Математическая Теория Игр и её Приложения, т.11, в.1, с. 3–20

УДК 519.83
ББК 22.18

МНОГОШАГОВЫЕ ИГРЫ С ПОПАРНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ НА ПОЛНОМ ГРАФЕ*

Мария А. Булгакова
Леон А. Петросян
Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет прикладной математики –
процессов управления
198504, Санкт-Петербург, Университетский пр., д.35
e-mail: mari_bulgakova@mail.ru, spbuoasis7@peterlink.ru

Данная работа посвящена многошаговым играм с попарным взаимодействием. Рассматривается полный граф, вершинами которого являются игроки, а ребрами – связи между игроками. Введена характеристическая функция и доказана ее супермодулярность для одного шага игры. Предложен новый подход к построению характеристической функции многошаговой игры, основанный на использовании значений характеристической функции одношаговой игры. На основе новой характеристической функции построен принцип оптимальности, представляющий собой аналог C-ядра, и доказана его сильная динамическая устойчивость. Работа проиллюстрирована примером.

Ключевые слова: многошаговая игра, кооперативная игра, попарное взаимодействие, характеристическая функция, сильная динамическая устойчивость.

Поступила в редакцию: 28.12.18 *После доработки*: 20.03.19 *Принята к публикации*: 20.03.19

---

* Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского Научного Фонда (грант No. 17-11-01079).

1. Введение

Впервые исследование попарного взаимодействия на сети в некооперативной форме было сделано в [6]. Оно подразумевало собой взаимодействие один на один между игроками сети. Попарное взаимодействие было так же рассмотрено на примере распространения информации и дезинформации в социальных сетях в работе [4]. Подходы для нахождения оптимального поведения в многошаговых играх рассматривались в [3]. Условия сильной динамической устойчивости в двухшаговой игре с попарным взаимодействием были найдены в [5]. Динамические свойства кооперативных решений в игре n-лиц были рассмотрены в [7]. Следуя [2], рассмотрим вопрос о построении новой характеристической функции для многошаговой игры с попарным взаимодействием, и рассмотрим некоторые принципы оптимальности, построенные на основе этой функции.

2. Описание модели

Пусть задано абстрактное пространство $\mathbb{Z}$, называемое пространством состояний. В каждом состоянии $z \in \mathbb{Z}$ задана неантагонистическая игра n-лиц $\Gamma(z)$ на полной сети $g(z)$, вершинами которой являются игроки, а ребрами – связи между игроками. Игра $\Gamma(z)$ представляет собой семейство попарных одновременных биматричных игр $\{\gamma_{ij}(z)\}$ между соседями по сети, $i, j \in N$, $i \neq j$.

Пусть $i, j \in N$, $i \neq j$. Тогда i играет с j в биматричную игру $\gamma_{ij}(z)$ с матрицами выигрышей $A_{ij}(z)$ и $A_{ji}(z)$, игроков i и j, соответственно.

$$A_{ij}(z) = \begin{pmatrix} a^{ij}_{11}(z) & a^{ij}_{12}(z) & \cdots & a^{ij}_{1r}(z) \\ a^{ij}_{21}(z) & a^{ij}_{22}(z) & \cdots & a^{ij}_{2r}(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{ij}_{m1}(z) & a^{ij}_{m2}(z) & \cdots & a^{ij}_{mr}(z) \end{pmatrix},$$

$$a^{ij}_{pq}(z) \geqslant 0, \quad p = 1, \ldots, m, \quad q = 1, \ldots, r, \quad i, j \in N.$$

Для простоты дальнейших выкладок предполагается, что m и r одинаковы для всех i и j и всех z.
Стратегией игрока i в игре $\Gamma(z)$ является вектор

$u_i(z) = (u_i^1(z), \ldots, u_i^j(z), \ldots u_i^n(z))$, где u_i^j – стратегия игрока i в биматричной игре $\gamma_{ij}(z)$. То есть стратегия игрока i – это набор номеров выбранных им строк (чистых стратегий) в биматричных играх $\gamma_{ij}(z)$. Обозначим через $u(z) = (u_1(z), \ldots, u_n(z))$ ситуацию в игре $\Gamma(z)$. Стратегия игрока j – это набор номеров выбранных им столбцов в соответствующих биматричных играх $\gamma_{ij}(z)$. Выигрыш игрока i в игре $\Gamma(z)$ определяется следующим образом:

$$K_i(z) = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a^{ij}_{u_i^j(z) u_j^i(z)}(z)\,.$$

