Математическая Теория Игр и её Приложения, т.11, в.1, с. 39–72

УДК 519.833.2:519.837
ББК 91.А.10:91.А.23

ПАРЕТОВСКОЕ РАВНОВЕСИЕ УГРОЗ И КОНТРУГРОЗ В ОДНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ ТРЕХ ЛИЦ

Владислав И. Жуковский
МГУ им. М.В. Ломоносова
119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, факультет ВМК
Юлия Н. Житенева
Юлия А. Бельских
Государственный гуманитарно-технологический университет
142611, Московская обл., Орехово-Зуево, ул. Зеленая, 22
e-mail: zhkvlad@yandex.ru, unzh2011@mail.ru, fozbelskih@rambler.ru

Рассматривается линейно-квадратичная позиционная дифференциальная игра трех лиц. Установлены коэффициентные критерии, при выполнении которых в игре не существует ситуации равновесия по Нэшу и одновременно существует равновесие угроз и контругроз.

Ключевые слова: бескоалиционные игры, равновесие по Нэшу, активное равновесие, равновесие угроз и контругроз.

Поступила в редакцию: 06.02.19 *После доработки*: 09.03.19 *Принята к публикации*: 20.03.19

1. Введение

По мнению корифеев математической теории игр равновесию, как приемлемому решению дифференциальной игры, должно быть присуще свойство *устойчивости*: отклонение от него отдельного игрока не может увеличить выигрыш отклонившегося. Решение, предложенное в [23, 24] (тогда двадцатиоднолетним аспирантом Принстонского университета Джоном Форбсом Нэшем (мл) и названное впоследствии *равновесием по Нэшу*-РН) полностью отвечает этому требованию. РН уверенно завоевало «царствующее положение» в экономике, социологии, военных науках. Джону Нэшу в 1994г. Была присуждена Нобелевская премия по экономике (совместно с Джоном Харшаньи и Рейхардом Зельтеном) «за фундаментальный анализ равновесия в теории некооперативных игр». Фактически Нэш создал основы научного метода, сыгравшего огромную роль в развитии мировой экономики. Открывая теперь почти любой научный журнал по экономике, исследованию операций, системному анализу или теории игр, мы наверняка столкнемся с публикациями, касающимися равновесия по Нэшу. Однако «And in the sun there are spots»: Множество ситуаций равновесия по Нэшу может быть внутренне и внешне неустойчивым. Так в простейшей бескоалиционной игре двух лиц в нормальной форме

$$\langle \{1,2\}, \{X_i = [-1;1]\}_{i=1,2}, \{f_i(x_1,x_2) = 2x_1x_2 - x_i^2\}_{i=1,2} \rangle$$

множество равновесных по Нэшу ситуаций будет

$$X^e = \{x^e = (x_1^e, x_2^e) = (\alpha,\alpha) | \forall \alpha = const \in [-1,1]\},\ f_i(x^e) = \alpha^2\ (i=1,2).$$

Для элементов этого множества (отрезка биссектрисы 1-ой и 3-ей четверти координатного угла) *во-первых*, для $x^{(1)} = (0,0) \in X^e$ и $x^{(2)} = (1,1) \in X^e$ имеем $f_i(x^{(1)}) = 0 < f_i(x^{(2)}) = 1$ $(i=1,2)$ и поэтому множество X^e *внутренне неустойчиво*, *во-вторых*, $f_i(x^{(1)}) = 0 < f_i(\frac{1}{4}, \frac{1}{3})$ $(i=1,2)$ и поэтому множество X^e *внешне неустойчиво.*

Внешняя, так и внутренняя неустойчивость множества равновесий по Нэшу – негатив при его практическим использовании. В первом случае существует ситуация, которая доминирует РН (по всем игрокам), а во втором такая ситуация даже является равновесной по Нэшу. Избежать последствия внешней и внутренней неустойчивости позволило бы максимальность по Парето ситуации равновесия по Нэшу. Однако, такое совпадение – явление скорее экзотическое (по крайней мере, нам известно лишь три случая [17, с.92-93; 15; 20] такого совпадения). Итак, чтобы избежать (неприятностей), связанных с внешней и внутренней неустойчивостью, далее добавляем требования максимальности по Парето к обсуждаемому ниже равновесию угроз и контругроз (РУИК).

