Математическая Теория Игр и её Приложения, т.10, в.1, с. 65–82

УДК 519.833.2
ББК 22.18

АТОМИЧЕСКАЯ ИГРА МАРШРУТИЗАЦИИ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ПРОПУСКНУЮ СПОСОБНОСТЬ*

Дарья А. Пальцева
Андрей П. Парфенов
Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет прикладной математики –
процессов управления
198504, Санкт-Петербург, Университетский просп., 35
Институт проблем региональной экономики РАН
190013, Санкт-Петербург, Серпуховская ул., 38
e-mail: dandreevna@mail.ru, keldoor@gmail.com

Рассмотрена модель атомической игры маршрутизации на сети с ограниченными пропускными способностями. Несколько игроков выбирают пути из различных начальных пунктов в фиксированный конечный пункт. Затраты на проход через каждую дугу сети задаются возрастающей выпуклой функцией зависящей от количества игроков. Построены алгоритмы полиномиальной временной сложности для нахождения равновесия и социального оптимума. Данная модель применима для описания транспортных сетей с ограниченной пропускной способностью.

---

* Исследование осуществлено при частичной поддержке РФФИ, проект 16-01-00124-а.

Ключевые слова: сетевые игры, игры маршрутизации, потоки в сетях, равновесие по Нэшу, алгоритмы нахождения равновесия.

1. Введение

Игры маршрутизации – это сетевые игры, в которых стратегии игроков – это пути в графе. Этот класс игр позволяет моделировать транспортные сети. В данной работе рассмотрены игры маршрутизации с конечным числом игроков, называемые атомическими играми маршрутизации [9].

В работе [11] были сформулированы принципы поведения участников транспортной сети. Первый принцип, в котором каждый игрок минимизирует собственные затраты – равновесие, второй принцип, в котором минимизируются суммарные затраты игроков – социальный оптимум. Эти принципы носят названия «принципы Вордропа».

В работе [5] построена общая модель транспортной системы. Предложен метод потенциальных функций для нахождения равновесия Вордропа, который сводит задачу нахождения равновесия к задаче нахождения потока минимальной стоимости. Доказана единственность равновесия, если функции затрат строго возрастают и непрерывны. Если функции убывают и непрерывны, равновесие также существует, но не единственно.

Атомические игры маршрутизации впервые рассмотрены Розенталем: в [9] он модифицировал метод потенциальных функций и доказал его применимость для атомических игр. Розенталь показал, что равновесные потоки могут не существовать во взвешенных атомических играх, то есть в таких играх, в которых разные игроки перевозят разное количество единиц.

Сюри [10] рассмотрел цену анархии для атомических игр и доказал, что верхняя граница цены анархии для аффинных функций затрат равна $5/2$.

В [6] рассмотрена неатомическая игра маршрутизации с ограничением сверху на пропускную способность. Предполагается, что при достижении пропускной способности дуги затраты на ее прохождения становятся сколь угодно большими, и потому превышение пропускной способности невозможно. Нахождение равновесия Вордропа при этом сводится к нахождению многопродуктового потока минимальной стоимости.

В [7] рассмотрена неатомическая сетевая игра с заданными в явном виде ограничениями на пропускную способность – то есть игра с запрещенными ситуациями. Показано, что равновесие не единственно даже для линейных функций затрат, причем множество равновесий может быть невыпуклым. Показано, что цена анархии даже для линейных функций затрат может быть сколь угодно большой. Для полиномиальных функций затрат определены оценки сверху на цену стабильности, которые совпадают с оценками сверху на цену анархии в обычных неатомических играх.

Петросян [2] рассмотрел атомическую игру маршрутизации с запрещенными ситуациями, в которой затраты на прохождение каждой дуги являются константами и все пропускные способности дуг равны единице, т.е. пути, выбранные игроками, не могут иметь общих дуг. Доказано существование равновесий двух видов: равновесий $\overline{h}(\pi)$, порожденных перестановками $\pi = (i_1, \ldots, i_m)$, и кооперативного равновесия $\overline{\overline{h}}$, которое минимизирует суммарные затраты.

В статье [1] автор обобщил результаты [2] на случай произвольных пропускных способностей (функции затрат по-прежнему полагаются константами) и построил алгоритм нахождения сильных равновесий Нэша – они же в данном случае являются социальными оптимумами.

