

УДК 519.834, 004.023

ББК 22.18

УСТОЙЧИВОСТЬ КОАЛИЦИЙ В КООПЕРАТИВНОЙ ИГРЕ МАРШРУТИЗАЦИИ И УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ

ВЯЧЕСЛАВ А. ШИРОКИХ

ЕЛЕНА А. ЛЕЖНИНА

Санкт-Петербургский государственный университет
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9
e-mail: shva.erivel@gmail.com, e.lezhnina@spbu.ru

В работе исследуется вопрос устойчивости коалиций перевозчиков в кооперативной игре маршрутизации запасов (Cooperative inventory routing game, CIRG). Сложностью данной задачи является не только вычислительная трудность класса задач маршрутизации, но и вопрос построения характеристической функции, т. к. эвристические решения, обычно используемые в задачах маршрутизации, в общем случае не могут гарантировать свойство субаддитивности. В свою очередь, нарушение субаддитивности может привести к неустойчивости коалиции, т. к. игрок сможет получить большую выгоду в другой коалиции или индивидуально. Для решения задач маршрутизации в работе используются алгоритм адаптивного поиска в большой окрестности (Adaptive large neighborhood search, ALNS) и его модификация методом динамической адаптации (DALNS). Специальный алгоритм прямого построения коалиций (Direct coalition induction algorithm, *DCIA*) использован для построения субаддитивной характеристической функции, а также исследованы 4 различных концепции решения кооперативной игры. Анализ обширных вычислительных экспериментов позволяет проиллюстрировать в статье зависимость устойчивости

максимальной коалиции игроков от таких факторов, как алгоритм решения задач маршрутизации, алгоритм построения характеристической функции и концепция решения кооперативной игры.

Ключевые слова: задача управления запасами, кооперативная игра, характеристическая функция, эвристический алгоритм.

1. Введение

Сотрудничество между перевозчиками, которые предоставляют услуги товаров, может привести к значительным преимуществам для участников, если будет получено взаимное решение. В настоящее время существует ряд исследований по сотрудничеству грузоотправителей. Однако подавляющее большинство из них посвящено изучению возможностей сотрудничества, которые охватывают процесс принятия решений или методы распределения затрат для большой коалиции [11], но не рассматривают проблемы маршрутизации. Несколько исследований рассматривают проблему маршрутизации и создают кооперативные игровые модели [16]. Однако эти работы не учитывают эвристический характер решений [14], [17], или работают непосредственно с оптимальными [13]. Однако такой подход ставит под угрозу возможное сотрудничество из-за проблемы неустойчивости решения при использовании эвристических методов. Эта проблема была впервые решена Захаровым и Щегряевым [18]. Проблемы, связанные с маршрутизацией, представляют собой сложные комбинаторные задачи оптимизации, относящиеся к NP -сложным, и возникают в крупномасштабных системах, которые являются современными распределительными сетями.

Задача управления запасами (Inventory Routing Problem, *IRP*) представляет собой проблему совместного построения маршрутов и управления запасами для временного периода T , состоящий из периодов $t = 1, \dots, T$. Поскольку основное внимание в представленной работе уделяется совместным игровым аспектам, то для простоты за основу этой работы взята модель *IRP*, также рассмотренная, например, Archetti et al. [1]: одно транспортное средство, одно депо, однородный продукт, детерминированный спрос, отсутствие временных окон и т. д. Подробный обзор современных моделей *IRP* можно

найти в работах Coelho et al. [5] и Archetti et al. [2].

Теория кооперативных игр широко применяется для моделирования взаимодействий нескольких участников в различных ситуациях. Эта теория предоставляет математические методы для расчета индивидуальной полезности для каждого игрока в коалиции, но перед их использованием необходимо построить характеристическую функцию игры. Основным условием, налагаемым на эту функцию, является субаддитивность (если цель состоит в минимизации функции затрат), что может быть не выполнено, когда для получения совместных решений используется эвристический алгоритм. В таких случаях возможны ситуации, когда игрокам невыгодно оставаться в определенной коалиции: они могут получить большую выгоду, работая самостоятельно или примкнув к другой коалиции [12]. Устойчивость коалиции зависит от выбранной концепции решения. В статье исследуется устойчивость максимальной коалиции для четырех концепций решения.

2. Модель

Пусть имеется полный граф $G = (\{M, N\}, A)$, где $M = \{1, \dots, m\}$ – множество вершин, в которых располагаются поставщики; $N = \{1, \dots, n\}$ – множество вершин, в которых располагаются потребители; A – множество дуг, связывающих вершины.