Рассмотрим игру $\Gamma(z)$ в кооперативной форме. С этой целью определим характеристическую функцию $v(S; z), \quad S \subset N$ для каждого подмножества (коалиции) $S \subset N$ как нижнее (максиминное) значение антагонистической игры двух лиц коалиции S и дополнительной коалиции $N \setminus S$, построенной на основе игры $\Gamma(z)$, при этом выигрыш коалиции S определяется как сумма выигрышей игроков, входящих в S. Супераддитивность характеристической функции следует из ее определения. Обозначим через

$$\begin{aligned}
\omega_{ij} &= \max_p \min_q \; a^{ij}_{pq}(z), \quad p = 1, \ldots, m; \quad q = 1, \ldots, r, \\
\omega_{ji} &= \max_q \min_p \; a^{ji}_{pq}(z), \quad p = 1, \ldots, m; \quad q = 1, \ldots, r.
\end{aligned}$$

Лемма 2.1. *Функция $v(S; z)$ определяется по следующим формулам:*

$$v(\{\emptyset\}; z) = 0,$$

$$v(\{i\}; z) = \sum_{j\in N, j\neq i} \omega_{ij}(z), \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned}
v(S; z) = \frac{1}{2} \sum_{i\in S} \sum_{j\in S, j\neq i} \max_{p,q} (a^{ij}_{pq}(z) + a^{ji}_{pq}(z)) &+ \\
+ \sum_{i\in S} \sum_{j\in N\setminus S} \omega_{ij}(z), \quad S \subset N, &
\end{aligned} \tag{2.2}$$

$$v(N;z) \;=\; \frac{1}{2}\sum_{i\in N}\sum_{j\in N, j\neq i}\max_{p,q}(a_{pq}^{ij}(z)+a_{pq}^{ji}(z)).$$

Доказательство леммы подробно изложено в [1].
Пусть в состоянии $z \in Z$ в игре $\Gamma(z)$ игроками были выбраны стратегии: $u_i(z) = (u_i^1(z), \dots, u_i^n(z))$. В результате выбора этих стратегий осуществляется переход в состояние z', где происходит игра $\Gamma(z')$, состоящая из одновременных биматричных игр, с матрицами, зависящими от стратегий, выбранных в состоянии z. То есть состояние на следующем шаге игры зависит от состояния на текущем шаге, и от стратегий, выбранных на данном шаге. Можно определить отображение $T : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ по формуле:

$$z' = T(z; u_1(z), u_2(z), \dots, u_n(z))\,.$$

Многошаговая игра $G(z)$ происходит следующим образом. Игра $G(z_1)$ начинается в состоянии z_1. В состоянии z_1 происходит игра $\Gamma(z_1)$, игроки выбирают стратегии $u_1(z_1), u_2(z_1), \dots, u_n(z_1)$, затем переходят в состояние $z_2 = T(z_1; u_1(z_1), u_2(z_1), \dots, u_n(z_1))$. В состоянии z_k игроки играют в игру $\Gamma(z_k)$, выбирают стратегии $u_1(z_k), u_2(z_k), \dots, u_n(z_k)$ и переходят в состояние $z_{k+1} = T(z_k; u_1(z_k), u_2(z_k), \dots, u_n(z_k))$. Игра заканчивается на шаге ℓ в состоянии z_ℓ. Таким образом, в результате выбора стратегий на каждом шаге игры реализуется путь $z_1, z_2, \dots, z_k, \dots, z_\ell$. Естественным образом определяется понятие стратегии в получившейся многошаговой игре $u(\cdot) = u\{(z)\}$, как набор стратегий игроков, определенный в каждом состоянии $z \in \mathbb{Z}$. Из приведенного выше описания следует, что любая ситуация $u(\cdot) = \{u_1(\cdot), \dots, u_n(\cdot)\}$ однозначно определяет путь в игре, а следовательно и выигрыш каждого игрока, как сумму его выигрышей в играх, реализованных вдоль пути.

$$K_i(u(\cdot)) = \sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1, j\neq i}^{n} a^{ij}_{u_i^j(z_k)u_j^i(z_k)}(z_k)\,.$$

Заметим, что множество всевозможных путей в многошаговой игре $G(z)$ конечно. А, следовательно, конечно и множество всех возможных состояний в игре. Обозначим это множество через $\overline{\mathbb{Z}} \subset \mathbb{Z}$