В данной работе построена более общая модель атомической сетевой игры, в которой функции затрат – произвольные возрастающие выпуклые функции. Пропускные способности дуг ограничены, но не обязательно равны 1, а могут быть любыми натуральными числами. В этом случае некоторые наборы маршрутов для игроков оказываются запрещенными, и поэтому множества стратегий игроков взаимно зависимы. Построены алгоритмы нахождения социального оптимума и равновесия Нэша.

2. Постановка задачи

Определение 2.1. Сеть *– это набор*

$$G = (X, D, c, \gamma(f), \{s'_i\}_{i\in M}, s''),$$

где

- X *– конечное множество, называемое множеством вершин сети;*

- $D \subset X \times X$ – *множество дуг сети;*
- $c\colon D \to \mathbb{N}$ – *пропускные способности дуг;*
- $\gamma_{lj}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ – *неотрицательная вещественная функция, интерпретируемая для каждой дуги* $(a_l, a_j) \in D$ *как затраты, связанные с переходом игрока из вершины* a_l *в вершину* a_j *по дуге* (a_l, a_j). *Аргументом функции является загруженность дуги, то есть суммарное количество игроков, проходящих через дугу;*
- s'_i – *начальная вершина i-го игрока;*
- s'' – *фиксированная конечная вершина.*

Определение 2.2. Поток в сети G – *это целочисленная функция* $f\colon D \to \mathbb{Z}_+$, *удовлетворяющая условиям:*

- $0 \le f(a_l, a_j) \le c(a_l, a_j)$;
- $\sum\limits_{x\in X} f(a,x) = \sum\limits_{x\in X} f(x,a)$ *для всех* $a \in X$, *кроме* s'_i, $i = 1,\dots,m$, *и* s''.

Данное определение совпадает с классическим определением целочисленного потока в сети [3].

Определение 2.3. Игра маршрутизации на сети G – *это игра с запрещенными ситуациями*

$$\Gamma = (M, \{S_i\}_{i\in M}, \{H_i\}_{i\in M}),$$

где

- $M = \{1,\dots,m\}$ – *множество игроков;*
- S_i – *множество стратегий i-го игрока – это множество путей* $h = ((s'_i = a_0, a_1), (a_1, a_2), \dots, (a_{k-1}, a_k = s''))$, *соединяющих его начальное местоположение* s'_i *с вершиной* s''.
- $S = \prod\limits_{i\in M} S_i$ – *множество ситуаций;*
- $H_i\colon S \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ – *функция выигрыша i-го игрока.*

При этом $H_i = -C_i$, где C_i – функция затрат i-ого игрока:

$$C_i(h_1, \dots, h_m) = \sum_{j=1}^{k} \gamma_{a_{j-1}a_j}(f_{a_{j-1}a_j}),$$

если для всех дуг $(a_l, a_j) \in D$ выполняются условия пропускной способности

$$|\{i : \ (a_l, a_j) \in h_i\}| \leq c(a_l, a_j)$$

и $C_i(h_1, \dots, h_m) = \infty$ в противном случае.

Суммарные затраты всех игроков равны

$$C(h_1, \dots, h_m) = \sum_{i=1}^{n} C_i(h_1, \dots, h_m).$$

В сетевых играх, обычно, рассматривается два поведенческих принципа пользователей транспортной сети [11]:

1. Пользователи сети независимо друг от друга выбирают маршруты следования, соответствующие их минимальным расходам, связанных с проходом по дугам. В атомической игре это равновесие Нэша.

2. Пользователи сети выбирают такие маршруты, которые приносят минимум общих затрат для всех пользователей. Соответствующий минимум называется *социальным оптимумом.*

Эти поведенческие принципы носят названия соответственно первого и второго принципов Вордропа. В данной работе рассмотрены оба принципа, и для игры Γ с сетью G построены алгоритм нахождения социального оптимума и алгоритм нахождения равновесия.

Ранее автором были рассмотрен частный случай данной модели: игры с постоянными функциями стоимости [1]. В этом случае проявляются некоторые особенности атомических игр с ограничениями, отличающие их от атомических игр без ограничений. Если ограничений нет, игра с постоянными функциями стоимости является тривиальной: равновесие в ней всегда совпадает с социальным оптимумом и определяется минимальными путями в графе. При наличии ограничений социальный оптимум всегда является равновесием (и находится по более сложному алгоритму), но равновесие может не быть оптимумом [1]. В случае же переменных функций стоимости, и социальный оптимум, как мы увидим далее, тоже может не быть равновесием.