Каждый поставщик обслуживает определенную группу потребителей $N_i \subseteq N$ и должен решить частную задачу *IRP* на редуцированном графе $G = (\{i\}, N_i, A_i)$. Предполагается, что выполняются следующие условия: если $i_1, i_2 \in M$ и $i_1 \neq i_2$, тогда $N_{i_1} \cap N_{i_2} = \emptyset$.

Транспортные издержки при использовании дуги $(i, j) \in A$ равны $c_{ij} > 0$. Горизонт планирования состоит из T периодов. В начале каждого периода r_i единиц продукта доставляются в узел поставщиком i , и в конце периода d_i единиц доставляются каждому потребителю j со склада. Транспортный парк каждого перевозчика состоит из одного транспортного средства. В течение каждого периода транспортное средство может совершить один рейс, который начинается и заканчивается в депо. Вместимость каждого транспортного средства составляет Q единиц.

Потребители могут хранить запас продукции, имея изменяющийся запас I_{jt} , $t = 1, \dots, T$. Вместимость склада U_j единиц. Стоимость

хранения за единицу продукции h_j единиц.

Маршруты и объемы доставки являются переменными в задаче *IRP*. Цель состоит в том, чтобы минимизировать общие расходы на транспортировку и хранение в течение временного периода.

Предположим, что перевозчики могут объединяться в коалиции $S \subseteq M$, объединяя их множества потребителей. Таким образом, каждая коалиция обслуживает множество потребителей $N_S = \bigcup_{i \in S} N_i$. При этом должны выполняться условия:

$$N_{S_1} \cap N_{S_2} = \emptyset, \text{ если } S_1 \cap S_2 = \emptyset.$$

Каждая коалиция должна решить специальный случай *IRP* с несколькими депо. Предположим, что x_{ijt} – бинарная переменная, равная единице, если какой-либо маршрут проходит через дугу (i, j) в момент времени t , и нулю в противном случае. q_{ij} – целочисленная переменная, обозначающая величину поставки потребителю i в период t . Далее вводятся новые вещественные переменные s_{it} , отражающие суммарную величину доставленного груза в текущем маршруте, включая клиента i в период t . Важная функция этих переменных – гарантировать отсутствие замкнутых циклов, не связанных с точкой отправления (депо). Начальный уровень запасов для потребителей и перевозчиков $I_{i0} = I_i^0 = \text{const}$ для всех $i \in N$. Таким образом, задача *IRP* для коалиции S может быть описана в форме задачи линейного программирования:

$$\sum_{t=1}^T \sum_{i \in S \cup N_S} \sum_{j \in S \cup N_S} c_{ij} x_{ijt} + \sum_{t=1}^T \sum_{i \in S \cup N_S} h_i I_{it} \rightarrow \min \quad (2.1)$$

$$I_{it} = I_{i,t-1} + r_i - \sum_{j \in N_S} s_{jt} x_{jit}, \quad \forall i \in S \cup N_S, \quad t = 1, \dots, T \quad (2.2)$$

$$I_{jt} = I_{j,t-1} - d_j + q_{jt}, \quad j \in N_S, \quad t = 1, \dots, T \quad (2.3)$$

$$0 \leq I_{it} \leq U_i, \quad \forall i \in S \cup N_S, \quad t = 1, \dots, T \quad (2.4)$$

$$\sum_{j \in N_S} x_{ijt} = \sum_{j \in N_S} x_{jit} \leq 1, \quad \forall i \in S \cup N_S, \quad t = 1, \dots, T \quad (2.5)$$

$$\sum_{i \in N_S} x_{ijt} = \sum_{i \in N_S} x_{jit} \leq 1, \quad i \in S, \quad t = 1, \dots, T \quad (2.6)$$

$$q_{it} \leq s_{it} \leq Q, \quad \forall i \in N_S, \quad t = 1, \dots, T \quad (2.7)$$

$$s_{it} - s_{jt} + Qx_{ijt} \leq Q - q_{jt}, \quad \forall i, j \in N_S, i \neq j, \quad t = 1, \dots, T. \quad (2.8)$$

Целевая функция (2.1) представляет сумму всех транспортных издержек и затрат на хранение. Ограничения (2.2) и (2.3) представляют динамику запасов на складе и у потребителя. Формулы (2.4) и (2.7) описывают ограничения на размеры склада и транспорта для перевозок. Левые части в формулах (2.5) и (2.6) обеспечивают непрерывность маршрутов, а правые части представляют разовые посещения каждого клиента (2.5) и отдельных транспортных средств для каждого перевозчика (2.6). Дополнительно, ограничение (2.7) позволяет гарантировать, что вместимость транспортного средства не нарушается. Чтобы описать кооперативную игру, необходимо определить множество игроков и характеристическую функцию игры. Обозначим через M множество игроков в случае $CIRG$.