Рассмотрим частный случай, когда $v(N;z)$ одинакова для всех $z \in \overline{\mathbb{Z}}$. Введем в рассмотрение функцию $w(S), \quad S \subset N$:

$$w(S) = \max_z v(S;z).$$

Определим так же характеристическую функцию $V(S;z_k)$ многошаговой игры $G(z_k)$, начинающейся в состоянии z_k. Функция $V(S;z_k)$ вычисляется с помощью следующего аналога уравнения Беллмана:

$$V(S;z_{k-1}) = \max_{u_i, i \in S}[\min_{u_j, j \in N \setminus S}(\sum_{i \in S} K_i^{z_{k-1}}(u_1, \dots u_n) + V(S;z_k))] =$$

$$= \max_{u_i, i \in S}[\min_{u_j, j \in N \setminus S}\big(\sum_{i \in S} K_i^{z_{k-1}}(u_1, \dots u_n) + V(S;T(z_{k-1};u(z_{k-1})))\big)];$$

$$V(S;z_\ell) = v(S;z_\ell).$$

Определим

$$W(S;z_k) = (l - k + 1)w(S)\,,$$

где ℓ – число шагов в игре $G(z_1)$.
Имеет место неравенство (см. [2]):

$$W(S, z_k) \geq V(S, z_k), \quad S \subset N\,.$$

2.1. Супермодулярность $w(S)$

Рассмотрим вопрос о супермодулярности функции $w(S)$. Нами ранее было показано, что одношаговая игра $\Gamma(z)$ выпукла и характеристическая функция $v(S;z), \quad S \subset N$ супермодулярна. Для полноты изложения ниже приведем доказательство.

Определение 2.1. *Характеристическая функция $v(S;z), \quad S \subset N$ называется супермодулярной, если для любых $X \subset N$, $Y \subset N$ выполняется неравенство:*

$$v(X \cup Y;z) \geq v(X;z) + v(Y;z) - v(X \cap Y;z)\,. \tag{2.3}$$

Теорема 2.1. *Характеристическая функция $v(S;z), \quad S \subset N$ супермодулярна.*

Доказательство. Обозначим $m_{ij}(z) = \max\limits_{p,q}(a^{ij}_{pq}(z) + a^{ji}_{pq}(z))$. Тогда, используя (2.1)-(2.2), можно записать:

$$v(X \cup Y; z) = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j\in X\cup Y\\ i\neq j}} m_{ij}(z) + \sum_{\substack{i\in X\cup Y\\ k\in N\setminus X\cup Y}} \omega_{ik}(z) = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j\in X\setminus Y\\ i\neq j}} m_{ij}(z) +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j\in Y\setminus X\\ i\neq j}} m_{ij}(z) + \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j\in X\cap Y\\ i\neq j}} m_{ij}(z) + \sum_{\substack{i\in X\setminus Y\\ j\in N\setminus X}} m_{ij}(z) + \sum_{\substack{i\in X\cup Y\\ k\in N\setminus X\cup Y}} \omega_{ik}(z), \quad (2.4)$$

$$v(X; z) = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j\in X\\ i\neq j}} m_{ij}(z) + \sum_{\substack{i\in X\\ k\in N\setminus X}} \omega_{ik}(z) = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j\in X\setminus Y\\ i\neq j}} m_{ij}(z) +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j\in X\cap Y\\ i\neq j}} m_{ij}(z) + \sum_{\substack{i\in X\\ k\in N\setminus X}} \omega_{ik}(z), \quad (2.5)$$

$$v(Y; z) = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j\in Y\\ i\neq j}} m_{ij}(z) + \sum_{\substack{i\in Y\\ k\in N\setminus Y}} \omega_{ik}(z) = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j\in Y\setminus X\\ i\neq j}} m_{ij}(z) +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j\in X\cap Y\\ i\neq j}} m_{ij}(z) + \sum_{\substack{i\in Y\\ k\in N\setminus Y}} \omega_{ik}(z), \quad (2.6)$$

$$v(X \cap Y; z) = \sum_{\substack{i,j\in X\cap Y\\ i\neq j}} m_{ij}(z) + \sum_{\substack{i\in X\cap Y\\ k\in N\setminus X\cap Y}} \omega_{ik}(z). \quad (2.7)$$

Вычитая из (2.4) выражения (2.5),(2.6) и прибавляя (2.7), получим:

$$\sum_{\substack{i\in X\setminus Y\\ j\in N\setminus X}} m_{ij}(z) \geq 0\,.$$

Последнее неравенство следует из неотрицательности выигрышей. Таким образом, неравенство (2.3) в игре $\Gamma(z)$ выполняется, т.е. для $v(S, z)$ утверждение справедливо. □

Лемма 2.2. *Функция $w(S)$ в игре $\Gamma(z)$ супермодулярна.*

Доказательство. Поскольку, согласно теореме 2.1, характеристическая функция $v(S, z)$ супермодулярна, имеем:

$$v(X \cup Y; z) \geq v(X; z) + v(Y; z) - v(X \cap Y; z)\,.$$

Возьмем в левой и правой части неравенства максимум по $z \in \mathbb{Z}$

$$\max_z v(X \cup Y; z) \geq \max_z v(X; z) + \max_z v(Y; z) - \max_z v(X \cap Y; z)\,.$$

Так как $\max\limits_z v(S; z) = w(S)$, имеем:

$$w(X \cup Y) \geq w(X) + w(Y) - w(X \cap Y)\,.$$

Таким образом, функция $w(S)$ супермодулярна. □

2.2. Новый принцип оптимальности

Определим множество дележей M_W в игре $G(z_1)$ как

$$M_W = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : \sum_{i=1}^{n} x_i = W(N; z_1),\ x_i \geq W(\{i\}; z_1),\ i \in N\}.$$

Под принципом оптимальности будем понимать любое подмножество множества M_W.

