, U_j^{**} – равновесные уровень знаний, среда и полезность в вершине j, причем $k_j^{**} \in (0, e]$. Тогда:*

1. *если $K_i^* < K_j^{**}$, то $U_i^* < U_j^{**}$;*
2. *если $K_i^* \le K_j^{**}$, то $U_i^* \le U_j^{**}$;*
3. *если $K_i^* = K_j^{**}$, то $U_i^* = U_j^{**}$;*

Если же $k_i^* = 0, k_j^{**} > 0$, то

$$U_i^* = U(e,0) < U_j^{**}.$$

Центральную роль при анализе равновесий играет следующее утверждение.

Лемма 3.1. *([8], лемма 3.1). При отсутствии продуктивности необходимые и достаточные условия различных типов поведения агента следующие.*

1) Агент пассивен, если и только если

$$\tilde{K}_i \leq \frac{e(1-2a)}{A}. \tag{3.1}$$

2) Агент активен, если и только если

$$\frac{e(1-2a)}{A} < \tilde{K}_i < \frac{e(1-A)}{A}. \tag{3.2}$$

3) Агент гиперактивен, если и только если

$$\tilde{K}_i \geq \frac{e(1-A)}{A}. \tag{3.3}$$

При наличии продуктивности необходимые условия различных типов поведения агента следующие.

1) Агент может быть пассивен, если

$$\tilde{K}_i \leq \frac{e(1-2a)}{A}. \tag{3.4}$$

2) Агент может быть активен, если

$$\frac{e(1-A)}{A} < \tilde{K}_i < \frac{e(1-2a)}{A}. \tag{3.5}$$

3) Агент может быть гиперактивен, если

$$\tilde{K}_i \geq \frac{e(1-A)}{A}. \tag{3.6}$$

Лемма 3.1 дает описание типов поведения агентов в терминах K^S. Можно описать его также в терминах k^S.

Следствие 3.1. *([9], Следствие 2.1). При отсутствии продуктивности необходимые и достаточные условия различных типов поведения агента следующие:*

1) Агент пассивен, если и только если

$$\tilde{k^S} \leq 0. \tag{3.7}$$

2) Агент активен, если и только если

$$0 < \tilde{k^S} < e. \tag{3.8}$$

3) Агент гиперактивен, если и только если

$$\tilde{k^S} \geq e. \tag{3.9}$$

При наличии продуктивности необходимые условия различных типов поведения агента следующие.

1) Агент может быть пассивен, если

$$k^S \geq 0. \tag{3.10}$$

2) Агент может быть активен, если

$$0 < k^S < e. \tag{3.11}$$

3) Агент может быть гиперактивен, если

$$k^S \leq e. \tag{3.12}$$

Замечание 3.1. Из предыдущего следствия мы получаем очень простые условия для всех трех типов поведения агентов.

При отсутствии продуктивности:

1) Если $k^S \leq 0$, то агент пассивен.

2) Если $0 < k^S < e$, то агент активен.

3) Если $k^S \geq e$, то агент гиперактивен.

При наличии продуктивности:

1) Если $k^S < 0$, то агент может быть только гиперактивен.

2) Если $k^S = 0$, то агент может быть пассивен или гиперактивен.

3) Если $0 < k^S < e$, то агент может быть пассивен, активен или гшиперактивен (возможны все три типа поведения агента).

4) Если $k^S = e$, то агент может быть пассивен или гиперактивен.

5) Если $k^S > e$, то агент может быть только пассивен.

Мы привели описание типов поведения агентов в терминах среды $\tilde{K}_i$ и в терминах стационарных значений инвестиций k^S. Дадим еще одно описание типов поведения агентов, более удобное для анализа полной сети. Для этого введем обозначение:

$$k_i^* = \frac{A_i K_i - e(1-2a)}{2a}. \tag{3.13}$$

Разумеется, формула (3.13) не дает нам равновесного значения k_i величины инвестиций i-го агента, (3.13) является уравнением относительно этой величины, так как k_i входит в K_i в качестве слагаемого, но формула (3.13) очень удобна для анализа.