Определение 2.1. *Характеристической функцией называется функция $c : 2^M \rightarrow \mathbb{R}$, где 2^M – множество всех возможных коалиций игроков, удовлетворяющих условию $c(\emptyset) = 0$.*

Известно, что необходимым условием для кооперации игроков, которые хотят минимизировать их затраты, является условие субаддитивности характеристической функции кооперативной игры. В противном случае игроки не захотят присоединиться к коалиции. Таким образом, необходимо построить субаддитивную характеристическую функцию, такую что

$$\forall S, T \subset M : S \cap T = \emptyset, \quad c(S \cup T) \leq c(S) + c(T). \quad (2.9)$$

В противном случае отдельные игроки не будут получать выгоды от кооперации, что помешает формированию коалиций.

Легко заметить, что в $CIRG$ для любых двух непересекающихся коалиций S и T точное минимальное значение f_{opt} целевой функции (2.1) очевидно удовлетворяет условию

$$f_{opt}(S \cup T) \leq f_{opt}(S) + f_{opt}(T). \quad (2.10)$$

К сожалению, в сетях большого размера на практике невозможно получить точные минимальные значения целевой функции из-за

вычислительной сложности задачи, что приводит к необходимости использования эвристик. Для каждой коалиции S при помощи эвристического алгоритма можно найти приближённое значение $f^h(S)$. Такое эвристическое решение не гарантирует оптимальности, т. е. имеет место следующее условие:

$$f_{opt}(S) \leq f^h(S). \quad (2.11)$$

Комбинируя условия (2.10) и (2.11), получаем:

$$f_{opt}(S \cup T) \leq f^h(S \cup T), f_{opt}(S \cup T) \leq f^h(S) + f^h(T). \quad (2.12)$$

Однако мы не можем предсказать разницу между оптимальным и эвристическим значением целевой функции, поэтому возможен случай

$$f_{opt}(S \cup T) > f^h(S) + f^h(T). \quad (2.13)$$

Таким образом, минимальное значение целевой функции, полученное при помощи эвристических алгоритмов, в общем случае не удовлетворяет условию субаддитивности и не может использоваться как значение характеристической функции. Чтобы избежать этой проблемы, можно использовать алгоритм для корректирования значений характеристической функции *DCIA*, определенный следующим образом [18]:

$$c(S) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} f^h(S), |S| = 1 \\ \min\{f^h(S), \min_{L \subset S} (c(S \setminus L) + c(L))\} \end{cases}.$$

Теорема 2.1 (Захаров, Щегряев [18]). *Характеристическая функция, построенная при помощи алгоритма DCIA, удовлетворяет условию субаддитивности.*

3. Алгоритм ALNS

ALNS (Adaptive Large Neighborhood Search) – алгоритм, предложенный Ropke и Pisinger [15]. Основная идея алгоритма – адаптивный случайный локальный поиск в окрестности решения. Область

решения здесь определяется как все решения, полученные от применения одного из элементарных действий, таких как случайная вставка/удаление клиентов на маршруте или повторное назначение маршрутов. Такие элементарные действия выбираются случайным образом, соответственно их весам. Важной частью алгоритма является модель моделируемого отжига, позволяющая исследовать решения хуже на предмет новой области поиска, что позволяет обходить локальные минимумы. Подробное описание алгоритма *ALNS* представлено в [6].

4. Динамическая адаптация

Идея динамической адаптации эвристических алгоритмов достаточно проста. Она основана на несостоятельности с течением времени сгенерированных решений. Цель динамической адаптации определенного эвристического алгоритма заключается в том, чтобы улучшить полученное решение до его выполнения. Предположим, что $A(p)$ является функцией некоторого алгоритма, сопоставляющая начальные параметры задачи $p \in P$ с порожденным решением. Предположим, что в каждый период времени $t = 1, 2, \dots, T - 1$ мы имеем $p = p_t$, где p_t – состояние в момент времени t . Состояние p_t – то же, что и в начальный момент времени, но с уровнем запасов, достигнутым в конце периода t и $s(t, p)$ является продолжением решения, которое было получено в предыдущий период для интервала $t + 1, t + 2, \dots, T$. В начальный момент времени имеем $s_0 = s(0, p)$: s' – это решение, полученное с помощью алгоритма A для текущей подзадачи [19].