Перейдем к РУИК. Впервые в русскоязычной литературе оно появилось в книге [14] (см. также [16]). Дело в том, что исследованию позитивных и негативных свойств «царствующей» в экономике концепции равновесия по Нэшу (как решения бескоалиционной игры) посвящен непрекращающийся поток публикаций. В основном они связаны с неединственностью, и, как следствие, отсутствием эквивалентности, взаимозаменяемости, внешней неустойчивости, а также неустойчивостью к одновременному отклонению от таких решений двух и более игроков. Игра «дилемма заключенных» выявила также свойство «улучшаемости». Подробному анализу таких «отрицательных» свойств для дифференциальных позиционных игр посвящена книга В.И. Жуковского и Т.Н. Тынянского [11]. Вывод, к которому приводят авторы книги: либо использовать те ситуации равновесия по Нэшу, которые одновременно свободны от некоторых указанных недостатков, либо следует вводить новые решения бескоалиционной игры, которые, обладая достоинствами ситуации равновесия по Нэшу, позволяли бы избавиться от отдельных ее недостатков. Одной из таких возможностей для дифференциальных игр, связанной с концепцией угроз и контругроз, и посвящена настоящая статья. Используемые в ней понятия основываются на известной в классической теории игр концепции угроз и контругроз. Теоретическим основанием этой концепции стали работы Э.И. Вилкаса [4, 5]. Термин «активное равновесие» предложил Э.Р. Смольяков [18] в 1983г., понятие равновесия угроз и контругроз в дифференциальных играх было использовано впервые, по-видимому, в 1974г. Э.М. Вайсбордом в [2], затем подхвачено первым автором настоящей статьи и упомянутой выше книге 1984г., но применялась и применяется эта концепция в дифференциальных играх, по нашему мнению, недостаточно широко.

«Угроза – обещание принести какое-либо зло, неприятность» [1, с. 1371]. Угроза необязательно реальное действие, она может заключаться в сообщении о возможности такого действия (запугивание!). Иногда для смягчения «агрессивного характера» слова «угроза» используют в некоторых публикациях (как синоним) «возражения». Сообщение о действии игрока «обнуляющего» угрозу называют «контругрозой» (контрвозражением). Концепция угроз и контругроз, как уже упоминалось, появляется уже в начальных публикациях по матричной теории игр [14], но ограничиваются они либо статическим вариантом игры, либо дифференциальными играми, но только двух лиц [8, 10, 19, 27, 21, 22, 25, 26]. Дифференциальные игры трех и более участников не затрагивались, что и явилось (не в последнюю очередь!) толчком к написанию этой работы.

2. Постановка задачи

Рассматривается бескоалиционная линейно-квадратичная дифференциальная игра трех лиц в нормальной форме, заданная упорядоченной четверкой,

$$\Gamma = \langle \{1,2,3\}, \Sigma, \{\mathcal{U}_i\}_{i=1,2,3}, \{J_i(U,t_0,x_0)\}_{i=1,2,3} \rangle.$$

В Γ множество порядковых номеров игроков $\{1,2,3\}$, управляемая динамическая система Σ описывается векторным линейным дифференциальным уравнением

$$\Sigma \div \dot{x} = A(t)x + u_1 + u_2 + u_3, \ x(t_0) = x_0. \tag{2.1}$$

Здесь фазовый (вектор состояния системы Σ) n-вектор $x \in \mathbb{R}^n$; фиксирован момент окончания игры $\vartheta = const > 0$, а само время продолжительности игры $t \in [t_0, \vartheta]$; управляющее воздействие i-го игрока $u_i \in \mathbb{R}^n$ $(i = 1,2,3)$; для $n \times n$-матрицы $A(t)$ будем предполагать непрерывность на $[0, \vartheta]$ элементов и обозначать этот факт $A(\cdot) \in C_{n\times n}[0,\vartheta]$; пара $(t,x) \in [0,\vartheta] \times \mathbb{R}^n$ – текущая позиция игры Γ, (t_0, x_0) – начальная позиция, $0 \le t_0 < \vartheta$.

Стратегию i-го игрока U_i будем отождествлять с n-вектор-функцией $u_i(t,x)$ (обозначая это соответствие $U_i \div u_i(t,x)$), тогда *множество стратегий* i*-игрока*

$$\mathcal{U}_i = \{U_i \div u_i(t,x), u_i(t,x) = Q_i(t)x | \forall Q_i(\cdot) \in C_{n\times n}[0,\vartheta]\}.$$

таким образом, выбор своей стратегии i-м игроком сводится к выбору конкретной $n \times n$-матрицы $Q_i(t)$ $(i = 1,2,3)$ из $C_{n\times n}[t_0,\vartheta]$.