Лемма 3.2. *([9], Лемма 2.2). i-ый агент полной сети пассивен тогда и только тогда, когда в рассматриваемом равновесии*

$$K_i \le \frac{e(1-2a)}{A_i}; \tag{3.14}$$

i-ый агент полной сети активен тогда и только тогда, когда в рассматриваемом равновесии

$$\frac{e(1-2a)}{A_i} < K_i < \frac{e}{A_i}; \tag{3.15}$$

i-ый агент полной сети гиперактивен тогда и только тогда, когда в рассматриваемом равновесии

$$K_i \ge \frac{e}{A_i}. \tag{3.16}$$

Замечание 3.2. Так как среда у всех агентов полной сети одинакова, агенты с одинаковыми значениями продуктивности в любом равновесии в полной сети делают одинаковые инвестиции. Отсюда, в частности, следует гомофилия полной сети в случае, когда все агенты имеют одинаковые характеристики.

4. Динамика в диаде

Введем в рассмотрение динамику, которая может начаться после отклонения от положения равновесия или в результате объединения сетей, находившихся в состоянии равновесия. Мы моделируем динамику следующим образом.

Определение 4.1. *Каждый агент максимизирует свою полезность, выбирая уровень инвестиций; в момент принятия решения он рассматривает свою среду как экзогенно заданную. Соответственно, если* $k_i^n = 0$, *и* $D_1V_i(k_i, K_i)|_{k_i=0} \leq 0$, *то* $k_i^{n+1} = 0$, *а если* $k_i^n = e$ *и* $D_1V_i(k_i, K_i)|_{k_i=e} \geq 0$, *то* $k_i^{n+1} = e$; *во всех остальных случаях* k_i^{n+1} *является решением разностного уравнения:*

$$-2ak_i^{n+1} + A_iK_i^n - e(1-2a) = 0.$$

Определение 4.2. *Равновесие называется динамически устойчивым если после малого отклонения одного из агентов от равновесия возникает динамика, в результате которой сеть возвращается в исходное состояние. В противном случае равновесие называется динамически неустойчивым.*

Предположим, что или $k_{01} = 0$ и $D_1V_1(k_1, K)|_{k_1=0} > 0$, или $k_{01} = e$ и $D_1V_1(k_1, K)|_{k_1=e} < 0$, или $k_{01} \in (0, e)$, и или $k_{02} = 0$ и $D_1V_2(k_2, K)|_{k_2=0} > 0$, или $k_{02} = e$ и $D_1V_2(k_2, K)|_{k_2=e} < 0$, или $k_{02} \in (0, e)$. Тогда из определения 4.1 следует, что динамика диады задаётся следующей системой разностных уравнений:

$$\begin{cases} k_1^{n+1} = \frac{A_1}{2a}k_1^n + \frac{A_1}{2a}k_2^n - \frac{e(1-2a)}{2a} \\ k_2^{n+1} = \frac{A_2}{2a}k_1^n + \frac{A_2}{2a}k_2^n - \frac{e(1-2a)}{2a} \end{cases} \tag{4.1}$$

с начальными условиями

$$k_1^0 = k_{01},$$
$$k_2^0 = k_{02}.$$

Матрица данной системы

$$\begin{pmatrix} \frac{A}{2a} & \frac{A}{2a} \\ \frac{A}{2a} & \frac{A}{2a} \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

Чтобы выписать характеристическое уравнение, найдем определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{A_1}{2a} - \lambda & \frac{A_1}{2a} \\ \frac{A_2}{2a} & \frac{A_2}{2a} - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda\frac{A_2}{2a} - \lambda\frac{A_1}{2a} + \lambda^2.$$

Тогда характеристическое уравнение системы (4.1) имеет вид

$$\lambda^2 - \lambda\left(\frac{A_1}{2a} + \frac{A_2}{2a}\right) = 0.$$

Собственные числа матрицы (4.2)

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \frac{A_1 + A_2}{2a}.$$

В качестве первого собственного вектора матрицы (4.2), соответствующего собственному числу 0, можно выбрать, например

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

соответствующий собственному числу $\lambda_2 = \frac{A_1+A_2}{2a}$, найдем из системы уравнений

$$\begin{cases} -\frac{A_2}{2a}x_1 + \frac{A_1}{2a}x_2 = 0 \\ \frac{A_2}{2a}x_1 - \frac{A_1}{2a}x_2 = 0 \end{cases}.$$

Мы можем выбрать собственный вектор

$$e_2 = \frac{1}{\bar{A}} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix},$$

где $\bar{A} = \frac{A_1+A_2}{2}$.

