Математическая Теория Игр и её Приложения, т.10, в.1, с. 5–22

УДК 519.2
ББК 22.18

ЭВОЛЮЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ*

Григорий И. Белявский
Наталья В. Данилова
Геннадий А. Угольницкий
Институт математики, механики и компьютерных наук
Южного федерального университета
344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а
e-mail: beliavsky@hotmail.com, danilova198686@mail.ru,
ougoln@mail.ru

В статье предлагается динамическая теоретико-игровая постановка задачи распределения ресурсов в организационной системе. Рассматривается применение алгоритмов эволюционного моделирования к решению таких задач. Изложение иллюстрируется модельными примерами.

Ключевые слова: динамическая задача распределения ресурсов, дифференциальные игры, эволюционное моделирование.

1. Введение

Распределению ресурсов посвящена обширная литература по теоретико-игровому моделированию. Собственно, вся теория кооперативных игр занимается решением именно этой проблемы – распределением выигрыша максимальной коалиции между всеми игроками

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 17-19-01038.

[10, 21]. В экономике общественных благ исследуется проблема распределения индивидуальных ресурсов агентов между их деятельностью в частных интересах и производством общественного блага [12–14]. Это направление активно развивается и сейчас. Так, статья [15] посвящена механизму пропорционального распределения делимых ресурсов, а в работе [18] получены условия оптимального распределения ресурсов между трудовой деятельностью и отдыхом в случае, когда агенты имеют одинаковые функции выигрыша, но различные возможности и нетрудовые доходы. Многочисленные другие примеры можно найти в журнале Social Choice and Welfare. Обзор динамических постановок таких задач приведен в монографии [20]. В российской литературе основополагающая роль в этой области принадлежит статье [3], где изучены модели, в которых функции выигрыша всех агентов состоят из двух частей – общественной (одинаковой для всех агентов) и частной составляющей. Авторы [3] показали, что если эта функция имеет вид свертки по минимуму, то при естественных предположениях в игре существует Парето-оптимальное равновесие по Нэшу. Исследование игр с учетом согласования частных и общественных интересов продолжено, например, в работах [5, 6, 8, 19]. Механизмы распределения ресурсов в статической постановке служат предметом изучения теории управления организационными системами [9]. Динамические модели распределения ресурсов в теории управления организационными системами практически не рассматриваются, и наша постановка предлагается впервые. В силу сложности возникающей дифференциальной игры для ее решения используются генетические алгоритмы. Эволюционное моделирование и генетические алгоритмы описаны в монографиях [4, 7]. В статье [1] представлен алгоритм гибридного метода обучения искусственных нейронных сетей. В предыдущей работе авторов [2] предложен генетический алгоритм решения игры Гермейера с одним ведомым игроком и управлением, удовлетворяющим условию Липшица. Альтернативный подход к решению иерархических дифференциальных игр изложен в [11]. Предлагаемый в настоящей статье подход к теоретико-игровому моделированию распределения ресурсов в иерархической системе «Центр–агенты» обладает следующими особенностями: 1) явно описывается динамика ресурса в зависимости

от управления Центра; 2) Центр распределяет ресурс между агентами пропорционально их действиям, что побуждает агентов к выбору более напряженного плана; 3) управление Центра не может меняться резко, что формализуется как липшицево свойство функции управления. Представляется, что это предположение выполняется для большинства реальных организационно-экономических систем; 4) на основе предыдущей гипотезы разрабатывается генетический алгоритм нахождения оптимальной стратегии Центра в иерархической дифференциальной игре.

2. Использование генетических алгоритмов для решения динамических задач конфликтного управления

В работе [2] доказано утверждение, позволяющее равномерно аппроксимировать управление на ограниченном и замкнутом интервале с любой степенью точности кусочно-постоянной функцией с фиксированным размером скачков. Приведем его формулировку.

Утверждение 2.1. *Если* $|p(t)-p(s)| \le \alpha|t-s|$, $\forall\, t, s \in [0,T]$, *то для любого положительного числа* ε *существуют такие* N^*, x^*, Δ^*, *что*

$$\sup_{t\in[0,T]} |p(t) - p_N(x^*, \Delta^*, t)| \le \varepsilon,$$

где кусочно-постоянная функция $p_N(x, \Delta, t) = x$, $t \in [0, t_1]$,

$$p_N(x, \Delta, t) = p_N(x, \Delta, t_k) + \alpha h \delta_{k-1}, \quad t \in (t_k, t_{k+1}], \quad k = 1, \dots, N-1;$$

$\Delta = (\delta_i)_{i=1}^{N-2}$; $\delta_i \in \{-1, 0, 1\}$.