3. Алгоритм нахождения социального оптимума

Поиск социального оптимума в игре Γ сводится к задаче о целочисленном потоке минимальной стоимости в сети G. Действительно, каждой ситуации в игре соответствует поток, в котором из источника каждого игрока выходит 1 единица потока (или k единиц, если этот источник относится к k игрокам), а в сток входит m единиц. И наоборот, каждому потоку, если он не содержит циклов, соответствует (возможно, не единственным образом) ситуация в игре. А поток минимальной стоимости, если все функции стоимости строго положительны, не содержит циклов [3].

Удобнее работать не с самой функцией $\gamma(f)$, а с функцией $\alpha(f)$, которая задается следующим образом:

$$\alpha_{lj}(f_{lj}) = f_{lj} \cdot \gamma_{lj}(f_{lj})\,.$$

Если функция $\gamma_{lj}(f_{lj})$ показывала расходы, связанные с прохождением дуги (a_l, a_j) для одного игрока, то функция $\alpha_{lj}(f_{lj})$ показывает расходы, связанные с прохождением дуги (a_l, a_j) для всех игроков, проходящих через данную дугу.

Функция $\alpha(f)$ может быть нелинейной, но поскольку она задана только на целочисленных аргументах, то ее можно рассматривать как кусочно-линейную. А для таких функций работает алгоритм сведения к линейным функциям в параллельных дугах, он подробно описан в книге [4]. Такое сведение возможно, если функция $\alpha(f)$ является возрастающей и выпуклой.

Пусть количество игроков – m, количество вершин – n, а количество дуг – $v \le n^2 - n$. Алгоритм нахождения социального оптимума сводится к нахождению потока минимальной стоимости алгоритмом Форда-Фалкерсона [3]. При этом повторяется алгоритм поиска пути минимальной стоимости, а количество повторений – не больше суммарной величины потока m. Если использовать для поиска пути минимальной стоимости алгоритм Дейкстры сложности $O(mv+n\log n)$, получим алгоритм, сложность которого равна $O(m(mv + n\log n))$ – полиномиальная по количеству игроков, вершин и дуг сети.

4. Алгоритм нахождения равновесия

Равновесие в игре можно найти методом потенциалов, если функции $\gamma_{lj}(f_{lj})$ – возрастающие. Получим эффективный алгоритм сведения к задаче о потоке минимальной стоимости, аналогичный алгоритму из предыдущего раздела.

Определение 4.1. Потенциальной функцией *в неатомической игре называется функция*

$$\Phi(f) = \sum_{(a_i,a_j)\in D} \int_0^{f(a_i,a_j)} \gamma_{ij}(x)dx \tag{4.1}$$

Рассмотрим ее аналог для случая атомической игры:

$$\Phi_a(f) = \sum_{(a_i,a_j)\in D} \sum_{k=1}^{f(a_i,a_j)} \gamma_{ij}(k) \tag{4.2}$$

для каждого допустимого потока f. Заметим, что функция Φ_a такая же, как и потенциальная функция Φ, за исключением того, что интеграл $\int_0^{f(a_i,a_j)} \gamma_{ij}(x)dx$ заменен на сумму $\sum\limits_{k=1}^{f(a_i,a_j)} \gamma_{ij}(k)$.

В [9] доказана следующая теорема:

Теорема 4.1 (Розенталя). *В атомической игре* $\Gamma = (M, \{S_i\}_{i\in M}, \{U_i\}_{i\in M})$, *в которой каждый игрок i отправляет поток величины 1 из источника s_i' в сток s'', существует равновесный поток. Это поток f, который доставляет минимум потенциальной функции $\Phi_a(f)$.*

Рассмотрим доказательство теоремы Розенталя [9] – далее мы используем его в доказательстве более общей теоремы.

Доказательство. В атомической игре число игроков конечно, и каждый из них имеет конечное количество стратегий. Следовательно, существует конечное число положительных потоков, а значит, существует поток f, который доставляет минимум потенциальной функции Φ_a. Покажем, что поток f является равновесным в игре $\Gamma =$

$(M, \{S_i\}_{i\in M}, \{U_i\}_{i\in M})$. Предположим, что это не так. Тогда игрок i может строго уменьшить свои затраты, отклонившись от пути P на путь $\widetilde{P}$. То есть

$$0 > \gamma_{\widetilde{P}}(\widetilde{f}) - \gamma_P(f) = \sum_{(a_i,a_j)\in(\widetilde{P}\setminus P)} \gamma_{ij}(f(a_i,a_j)+1) - \sum_{(a_i,a_j)\in(P\setminus\widetilde{P})} \gamma_{ij}(f(a_i,a_j)).$$