Игра с течением времени развертывается следующим образом. Игроки, не объединяясь в коалиции, выбирают каждый свою стратегию $U_i \div Q_i(t)x$; в результате образуется *ситуация* игры $U =$

$(U_1, U_2, U_3) \in \mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \times \mathcal{U}_3$. Затем находят решение $x(t)$, $t_0 \le t \le \vartheta$, системы (2.1) при $u_i = Q_i(t)x$ $(i = 1, 2, 3)$, т.е.

$$\dot{x} = [A(t) + Q_1(t) + Q_2(t) + Q_3(t)]x(t), \; x(t_0) = x_0. \tag{2.2}$$

Система линейных однородных дифференциальных уравнений (2.2) с непрерывными на $[t_0, \vartheta]$ коэффициентами имеет непрерывное продолжимое на $[t_0, \vartheta]$ решение $x(t)$. Затем игроки строят *реализации* выбранных ими стратегий $u_i[t] = Q_i(t)x(t)$ $(i = 1, 2, 3)$ и соответствующую реализацию ситуации $u[t] = (u_1[t], u_2[t], u_3[t])$, которую составляют три непрерывных на $[t_0, \vartheta]$ n-вектора $u_1[t], u_2[t], u_3[t]$.

Функция выигрыша i-го игрока тогда образует определенный на непрерывных четверках $(x(t), u_1[t], u_2[t], u_3[t] | t \in [t_0, \vartheta])$ квадратичный функционал

$$\begin{gathered} J_i(U_1, U_2, U_3, t_0, x_0) = x'(\vartheta)C_i x(\vartheta) + \\ + \int\limits_{t_0}^{\vartheta} (u_1'[t]D_{i1}u_1[t] + u_2'[t]D_{i2}u_2[t] + u_3'[t]D_{i3}u_3[t])dt \; (i = 1, 2, 3), \end{gathered} \tag{2.3}$$

где, не уменьшая общности, считаем постоянные $n \times n$-матрицы C_i, D_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ симметричными; штрих сверху означает операцию транспонирования (x' – вектор-строка). Значение функционала (2.3) называется *выигрышем* i-го игрока. Полагаем, что игроки заинтересованы выбрать в игре Γ свою стратегию таким образом, чтобы возможно увеличить свой выигрыш.

Цель настоящей статьи – выявить достаточно общий класс линейно-квадратичных дифференциальных позиционных игр трех лиц в нормальной форме вида Γ, в котором отсутствует равновесие по Нэшу, но одновременно существует равновесие угроз и контругроз.

Для этого игре Γ поставим в соответствие трехкритериальную динамическую задачу

$$\Gamma_\nu = \langle \Sigma, \mathcal{U}, \{J_i(U, t_0, x_0)\}_{i=1,2,3} \rangle.$$

Здесь управляемая динамическая система Σ совпадает с (2.1), множество альтернатив $\mathcal{U}$ совпадает с множеством ситуаций $\mathcal{U} = \prod\limits_{i=1}^{3} \mathcal{U}_i$ игры Γ, три критерия $J_i(U, t_0, x_0)$ $(i = 1, 2, 3)$ определены в (2.3).

Цель ЛПР (лица, принимающего решение) в задаче Γ_ν – выбор такой альтернативы (ситуации) $U^P \in \mathcal{U}$, при которой все три критерия (2.3) принимали бы одновременно возможно *большие* значения. Общепринятым здесь является понятие максимума по Парето.

Определение 2.1. *Альтернатива (ситуация) $U^P = (U_1^P, U_2^P, U_3^P) \in \mathcal{U}$ называется максимальной по Парето в задаче Γ_ν, если при $\forall U \in \mathcal{U}$ и $\forall (t_0, x_0) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^n$, $x_0 \neq 0_n$ несовместна система неравенств*

$$J_i(U, t_0, x_0) \geq J_i(U^P, t_0, x_0) \ (i = 1, 2, 3),$$

из которых хотя бы одно строгое, при этом вектор $J^P = J^P[t_0, x_0] = (J_1(U^P, t_0, x_0), J_2(U^P, t_0, x_0), J_3(U^P, t_0, x_0))$ называется максимумом по Парето в задаче Γ_ν.

Отметим здесь два обстоятельства, которые сразу следуют из определения 2.1.

Свойство 2.1. Справедлива импликация:

$$J_i(\hat{U}, t_0, x_0) > J_i(U^P, t_0, x_0) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow J_j(\hat{U}, t_0, x_0) < J_j(U^P, t_0, x_0) \text{ для хотя бы одного } j = 1, 2, 3;\ j \neq i.$$

Свойство 2.2. Если для постоянных $\beta > 0$ и $\gamma > 0$ имеет место

$$\begin{aligned} &\max_{U \in \mathcal{U}} \{J_1(U, t_0, x_0) + \beta J_2(U, t_0, x_0) + \gamma J_3(U, t_0, x_0)\} = \\ &\qquad = Idem\{U \to U^P\}, \end{aligned} \tag{2.4}$$

то ситуация U^P –максимальна по Парето в Γ_ν. Напомним, что $Idem\{U \to U^P\}$ означает выражение в фигурных скобках из (2.4), где U заменено на U^P.