При этом $x^* = p(0)$, $N^* = \left\lfloor \dfrac{2\alpha T}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$, $\delta_1^* = \operatorname{sign}(p(t_1) - p(0))$, $\delta_k^* = \operatorname{sign}(p(t_k) - p_k(p(0), \delta_k^*, t_k))$, $k = 2, \dots, N^* - 1$.

При равномерном разбиении погрешность связана с длиной интервала разбиения h равенством $\alpha h = 2\varepsilon$. Если исходить из того, что константа Липшица α заранее неизвестна, то и число интервалов не может быть выбрано. В подобных случаях во многих вычислительных методах, например, при численном интегрировании, применяется метод половинного деления и сравнение результатов. Если результаты совпадают, то процесс прекращается. Этот метод естественно применяется в предложенном в [2] алгоритме.

В генетических алгоритмах половинное деление интервалов разбиения приводит к удвоению битов хромосомы. Естественно при этом предусмотреть наследование оптимальной популяции, которое может быть реализовано различными способами. Один из них заключается в следующем. Пусть оптимальная популяция на j-й итерации $M_j = (\Delta_k^j)_{k=1}^L$. На следующей итерации начальная популяция формируется таким образом, что каждый бит хромосомы Δ_k^j транслируется в два бита: $\delta_{k,i}^j \to (\xi, \delta_{k,i}^j)$ и $\delta_{k,i}^j \to (\delta_{k,i}^j, \xi)$. Случайная величина ξ принимает одно из трех значений $\{-1, 0, 1\}$ с вероятностями $\{q_1, q_2, q_3\}$, которые, как и число L, относятся к параметрам алгоритма. В результате происходит удвоение особей в начальной популяции, что выглядит естественно в связи с расширением зоны поиска решения.

Возможно неравномерное разбиение интервала. Пусть длина i-го интервала разбиения $[t_i, t_{i+1})$ равна h_i и локальная константа Липшица

$$\alpha_i = \sup_{s,t \in [t_i, t_{i+1}], s \neq t} \frac{|p(t) - p(s)|}{|t - s|}.$$

В этом случае погрешность

$$2 \max_i \alpha_i h_i = \varepsilon.$$

Естественно строить неравномерное разбиение таким образом, чтобы

$$\max_i \alpha_i h_i$$

был минимальным на множестве возможных разбиений. Вычисление такого разбиения может оказаться более сложной задачей, чем начальная задача, для которой применяется генетический алгоритм. Однако, в некоторых случаях хорошее разбиение все же удается построить. Пусть $p(t) = A \ln(1 + t)$, $A \neq 0$ и разбиение получается в результате использования рекуррентных равенств:

$$h_i = h(1 + t_{i-1}),\ t_i = t_{i-1} + h_i,\ i = 1, 2, \ldots, k,$$

$$t_0 = 0,\ k = \max\{j \colon t_j \leq T\}.$$

Последний интервал разбиения: $[t_k, T]$. Для этого разбиения

$$\varepsilon = 2 \max_i \alpha_i h_i = 2|A|h,$$

где h – параметр разбиения. Аналогичного результата можно достичь, если подобрать такую константу $A > 0$, что на интервале $[0, T]$

$$\sup_{t \neq s} \frac{|p(t) - p(s)|}{|\ln(1+t) - \ln(1+s)|} \leq A,$$

так как для всех t и $s > t$ из интервала $[0, T]$ справедливо: $p(t) - A(\ln(s) - \ln(t)) \leq p(s) \leq p(t) + A(\ln(s) - \ln(t))$.

К сожалению, константа A, так же как и константа Липшица α, может быть неизвестной, поэтому следует увеличивать число интервалов разбиения и сравнивать полученные результаты. Увеличение числа интервалов разбиения достигается за счет постепенного уменьшения параметра разбиения h. К сожалению, наследование оптимальной популяции при данном неравномерном распределении невозможно. Положительно то, что число интервалов разбиения растет линейно.

3. Динамическая задача распределения ресурсов в организационной системе и генетический алгоритм ее решения

Имеется ведущий игрок (Центр), который распределяет ресурс между агентами, чем компенсирует их затраты. Ресурс (затраты Центра) рассматривается как фазовая переменная. Количество ресурса, выделяемого в момент времени t, равно $m(t)$. Динамика ресурса определяется дифференциальным уравнением:

$$dm(t) = \sigma m(t)\, dp(t) \tag{3.1}$$

с начальным значением m_0. Параметр σ – локальная изменчивость ресурса, $p(t)$ – управление Центра, о котором шла речь в предыдущем разделе. Дифференциал управления $dp(t)$ может не существовать, поскольку не всякая функция, удовлетворяющая условию Липшица, дифференцируема. Поэтому (3.1) следует понимать в интегральном смысле: $m(t) = m_0 + \sigma \int_0^t m(s)\, dp(s)$, где используется интеграл Лебега-Стилтьеса. Аналогичным (3.1), но не совпадающим с ним точно, будет определение ресурса следующим образом: $m(t) = m_0 \exp(\sigma p(t))$.