С другой стороны, посмотрим, как влияет отклонение i-ого игрока на потенциальную функцию Φ_a. Для ребер $\widetilde{P}\setminus P$ соответствующая сумма (4.1) приобретает дополнительный член $\gamma_{ij}(f(a_i,a_j)+1)$, для ребер $P\setminus\widetilde{P}$ к сумме (4.1) добавляется $\gamma_{ij}(f(a_i,a_j))$, а для $P\cap\widetilde{P}$ соответствующая сумма остается без изменений. Таким образом:

$$\Phi_a(\widetilde{P}) \setminus \Phi_a(P) = \sum_{(a_i,a_j)\in(\widetilde{P}\setminus P)} \gamma_{ij}(f(a_i,a_j)+1) - \sum_{(a_i,a_i)\in(P\setminus\widetilde{P})} \gamma_{ij}(f(a_i,a_j)) =$$
$$= \gamma_{\widetilde{P}}(\widetilde{f}) - \gamma_P(f) < 0.$$

Так как это выражение отрицательное, то значение потенциальной функции при $\widetilde{f}$ строго меньше чем при f, что противоречит выбору f. □

В данной работе теорема (4.1) обобщается на случай, когда пропускные способности дуг в сети ограничены.

Теорема 4.2. *Рассмотрим атомическую игру* $\Gamma = (M, \{S_i\}_{i\in M}, \{U_i\}_{i\in M})$ *с ограниченными пропускными способностями дуг, в которой каждый игрок* i *отправляет поток величины 1 из источника* s_i' *в сток* s''. *Если в сети существует допустимый поток, то есть поток, который имеет конечную стоимость, то существует и равновесный поток, имеющий конечную стоимость.*

Доказательство. Аналогично, вводим дискретную потенциальную функцию (4.2). Рассмотрим дугу $(a_i,\ a_j)$ в сети G. В ней потенциальная функция имеет вид:

$$\Phi_a(f) = \sum_{k=1}^{f(a_i,a_j)} \gamma_{ij}(k).$$

Пусть пропускная способность дуги равна $c(a_i,\ a_j)$. Тогда для всех потоков $f > c(a_i,a_j)$ предполагается, что $\Phi_a(f) = \infty$.

Пусть существует допустимый поток в сети G. Поскольку мы рассматриваем случай с конечным числом игроков, то существует допустимый поток f, который доставляет минимум потенциальной функции (4.2). Покажем, что поток f будет являться равновесным потоком. Предположим, что это не так. Тогда игрок i может строго уменьшить свои затраты, отклонившись от пути P на путь $\widetilde{P}$. Так как поток f – допустимый поток, то затраты игроков конечны. Если их уменьшить, они останутся конечными. Далее применяем доказательство теоремы (4.1). □

Замечание 4.1. Равновесный поток, найденный методом потенциалов – это дискретный аналог равновесия Бэкмана [6]. Будем называть его *равновесием Бэкмана-Розенталя*. Как и в неатомическом случае, каждое равновесие Бэкмана-Розенталя является равновесием Нэша.

Замечание 4.2. Если в сети G не существует допустимого потока, то не существует и равновесного потока.

Таким образом, пользуясь теоремой (4.2), одно равновесие Нэша во введенной модели можно найти методом потенциалов. Этот алгоритм работает в случае, когда все функции затрат – возрастающие.

Алгоритм нахождения равновесия Нэша:

1. Записываем вспомогательную сеть, для которой функции затрат заменены потенциальными функциями. Поскольку функции затрат – возрастающие, потенциальные функции – возрастающие и выпуклые.

2. Находим поток минимальной стоимости тем же методом, что в предыдущем разделе.

Сложность алгоритма – такая же, как в предыдущем разделе.

Алгоритм применим как к случаю, когда несколько игроков стремятся попасть в одну вершину, так и к случаю, когда из одной вершины игроки направляются в несколько других вершин.