Общую схему алгоритма динамической адаптации (DA) можно представить следующим образом:

Алгоритм 1: DA

- ```

0: Инициализация: $p = p_0, s = s_0, t = 1$
1: while $t < T$ do
2: $s' = a(p)$
3: if $f(s') < f(s(t, p))$ then
4: установим $s(k, p) = s'$

```

- 5:     установим  $k = k + 1$   
 6:     установим  $p = p_t$

Применяя динамическую адаптацию к алгоритму *ALNS*, получаем алгоритм *DALNS*. Пусть  $ALNS(\cdot)$  – функция алгоритма *ALNS*,  $s$  – решение, полученное при помощи этого алгоритма,  $S_1$  – последовательность узлов, пройденных решением  $s$ ,  $S_2$  – последовательность оставшихся узлов,  $C$  – множество параметров задачи. Тогда общая схема которого может быть представлена Алгоритмом 2.

---

### Алгоритм 2: DALNS

---

- 0: Инициализация:  $S_1 = \emptyset$ ,  $S_2 = s$   
 1: **while**  $S_2 \neq \emptyset$  **do**  
 2:      $s = ALNS(S_2, C)$   
 3:     **if**  $f(s) < f(S_2)$  **then**  $S_2 = s$   
 4:      $C \leftarrow S_2[1]$ ,  $S_1 \leftarrow_2 [1]$ ,  $S_2 = S_2 \setminus S_2[1]$
- 

Для иллюстрации алгоритма рассмотрим три разных *IRP* с ресурса [20] из набора, предложенного Archetti et al. [1], а именно с высокими затратами на хранение, 6 периодами времени и 10 клиентами: *abs1n10*, *abs2n10* и *abs3n10*. Для построения *CIRG* мы объединили эти три *IRP*. Результирующий экземпляр *CIRG* показан на рис. 1. Каждый экземпляр *IRP* представлен различными наборами точек (квадраты, треугольники и круги). Каждая точка представляет собой депо  $\{i\}$  одного перевозчика и клиентов  $j \in N$ .

В этой игре есть семь возможных непустых коалиций перевозчиков, которые могут быть сформированы. На первом этапе мы рассчитаем эвристические значения  $f^h$  минимальных затрат по каждой проблеме коалиции (табл. 1).

Таблица 1. Эвристическая оценка характеристической функции

| coalition | $\{1\}$ | $\{2\}$ | $\{3\}$ | $\{1,2\}$ | $\{1,3\}$ | $\{2,3\}$ | $\{1,2,3\}$ |
|-----------|---------|---------|---------|-----------|-----------|-----------|-------------|
| ALNS      | 10988   | 11443   | 9866    | 21135     | 22062     | 21567     | 30335       |
| DALNS     | 7885    | 8607    | 7588    | 15839     | 15702     | 15317     | 22735       |

Решения, данные алгоритмами *ALNS* и *DALNS* для трех отдельных совместных решений и полного взаимодействия, представлены

Рисунок 1. CIRG

на рис. 2 и 3. В верхней части рисунка есть три отдельных решения, которые минимизируют индивидуальные затраты  $f^h(i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , а в нижней части – решение, которое сводит к минимуму общие затраты коалиции  $f^h(1, 2, 3)$ . Сравнивая решения, можно видеть, что алгоритм *DALNS* дает лучшие решения, чем алгоритм *ALNS*.