В каждый момент времени ресурс полностью распределяется среди агентов. Получив свою долю ресурса, каждый агент $i = 1, 2, \ldots, M$

выбирает некоторое действие $x^i(t)$. Порождаемые действиями затраты агентов описываются выпуклыми по второму аргументу функциями: $f^i(t, x^i(t))$, $f^i(t, 0) = 0$. Компенсации агентам определяются механизмом пропорционального распределения:

$$\nu^i(x(t), m(t)) = \frac{\gamma^i(x(t))m(t)}{\sum\limits_i \gamma^i(x(t))}, \quad x(t) = (x^i(t))_{k=1}^M.$$

Функция γ – возрастающая, $\gamma(0) = 0$.

Выигрыш i-го агента при плане $x(t) = (x^i(t))_{i=1}^M$ и ресурсе $m(t)$ составляет:

$$\psi^i(x^i, m) = \int_0^T \left(\nu^i(x(t), m(t)) - f^i(t, x^i(t))\right) dt. \tag{3.2}$$

Выигрыш Центра равен:

$$F(s, m) = \int_0^T f(s(t), m(t))\, dt, \quad s(t) = \sum_{i=1}^M x^i(t), \tag{3.3}$$

где f – возрастающая функция по первому аргументу и убывающая по второму, поскольку Центр заинтересован в максимальных суммарных действиях агентов и минимизации выдаваемого им ресурса.

Период времени $[0, T]$, на котором реализуется игра, разбивается на N интервалов. При равномерном разбиении $N = 2^k$. В процессе работы алгоритма k увеличивается на единицу. Начинаем, например, с $k = 1$. При неравномерном разбиении начинаем с $h = \sqrt{T+1} - 1$, что соответствует $N = 2$, далее h заменяется на zh, $0 < z < 1$, где z относится к параметрам алгоритма. Дискретный аналог уравнения (3.1) имеет вид:

$$m_j = m_{j-1}(1 + \sigma_N \delta_j), \quad \sigma_N < 1. \tag{3.4}$$

Здесь и далее рассматривается равномерное разбиение, неравномерное разбиение анализируется аналогично с небольшими изменениями. В (3.4) $\sigma_N = K/N$, где K следует отнести к параметрам алгоритма. При достаточно большом N влияние параметра K незначительно. Величины $m_j = m(t_j)$, $\delta_j \in \{-1, 0, 1\}$. Отметим, что $m_j > 0$.

Дискретный выигрыш i-го агента на j-м временном интервале имеет вид:

$$\psi^i(x,m) = \sum_{j=0}^{N-1} \bigl(\nu^i(x_j,m_j) - f^i_j(x^i_j)\bigr). \tag{3.5}$$

В (3.5) $x_j = x(t_j) = (x^i(t_j))_{i=1}^M = (x^i_j)_{i=1}^M$, $f^i_j(x^i_j) = f^i(t_j, x^i(t_j))$, m_j определяются ведущим игроком. Отметим, что выигрыш агента есть сепарабельная функция по переменным x_j, x^i_j, не связанным с переменными x_k, x^i_k при $k \neq j$, поэтому задача каждого агента распадается на N независимых задач, где j-я задача решается относительно переменных с индексом j. Далее, чтобы не загромождать выкладки, будет опущен «временной» индекс j, и вместо m_j использовано обозначение l. Таким образом, задача агентов есть некооперативная игра с индивидуальными выигрышами:

$$\psi^i(x) = \frac{\gamma(x^i)l}{\sum\limits_j \gamma(x^j)} - f^i(x^i), \quad x = (x^i)_{i=1}^M. \tag{3.6}$$

Для случая $\gamma(u) = u$ игра с выигрышами (3.6) подробно изучена в работах [16, 17]. Если добавить естественные условия: $\gamma(u)$ – непрерывная возрастающая функция, $\gamma(0) = 0$, то замена переменных $\gamma(x^i) = y^i$ приводит (3.6) к виду:

$$\psi^i(y,l) = \frac{y^i l}{\sum\limits_j y^j} - f^i \circ \gamma^{-1}(y^i), \quad y = (y^i)_{i=1}^M,$$