Перейдем к понятиям равновесных решений игры Γ, где вектор $J = (J_1, J_2, J_3) \in \mathbb{R}^3$.

Определение 2.2. *Пара $(U^e, J^e = J(U^e, t_0, x_0)) \in \mathcal{U} \times \mathbb{R}^3$ называется равновесием по Нэшу игры Γ, если*

$$\begin{cases} \max\limits_{U_1 \in \mathcal{U}} J_1(U_1, U_2^e, U_3^e, t_0, x_0) = J_1(U_1^e, U_2^e, U_3^e, t_0, x_0) = J_1^e, \\ \max\limits_{U_2 \in \mathcal{U}} J_2(U_1^e, U_2, U_3^e, t_0, x_0) = J_2(U_1^e, U_2^e, U_3^e, t_0, x_0) = J_2^e, \\ \max\limits_{U_3 \in \mathcal{U}} J_3(U_1^e, U_2^e, U_3, t_0, x_0) = J_3(U_1^e, U_2^e, U_3^e, t_0, x_0) = J_3^e \end{cases}$$

при любых $(t_0, x_0) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^n$, $x_0 \neq 0_n$ (0_n - нулевой n-вектор).

Более громоздко выглядит понятие равновесия угроз и контругроз.

Пусть $U = (U_1, U_2, U_3)$ некоторая фиксированная ситуация игры Г. Будем считать, что у первого игрока имеется *угроза на ситуацию* U, если у него существует такая стратегия $U_1^T \in \mathcal{U}_1$, что

$$J_1(U_1^T, U_2, U_3, t_0, x_0) > J_1(U_1, U_2, U_3, t_0, x_0). \tag{2.5}$$

Наличие угрозы не означает ее обязательное применение, а лишь *«animus denuntiandi»*[1]. Применение угрозы выгодно первому игроку, ибо при этом, согласно (2.5), его выигрыш увеличивается по сравнению с выигрышем в ситуации U.

В ответ на угрозу первого игрока U_1^T у второго имеется *«неполная» контругроза*, если у него существует стратегия $U_2^C \in \mathcal{U}_2$, при которой

$$J_1(U_1^T, U_2^C, U_3, t_0, x_0) \leq J_1(U_1, U_2, U_3, t_0, x_0), \tag{2.6}$$

и у второго имеется *«полная» контругроза*, если существует такая стратегия $U_2^C \in \mathcal{U}_2$, что одновременно с неравенством (2.6) выполняется

$$J_2(U_1^T, U_2^C, U_3, t_0, x_0) > J_2(U_1^T, U_2, U_3, t_0, x_0). \tag{2.7}$$

Аналогично формализуется контругроза (полная) третьего игрока в ответ на угрозу U_1^T.

При наличии «неполной» контругрозы второй игрок за счет выбора своей стратегии U_2^C приводит, согласно (2.6), выигрыш первого (угрожающего) игрока к значению, не превосходящему его первоначальный выигрыш в ситуации U (но может и уменьшиться!). Все происходит как по девизу Наполеона I *«Order, contre-order, disorder»*[2]. Таким образом, наличие «неполной» контругрозы «сводит к нулю» применение угрозы. В дополнение к этому, «полная» контругроза побуждает втрого к применению U_2^C, ибо в (полученной в результате угрозы и контругрозы) ситуации (U_1^T, U_2^C, U_3) выигрыш второго увеличится по сравнению с выигрышем в ситуации (U_1^T, U_2, U_3), сложившейся при реализации угрозы U_1^T.

---

[1] Намерение пригрозить (*лат.*)

[2] Распоряжение – контрраспоряжение – беспорядок (*фр.*)

Аналогично определяется угроза второго (третьего) игрока на ситуацию U и ответная контругроза (полная) одного из двух оставшихся.

Естественно, если в ответ на каждую угрозу на U любого игрока у хотя бы одного из оставшихся имеется контругроза, то игроку не имеет смысла применять угрозу, т.к. в результате реакции (контругрозы) на эту угрозу другого игрока его выигрыш не увеличится (но может и уменьшиться!).

Определение 2.3. *Ситуация $U^P = (U_1^P, U_2^P, U_3^P) \in \mathcal{U}$ называется активно равновесной в игре Γ, если при любой начальной позиции $(t_0, x_0) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^n$, $x_0 \neq 0_n$,*

1) U^P максимальна по Парето в Γ_ν,

2) в ответ на каждую угрозу $U_i^T \in \mathcal{U}_i$ любого игрока по крайней мере у одного из оставшихся имеется неполная контругроза.