Таким образом, общее решение соответствующей (4.1) однородной системы стационарных разностных уравнений имеет вид

$$\begin{pmatrix} k_1^n \\ k_2^n \end{pmatrix}_g = \frac{C_1}{\bar{A}} \left(\frac{\bar{A}}{a} \right)^n \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} + C_2 \cdot 0^n \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, n = 0, 1, 2, \dots.$$

Частое решение неоднородной системы (4.1) имеет вид

$$\begin{pmatrix} k_1^n \\ k_2^n \end{pmatrix}_p = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix}.$$

Числа D_1, $D2$ найдем методом неопределенных коэффициентов, подставляя их вместо k_1, k_2 в систему (4.1):

$$\begin{cases} D_1 = \frac{A_1}{2a}D_1 + \frac{A_1}{2a}D_2 - \frac{e(1-2a)}{2a} \\ D_2 = \frac{A_2}{2a}D_1 + \frac{A_2}{2a}D_2 - \frac{e(1-2a)}{2a} \end{cases} \tag{4.3}$$

или, что то же самое,

$$\begin{cases} (A_1 - 2a)D_1 + A_1 D_2 = e(1-2a) \\ A_2 D_1 + (A_2 - 2a)D_2 = e(1-2a) \end{cases}.$$

Найдем D_1 и D_2 по формулам Крамера:

$$\Delta = -2aA_1 - 2aA_2 = 4a^2,$$
$$\Delta_1 = e(1-2a)(A_2 - A_1 - 2a),$$
$$\Delta_2 = e(1-2a)(A_1 - A_2 - 2a),$$
$$D_1 = \frac{e(1-2a)(A_2 - A_1 - 2a)}{2a(2a - A_1 - A_2)}, \tag{4.4}$$

$$D_2 = \frac{e(1-2a)(A_1 - A_2 - 2a)}{2a(2a - A_1 - A_2)}. \tag{4.5}$$

Таким образом

$$D_1 + D_2 = \frac{e(1-2a)(-4a)}{2a(2a-2A)} = \frac{e(1-2a)}{A_a},$$
$$\bar{D} = \frac{D_1 + D_2}{2} = \frac{e(1-2a)}{2(\bar{A} - a)}.$$

Следовательно, общее решение системы (4.1) имеет вид

$$\begin{pmatrix} k_1^n \\ k_2^n \end{pmatrix} = \frac{C_1}{\bar{A}} \left(\frac{\bar{A}}{a}\right)^n \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} + C_2 \cdot 0^n \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix}, n = 0, 1, 2, \ldots.$$

В начальный момент, при $n = 0$, имеем

$$\begin{pmatrix} k_1^0 \\ k_2^0 \end{pmatrix} = \frac{C_1}{\bar{A}} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix}$$

или в координатном виде

$$\begin{cases} k_1^0 = \frac{C_1 A_1}{\bar{A}} + C_2 + D_1 \\ k_2^0 = \frac{C_1 A_2}{\bar{A}} - C_2 + D_1 \end{cases}.$$

Складывая полученные равенства, получаем

$$k_1^0 + k_2^0 = 2C + D_1 + D_2,$$

откуда

$$= \bar{k^0} - \bar{D},$$

где $\bar{k^0} = \frac{k_1^0 + k_2^0}{2}$.

Тогда

$$C_2 = k_1^0 - \frac{C_1 A_1}{\bar{A}} - D_1 = \frac{C_1 A_2}{\bar{A}} + D_2 - k_2^0.$$

Получаем

$$\begin{pmatrix} k_1^n \\ k_2^n \end{pmatrix} = \frac{\bar{k^0} - \bar{D}}{\bar{A}} \left(\frac{\bar{A}}{a} \right)^n \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1^0 - \frac{C_1 A_1}{\bar{A}} - D_1 \\ k_2^0 - \frac{C_1 A_2}{\bar{A}} - D_2 \end{pmatrix} \cdot 0^n + \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{\bar{k^0} - \bar{D}}{\bar{A}} \left(\frac{\bar{A}}{a} \right)^n \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1^0 - \frac{\bar{k^0} A_1}{\bar{A}} + \frac{\bar{D} A_1}{\bar{A}} - D_1 \\ k_2^0 - \frac{\bar{k^0} A_2}{\bar{A}} + \frac{\bar{D} A_2}{\bar{A}} - D_2 \end{pmatrix} \cdot 0^n + \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix},$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Окончательно получаем уравнение динамики диады

$$\begin{pmatrix} k_1^n \\ k_2^n \end{pmatrix} = \frac{\bar{k^0} - \bar{D}}{\bar{A}} \left(\frac{\bar{A}}{a} \right)^n \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix}, n = 1, 2, \ldots. \tag{4.6}$$

5. Равновесия в диаде

Перечислим равновесия в диаде. Пусть для определенности $A_1 > A_2$.