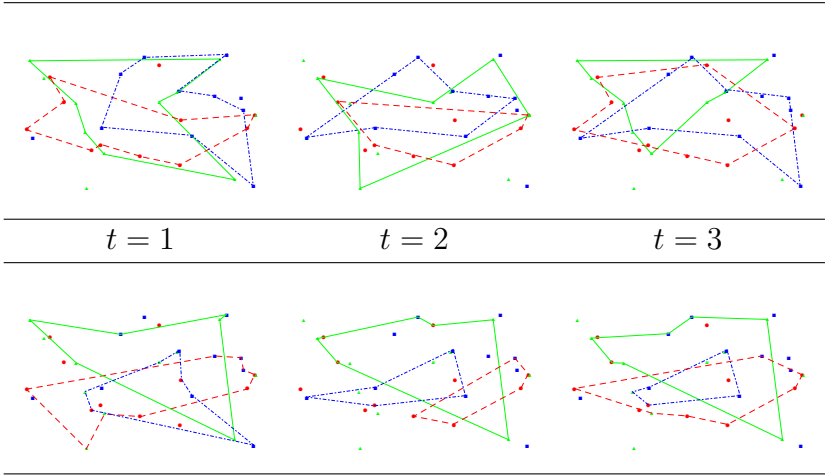


Рисунок 2. Решения, полученные алгоритмом ALNS

Основываясь на значениях из табл. 1, определим значения характеристической функции. Следуя алгоритму индукции прямого коа-

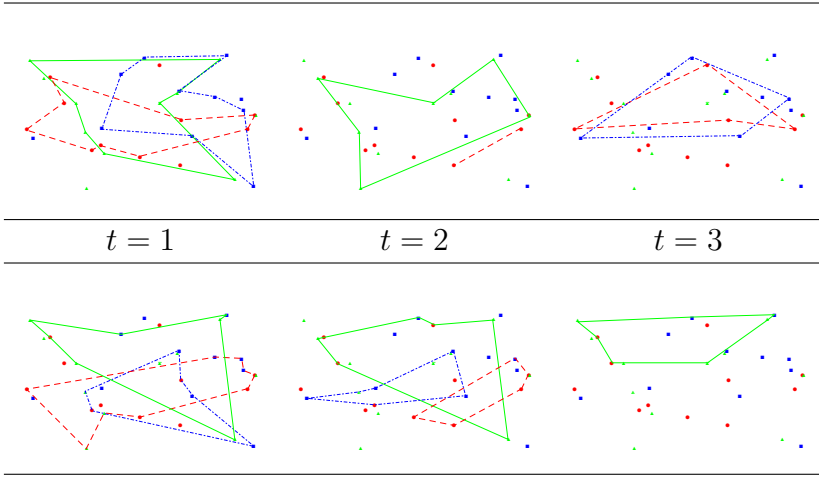


Рисунок 3. Решения, полученные алгоритмом DALNS

лиции, мы принимаем эвристические значения как характеристические значения функций:

$$c(\{1\}) \stackrel{\text{def}}{=} f^h(\{1\}), c(\{2\}) \stackrel{\text{def}}{=} f^h(2), c(\{3\}) \stackrel{\text{def}}{=} f^h(\{3\}).$$

Тогда мы можем определить характеристическую функцию для других коалиций. Для коалиции  $\{1, 2\}$  мы имеем  $f^h(\{1, 2\}) = 21135 < c(\{1\}) + c(\{2\}) = 22431$ . Далее мы предполагаем  $(\{1, 2\}) = f^h(\{1, 2\}) = 21135$ . Для коалиции  $\{1, 3\}$  выполняется следующее неравенство:

$$f^h(\{1, 3\}) > c(\{1\}) + c(\{3\}) = 20431.$$

В этом случае характеристической функции приписывается следующее значение:

$$c(\{1, 3\}) = c(\{1\}) + c(\{3\}) = 20854.$$

Для коалиции  $\{2, 3\}$  имеем:

$$f^h(\{2, 3\}) = 21567 > c(\{2\}) + c(\{3\}) = c(\{2, 3\}) = 21309.$$

И окончательно для большой коалиции  $\{1, 2, 3\}$  имеем:

$$x = \begin{cases} f^h\{1, 2, 3\} & = 30335 < c(\{1, 2\}) + c(\{3\}) = 31001 \\ f^h(\{1, 2, 3\}) & = 30335 < c(\{1\}) + c(\{2, 3\}) = \\ & = c(\{1, 3\}) + c(\{2\}) = 32298 \end{cases}$$

$$\Rightarrow c(\{1, 2, 3\}) = f^h(\{1, 2, 3\}) = 30335$$

Для решений *DALNS* изменения  $c(S)$  по сравнению с  $f^h(S)$  будут следующими:

$$f^h(\{1, 2\}) < c(\{1\}) + c(\{2\}) = 16292 \Rightarrow c(\{1, 2\}) = f^h(\{1, 2\}) = 15839$$

$$f^h(\{2, 3\}) < c(\{2\}) + c(\{3\}) = 15995 \Rightarrow c(\{2, 3\}) = f^h(\{2, 3\}) = 15316$$

$$f^h(\{1, 3\}) < c(\{1\}) + c(\{3\}) \Rightarrow c(\{1, 3\}) = c(\{1\}) + c(\{3\}) = 15474$$

$$\begin{cases} f^h(\{1, 2, 3\}) = 22735.3 < c(\{1\}) + c(\{2, 3\}) = 23202 \\ f^h(\{1, 2, 3\}) = 22735 < c(\{1, 2\}) + c(\{3\}) = 23428 \\ f^h(\{1, 2, 3\}) = 22735 < c(\{1, 3\}) + c(\{2\}) = 23881. \end{cases}$$