Выберем в одношаговой игре $\Gamma(z)$ в качестве принципа оптимальности аналог C-ядра, множество $\hat{C}(w(S))$, состоящее из всех дележей $x = (x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющих условиям

$$\sum_{i \in S} x_i \geq w(S), \quad S \subset N\,,$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = w(N)\,.$$

Аналогичным образом определим множество $\hat{C}(W(S; z))$ в многошаговой игре $G(z)$ – множество дележей, удовлетворяющих условиям:

$$\sum_{i \in S} x_i \geq W(S; z), \quad S \subset N\,,$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = W(N; z)\,.$$

Теорема 2.2. *Для любого* $x \in \hat{C}(W(S; z_k)), x = (x_1, \ldots, x_n)$ *и любого* $k = \overline{1, l}$, *справедливо равенство:*

$$x_i = (\ell - k + 1)x'_i, \quad \text{где } x'_i \in \hat{C}(w(S)), \quad i = \overline{1, n}\,.$$

Доказательство. Для произвольного $k = \overline{1, l}$ имеем следующие неравенства, определяющие множество $\hat{C}(W(S; z_k))$:

$$\sum_{i \in S} x_i \geq W(S; z_k), \quad S \subset N\,,$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = W(N; z_k)\,.$$

Однако, по определению $W(S; z_k) = (\ell - k + 1)w(S)$. Поэтому

$$\sum_{i \in S} x_i \geq (\ell - k + 1)w(S), \quad S \subset N\,,$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = (\ell - k + 1)w(N)\,.$$

Деля на $(\ell - k + 1)$ оба выражения и положив $x'_i = \frac{x_i}{(\ell-k+1)}$, получим:

$$\sum_{i \in S} x'_i \geq w(S), \quad S \subset N\,,$$

$$\sum_{i=1}^{N} x'_i = w(N)\,.$$

То есть $x'_i \in \hat{C}(w(S))$. Таким образом, нам удалось представить компоненты вектора $x \in \hat{C}(W(S; z_k))$ в виде $x_i = (\ell - k + 1)x'_i$, где $x'_i \in \hat{C}(w(S)), \quad i = \overline{1, n}$. □

2.3. Сильная динамическая устойчивость

Предположим, что игроки выбрали стратегии $\bar{u}(\cdot) = (\bar{u}_1(\cdot), \ldots, \bar{u}_n(\cdot))$, которые максимизируют суммарный выигрыш в игре $G(z_1)$:

$$\sum_{i \in N} K_i(z_1; \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n) = \max_u \sum_{i \in N} K_i(z_1; u_1, \ldots, u_n)\,.$$

Соответствующую этим стратегиям траекторию $(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \ldots, \bar{z}_\ell)$ будем называть кооперативной траекторией $(z_1 = \bar{z}_1)$.

Определение 2.2. *Функция β^i, $i \in N$ называется процедурой распределения дележа (ПРД) для $x \in M_W$ (см. [8]), если*

$$x_i = \sum_{k=1}^{\ell} \beta_k^i, \qquad i \in N.$$

Определение 2.3. *Принцип оптимальности $\hat{C}(W(S; \bar{z}_1))$ является сильно-динамически устойчивым в игре $G(\bar{z}_1)$ (см. [9]), если*

1. $\hat{C}(W(S; \bar{z}_k)) \neq \emptyset, \quad k = \overline{1, \ell};$

2. *Для каждого дележа $x \in \hat{C}(W(S; \bar{z}_1))$ существует такая ПРД $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\ell)$, что*

$$\sum_{j=1}^{k} \beta_j \oplus \hat{C}(W(S; \bar{z}_{k+1})) \subset \hat{C}(W(S; \bar{z}_1)), \quad k = \overline{1, \ell - 1}.$$

Здесь символ $\oplus$ означает, что если $a \in R^n$, $B \subset R^n$, тогда $a \oplus B = \{a + b : b \in B\}$.