1. Равновесие $k_1 = k_2 = 0$ возможно всегда (лемма 3.1, $\tilde{A}_i = 0 < \frac{e(1-2a)}{A_i}$).

2. Равновесие $k_1 = k_2 = e$ возможно тогда и только тогда, когда $A_1 \geq \frac{1}{2}$, $A_2 \geq \frac{1}{2}$ (лемма 3.1, $\tilde{K}_i = e \geq \frac{e(1-A_i)}{A_i}$).

3. Равновесие, при котором $k_1 = e$,

$$0 < k_2 < e. \tag{5.1}$$

В этом случае $k_2 = \frac{e(1-2a-A_2)}{A_2 - 2a}$. Условие (5.1) равносильно выполнению одновременно трех условий

$$A_2 > 2a, \ A_2 + 2a < 1, \ A_2 > \frac{1}{2} \tag{5.2}$$

$$A_2 < 2a,\ A_2 + 2a > 1,\ A_2 < \frac{1}{2} \tag{5.3}$$

Однако в случае (5.2) второй агент мог бы быть также и гиперактивным, и диада находилась бы во втором равновесии, поэтому будем считать, что если диада находится в третьем равновесии, то выполняются условия (5.3). Из леммы 3.1 следует, что условие $k_1 = e$ равносильно условию

$$\tilde{K}_i = \frac{e(1 - 2a - A_2)}{A_2 - 2a} \geq \frac{e(1 - A_1)}{A_1}.$$

Поэтому

$$A_1 - 2aA_1 - A_1A_2 \leq A_2 - 2a - A_1A_2 + 2aA_1,$$

или

$$A_1 + 2a \leq A_2 + 4aA_1. \tag{5.4}$$

Таким образом, если диада находится в третьем равновесии, то мы будем считать, что выполняются условия (5.3) и (5.4).

Замечание 5.1. Если все же вместо условий (5.3) выполняются условия (5.2), то и вместо (5.4) должно выполняться условие противоположного знака.

4) Равновесие, при котором $k_2 = 0$,

$$0 < k_1 < e. \tag{5.5}$$

В этом случае $k_1 = \frac{e(1-2a)}{A_1-2a}$. Условие (5.5) равносильно выполнению одновременно двух условий

$$A_1 > 2a,\ A_1 > 1. \tag{5.6}$$

Из леммы 3.1 следует, что условие $k_2 = 0$ равносильно условию

$$\tilde{K}_2 = \frac{e(1 - 2a)}{A_1 - 2a} \leq \frac{e(1 - 2a)}{A_2},$$

или

$$A_2 \leq A_1 - 2a. \tag{5.7}$$

Таким образом, если диада находится в равновесии 4), то мы будем считать, что выполняются условия (5.6) и (5.7).

5) Равновесие, при котором $k_1 = e$, $k_2 = 0$. В этом случае, согласно лемме 3.1, выполнены условия

$$\tilde{K}_1 = 0 \geq \frac{e(1 - A_1)}{A_1}, \ \tilde{K}_2 = e \leq \frac{e(1 - 2a)}{A_2},$$

или

$$A_1 \geq 1, \ A_2 + 2a \leq 1. \tag{5.8}$$

Если диада находится в равновесии 5), то мы будем считать, что выполнены условия (5.8).

6) Равновесие, при котором оба агента активны. Решая систему (2.2) для случая диады, мы, очевидно, получим для значений k_1 и k_2 те же выражения, что и в правых частях равенств (4) и (4.5):

$$k_1 = \frac{e(1 - 2a)(A_2 - A_1 - 2a)}{2a(2a - A_1 - A_2)}, \tag{5.9}$$

$$k_2 = \frac{e(1 - 2a)(A_1 - A_2 - 2a)}{2a(2a - A_1 - A_2)}, \tag{5.10}$$

Для того чтобы обе правые части выражений (5.9) и (5.10) были больше 0 и меньше e, необходимо и достаточно выполнение условий

$$|A_1 - A_2| < 2a \tag{5.11}$$

и

$$A_2 - A_1 - 2a - 2aA_2 + 2aA_1 = 4a^2 > 4a^2 - 2aA_1 - 2aA_2,$$

или

$$4aA_1 + A_2 > A_1 + 2a. \tag{5.12}$$

Если диада находится в равновесии 6), то будем считать, что выполнены условия (5.11) и (5.12).