поэтому дальше будет рассматриваться игра с индивидуальными выигрышами:

$$\psi^i(x) = \frac{x^i l}{\sum\limits_j x^j} - f^i(x^i), x = (x^i)_{i=1}^M. \tag{3.7}$$

Установлено [17], что если функции затрат $f^i(x)$ строго выпуклые и дифференцируемые, то существует единственная равновесная по Нэшу стратегия $\bar{x}$: $\forall\, i = 1,\dots,M$, $\forall\, x_i \in X_i$, $\psi^i(\bar{x}_1,\dots,x_i,\dots,\bar{x}_M) \leq \psi^i(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_i,\dots,\bar{x}_M)$. Более того, функции $\psi^i(\bar{x}_1,\dots,x_i,\dots,\bar{x}_M)$ строго вогнуты. Следуя [17], определим функции $z_i(s)$ из соотношений:

$$s^2(f^i(z^i))' = l(s - z^i), \quad s(f^i(0))' < l, \quad z^i = 0, \quad s(f^i(0))' \geq l. \tag{3.8}$$

Соотношения (3.8) однозначно определяют функции $z_i(s)$. Рассмотрим уравнение

$$\sum_{i=1}^{M} z^i(s) = s, \quad s > 0. \tag{3.9}$$

Уравнение (3.9) имеет единственное положительное решение $\bar{s} = \sum_{i=1}^{M} \bar{x}^i$, где $\bar{x}^i = z^i(\bar{s})$ – равновесные по Нэшу стратегии. Отметим, что использованная при решении игры переменная s по смыслу совпадает с $s(t)$ из (3.3).

Дискретный выигрыш Центра выражается следующим образом:

$$\Phi(m) = \sum_{j=0}^{N-1} f(\bar{s}_j(m_j), m_j), \tag{3.10}$$

где $\bar{s}_j(m_j)$ – сумма равновесных решений игры для j-го интервала. Уравнение (3.4) позволяет выразить выигрыш Центра непосредственно через вектор $\Delta_{N-1} = (\delta_j)_{j=1}^{N-1}$. Таким образом, стратегией Центра будем считать вектор Δ_{N-1}. Для вычисления оптимальной стратегии Центра может быть использован генетический алгоритм.

4. Численные методы

4.1. Генетический алгоритм

Рассмотрим дифференциальную игру Центра и агентов

$$F(s,m) = \int_0^T (\sqrt{s(t)} - m(t))dt \to \max, p;$$

$$\psi^i(x(\cdot), m(\cdot)) = \int_0^T \left\{ \nu^i(x(t), m(t)) - \mu_i(t)[x^i(t)]^2 \right\} \to \max,$$

$$x^i(t) \geq 0, \quad i = 1, \ldots, M;$$

$$\nu^i(x(t), m(t)) = \frac{x^i(t)m(t)}{\sum\limits_{i=1}^{M} x^j(t)}, \quad i = 1, \ldots, M;$$

$$m(t) = m(0) + \int_0^t m(s)\, dp(s).$$

В функции выигрыша агентов входит коэффициент $\mu_i(t)$, который позволяет отразить зависимость затрат i-го агента от времени.

Для хромосомы Δ_{N-1} определим последовательность m_j, используя уравнение (3.4), и рассмотрим j-ю игру с индивидуальными выигрышами: $\frac{x_j^i m_j}{\sum_{k=1}^{M} x_k^j} - \mu_j^i (x_j^i)^2$. Для вычисления равновесного решения определим функции $z_j^i(s_j)$: $z_j^i(s_j) = \frac{m_j s_j}{2\mu_j^i s_j^2 + m_j}$. Сумма равновесных решений: $\bar{s}_j = \sum_{i=1}^{M} \bar{x}_j^i$ находится из уравнения $\sum_{i=1}^{M} \frac{1}{2\mu_j^i s_j^2 + m_j} = 1/m_j$. Определим здоровье хромосомы Δ_{N-1}: $F(\Delta_{N-1}) = \sum_{j=0}^{N-1} \left(\sqrt{\bar{s}_j} - m_j^2\right)$. На рис. 1 приведены результаты вычислений.