Утверждение 2.1. *Принцип оптимальности $\hat{C}(W(S; \bar{z}_1))$, $k = \overline{1, \ell}$ в игре $G(\bar{z}_1)$ сильно-динамически устойчив.*

Доказательство. Пусть некоторый дележ $\xi_1 \in \hat{C}(W(S; \bar{z}_1))$, тогда справедливо:

$$\sum_{i \in S} \xi_{i1} \geq W(S; z_1), \quad S \subset N\,,$$

$$\sum_{i=1}^{N} \xi_{i1} = W(N; z_1)\,.$$

Согласно теореме 2.2, дележ $\xi_1 \in \hat{C}(W(S; \bar{z}_1))$ можно представить в следующем виде:

$$\xi_1 = \ell\overline{\beta}, \quad \text{где } \overline{\beta} \in \hat{C}(w(S)).$$

Аналогичным образом представим произвольный дележ $\xi_{k+1} \in \hat{C}(W(S;\bar{z}_{k+1}))$ в виде:

$$\xi_{k+1} = (\ell - (k+1) + 1)\overline{\overline{\beta}} = (\ell - k)\overline{\overline{\beta}}, \quad \text{где } \overline{\overline{\beta}} \in \hat{C}(w(S)).$$

Возьмем в качестве ПРД $\beta = (\overline{\beta}_1, \ldots, \overline{\beta}_k, \overline{\overline{\beta}}_{k+1}, \ldots, \overline{\overline{\beta}}_\ell)$ и построим вектор:

$$\hat{\xi}_1 = \sum_{j=1}^{k} \overline{\beta}_j + \xi_{k+1} = k\overline{\beta} + (\ell - k)\overline{\overline{\beta}} \geq kw(S) + (\ell - k)w(S) = \ell w(S).$$

Таким образом, вектор $\hat{\xi}_1$ представляет собой сумму компонент ПРД β и произвольного дележа $\xi_{k+1} \in \hat{C}(W(S;\bar{z}_{k+1}))$. Вектор $\hat{\xi}_1 \in \hat{C}(W(S,\bar{z}_1))$, что доказывает сильную динамическую устойчивость принципа оптимальности $\hat{C}(W(S,\bar{z}_1))$. $\square$

2.4. Общий случай

Рассмотрим теперь более общий случай, когда значения $v(N;z)$ не обязательно совпадают при различных z. Введем в рассмотрение величину $L(\bar{z}_k)$ – суммарный выигрыш коалиции N в состоянии $\bar{z}_k \in \bar{z}$, где $\bar{z}$ – кооперативная траектория в игре $G(\bar{z}_1)$.

$$L(\bar{z}_k) = \sum_{\substack{i \in N, j \in N \\ i \neq j}} \left(a^{ij}(\bar{z}_k) + a^{ji}(\bar{z}_k)\right). \tag{2.8}$$

Предположим, что $w(S) < \min_{\bar{z}_k} L(\bar{z}_k), \quad S \neq N$. И введем в рассмотрение функцию $w(S;\bar{z}_k)$, $w(S;\bar{z}_k) = w(S), \quad w(N,\bar{z}_k) = L(\bar{z}_k)$. Пусть x – некоторый дележ в игре $G(\bar{z}_1)$. Рассмотрим в качестве принципа оптимальности аналог С-ядра для игры $G(\bar{z}_k)$ следующего вида $\hat{C}(W(S;\bar{z}_k))$:

$$\sum_{i \in S} x_i \geq (\ell - k + 1)w(S) = W(S;\bar{z}_k), \quad S \subset N, \quad S \neq N\,,$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = \sum_{t=k}^{\ell} L(\bar{z}_k) = \hat{W}(N;\bar{z}_k)\,.$$

Предположим, что все $\hat{C}(W(S;\bar{z}_k)) \neq \emptyset$.

Определение 2.4. [9] *Принцип оптимальности $\hat{C}(W(S;\bar{z}_1))$ сильно-динамически устойчив в игре $G(\bar{z}_1)$, если*

1). $\hat{C}(W(S;\bar{z}_k)) \neq \emptyset, \quad k = \overline{1,\ell}$;

2). Для каждого дележа $x \in \hat{C}(W(S;\bar{z}_1))$ существует такая процедура распределения дележа $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_\ell)$, $x = \sum\limits_{j=1}^{\ell} \beta_j$ что

$$\sum_{j=1}^{k} \beta_t \oplus \hat{C}(W(S;\bar{z}_{k+1})) \subset \hat{C}(W(S;\bar{z}_1)), \quad k = \overline{1,\ell}.$$

Утверждение 2.2. *Принцип оптимальности $\hat{C}(W(S;\bar{z}_1))$ сильно-динамически устойчив.*

Доказательство. Доказательство данного утверждения аналогично доказательству утверждения 2.1, но мы приведем его здесь для полноты изложения.