6. Устойчивость равновесий

Определение 6.1. *Равновесие называется динамически устойчивым если после малого отклонения одного из агентов от равновесия возникает динамика, в результате которой сеть возвращается в исходное состояние. В противном случае равновесие называется динамически неустойчивым.*

Займемся вопросами устойчивости найденных равновесий. Напомним, что

$$D_1 + D_2 = \frac{e(1-2a)}{\bar{A}-a}.$$

1) При отклонении от первого равновесия на малую величину значения k_1 и k_2, согласно (4.6), стремятся к нулю, так как

$$0 + \varepsilon < \frac{e(1-2a)}{\bar{A}-a},$$

т.е. равновесие 1) устойчиво.

2) При отклонении от второго равновесия на малую величину мы получим

$$2e - \varepsilon < \frac{e(1-2a)}{\bar{A}-a},$$

так как $2\bar{A} > 1$. Согласно (4.6) значения k_1 и k_2, стремятся к e, т.е. равновесие 2) устойчиво.

3) При отклонении от третьего равновесия, при котором

$$k_1 = e,$$
$$k_2 = k_2^S = \frac{e(1-2a-A_2)}{A_2-2a},$$

выясним условия, при которых

$$e + \frac{e(1-2a-A_2)}{A_2-2a} \geq \frac{e(1-2a)}{\bar{A}-a}. \tag{6.1}$$

Условие (6.1) равносильно условию

$$(A_2-2a)(\bar{A}-a) + (1-2a-A_2)(\bar{A}-a) \leq (1-2a)(A_2-2a),$$

или, что то же самое,

$$2aA_2 + \bar{A} + a \leq 4a\bar{A} + A_2.$$

Выражая $\bar{A}$ как полусумму A_1 и A_2, получаем

$$2aA_2 + \frac{A_1}{2} + \frac{A_2}{2} + a \leq 2aA_1 + 2aA_2 + \frac{A_2}{2} + \frac{A_2}{2},$$

или, что то же самое,

$$\frac{A_1}{2} + a \leq 2aA_1 + \frac{A_2}{2},$$

что равносильно (5.4).

Таким образом, согласно (4.6), значения k_1 и k_2, будут стремиться к e, но первым достигнет значения e величина k_1, поскольку $A_1 > A_2$. После этого для величины k_1 будет выполняться условие (3.16), которое в нашем случае принимает вид:

$$A_1\left(e + \frac{e(1-2a-A_2)}{A_2-2a} - e \geq 0,\right)$$

или, что то же самое,

$$A_1 - A_2 + 2a - 4aA_1 \leq 0,$$

что, в свою очередь, равносильно (5.4). Таким образом, величина k_1 будет оставаться равной e, а величина k_2 будет изменяться в соответствии с разностным уравнением

$$A_2k_2^n - 2ak_2^{n+1} + A_2e = e(1-2a),$$

или, что то же самое,

$$k_2^{n+1} = \frac{A_2}{2a}k_2^n + \frac{2a-1+A_2}{2a}e. \tag{6.2}$$

Частное решение данного неоднородного разностного уравнения находится из условия

$$D\left(1 - \frac{A_2}{2a}\right) = \frac{2a-1+A_2}{2a}e,$$

откуда следует, что

$$D = \frac{2a-1+A_2}{2a-A_2}e = k_2^S.$$

Таким образом, общее решение неоднородного разностного уравнения (6.2) имеет вид

$$k_2^n = C\left(\frac{A_2}{2a}\right)^n + D,\ \ n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Определим постоянную C из начальных условий:

$$k_2^n = C + D,$$

откуда

$$C = k_2^0 - k_2^S.$$

Итак, решение разностного уравнения (6.2):

$$k_2^n = (k_2^0 - k_2^S)\left(\frac{A_2}{2a}\right)^n + k_2^S,\ n = 0, 1, 2, \dots .$$

Однако $A_2 < 2a$, поэтому k_2^n стремится к k_2^S. Таким образом, равновесие 3) оказалось устойчивым.

4) При отклонении от четвертого равновесия, при котором

$$k_1 = k_1^S = \frac{e(1-2a)}{A_1 - 2a},$$
$$k_2 = 0,$$

выясним условия, при которых

$$\frac{e(1-2a)}{A_1 - 2a} + 0 \leq \frac{e(1-2a)}{\bar{A} - a}. \tag{6.3}$$

Условие (6.3) равносильно условию

$$\frac{A_1 + A_2}{2} - a \leq A_1 - 2a,$$

или, что то же самое,

$$A_2 \leq A_1 - 2a,$$

что совпадает с (5.7).