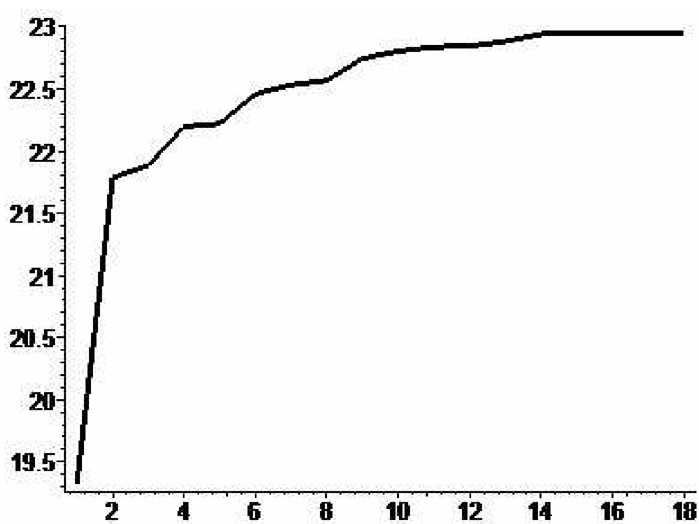

Рисунок 1. Зависимость суммарного здоровья популяции от числа итераций

Ось абсцисс – число итераций генетического алгоритма. Ось ординат — суммарное здоровье популяции. Вычисления производились при следующих значениях параметров модели: $m_0 = 0.1$, $N = 8$, $\sigma_N = 1/N$, $M = 2$, $\mu_j^1 = \frac{1}{2 + 0.1 \cdot j}$, $\mu_2^j = 1 - \mu_1^j$.

Параметры алгоритма: размер популяции $L = 20$, число пар при скрещивании $R = 6$, вероятность обмена генами для родительской пары $q = 0{,}2$, мутирующая особь выбирается равновероятно из популяции и вероятность мутации гена мутирующей особи $Q = 0{,}2$. В табл. 1 представлена зависимость максимума целевой функции центра от числа точек разбиения. Стабилизация наступает при 16-ти точках разбиения.

Таблица 1.

N	2	4	8	16	32
F	0.7764	0.9546	0.9661	0.9671	0.9671

4.2. Динамическое программирование и генетический алгоритм

Рассмотрим дифференциальную игру Центра и агентов

$$F(s,m) = \int_0^T \left(\sqrt{s(t)} - m(t)\right) dt \to \max, p;$$

$$\psi^i(x(\cdot), m(\cdot)) = \int_0^T \left\{\nu^i(x(t), m(t)) - \mu(t)[x^i(t)]^2\right\} dt \to \max,$$

$$x^i(t) \geq 0, \quad i = 1, \ldots, M;$$

$$\nu^i(x(t), m(t)) = \frac{x^i(t)m(t)}{\sum\limits_{j=1}^{M} x^j(t)}, \quad i = 1, \ldots, M;$$

$$m(t) = m_0 + \int_0^t m(s)dp(s).$$

В этом примере коэффициент μ в функциях выигрыша агентов не зависит от i. Это приводит к тому, что при вычислении равновесного решения j-й игры функции $z_j(s_j)$ также не зависят от i, что позволяет найти точное выражение для суммы равновесных решений j-й игры агентов: $\bar{s}_j = \sqrt{\dfrac{(M-1)m_j}{2\mu_j}}$. Задача Центра в соответствии с п. 3 заключается в следующем:

$$\sum_{j=0}^{N-1} \left(\sqrt{\bar{s}_j} - m_j\right) \to \max, \Delta_{N-1},\ m_j = m_{j-1}(1 + \sigma_N \delta_j),\ m_0 = a. \quad (4.1)$$

Для решения задачи (4.1) используем динамическое программирование. Прежде всего, введем обозначения: $f_j(m_j) = \sqrt{s_j} - m_j$, L_j – множество возможных значений m_j. Непосредственно проверяется следующее утверждение.

Утверждение 4.1. *Множество возможных значений* $L_0 = a$, $L_j = \{u\colon u = a(1-\sigma_N)^{r_j}(1+\sigma_N)^{q_j}\}$, $j = 1, 2, \ldots, N-1$, r_j, q_j – *целые неотрицательные числа, включая ноль. Определим функцию Беллмана:* $B_k(u) = \max \sum_{j=k}^{N-1} f_j(m_j)$, $\Delta_{k+1}^{N-1} = (\delta_i)_{k+1}^{N-1}$, $m_i = m_{i-1}(1+\sigma_N\delta_i)$, $i = k, \ldots, N-1$, $m_{k-1} = u \in L_{k-1}$.

Уравнения Беллмана:

$$B_{k-1}(u) = \max(f_{k-1}(u(1+\sigma_N\delta)) + B_k(u(1+\sigma_N\delta))), \tag{4.2}$$

$$u \in L_{k-2}, k = N-1, \ldots, 2,$$

$$B_0(a) = f_0(a) + \max(B_1(a(1+\sigma_N\delta))),$$

$$B_{N-1}(u) = \max f_{N-1}(u(1+\sigma_N\delta)), \quad u \in L_{N-2},$$

$$\delta_k^*(u) = \arg\max B_k(u(1+\sigma_N\delta)), \quad \delta_1^*(a) = \arg\max B_1(a(1+\sigma_N\delta)).$$

Результаты вычислений представлены на рис. 2 и 3. Решалась задача с одними и теми же параметрами: $\mu_1^j = \dfrac{1}{2 + 0.1 \cdot j}$, $\sigma_N = 1/N$, число интервалов разбиения $N = 16$, число агентов $M = 2$, $a = 0.3$. На рис. 2 приведены результаты расчета, выполненные генетическим алгоритмом, на рис. 3 – методом динамического программирования.