Определение 2.4. *Пара $(U^P, J^P) \in \mathcal{U} \times \mathbb{R}^3$ называется равновесием угроз и контругроз в дифференциальной игре Γ, если при любой начальной позиции $(t_0, x_0) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^n$, $x_0 \neq 0_n$,*

1) U^P максимальна по Парето в трехкритериальной динамической задаче Γ_ν,

2) в ответ на каждую угрозу любого игрока по крайней мере у одного из оставшихся имеется полная контругроза.
Здесь, напомним, $J^P = (J_1^P, J_2^P, J_3^P)$, $J_i^P = J_i(U^P, t_0, x_0)$ $(i = 1, 2, 3)$.

Из определений 2.3 и 2.4 следует, что любое равновесие угроз и контругроз является одновременно активным равновесием, а равновесие по Нэшу (в силу определения 2.2) не допускает угроз, причем только «самые хорошие» из них (одновременно максимальные по Парето) будут активно равновесными.

Как уже упоминалось в аннотации, приведенные здесь понятия угроз и контругроз основываются на известной [16] в классической теории игр концепции угроз и контругроз. На ее основе в [16, с. 109] определяются устойчивые коалиционные структуры, впервые, по-видимому, рассмотренные для дифференциальных коалиционных игр в [11]. Концепция «угроз и контругроз» для дифференциальных игр использована Э.М. Вайсбордом в 1974 г. в статье [2], развита В.И. Жуковским в [3, 29]. Теоретическим аспектам посвящены работы Э.И. Вилкаса [4, 5]. Свой способ классификации решений бескоалиционной игры, включающий, как составную часть, равновесие угроз и контругроз, предложил Э.Р. Смольяков [18]. Им же был введен термин «активное равновесие» (на основе упомянутого определения неполной контругрозы). Понятие активного равновесия для позиционных, дифференциальных, бескоалиционных игр использовалось и в [27]. Способ доказательства существования активной равновесности был предложен первым автором настоящей статьи в [27] и затем успешно применен болгарскими математиками при установлении факта существования такого решения в дифференциальных позиционных играх двух лиц, описываемых уравнениями с частными производными [19, 26], стохастическими [22], в банаховом пространстве [25], уравнениями с постоянным запаздыванием [21].

Активно равновесным ситуациям и равновесиям угроз и контругроз присущи все позитивные свойства ситуации равновесия по Нэшу [8, с. 49]

– во-первых, они устойчивы к отклонению отдельного игрока;

– во-вторых, удовлетворяют свойству индивидуальной рациональности;

–в-третьих, совпадают с седловой точкой в случае антагонистической игры.

Одновременно с тем неулучшаемые равновесия свободны от следующих недостатков [8, с. 58]:

– существуют в ряде случаев, когда равновесие по Нэшу отсутствует (например, как в игре Г из настоящей статьи);

– в отличие от равновесия по Нэшу неулучшаемы и внутренне устойчивы (в силу паретовости);

– наличие в игре равновесия по Нэшу влечет существование некоторых видов неулучшаемых равновесий, выигрыши всех игроков при которых не меньше, чем при равновесии по Нэшу;

– наконец, лишь «самые хорошие» ситуации равновесия по Нэшу (которые одновременно максимальны по Парето) являются равновесиями угроз и контругроз. Однако лишь частные виды игр (см. [17, 15, 20]) обладают такими «самыми хорошими» равновесиями.

Заметим, что указанные свойства имеют место и для позиционных дифференциальных бескоалиционных игр, а в [8] использована математическая формализация стратегий игроков и порожденных ими движений динамической системы, предложенная Н.Н. Красовским в [13] для антагонистической дифференциальной позиционной игры.

3. Максимальные по Парето ситуации и паретовские выигрыши

Далее запись $D<0$ (>0) означает, что квадратичная форма $x'Dx$ определенно отрицательна (соответственно, положительна).

Прежде всего приведем вспомогательное утверждение (лемму 3.1).

Рассмотрим трехкритериальную *статическую* задачу

$$\Gamma_3 = \langle X=\mathbb{R}^{3n}, \{f_i(u) = u_1'D_{i1}u_1 + u_2'D_{i2}u_2 + u_3'D_{i3}u_3\}_{i=1,2,3}\rangle,$$

в которой ЛПР выбирает альтернативу (ситуацию) $u=(u_1,u_2,u_3)\in\mathbb{R}^{3n}$ с целью достичь одновременно возможно больших значений всех трех компонент векторного критерия $f(u)=(f_1(u),f_2(u),f_3(u))$. Аналогом определения 2.1 здесь будет:
альтернатива u^P *максимальна по Парето* в Γ_3, если при $\forall u\in\mathbb{R}^{3n}$ несовместна система неравенств $f_i(u)\geq f_i(u^P)$ $(i=1,2,3)$, из которых хотя бы одно строгое.

Ниже используем аналог свойства 2.2.