Таким образом, согласно (4.6), значения k_1 и k_1, будут стремиться к 0. Когда k_2 станет равным нулю, для величины k_2 будет выполняться условие (4.6), которое в нашем случае принимает вид:

$$A_2\left(\frac{e(1-2a)}{A_1 - 2a} + 0\right)e(1-2a) \leq 0,$$

что, в свою очередь, равносильно (5.7). Таким образом, величина k_2 будет оставаться равной 0, а величина k_1 будет изменяться в соответствии с разностным уравнением

$$A_1 k_1^n - 2a k_1^{n+1} = e(1-2a),$$

или, что то же самое,

$$k_1^{n+1} = \frac{A_1}{2a} k_1^n + \frac{2a-1}{2a} e. \tag{6.4}$$

Частное решение данного неоднородного разностного уравнения находится из условия

$$D\left(1 - \frac{A_1}{2a}\right) = \frac{2a-1}{2a} e,$$

откуда следует, что

$$D = \frac{2a-1}{2a-A_1} e = k_1^S.$$

Таким образом, общее решение неоднородного разностного уравнения (6.4) имеет вид

$$k_1^n = C\left(\frac{A_2}{2a}\right)^n + k_1^S,\ n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Определим постоянную C из начальных условий:

$$k_1^0 = C + k_1^S,$$

откуда

$$C = k_1^0 - k_1^S < 0.$$

Итак, решение разностного уравнения (6.4):

$$k_1^n = (k_1^0 - k_1^S)\left(\frac{A_1}{2a}\right)^n + k_1^S,\ n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Однако $A_1 > 2a$, поэтому k_1^n стремится к 0. Таким образом, равновесие 4) оказалось неустойчивым. При малейшем отклонении оно переходит в равновесие 1).

5) При отклонении от пятого равновесия, при котором $k_1 = e$, $k_2 = 0$, на малую величину сумма начальных значений k_1 и k_2, т.е. $k_1^0 + k_2^0$, может оказаться как больше, так и меньше величины $D_1 + D_2 = \frac{e(1-2a)}{\bar{A}-a}$.

5.1. Предположим сначала, что

$$k_1^0 + k_2^0 > \frac{e(1-2a)}{\bar{A}-a}.$$

Тогда, согласно (6.8), значения k_1 и k_2, будут стремиться к e, но первым достигнет значения e величина k_1. После этого для величины k_1 будет выполняться условие (3.16), которое в нашем случае принимает вид:

$$A_1(e+k_2)-e \geq 0,$$

что верно согласно (5.8). Таким образом, величина k_1 будет оставаться равной e, а величина k_2 будет изменяться в соответствии с разностным уравнением

$$A_2k_2^n - 2ak_2^{n+1} + A_2e = e(1-2a),$$

или, что то же самое,

$$k_2^{n+1} = \frac{A_2}{2a}k_2^n + \frac{2a-1+A_2}{2a}e, \tag{6.5}$$

Частное решение данного неоднородного разностного уравнения находится из условия

$$D\left(1-\frac{A_2}{2a}\right) = \frac{2a-1+A_2}{2a}e,$$

откуда следует, что

$$D = \frac{2a-1+A_2}{2a-A_2}e = k_2^S. \tag{6.6}$$

Таким образом, общее решение неоднородного разностного уравнения (6.5) имеет вид

$$k_2^n = C\left(\frac{A_2}{2a}\right)^n + D,\ n=0,1,2,\ldots.$$

Определим постоянную C из начальных условий:

$$k_2^0 = C + D,$$

откуда

$$C = k_2^0 - k_2^S.$$

Итак, решение разностного уравнения (6.5):

$$k_2^n = (k_2^0 - k_2^S)\left(\frac{A_2}{2a}\right)^n + k_2^S,\ n=0,1,2,\ldots.$$

Числитель выражения (6.6) неположителен согласно (5.8), в то время как знаменатель может быть как положителен, так и отрицателен.

Предположим сначала, что знаменатель в (6.6) положителен, $A_2 < 2a$, следовательно $k_2^S < 0$. В этом случае k_2^n будет стремиться к k_2^S, так как $A_2 < 2a$, и достигнет нуля.