Оси абсцисс – номера интервалов разбиения. Оси ординат – значения распределяемого ресурса. Решение, приведенное на рис. 3, является точным. Из рисунков следует, что результаты расчетов отличаются незначительно. Время вычисления в обоих методах примерно одинаково. Значение функции выигрыша при использовании генетического алгоритма совпадает с оптимальным значением до четырех знаков после запятой.

Метод динамического программирования, рассмотренный в этом разделе, без существенных изменений можно применить для решения примера 4.1.

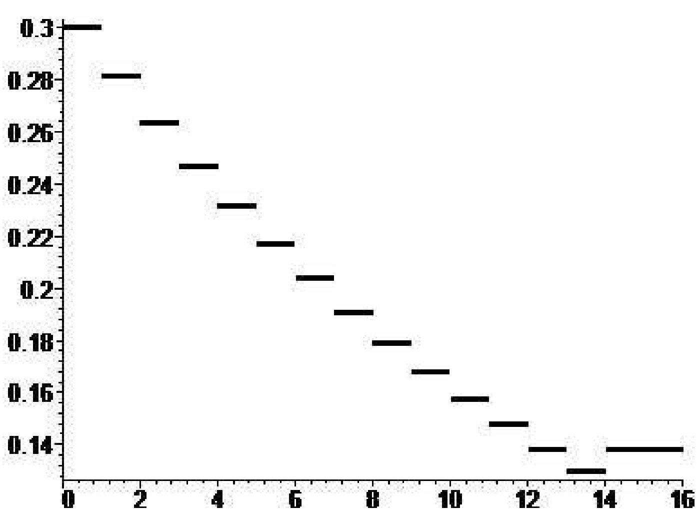

Рисунок 2. Расчеты, выполненные генетическим алгоритмом

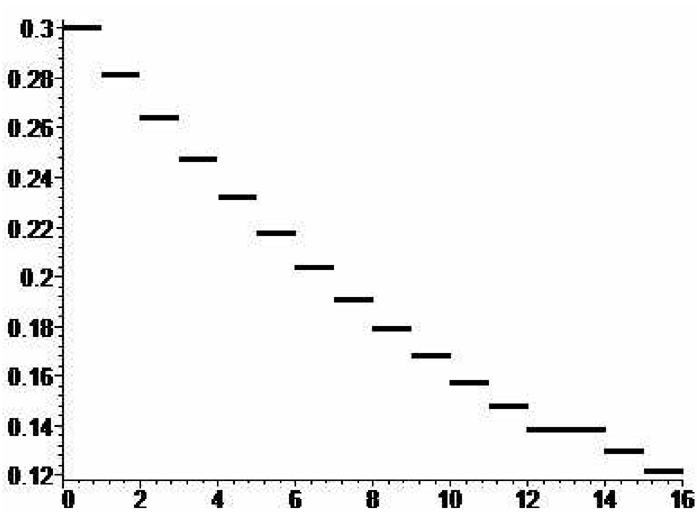

Рисунок 3. Расчеты, выполненные методом динамического программирования

4.3. Аналитическое решение

Рассматривается задача:

$$F(s,m) = \int_0^T \left(\sqrt{s(t)} - m(t)\right) dt \to \max, p;$$

$$\psi^i(x(\cdot), m(\cdot)) = \int_0^T \{\nu^i(x(t), m(t)) - [x^i(t)]^2\}\,dt \to \max,$$

$$x^i(t) \geq 0, \quad i = 1, \ldots, M;$$

$$\nu^i(x(t), m(t)) = \frac{x^i(t)m(t)}{\sum\limits_{j=1}^{M} x^j(t)}, \quad i = 1, \ldots, M;$$

$$m(t) = m_0 + \int_0^t m(s)\,dp(s).$$

При вычислении равновесного решения j-й игры функции $z_j(s_j) = \dfrac{m_j s_j}{2s_j^2 + m_j}$, сумма равновесных решений $\bar{s}_j = \sqrt{\dfrac{(M-1)m_j}{2}}$. В результате задача Центра:

$$\sum_{j=0}^{N-1} \left(\left(\frac{(M-1)m_j}{2} \right)^{1/4} - m_j \right) \to \max, \Delta_{N-1}, \tag{4.3}$$

$$m_j = m_{j-1}(1 + \sigma_N \delta_j), \quad m_0 = a.$$

Рассмотрим функцию $f(x) = \left(\dfrac{(M-1)x}{2}\right)^{1/4} - x$, которая является вогнутой. Элементарный анализ позволяет найти значение $x^* = \dfrac{2}{(M-1)\sqrt[3]{256}}$, при котором достигается максимум $f(x)$. Отсюда следует, что решение задачи Центра выглядит следующим образом: $a^* = x^*$, $\delta_j^* = 0$, $j = 1, \ldots, N-1$.

4.4. Терминальный критерий. Генетический алгоритм

Рассматривается следующая задача:

$$F(S_T, L_T) = \sqrt{S_T} - L_T \to \max, p;$$

$$\psi^i(x(\cdot), m(\cdot)) = \int_0^T \left\{\nu^i(x(t), m(t)) - [x^i(t)]^2\right\} dt \to \max,$$

$$x^i(t) \geq 0, \quad i = 1, \ldots, M;$$

$$\nu^i(x(t), m(t)) = \frac{x^i(t)m(t)}{\sum\limits_{j=1}^{M} x^j(t)}, \quad i = 1, \ldots, M;$$

$$m(t) = m_0 + \int_0^t m(s)\,dp(s), \quad S_T = \int_0^T s(t)\,dt, \quad L_T = \int_0^T m(t)\,dt.$$

Дискретная задача центра в этом примере отличается от задачи центра в предыдущем примере видом функции выигрыша:

$$\sqrt{\sum_{j=0}^{N-1}\sqrt{\frac{(M-1)m_j}{2}}} - \sum_{j=0}^{N-1} m_j \to \max, \Delta_{N-1}, \tag{4.4}$$

$$m_j = m_{j-1}(1+\sigma_N\delta_j), \quad m_0 = a.$$

Применение динамического программирования приводит к вычислительно трудоемкой задаче. Вычислительные затраты растут как показательная функция от числа интервалов разбиения. Результаты расчетов с применением генетического алгоритма при равномерном разбиении приведены на рис. 4.

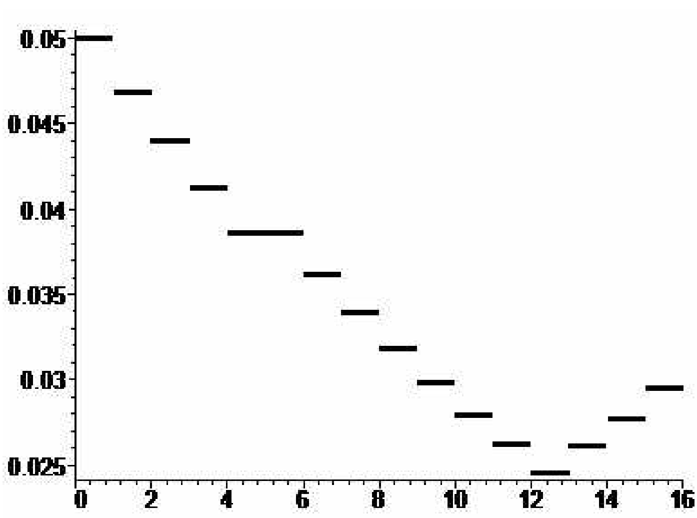

Рисунок 4. Генетический алгоритм. Терминальный критерий. Равномерное разбиение

Оптимальное значение целевой функции равно 0.8903. Значения параметров: $a = 0.05$, $M = 2$, $N = 16$, $\sigma_N = 1/N$.

5. Заключение

Пропорциональный механизм представляется наиболее естественным способом распределения ограниченных ресурсов между активными агентами, что обусловливает внимание к этой постановке задачи. В статическом случае механизмы пропорционального распределения подробно исследованы в теории управления организационными системами [9].

Однако, с теоретической и практической точек зрения более интересна динамическая постановка задачи распределения ресурсов, один из вариантов которой в различных модификациях рассмотрен в настоящей статье. В этом варианте ресурс трактуется как фазовая переменная. Важное предположение состоит в том, что ведущий игрок (центр) не может резко менять значения управляющей переменной, что отвечает реальной практике принятия решений в организационно-экономических системах, а с математической точки зрения позволяет использовать условие Липшица.

При этом для решения возникающей дифференциальной игры используются генетические алгоритмы. Приведенные результаты модельных расчетов позволяют надеяться, что вычислительные методы, использующие генетические алгоритмы, применимы для решения динамической задачи распределения ресурсов, особенно в тех случаях, когда метод динамического программирования неэффективен из-за вычислительной сложности.