Пусть дележ $x = (x_1, \dots, x_n) \in \hat{C}(W(S;\bar{z}_1))$, тогда выполняется:

$$\sum_{i \in S} x_i \geq W(S, \bar{z}_1) = \ell w(S), \quad S \subset N\,,$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = W(N, \bar{z}_1) = \sum_{t=1}^{\ell} L(\bar{z}_k)\,.$$

Для произвольного дележа $\xi_{k+1} = (\xi_{k+1,1}, \dots, \xi_{k+1,n}) \in \hat{C}(W(S;\bar{z}_{k+1}))$ справедливы следующие неравенства:

$$\sum_{i \in S} \xi_{k+1,i} \geq W(S, \bar{z}_{k+1}) = (\ell - k) w(S), \quad S \subset N\,,$$

$$\sum_{i=1}^{N} \xi_{k+1,i} = W(N, \bar{z}_{k+1}) = \sum_{t=k+1}^{\ell} L(\bar{z}_k)\,.$$

Для дележа $x \in \hat{C}(W(S;\bar{z}_1))$ возьмем в качестве ПРД $\beta_k = \alpha_k \in \hat{C}(w(S;\bar{z}_k))$, $k = \overline{1,\ell}$.

$$\sum_{i\in S}\alpha_{k,i} \geq w(S,\bar{z}_k) = w(S), \quad S\subset N\,, \tag{2.9}$$

$$\sum_{i=1}^{N}\alpha_{k,i} = w(N,\bar{z}_k) = L(\bar{z}_k)\,. \tag{2.10}$$

И построим вектор $\hat{x}$ следующего вида:

$$\hat{x} = \sum_{j=1}^{k}\beta_k + \xi_{k+1} = \sum_{j=1}^{k}\alpha_{k,i} + \xi_{k+1} \geq kw(S) + (\ell-k)w(S) = \ell w(S).$$

Вектор $\hat{x}$ представляет собой сумму ПРД β и произвольного дележа из $\hat{C}(W(S;\bar{z}_{k+1})$. Из (2.9)-(2.10) следует, что вектор $\hat{x}\in\hat{C}(W(S;\bar{z}_1))$, что доказывает сильную динамическую устойчивость принципа оптимальности $\hat{C}(W(S;\bar{z}_1))$ □

2.5. Пример

Рассмотрим пример, в котором $N=3$, $k=3$, то есть игра состоит из трех шагов и начинается в состоянии z_1. В состоянии z_1 задано 6 матриц, 3 из них условно будем называть матрицами первого типа, и три — второго типа. В состоянии z_1 все биматричные игры происходят с матрицами первого типа. В состоянии z_1 каждый игрок $i\in N$ выбирает свою стратегию $u_i(z_1)$, если все $u_i^j(z_1)=1, i\in N, j\in N\setminus\{i\}$, тогда игроки переходят в состояние z_2, в котором играют в биматричные игры с теми же матрицами первого типа. Если хотя бы одна из компонент $u_i^j(z_1)=2, i\in N, j\in N\setminus\{i\}$, тогда в состоянии z_2 игроки играют в биматричные игры с матрицами второго типа. Аналогичным образом осуществляется переход в состояние z_3: если все $u_i^j(z_2)=1, i\in N, j\in N\setminus\{i\}$, тогда в игроки в состоянии z_3 используют матрицы первого типа. Если хотя бы одна из компонент $u_i^j(z_2)=2, i\in N, j\in N\setminus\{i\}$, тогда в состоянии z_3 игроки используют матрицы второго типа. Матрицы первого типа имеют вид:

$$A_{12}(z)=\begin{pmatrix}9 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \quad A_{21}(z)=\begin{pmatrix}9 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad A_{13}(z)=\begin{pmatrix}10 & 1\\ 2 & 7\end{pmatrix},$$

$$A_{31}(z) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad A_{23}(z) = \begin{pmatrix} 16 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{32}(z) = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицы второго типа:

$$\widetilde{A}_{12}(z) = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 10 & 16 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{A}_{21}(z) = \begin{pmatrix} 10 & 13 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{A}_{13}(z) = \begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 9 & 10 \end{pmatrix},$$
$$\widetilde{A}_{13}(z) = \begin{pmatrix} 10 & 12 \\ 11 & 5 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{A}_{23}(z) = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 13 & 9 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{A}_{32}(z) = \begin{pmatrix} 12 & 5 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

В состоянии z_1 задана сеть, представляющая собой полный граф:

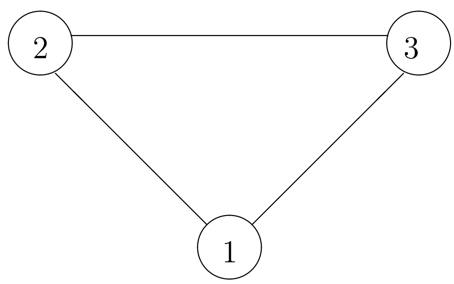

Рисунок 1. Сеть на первом шаге игры.