Но равновесие Бэкмана-Розенталя – не обязательно единственное равновесие по Нэшу. В атомических играх без ограничений может существовать множество равновесий, даже в случае строго возрастающих функций затрат [9]. Тем более, может существовать множество

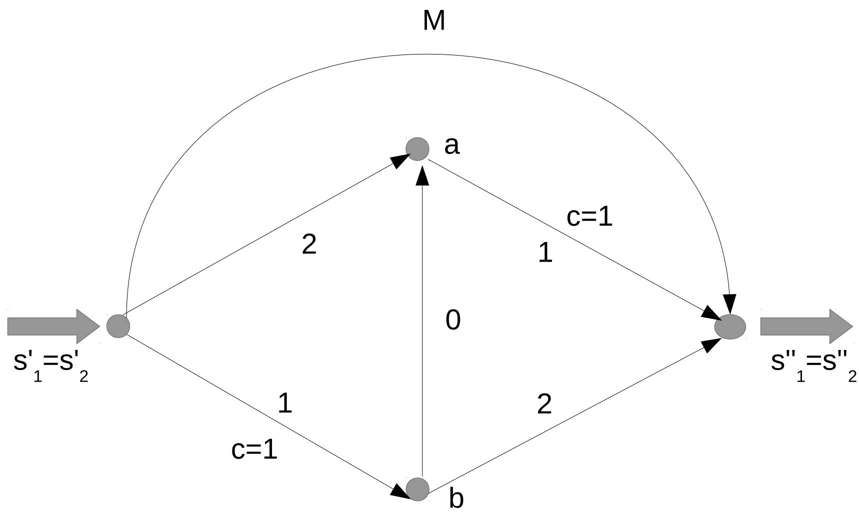

Рисунок 1. Игра с несколькими равновесиями

равновесий в играх с ограничениями. Далее мы увидим это на примерах.

5. Примеры

Пример 1. Рассмотрим игру, модифицирующую пример из [6], изображенную на рисунке 5.

Два игрока выходят из одной и той же вершины и должны прийти в одну и ту же вершину. Две дуги имеют пропускные способности $c = 1$, остальные дуги – бесконечную пропускную способность. Цифрами изображены затраты для дуг, которые постоянны. $M > 3$ – некое большое число.

В этой игре есть 4 возможных равновесия, в которых игроки получают разные выигрыши:

1. 1-й игрок идет по пути (s_1', a, s_1''), а 2-й – по пути (s_2', b, s_2''), затраты обоих игроков равны 3;

2. 1-й игрок идет по пути (s_1', b, s_1''), а 2-й – по пути (s_2', a, s_2''), затраты обоих игроков равны 3;

3. 1-й игрок идет по пути (s_1', s_1''), а 2-й – по пути (s_2', b, a, s_2''), при

этом затраты 1-го игрока равны M, а затраты 2-го игрока равны 2;

4. 1-й игрок идет по пути (s_1', b, a, s_1''), а 2-й – по пути (s_2', s_2''), при этом затраты 1-го игрока равны 2, а затраты 2-го игрока равны M.

Поскольку игра симметрична, равновесия разбиваются на 2 пары, полученные путем перестановки игроков. Первая пара равновесий – равновесия Бэкмана-Розенталя, вторая пара – нет.

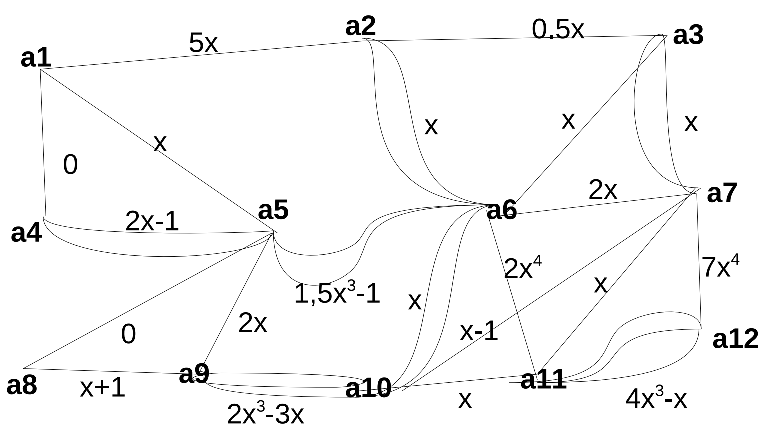

Рисунок 2. Игра с 4 игроками

Пример 2 – большая игра, в которой равновесие и системный оптимум найдены путем вычисления в MatLab.