В результате мы имеем субаддитивную характеристическую функцию в обоих случаях. Можно также отметить, что в этом эксперименте мы получили более низкое значение характеристической функции с использованием *DALNS*.

## 5. Устойчивость коалиций

Чтобы обеспечить удовлетворительный уровень обслуживания, каждая фирма управляет собственным распределительным центром. В этой ситуации может возникнуть несколько вопросов: есть ли какая-либо польза для этих фирм для улучшения их индивидуальных экономических показателей при совместной работе? Если да, то какова лучшая коалиция для каждой фирмы, чтобы прибыль каждой сотрудничающей фирмы увеличивалась? Как фирмы будут реагировать на сотрудничество в соответствии с предложенным механизмом распределения прибыли и расследовать стимулы совместной ситуации пополнения? Более конкретно, основная проблема заключается в том, чтобы проверить, могут ли фирмы  $i \in I$  увеличить свою индивидуальную прибыль  $P_i(\cdot)$ . При этом важно формировать устойчивые коалиции: игроки не захотят оставаться в данной коалиции, если в другой коалиции они получают большую выгоду. В этом разделе мы берем за основу кооперативную теорию игр, чтобы предложить подход к созданию прибыльных коалиционных структур. Он опирается на работу Aumann и Dreze [3], в которой используется концепция стабильности в совместных играх, учитывающей индивидуальную и

коалиционную рациональность, необходимые для достижения наилучших компромиссов между всеми фирмами.

**Определение 5.1.** Будем говорить, что коалиция  $S$  устойчива среди всех рациональных коалиций множества  $N$ , если  $x_i^S \geq x_i^{S'}$  для всех  $S, S' \in N$

Целью исследование является поиск оптимальных схем доставки, а также поиск устойчивых коалиций.

Выигрыш игрока, участвующего в коалиции, зависит от выбранной концепции решения. В представленной работе мы исследовали устойчивость максимальных коалиций для нескольких актуальных концепций решений.

**Определение 5.2.** Вектор Шепли – это математическое ожидание вклада каждого игрока, если большая коалиция формируется в случайном порядке.

$$Sh_i = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{|S|!(n - |S| - 1)!}{n!} (c(S \cup \{i\}) - c(S)).$$

**Определение 5.3.** MSC-вектор (marginal subcore element)[18] – принцип оптимальности, определяющий выигрыш игрока по следующей формуле:

$$MSC_i = \xi_i^0 + \alpha_i^{msc} (c(N) - \sum_{j \in N} \xi_j^0),$$

$$\alpha_i^{msc} = \frac{\sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} (c(S \cup \{i\}) - c(S))}{\sum_{j \in N} \sum_{S \subseteq N \setminus \{j\}} (c(S \cup \{j\}) - c(S))},$$

$$\xi_i^0 : \max \left( \sum_{i=1}^n \xi_i \right), \text{ sbj to } \sum_{i \in S} \xi_i \leq c(S), \forall S \neq N.$$

**Определение 5.4.** NSCG-вектор (Cost Gap Method)[9] – принцип оптимальности, основанный на  $\tau$ -значении игры и вычисляемый по формуле:

$$NSCG_i = m_i + w_i g(N),$$

$$m_i = c(N) - c(N \setminus \{j\}), \quad g(S) = c(S) - \sum_{j \in S} m_j,$$

$$w_i = \frac{W_i}{\sum_{j \in N} W_j}, \quad W_i = \operatorname{argmin}_{S: i \in S} g(S).$$

**Определение 5.5.** Метод равных доходов (*Equal Profit Method*) [10] – вектор, который обеспечивает как можно более высокую относительную прибыль среди игроков.

$$EPM_i = x_i :$$

$$\min f : f \geq \frac{x_i}{c(\{i\})} - \frac{x_j}{c(\{j\})}, \quad \forall (i, j),$$

$$\sum_{i \in N} x_i = c(N), \quad \sum_{i \in S} x_i \leq c(S), \quad \forall S \neq N.$$

Учитывая эвристический способ построения характеристической функции, мы не можем гарантировать выполнение условия выпуклости характеристической функции в общем случае. Поэтому вектор Шепли ( $Sh$ ) может не лежать в  $C$ -ядре игры. В первой части численных экспериментов были исследованы подобные случаи. Результаты представлены в табл. 2.