Лемма 3.1. *Если в задаче Γ_3 симметричны $n\times n$-матрицы D_{ij} и положительные числа Λ_{ii}, λ_{ij} $(i,j=1,2,3;\ j\neq i)$ таковы, что*

$$D_{ii}>0,\ D_{ij}<0\ (\text{при } j\neq i),\ \Lambda_{11}\Lambda_{22}<\lambda_{12}\lambda_{21}, \tag{3.1}$$

то существуют числа $\beta>0$, $\gamma>0$, при которых квадратичные формы $x'D_ix$ $(i=1,2,3)$ в

$$f(u)=f_1(u)+\beta f_2(u)+\gamma f_3(u)=u_1'D_1u_1+u_2'D_2u_2+u_3'D_3u_3$$

становятся определенно отрицательными.

Здесь

$$D_i=D_{1i}+\beta D_{2i}+\gamma D_{3i}\ (i=1,2,3), \tag{3.2}$$

кроме того, Λ_{ii} – наибольший корень характеристического уравнения

$$\Delta_{ii}(\Lambda)=det[D_{ii}-\Lambda E_n]=0\ (i=1,2,3),$$

величина $-\lambda_{ij}$ $(i, j = 1, 2, 3;\ j \neq i)$ *так же наибольший (по абсолютной величине наименьший) корень уравнения*

$$\delta_{ij}(\lambda) = det[D_{ij} - \lambda E_n] = 0,$$

E_n – *единичная* $n \times n$-*матрица.*

Доказательство. В силу симметричности всех девяти используемых в Γ_3 матриц D_{ii}, D_{ij} $(i, j = 1, 2, 3;\ j \neq i)$ корни характеристических уравнений $\Delta_{ii}(\Lambda) = 0$ и $\delta_{ij}(\lambda) = 0$ вещественны, причем корни $\Delta_{ii}(\Lambda) = 0$ положительны, а $\delta_{ij}(\lambda) = 0$ – отрицательны. Обозначим наибольший из n корней уравнения $det[D_{ii} - \Lambda E_n] = 0$ через Λ_{ii}, а наибольший из корней уравнения $\delta_{ij}(\lambda) = 0$ через $-\lambda_{ij}$, тогда из [7, с. 281] следует, что при $\forall u_i \in \mathbb{R}^n$ будет

$$u_i' D_{ii} u_i \leq \Lambda_{ii} u_i' u_i\ (i = 1, 2, 3),$$
$$u_j' D_{ij} u_j \leq -\lambda_{ij} u_j' u_j\ (i, j = 1, 2, 3;\ j \neq i).$$

Поэтому

$$\begin{gathered} f(u) = f_1(u) + \beta f_2(u) + \gamma f_3(u) = \\ = u_1'[D_{11} + \beta D_{21} + \gamma D_{31}]u_1 + u_2'[D_{12} + \beta D_{22} + \gamma D_{32}]u_2 + \\ + u_3'[D_{13} + \beta D_{23} + \gamma D_{33}]u_3 \leq [\Lambda_{11} - \beta\lambda_{21} - \gamma\lambda_{31}]u_1'u_1 + \\ + [-\lambda_{12} + \beta\Lambda_{22} - \gamma\lambda_{32}]u_2'u_2 + [-\lambda_{13} - \beta\lambda_{23} + \gamma\Lambda_{33}]u_3'u_3. \end{gathered}$$

Итак $f(u) < 0\ \forall u \in \{\mathbb{R}^{3n} \setminus \{0_{3n}\}\}$, если

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda_{11} - \beta\lambda_{21} - \gamma\lambda_{31} < 0, \\ -\lambda_{12} + \beta\Lambda_{22} - \gamma\lambda_{32} < 0, \\ -\lambda_{13} - \beta\lambda_{23} + \gamma\Lambda_{33} < 0. \end{array} \right. \tag{3.3}$$

Таким образом, первые два строгих неравенства из (3.3) имеют место, если

$$\frac{\Lambda_{11}}{\lambda_{21}} < \beta < \frac{\lambda_{12}}{\Lambda_{22}} \Rightarrow f(u) < 0\ \forall u \in \{\mathbb{R}^{3n} \setminus \{0_{3n}\}\},$$

т.е. если $\Lambda_{11}\Lambda_{22} < \lambda_{12}\lambda_{21}$ $\left(\text{например, при } \beta = \frac{1}{2}\left(\frac{\Lambda_{11}}{\lambda_{21}} + \frac{\lambda_{12}}{\Lambda_{22}}\right)\right)$.