Для максимизации общего выигрыша игрокам выгодно поддерживать связи со всеми соседями в течении всей игры. Стратегии игроков:

$$u_1(z_1) = (0,2,1), \quad u_2(z_1) = (1,0,2), \quad u_3(z_1) = (2,2,0),$$

$$u_1(z_2) = (0,2,1), \quad u_2(z_2) = (2,0,1), \quad u_3(z_2) = (2,1,0),$$

$$u_1(z_3) = (0,2,1), \quad u_2(z_3) = (2,0,1), \quad u_3(z_3) = (2,1,0).$$

Вычислим значения $\omega_{ij}(z)$:
$\omega_{12}(z_1) = 1, \quad \omega_{21}(z_1) = 1, \quad \omega_{13}(z_1) = 1, \quad \omega_{31}(z_1) = 0,$
$\omega_{23}(z_1) = 2, \quad \omega_{32}(z_1) = 1,$
$\omega_{12}(z_2) = 10, \quad \omega_{21}(z_2) = 6, \quad \omega_{13}(z_2) = 9, \quad \omega_{31}(z_2) = 10,$
$\omega_{23}(z_2) = 9, \quad \omega_{32}(z_2) = 6.$

Значения $\omega_{ij}(z_3)$ будут совпадать либо с $\omega_{ij}(z_2)$ либо с $\omega_{ij}(z_1)$, так как матрицы в игре всего двух типов.

Вычислим значения характеристической функции $v(S;z)$, $w(S;z_k)$:

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{12\}$	$\{13\}$	$\{23\}$	$\{123\}$
$v(S;\bar{z}_1)$	2	3	1	21	20	27	62
$v(S;\bar{z}_2)$	19	15	16	40	40	36	66
$v(S;\bar{z}_3)$	19	15	16	40	40	36	66
$w(S;\bar{z}_1)$	19	15	16	40	40	36	58
$w(S;\bar{z}_2)$	19	15	16	40	40	36	66
$w(S;\bar{z}_3)$	19	15	16	40	40	36	66

Игра начинается в состоянии z_1, в котором игроки выбирают свои стратегии и, в зависимости от этого, переходят в новое состояние. В каждом состоянии у игроков всего две альтернативы: либо в результате выбора стратегий они будут играть матрицами I типа в следующем состоянии, либо перейдут в состояние, где биматричные игры будут происходить с матрицами II типа.

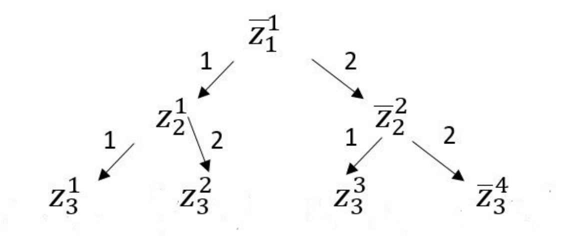

Рисунок 2. Дерево всех возможных состояний игры.

Цифры 1 и 2 над стрелками указывают, матрицами какого типа будут играть игроки в следующем состоянии.

Вычислим значения функции L в узлах z_k:
$L(z_1^1)=58,\quad L(z_2^1)=58,\quad L(z_3^1)=62,\quad L(z_2^2)=66,\quad L(z_3^2)=66,$
$L(z_3^3)=62,\quad L(z_3^4)=66.$

Оптимальная траектория в игре $G(z_1)$: $\bar{z}=(z_1^1,z_2^2,z_3^4)=(\bar{z}_1,\bar{z}_2,\bar{z}_3)$. Вычислим характеристическую функцию многошаговой игры $G(z_1)$:

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{12\}$	$\{13\}$	$\{23\}$	$\{123\}$
$V(S;\bar{z}_3)$	19	15	16	40	40	36	66
$V(S;\bar{z}_2)$	38	30	32	80	80	72	132
$V(S;\bar{z}_1)$	40	33	33	101	100	99	190
$W(S;\bar{z}_3)$	19	15	16	40	40	36	66

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{12\}$	$\{13\}$	$\{23\}$	$\{123\}$
$W(S;\bar{z}_2)$	38	30	32	80	80	72	132
$W(S;\bar{z}_1)$	57	45	48	120	120	108	190

Условие $w(S, z_k) < \min\limits_{\bar{z}_k} L(z_k), \quad S \neq N$ выполняется:

$$\max_S w(S, z_k) = 40 < \min_{\bar{z}_k} L(z_k) = 58.$$

Рассмотрим дележ $x \in \hat{C}(W(S;\bar{z}_1))$

$$\begin{cases} x_1 \geq 57 \\ x_2 \geq 45 \\ x_3 \geq 48 \\ x_1 + x_2 \geq 120 \\ x_1 + x_3 \geq 120 \\ x_2 + x_3 \geq 108 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 190 \end{cases}$$