Таблица 2. Расположение вектора Шепли

| Положение вектора Шепли | Частота случаев |
|-------------------------|-----------------|
| $Core = \emptyset$      | 14%             |
| $Sh = Core$             | 2.7%            |
| $Sh \neq Core$          | 4.86%           |
| $Sh \notin Core$        | 9%              |
| $Sh \in Core$           | 69.44%          |

Также эвристический способ построения характеристической функции может привести к нарушению устойчивости максимальной коалиции. Возможен случай, когда игроку будет выгоднее участвовать в игре с меньшим количеством участников. В табл. 3 представлены частоты строгой устойчивости (в левой части) и строгой неустойчивости (в правой части) максимальной коалиции кооперативной игры в срезах различных концепций решения игры (по столбцам:  $Sh, MSC, NSCG, EPM$ ) и различных методов решения задачи

оптимизации (по строкам). Среди методов оптимизации проведено попарное сравнение между простыми эвристическими решениями и решениями с использованием *DCIA*, между алгоритмами *ALNS* и *DALNS* а также между средним и минимальным значениями по выборке сгенерированных решений для каждой задачи. Дополнительно, приведены суммарные показатели устойчивости по общему набору задач в частотном и процентном значениях.

Таблица 3. Статистика устойчивости максимальной коалиции

|             | Количество случаев<br>строгой устойчивости |     |      |     | Количество случаев<br>строгой неустойчивости |      |      |     |
|-------------|--------------------------------------------|-----|------|-----|----------------------------------------------|------|------|-----|
|             | Sh                                         | MSC | NSCG | EPM | Sh                                           | MSC  | NSCG | EPM |
| Heuristic   | 41                                         | 28  | 39   | 41  | 31                                           | 44   | 33   | 25  |
| DCIA        | 45                                         | 28  | 42   | 41  | 23                                           | 42   | 26   | 21  |
| ALNS        | 46                                         | 30  | 42   | 42  | 25                                           | 41   | 29   | 21  |
| DALNS       | 40                                         | 26  | 39   | 40  | 29                                           | 45   | 30   | 25  |
| среднее     | 47                                         | 32  | 47   | 42  | 25                                           | 40   | 25   | 22  |
| минимальное | 39                                         | 24  | 34   | 40  | 29                                           | 46   | 34   | 24  |
| всего       | 86                                         | 56  | 81   | 82  | 54                                           | 86   | 59   | 46  |
| всего %     | 59.7                                       | 39  | 56.3 | 57  | 37.5                                         | 59.7 | 41   | 32  |

## 6. Заключение

Проведенные исследования показали, что устойчивость максимальной коалиции в *CIRG* зависит от того, какой эвристический алгоритм был использован для вычисления характеристической функции. Принцип построения характеристической функции *DCIA* дает результаты с более высоким уровнем стабильности большой коалиции и чаще всего приводит к непустоте ядра игры. Рассмотренные методы распределения затрат имеют следующий порядок стабильности большой коалиции в *CIRG*:

$$Shapley \succ EPM \succ NSCG \succ MSC$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Archetti, C., Bertazzi, L., Laporte, G., Speranza, M. G. *A branch-and-cut algo-rithm for a vendor-managed inventory-routing problem*// Transportation Science. 2007. V. 41. N 3. P. 382–391.
2. Archetti, C., Bianchessi, N., Irnich, S., Speranza, M. G. *Formulations for an in-ventory routing problem* // International Transactions in Operational Research. 2014. V. 21. N 3. P. 353–374.
3. Aumann, R. J., Dreze J. H. *Cooperative games with coalition structures* // International Journal of Game Theory. 1974. V. 3. N 4. P. 217–237
4. Bellman, R. *Dynamic Programming* // Princeton University Press, Princeton. 1957.
5. Coelho, L. C., Cordeau, J. F., Laporte, G. *Thirty years of inventory routing* // Transportation Science. 2013. V. 48. N 1. P. 1–19.
6. Coelho, L. C., Cordeau, J. F., Laporte, G. *The inventory-routing problem with transshipment* // Computers and Operations Research. 2012. V. 39. N 11. P. 2537–2548.
7. Cordeau, J. F., Lagana, D., Musmanno, R., Vocaturro, F. *A decomposition-based heuristic for the multiple-product inventory-routing problem* // Computers & Operations Research. 2015. V. 55, P. 153–166.
8. Desaulniers, G., Rakke, J. G., Coelho, L. C. *A branch-price-and-cut algorithm for the inventory-routing problem* // Transportation Science. 2015. V. 50. N 3. P. 1060–1076.
9. Driessen, T. S. H., Tijs, S. H. *The Cost Gap Method and Other Cost Allocation Methods For Multipurpose Water Projects*//Water Resources Research. 1985. V. 21. N 10. P. 1469–1475.
10. Frisk, M., Gothe-Lundgren, M.,Jornsten, K., Ronnqvist, M. *Cost allocation in collaborative forest transportation* 2010. //European Journal of Operational Research. Vol. 205.P. 448–458.