Аналогично третье неравенство из (3.3) выполнено, если

$$0 < \gamma < \frac{\lambda_{13}}{\Lambda_{33}} + \frac{1}{2}\left(\frac{\Lambda_{11}}{\lambda_{21}} + \frac{\lambda_{12}}{\Lambda_{22}}\right)\frac{\lambda_{23}}{\Lambda_{33}},$$

например, для $\gamma = \frac{1}{2}\Big[\frac{\lambda_{13}}{\Lambda_{33}} + \frac{1}{2}\Big(\frac{\Lambda_{11}}{\lambda_{21}} + \frac{\lambda_{12}}{\Lambda_{22}}\Big)\frac{\lambda_{23}}{\Lambda_{33}}\Big]$.

$\square$

Замечание 3.1. Аналогично лемме 3.1 получаем: если в задаче Γ_3 симметричные $n \times n$-матрицы D_{ij} и положительные числа Λ_{ii}, λ_{ij} $(i, j = 1, 2, 3;\ j \neq i)$, определенные в лемме 3.1, таковы, что

$$D_{ii} > 0,\ D_{ij} < 0 \text{ (при } j \neq i),\ \Lambda_{11}\Lambda_{33} < \lambda_{13}\lambda_{31},$$

то при

$$\beta = \frac{1}{2}\Big[\frac{\lambda_{12}}{\Lambda_{22}} + \frac{1}{2}\Big(\frac{\lambda_{13}}{\Lambda_{33}} + \frac{\Lambda_{11}}{\lambda_{31}}\Big)\frac{\lambda_{32}}{\Lambda_{22}}\Big],$$
$$\gamma = \frac{1}{2}\Big(\frac{\lambda_{13}}{\Lambda_{33}} + \frac{\Lambda_{11}}{\lambda_{31}}\Big).$$

квадратичная форма

$$f(u) = f_1(u) + \beta f_2(u) + \gamma f_3(u) = u_1' D_1 u_1 + u_2' D_2 u_2 + u_3' D_3 u_3$$

становится определенно отрицательной.

В самом деле, фигурирующие здесь «новые» β и γ также являются решением строгих неравенств (3.3).

Отметим, что (помимо двух приведенных в лемме 3.1 и замечании 3.1) решений (β, γ) системы строгих неравенств (3.3) может быть континуум. Как будет показано ниже, каждое из них «порождает», конечно, при $D_{ii} > 0$, $D_{ij} < 0$ $(i, j = 1, 2, 3;\ j \neq i)$, свое равновесие угроз и контругроз (РУИК) дифференциальной игры Γ.

Лемма 3.2. *Решениям $x(t)$ системы $\dot{x} = K(t)x$, $x(t_0) = x_0$, где $K(\cdot) \in C_{n\times n}[0, \vartheta]$, присуще свойство («нетривиальности»):*

$$x_0 \neq 0_n \Rightarrow x(t) \neq 0_n\ \forall t \in [t_0, \vartheta];$$

здесь 0_n – нуль-вектор из $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. от противного: пусть $\exists t_1 \in (t_0, \vartheta]$ такой, что $x(t_1) = 0_n$. Это означает, что в момент t_1 через позицию $(t_1, 0_n)$ «проходит» два решения системы $\dot{x} = K(t)x$: именно тривиальное $x^{(1)}(t) = 0_n$ $\forall t \in [0, \vartheta]$ и нетривиальное $x^{(2)}(t_1)$, порожденное ненулевым начальным условием $x_0 \neq 0_n$. Это противоречит теореме единственности решения линейного дифференциального уравнения. $\square$

Утверждение 3.1. *Если в дифференциальной игре* Γ

$$D_{ii} > 0,\ D_{ij} < 0,\ C_i < 0\ (i, j = 1, 2, 3;\ j \neq i),\ \Lambda_{11}\Lambda_{22} < \lambda_{12}\lambda_{21}, \quad (3.4)$$

то максимальная по Парето ситуация U^P *в трехкритериальной задаче* Γ_ν *будет*

$$\begin{gathered} U^P = (U_1^P, U_2^P, U_3^P) \div (u_1^P(t,x), u_2^P(t,x), u_3^P(t,x)) = u^P(t,x) = \\ = (Q_1^P(t)x, Q_2^P(t)x, Q_3^P(t)x) = \\ = (-D_1^{-1}\Theta^P(t)x, -D_2^{-1}\Theta^P(t)x, -D_3^{-1}\Theta^P(t)x), \end{gathered} \quad (3.5)$$

где симметричная, непрерывная на $[0, \vartheta]$ $n \times n$*-матрица*

$$\begin{gathered} \Theta^P(t) = [X^{-1}(t)]'\{C^{-1} + \\ + \int_t^\vartheta X^{-1}(\tau)[D_1^{-1} + D_2^{-1} + D_3^{-1}]X^{-1}(\tau)d\tau\}^{-1}X^{-1}(t), \end{gathered} \quad (3.6)$$