В дальнейшем предполагается изучение защиты механизма пропорционального распределения от манипулирования, в частности, возможности обобщения соответствующих результатов для статических постановок.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белявский Г. И., Лила В. Б., Пучков Е. В. *Алгоритм и программная реализация гибридного метода обучения искусственных нейронных сетей* // Программные продукты и системы. 2012. № 4. С. 96–101.

2. Белявский Г. И., Данилова Н. В., Угольницкий Г. А. *Эволюционное моделирование в задачах управления устойчивым развитием активных систем* // Математическая теория игр и ее приложения. 2016. Т. 8. Вып 4. С. 14–29.

3. Гермейер Ю. Б., Ватель И. А. *Игры с иерархическим вектором интересов* // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1974. № 3. С. 54–69.

4. Гладков Л. А., Курейчик В. В., Курейчик В. М. *Генетические алгоритмы.* М., 2006.

5. Горбанева О. И. *Игровые модели распределения ресурсов в иерархических системах управления качеством речной воды* // Математическая теория игр и ее приложения. 2010. Т. 2. Вып 1. С. 27–46.

6. Горбанева О. И., Угольницкий Г. А. *Статические модели согласования общественных и частных интересов при распределении ресурсов* // Математическая теория игр и ее приложения. 2016. Т. 8. Вып 2. С. 28–57.

7. Емельянов В. В., Курейчик В. В., Курейчик В. М. *Теория и практика эволюционного моделирования.* М., 2003.

8. Кукушкин Н. С. *О существовании устойчивых исходов в теоретико-игровой модели экономики с общественными благами* // Докл. АН СССР. 1991. Т. 320. № 1. С. 25–28.

9. Новиков Д. А. *Теория управления организационными системами.* М., 2007.

10. Печерский С. Л., Яновская Е. Б. *Кооперативные игры: решения и аксиомы.* СПб, 2004.

11. Угольницкий Г. А., Усов А. Б. *Исследование дифференциальных моделей иерархических систем управления путем их дискретизации* // Автомат. и телемеханика. 2013. № 2. С. 109–122.

12. Bergstrom, T., Blume C., Varian H. *On the private provision of public goods* // Journal of Public Economics. 1986. N 29. P. 25–49.

13. Boadway, R., Pestiau P., Wildasin D. *Non-cooperative behavior and efficient provision of public goods* // Public Finance. 1989. N 44. P. 1–7.

14. Boadway, R., Pestiau P., Wildasin D. *Tax-transfer policies and the voluntary provision of public goods* // Journal of Public Economics. 1989. N 39. P. 157–176.

15. Christodoulou G., Sgouritza A., Tang B. *On the Efficiency of the Proportional Allocation Mechanism for Divisible Resources* // M. Hoefer (Ed.): SAGT 2015. LNCS 9347. P. 165–177.

16. Cornes R., Hartley R. *Asymmetric contests with general technologies* //Economic Theory. 2005. V. 26. N 4. P. 923–946.

17. Cornes R., Sato T. *Existence and uniqueness of Nash equilibrium in aggregative games: an expository treatment* // Equilibrium Theory for Cournot Oligopolies and Related Games. P. von Mouche, F. Quartieri (Eds.). Springer International Publishing, 2016. P. 47–61.

18. Kahana N., Klunover D. *Private provision of a public good with a time-allocation choice.* //Social Choice and Welfare. 2016. N 7. P. 379–386.

19. Kukushkin N. S. *A Condition for Existence of Nash Equilibrium in Games with Public and Private Objectives* // Games and Economic Behavior. 1994. N 7. P. 177–192.

20. Long N.V. *A Survey of Dynamic Games in Economics.* World Scientific Publishing Company, 2010.

21. Petrosjan L. A., Zenkevich N. A. *Game Theory.* Singapore–London–New-York, 2016.

EVOLUTIONARY METHODS FOR SOLVING DYNAMIC RESOURSE ALLOCATION PROBLEMS

Grigory I. Beliavsky, South Federal University, Dr.Sc., professor (beliavsky@hotmail.com).
Natalia V. Danilova, South Federal University, Cand.Sc., assistant professor (danilova198686@mail.ru).
Gennady A. Ougolnitsky, South Federal University, Dr.Sc., professor (ougoln@mail.ru).

Abstract: The paper proposes a dynamic game-theoretic statement of the problem of resource allocation in the organizational system. The application of algorithms of evolutionary modeling to the solution of such problems is considered. The exposition is illustrated by model examples.

Keywords: dynamic resource allocation problem, differential games, evolutionary modeling.