Рассмотрим игру маршрутизации на сети, представленной на рис. 2. В данной игре участвуют четыре игрока ($m = 4$):

$$M = \{i_1, i_2, i_3, i_4\}.$$

Начальные вершины у игроков следующие:

- у игрока i_1: $s_1' = a^1$,
- у игрока i_2: $s_2' = a^1$,
- у игрока i_3: $s_3' = a^4$,

- у игрока i_4: $s'_4 = a^8$.

Конечной вершиной для всех игроков является вершина $s'' = a^{12}$. Для этого примера значения функции $\alpha(f)$ следующие:

$$\alpha_{1,5}(x) = \alpha_{2,6}(x) = \alpha_{3,7}(x) = \alpha_{10,11}(x) = x;$$
$$\alpha_{6,10}(x) = \alpha_{3,6}(x) = \alpha_{7,10}(x) = \alpha_{7,11}(x) = x;$$
$$\alpha_{1,4}(x) = \alpha_{5,8}(x) = 0; \alpha_{6,7}(x) = \alpha_{5,9}(x) = 2x;$$
$$\alpha_{2,3}(x) = 0.5x; \alpha_{6,11}(x) = 2x^4; \alpha_{9,10}(x) = 2x^3 - 3x;$$
$$\alpha_{7,12}(x) = 7x^4; \alpha_{11,12}(x) = 4x^3 - x; \alpha_{1,2}(x) = 5x;$$
$$\alpha_{8,9}(x) = \begin{cases} x+1, & x \geq 1 \\ 0, & x < 1 \end{cases}$$
$$\alpha_{5,6}(x) = \begin{cases} 1.5x^3 - 1, & x \geq 1 \\ 0, & x < 1 \end{cases}$$
$$\alpha_{7,10}(x) = \begin{cases} x-1, & x \geq 1 \\ 0, & x < 1 \end{cases}$$
$$\alpha_{4,5}(x) = \begin{cases} 2x-1, & x \geq 1 \\ 0, & x < 1 \end{cases}$$

Пропускные способности на рис. 2 показаны количеством дуг между соответствующими вершинами и равны:

$$c(a^1, a^4) = c(a^1, a^2) = c(a^2, a^3) = c(a^3, a^6) = c(a^6, a^7) = c(a^7, a^{12}) =$$
$$= c(a^7, a^{11}) = c(a^{10}, a^{11}) = c(a^5, a^9) = c(a^8, a^9) = c(a^5, a^8) = c(a^7, a^{10}) =$$
$$= c(a^1, a^5) = c(a^6, a^{11}) = 1;$$
$$c(a^4, a^5) = c(a^5, a^6) = c(a^2, a^6) = c(a^3, a^7) = c(a^6, a^{10}) = 2;$$
$$c(a^9, a^{10}) = c(a^{11}, a^{12}) = 3.$$

В данной задаче функции затрат во всех дугах сети являются возрастающими выпуклыми функциями. Значит, можно применить алгоритм нахождения социального оптимума. Получаем следующий результат:

$$h_1 = \{(a^1, a^2), (a^2, a^3), (a^3, a^7), (a^7, a^{11}), (a^{11}, a^{12})\},$$
$$h_2 = \{(a^1, a^5), (a^5, a^6), (a^6, a^{10}), (a^{10}, a^7), (a^7, a^{12})\},$$
$$h_3 = \{(a^4, a^5), (a^5, a^6), (a^6, a^{11}), (a^{11}, a^{12})\},$$
$$h_4 = \{(a^8, a^9), (a^9, a^{10}), (a^{10}, a^{11}), (a^{11}, a^{12})\}.$$

Здесь h_i – оптимальный путь для i-ого игрока, минимизирующий общие затраты.

Получаем следующий результат:

$$C_1 = 42.5; \quad C_2 = 14.5; \quad C_3 = 43.5; \quad C_4 = 37$$

$$C = \min_h \sum_{i=1}^{4} C_i(h) = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 137.5.$$

Здесь C_i – затраты i-ого игрока, C – общие затраты всех четырех игроков.