11. Guajardo, M., Ronnqvist, M. *A review on cost allocation methods in collaborative transportation* // International Transactions in Operational Research. 2016. V. 23. N 3. P. 371–392.
12. Joudia, J.B., Sihem, K., Krichen, S., Klibi, W. *Coalition-formation problem for sourcing contract design in supply networks* // European Journal of Operational Research, 2017, vol. 257, issue 2, 539–558
13. Kimms, A., Kozeletskyi, I. *Core-based cost allocation in the cooperative traveling salesman problem* // European Journal of Operational Research. 2016. V. 248. N 3. P. 910–916.
14. Krajewska, M. A., Kopfer, H., Laporte, G., Ropke, S., Zaccour, G. *Horizontal cooperation among freight carriers: request allocation and profit sharing* // Journal of the Operational Research Society. 2008. V.59. N 11. P. 1483–1491.
15. Ropke, S., Pisinger, D. *An Adaptive Large Neighborhood Search Heuristic for the Pickup and Delivery Problem with Time Windows* // Transportation Science. 2006. V.40. N 4. P. 455–472.
16. Verdonck, L., Caris, A. N., Ramaekers, K., Janssens, G. K. *Collaborative logistics from the perspective of road transportation companies* // Transport Reviews. 2003. V.33. N 6. P. 700–719.
17. Zakharov V., Krylatov A. *Equilibrium Assignments in Competitive and Cooperative Traffic Flow Routing* // IFIP Advances in Information and Communication Technology. Springer, 2014. Vol. 434. P. 641–648.
18. Zakharov, V. V., Shchegryaev, A. N. *Stable cooperation in dynamic vehicle routing problems* // Automation and Remote Control. 2015. V. 76. N 5. 935–943.
19. Zakharov, V.V., Shirokikh, V.A. *Heuristic evaluation of the characteristic function in the Cooperative Inventory Routing Game* // J Veh Routing Algorithms. 2017. <https://doi.org/10.1007/s41604-017-0003-0>

20. <http://www.leandro-coelho.com/instances/inventory-routing/>

## COALITION-FORMATION PROBLEM FOR COOPERATIVE INVENTORY ROUTING GAME

**Viacheslav A. Shirokikh**, St. Petersburg State University, PhD student (shva.erivel@gmail.com),

**Elena A. Lezhnina**, St. Petersburg State University, Cand. Sc., associate professor (e.lezhnina@spbu.ru).

*Abstract:* This paper studies stability of carrier coalitions in a cooperative inventory routing game (*CIRG*). Difficulty of this study is not only in a computational complexity of the class of routing problems, but also in the task of constructing a characteristic function, since heuristic solutions that are usually used in routing problems can't guarantee the subadditivity property in the general case. In its turn, violation of subadditivity can lead to instability of a coalition, because a player could get more profit in a different coalition or individually. To solve routing problems, Adaptive large neighborhood search (*ALNS*) and its modification with the Dynamic adaptation method, *DALNS*, are used in this work. A special Direct coalition induction algorithm (*DCIA*) is used to construct a subadditive characteristic function, and four different concepts of cooperative game solutions are considered. The analysis of extensive computational experiments allows to illustrate the dependence of the stability of a grand coalition on such factors as a routing algorithm, an algorithm for a characteristic function construction, and a solution concept for a cooperative game.

*Keywords:* inventory routing problem (*IRP*), cooperative inventory-routing game (*CIRG*), characteristic function, heuristic algorithm.