Предположим теперь, что знаменатель в (6.6) отрицателен, $A_2 > 2a$, следовательно $k_2^S > 0$. В этом случае k_2^n будет стремиться к нулю, так как $(k_2^0 - k_2^S) < 0$, а $A_2 > 2a$.

5.2. Предположим теперь, что

$$k_1^0 + k_2^0 < \frac{e(1-2a)}{\bar{A} - a}.$$

Тогда, согласно (4.6), значения k_1 и k_2, будут стремиться к 0, но первым достигнет значения 0 величина k_2. После этого для величины k_2 будет выполняться условие (3.14), которое в нашем случае принимает вид:

$$A_2(0 + k_1) - e(1-2a) \leq 0,$$

что верно согласно (5.8). Таким образом, величина k_2 будет оставаться равной 0, а величина k_1 будет изменяться в соответствии с разностным уравнением

$$A_1 k_1^n - 2a k_1^{n+1} = e(1-2a),$$

или, что то же самое,

$$k_1^{n+1} = \frac{A_1}{2a} k_1^n + \frac{2a-1}{2a} e. \tag{6.7}$$

Частное решение данного неоднородного разностного уравнения находится из условия

$$D\left(1 - \frac{A_1}{2a}\right) = \frac{2a-1}{2a} e,$$

откуда следует, что

$$D = \frac{2a-1}{2a - A_1} e = k_1^S.$$

Таким образом, общее решение неоднородного разностного уравнения (6.7) имеет вид

$$k_1^n = C\left(\frac{A_1}{2a}\right)^n + k_1^S,\ n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Определим постоянную C из начальных условий:

$$k_1^0 = C + k_1^S,$$

откуда

$$C = k_1^0 - k_1^S.$$

Итак, решение разностного уравнения (6.7):

$$k_1^n = (k_1^0 - k_1^S)\left(\frac{A_1}{2a}\right)^n + k_1^S,\ n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Ясно, что

$$k_1^S = \frac{e(1-2a)}{A_1 - 2a} \le e$$

так как $A_1 \ge 1$, согласно (5.8), следовательно, $(k_1^0 - k_1^S) > 0$. При этом $A_1 > 2a$, поэтому k_1^n стремится к e.

Итак, в любом случае при малом отклонении от пятого равновесия k_1 и k_2 возвращаются к исходным значениям. Таким образом, равновесие 5) устойчиво.

6) В шестом равновесии

$$k_1^0 + k_2^0 = \frac{e(1-2a)(-4a)}{2a(2a - A_1 - A_2)} = \frac{e(1-2a)}{\bar{A} - a} = D_1 + D_2.$$

При малом отклонении $k_1^0 + k_2^0$ от положения равновесия, при котором

$$k_1^0 + k_2^0 - (D_1 + D_2) > 0,$$

значения k_1 и k_2, согласно (4.6), будут стремиться к e, но первым достигнет значения e величина k_1. После этого для величины k_1 будет выполняться условие (3.16), которое в нашем случае принимает вид:

$$A_1(e + k_2) - e \ge 0.$$

Таким образом, величина k_1 будет оставаться равной e, а величина k_2 будет изменяться в соответствии с разностным уравнением

$$A_2 k_2^n - 2a k_2^{n+1} + A_2 e = e(1-2a),$$

или, что-то же самое,

$$k_2^{n+1} = \frac{A_1}{2a} k_2^n + \frac{2a - 1 + A_2}{2a} e. \tag{6.8}$$

Частное решение неоднородного разностного уравнения (6.8) находится из условия

$$D\left(1 - \frac{A_2}{2a}\right) = \frac{2a - 1 + A_2}{2a} e,$$

откуда следует, что

$$D = \frac{2a - 1 + A_2}{2a - A_2} e = k_2^S.$$

Таким образом, общее решение неоднородного разностного уравнения (6.8) имеет вид

$$k_2^n = C\left(\frac{A_2}{2a}\right)^n + k_2^S, \; n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Определим постоянную C из начальных условий:

$$k_2^0 = C + k_2^S,$$

откуда

$$C = k_2^0 - k_2^S.$$

Итак, решение разностного уравнения (6.8):

$$k_2^n = (k_2^0 - k_2^S)\left(\frac{A_2}{3a}\right)^n + k_2^S, \; n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{6.9}$$

Из (6.8) видно, что величина k_2^n будет стремиться, в зависимости от соотношений параметров, к 0, e или $k_2^S = \frac{e(2a-1+A_2)}{2a}$. Таким образом, равновесие 6) неустойчиво.