А так же произвольный дележ $\xi \in \hat{C}(W(S;\bar{z}_2))$

$$\begin{cases} \xi_1 \geq 38 \\ \xi_2 \geq 30 \\ \xi_3 \geq 32 \\ \xi_1 + \xi_2 \geq 80 \\ \xi_1 + \xi_3 \geq 80 \\ \xi_2 + \xi_3 \geq 72 \\ \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 132 \end{cases}$$

В качестве ПРД $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ возьмем дележ $\alpha \in \hat{C}(w(S;\bar{z}_1))$, $\beta_k = \alpha$, $k = 1, 2, 3$.

$$\begin{cases} \alpha_1 \geq 19 \\ \alpha_2 \geq 15 \\ \alpha_3 \geq 16 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \geq 40 \\ \alpha_1 + \alpha_3 \geq 40 \\ \alpha_2 + \alpha_3 \geq 36 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 58 \end{cases}$$

И построим дележ $\hat{x} = \alpha + \xi$

$$\begin{cases} \hat{x}_1 \geq 57 \\ \hat{x}_2 \geq 45 \\ \hat{x}_3 \geq 48 \\ \hat{x}_1 + \hat{x}_2 \geq 120 \\ \hat{x}_1 + \hat{x}_3 \geq 120 \\ \hat{x}_2 + \hat{x}_3 \geq 108 \\ \hat{x}_1 + \hat{x}_2 + \hat{x}_3 = 190 \end{cases}$$

Из последнего неравенства следует, что $\hat{x} \in \hat{C}(W(S;\bar{z}_1))$, что доказывает сильную динамическую устойчивость $\hat{C}(W(S;\bar{z}_1))$

3. Заключение

Для многошаговых сетевых игр предложен новый подход к построению характеристической функции многошаговой игры. Этот подход обладает меньшей вычислительной сложностью, по сравнению с классическим. На основе новой характеристической функции построен принцип оптимальности, являющийся аналогом С-ядра, и доказана его сильная динамическая устойчивость. Показана супермодулярность характеристической функции для одношаговой игры. Работа проиллюстрирована примером, в котором рассмотрена трехшаговая игра трех лиц с попарным взаимодействием, построена характеристическая функция, как классическим способом, так и новым, предложенным в данной работе. Показана сильная динамическая устойчивость принципа оптимальности, введенного в данной работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Булгакова М.А. *Решение сетевых игр с попарным взаимодействием* // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2019. Т. 14. Вып. 1. С. 308–319.

2. Панкратова Я.Б., Петросян Л.А. *Новая характеристическая функция для многошаговых динамических игр* // Вестник Санкт-

Петербургского университета.Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2018. Т. 14. Вып. 4. С. 316–324.

3. Петросян Л.А., Седаков А.А. *Многошаговые сетевые игры с полной информацией* // Математическая теория игр и ее приложения. 2009. Т. 1, вып. 2. С. 66–81.

4. Acemoglua D., Ozdaglarb A., ParandehGheibib A. *Spread of (mis) information in social networks* // Games and Economic Behavior. 2010. Vol. 70. Is. 2. P. 194–227.

5. Bulgakova M.A., Petrosyan L.A. *About Strongly Time-Consistency of Core in the Network Game with Pairwise Interactions* // Proceedings of 2016 International Conference "Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems". 2016. P. 157–160.

6. Dyer M., Mohanaraj V. *Pairwise-Interaction Games* // ICALP. 2011. Vol. 1. P. 159–170.

7. Kuzyutin D., Nikitina M. *Time consistent cooperative solutions for multistage games with vector payoffs* // Operations Research Letters. 2017. Vol. 45. Is. 3. P. 269–274.

8. Petrosyan L.A. *Stability of solutions in n-person differential games* // Vestnik of Leningrad Univ. 1977. Vol. 1, no. 19. P. 46–52.

9. Petrosyan L.A. *About new strongly time-consistency solutions in cooperative differential games* // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 1995. No. 211. P. 335–340.

MULTISTAGE GAMES WITH PAIRWISE INTERACTIONS ON FULL GRAPH

Maria A. Bulgakova, Saint Petersburg State University, postgraduate (mari_bulgakova@mail.ru).
Leon A. Petrosyan, Saint Petersburg State University, Dr.Sc., professor (spbuoasis7@peterlink.ru).

Abstract: This paper is devoted to multi-stage games with pairwise interactions. The case of complete graph is considered, the vertices of which are players, and the edges are the connections between them. The characteristic function is introduced and its supermodularity is proved for one stage game. A new approach for construction of characteristic function of multi-stage game is proposed, based on the use of values of characteristic functions of one stage games. On the basis of the newly constructed characteristic function, the optimality principle is introduced, which is an analogue of the Core, and its strongly time-consistency proved. The work is illustrated by an example.

Keywords: multistage games, cooperative games, pairwise interactions, characteristic function, strongly time-consistency.