В рассматриваемой игре каждый игрок i_j, $j = 1..4$, отправляет поток величины 1 из источника s'_j в сток s''. По теореме в такой игре существует равновесный поток, который можно найти с помощью алгоритма, описанного на стр. 73. Получаем результаты, описанные ниже.

$$h_1 = \{(a^1, a^2), (a^2, a^3), (a^3, a^7), (a^7, a^{11}), (a^{11}, a^{12})\},$$
$$h_2 = \{(a^1, a^5), (a^5, a^6), (a^6, a^{11}), (a^{11}, a^{12})\},$$
$$h_3 = \{(a^4, a^5), (a^5, a^9), (a^9, a^{10}), (a^{10}, a^7), (a^7, a^{12})\},$$
$$h_4 = \{(a^8, a^9), (a^9, a^{10}), (a^{10}, a^{11}), (a^{11}, a^{12})\}.$$

Здесь h_i – равновесный путь для i-ого игрока. Затраты игроков будут следующие:

$$C_1^* = 42.5; \quad C_2^* = 38.5; \quad C_3^* = 15; \quad C_4^* = 43$$

$$C^* = C_1^* + C_2^* + C_3^* + C_4^* = 139.$$

Аналогично, C_i^* – затраты i-ого игрока, C^* – общие затраты всех четырех игроков. При этом социальный оптимум не совпадает с равновесием.

6. Цена анархии и цена стабильности

Поскольку в атомических играх может существовать множество равновесий с разными выигрышами, при определении эффективности равновесий используются два понятия: цена анархии и цена стабильности [10].

Обозначим через $h_C \in S$ социальный оптимум, тогда $C(h_C)$ – минимально возможные суммарные затраты игроков. Очевидно, в любой другой ситуации h затраты будут больше, чем в ситуации социального оптимума. Поскольку затраты всегда неотрицательны, удобно эти разницу определять как отношение

$$r(h) = \frac{C(h)}{C(h_C)}.$$

При этом, если $C(h_C) = 0$ (т.е. есть ситуация, в которой игроки достигают цели вообще без затрат), то считаем $r(h) = 1$, если $C(h) = 0$, и $r(h) = \infty$ в противном случае.

Таким образом, отношение $r(h)$ всегда не меньше 1. Оно показывает, во сколько раз затраты игроков в данной ситуации больше минимально возможных затрат.

Важный для практических приложений вопрос – отношение $r(h)$ для равновесий Нэша. Обозначим через $\mathrm{NE}(G)$ множество равновесий Нэша в игре G.

Цена анархии – отношение r для худшего равновесия:

$$r_a = \max_{h \in \mathrm{NE}(G)} r(h).$$

Цена стабильности – отношение r для лучшего равновесия

$$r_a = \min_{h \in \mathrm{NE}(G)} r(h).$$

Разумеется, если равновесие в игре единственно, то цена анархии совпадает с ценой стабильности. Но в нашем случае равновесие не единственно, а цена анархии не меньше цены стабильности, но не обязательно ей равна.

Важный вопрос – определение ограничений сверху на цену анархии и цену стабильности. Эти ограничения зависят от класса, к которому принадлежат функции затрат в сети. Чем более широкий класс функций мы рассматриваем, тем шире множество возможных игр, а значит, больше ограничения сверху на цену анархии и цену стабильности.

Пример 1 (см. рис. 5) показывает, что цена анархии может быть сколь угодно большой даже в простейшем случае: для постоянных функций затрат. Действительно, в данной игре есть 4 равновесия с выигрышами $(-3,-3)$, $(-3,-3)$, $(-M,-2), (-2,-M)$. 1-я и 2-я ситуация равновесия являются также социальными оптимумами. Таким образом, цена стабильности в данной игре равна 1, а цена анархии равна $\frac{M+2}{6}$ – сколь угодно большое число.

Для игр с постоянными функциями затрат социальный оптимум всегда является равновесием [1]. Отсюда следует, что цена стабильности в этом случае всегда равна 1. Приведенный выше пример также иллюстрирует особенности атомических игр с ограничениями, отличающие их от игр без ограничения: в случае отсутствия ограничений и цена анархии, и цена стабильности равны 1.

Что касается цены стабильности для функций затрат более сложного вида, этот вопрос мало изучен даже для атомических игр без ограничения пропускных способностей. Известны только некоторые ограничения сверху на цену анархии, которые автоматически ограничивают и цену стабильности [10]. Таким образом, вопрос о цене стабильности требует дальнейших исследований.

7. Применение в моделировании транспортных систем

К области применения результатов данной работы можно отнести моделирование задачи транспортировки грузов из нескольких пунктов производства в пункты сбыта или хранения. При этом должно учитываться, что имеются либо несколько пунктов производства и один пункт сбыта, либо один пункт производства и несколько пунктов сбыта.