Результаты разделов 4–5 суммируем в виде следующего предложения.

Предложение 6.1. *В диаде возможны следующие равновесия.*

1) Равновесие $k_1 = k_2 = 0$ *при любых значениях параметров.*

2) Равновесие $k_1 = k_2 = e$, *если* $A_1 \geq \frac{1}{2}$, $A_2 \geq \frac{1}{2}$.

3) Равновесие $k_1 = e$, $k_2 = \frac{e(1-2a-A_2)}{A_2-2a}$, *если* $A_2 < 2a$, $A_2 + 2a > 1$, $A_2 < \frac{1}{2}$, $A_1 + 2a \leq A_2 + 4aA_1$.

4) Равновесие $k_1 = \frac{e(1-2a)}{A_1-2a}$, $k_2 = 0$, *если* $A_1 > 2a$, $A_1 > 1$, $A_2 \leq A_1 - 2a$.

5) Равновесие $k_1 = e$, $k_2 = 0$, *если* $A_1 \geq 1$, $A_2 + 2a \leq 1$.

6) Равновесие $k_1 = \frac{e(1-2a)(A_2-A_1-2a)}{2a(2a-A_1-A_2)}$, $k_2 = \frac{e(1-2a)(A_1-A_2-2a)}{2a(2a-A_1-A_2)}$, *если* $|A_1 - A_2| < 2a$, $4aA_1 + A_2 > A_1 + 2a$.

При этом равновесия 1, 2, 3, 5 – устойчивы, равновесия 4, 6 – неустойчивы.

7. Заключение

В работе рассматривается развитие и продолжение модели [8]. Изучена динамика в самой простой структуре полной сети с гетерогенными агентами – в диаде, когда у агентов, находящихся в вершинах, разные продуктивности. Найдены все возможные равновесия, определены условия, при которых они возможны, изучены вопросы устойчивости равновесий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Новиков Д.Н. *Игры и сети* // Математическая теория игр и ее приложения. 2010. Т. 2, вып. 1. С. 107–124.

2. Bramoull Y., Kranton R. *Public goods in networks* // Journal of Economic Theory. 2007. V. 135. P. 478–494.

3. Galeotti A., Goyal S., Jackson M.O., Vega-Redondo F., Yariv L. *Network games* // Review of Economic Studies. 2010. V. 77. P. 218–244.

4. Granovetter M.S. *The strength of weak ties* // American Journal of Sociology. 1973. V. 78. P. 1360–1380.

5. Jackson M.O. *Social and Economic Networks*. Princeton University Press. 2008.

6. Jackson M.O., Zenou Y. *Games on networks*. In: Young P. and Zamir S. eds. Handbook of game theory. V. 4. Amsterdam: Elsevier Science, 2014. P. 95–163.

7. Martemyanov Y.P., Matveenko V.D. *On the dependence of the growth rate on the elasticity of substitution in a network* // International Journal of Process Management and Benchmarking. 2014. V. 4(4). P. 475–492.

8. Matveenko V.D., Korolev A.V. *Network game with production and knowledge externalities* // Contributions to Game Theory and Management. 2015. V. 8. P. 199–222.

9. Matveenko V., Korolev A. and Zhdanova M. *Game equilibria and unification dynamics in networks with heterogeneous agents* // International Journal of Engineering Business Management. 2017. V. 9. P. 1–17.

10. Romer P.M. *Increasing returns and long-run growth* // The Journal of Political Economy. 1986. V. 94. P. 1002–1037.

GAME EQUILIBRIA AND TRANSIENT DYNAMICS IN DYAD WITH HETEROGENEOUS AGENTSG

Aleksey O. Kiselev, National Research University Higher School of Economics in St. Petersburg (a.o.kiselev@bk.ru),
Nikolay I. Yurchenko, National Research University Higher School of Economics in St. Petersburg (kolika895@gmail.com).

Abstract: The article considers the development of the game model with the production and externalities of knowledge on a network with two-time periods, formulated in articles by V.D. Matveenko and A.V. Korolev. The simplest complete network with heterogeneous agents, the dyad, is considered. Agents differ in productivity. Dynamics in a dyad is considered. All possible game equilibria in the dyad and the conditions for their existence are found. Conditions for the dynamic stability of equilibria are determined.

Keywords: network, game equilibrium, heterogeneous agents, productivity, dyad.