В частном случае, когда затраты на переход по дугам задаются постоянными величинами, управляемые объекты не влияют друг на друга. А если же ввести возрастающие функции затрат на проход по дугам, то в сети могут возникнуть пробки и заторы, обоснованные тем, что «дешевые пути» будут предпочтительнее для большинства игроков.

Социальный оптимум означает, что транспортировкой управляет единый центр, который стремится минимизировать свои суммарные затраты. Равновесие же означает, что каждый транспортирующий стремится минимизировать собственные затраты, и ему невыгодно отклоняться от равновесия.

С введением пропускных способностей дуг мы расширили применение подобных методов на случаи ограниченных возможностей транспортировки некоторыми способами. Примером таких способов перевозок могут служить железные дороги или узкие реки и каналы, в которых в определенный промежуток времени может находится лишь несколько поездов или судов.

8. Заключение

В работе рассмотрены атомические игры маршрутизации на сети с ограниченными пропускными способностями дуг и одним пунктом назначения. Затраты игроков на продвижение по дугам сети задаются вещественными, возрастающими, выпуклыми функциями. Даны оценки цены анархии и цены стабильности в данном классе игр.

Построены два алгоритма. Первый – алгоритм нахождения социального оптимума, то есть таких путей для игроков, что суммарные затраты всех игроков минимальны. Второй – алгоритм нахождения равновесия Нэша. Равновесие в игре находится методом потенциальных функций – для этого мы обобщили теорему Розенталя о существовании равновесия в игре на случай, когда пропускные способности дуг ограничены. Приведен пример нахождения равновесия и социального оптимума.

Поскольку функции стоимости в атомических играх заданы на множестве натуральных чисел, их можно считать кусочно-постоянными. Возможное обобщение рассмотренной модели на случай бесконечного числа игроков – неатомические игры с кусочно-постоянными функциями стоимости и ограниченными пропускными способностями. Данный класс игр рассмотрен автором в работе [8].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Парфенов А.П. *Игра маршрутизации с ограничениями на пропускную способность и постоянными функциями стоимости.* // Новая наука: история становления, современное состояние, перспективы развития. Сборник статей Международной научно-практической конференции. Саратов: 2016. С. 3–10.

2. Петросян Л.А *Одна транспортная теоретико-игровая модель на сети* // Математическая теория игр и ее приложения. 2011. Т.3. № 4. С. 89–98.

3. Форд Л., Фалкерсон Д. *Потоки в сетях* М.: Мир, 1966.

4. Ху Т. *Целочисленное программирование и потоки в сетях* М.: Мир, 1974.

5. Beckmann M., McGuire C.B., Winsten C.B. *Studies in the Economics of Transportation* Yale University Press, 1956.

6. Jose R. Correa, Andreas S. Schulz, Nicolas E. Stier Moses *Selfish routing in capacitated networks* //Math. Oper. Res. 2004. 29 (4). P. 961–976.

7. de Palma A., Nesterov Y. *Stationary Dynamic Solutions in Congested Transportation Networks: Summary and Perspectives* // Networks and Spatial Economics. 2003. 3. P. 371–395.

8. Parfenov A. *Algorithm for Searching an Equilibrium in a Routing Game with Piecewise Constant Cost Functions* // International Game Theory Review. 2018. 1850006. 10.1142/S0219198918500068.

9. Rosenthal W. *The Network Equilibrium Problem in Integers* // Networks. 1973. 3(1). P. 53–59.

10. Suri S. , Toth C., Zhou. Y. *Selfish Load Balancing and Atomic Congestion Games* //Algorithmica. 2007. 47(1). P. 79–96.

11. Wardrop J. G. *Some theoretical aspects of road traffic research* // Proc. Institute of Civil Engineers. Pt. II. 1952. 1. P. 325–378.

ATOMIC ROUTING GAME WITH CAPACITY CONSTRAINTS

Darya A. Paltseva, Saint-Petersburg State University, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes, Institute for Problems of Regional Economics RAS (dandreevna@mail.ru),
Andrey P. Parfyonov, Saint-Petersburg State University, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes, Institute for Problems of Regional Economics RAS (keldoor@gmail.com).

Abstract: A model of atomic routing game is considered. A network in this model has capacity constraints. Players in this game choose routes from some sources to one sink. A cost for each arc is determined by function which is increasing and convex. Algorithms finding Nash equilibrium and social optimum are constructed. These algorithms have polynomial-time complexity. This model can be used for transport networks with bounded traffic.

Keywords: network games, routing games, network flows, Nash equilibrium, algorithm for searching equilibrium.