и постоянные симметричные $n \times n$*-матрицы*

$$D_i = D_{1i} + \beta D_{2i} + \gamma D_{3i}\ (i = 1, 2, 3), \quad (3.7)$$

числа

$$\beta = \frac{1}{2}\left[\frac{\Lambda_{11}}{\lambda_{21}} + \frac{\lambda_{12}}{\Lambda_{22}}\right],\ \gamma = \frac{1}{2}\left[\frac{\lambda_{13}}{\Lambda_{33}} + \frac{1}{2}\left(\frac{\Lambda_{11}}{\lambda_{21}} + \frac{\lambda_{12}}{\Lambda_{22}}\right)\frac{\lambda_{23}}{\Lambda_{33}}\right]$$

или

$$\beta = \frac{1}{2}\left[\frac{\lambda_{12}}{\Lambda_{22}} + \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_{13}}{\Lambda_{33}} + \frac{\Lambda_{11}}{\lambda_{31}}\right)\frac{\lambda_{32}}{\Lambda_{22}}\right],\ \gamma = \frac{1}{2}\left[\frac{\lambda_{13}}{\Lambda_{33}} + \frac{\Lambda_{11}}{\lambda_{31}}\right];$$

величина Λ_{ii} *– наибольший корень характеристического уравнения* $det[D_{ii} - \Lambda E_n] = 0$ $(i = 1, 2, 3)$, *величина* $-\lambda_{ij}$ *– наибольший корень характеристического уравнения* $det[D_{ij} - \lambda E_n] = 0$ $(i, j = 1, 2, 3;\ j \neq i)$, E_n *– единичная* $n \times n$*-матрица,* $X(t)$ *– фундаментальная матрица системы* $\dot{x} = A(t)x,\ X(\vartheta) = E_n$.

Доказательство. Найдем максимальную по Парето ситуацию U^P, применяя лемму 3.1 (конкретно, используя (2.4)) и метод динамического программирования (МДП) из [12, с. 112]. Само применение МДП, с учетом свойства 1.2, здесь сведется к осуществлению двух этапов. На *первом* этапе для задачи Γ_3 нужно найти два положительных числа β и γ, а также непрерывно дифференцируемую скалярную функцию $V(t,x) = x'\Theta(t)x$, $\Theta(t) = \Theta'(t)$ $\forall t \in [0,\vartheta]$ и три n-вектор-функции $u_i(t,x,V)$ $(i = 1,2,3)$ такие, что $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$V(\vartheta, x) = x'Cx,\ C = C_1 + \beta C_2 + \gamma C_3; \tag{3.8}$$

с помощью скалярной функции

$$W(t,x,u_1,u_2,u_3,V) = \frac{\partial V}{\partial t} + \left[\frac{\partial V}{\partial x}\right]'(A(t)x + u_1 + u_2 + u_3) + \\ + u_1' D_1 u_1 + u_2' D_2 u_2 + u_3' D_3 u_3$$

определить три n-вектор-функции $u_i(t,x,V)$ $(i = 1,2,3)$, исходя из $\left(\frac{\partial V}{\partial x} = grad_x V\right)$,

$$\max_{u_1 u_2 u_3} W(t,x,u_1,u_2,u_3,V) = Idem\{u_i \to u_i(t,x,V)\}\ (i = 1,2,3) \tag{3.9}$$

при любых $t \in [0,\vartheta]$, $x \in \mathbb{R}^n$, $V \in \mathbb{R}$. Достаточные условия существования $u(t,x,V)$ в (3.9) сводятся к выполнению требований: при $\forall (t,x) \in [0,\vartheta) \times \mathbb{R}^n$ достаточно, чтобы

$$\begin{gathered} \left.\frac{\partial W}{\partial u_i}\right|_{u(t,x,V)} = \frac{\partial V}{\partial x} + 2D_i u_i(t,x,V) = 0_n\ (i = 1,2,3), \\ \frac{\partial^2 W}{\partial u_i^2} = 2D_i < 0\ (i = 1,2,3), \end{gathered} \tag{3.10}$$

где, напомним, 0_n – нулевой n-вектор-столбец из $\mathbb{R}^n$, а $D_i < 0$ в силу леммы 3.1.

Из (3.10) получаем

$$u_i(t,x,V) = -\frac{1}{2} D_i^{-1} \frac{\partial V}{\partial x}\ (i = 1,2,3). \tag{3.11}$$

Тогда

$$W(t,x,u(t,x,V),V) = W[t,x,V] = \frac{\partial V}{\partial t} + \left[\frac{\partial V}{\partial x}\right]' A(t)x - \\ - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)'\left[D_1^{-1} + D_2^{-1} + D_3^{-1}\right]\frac{\partial V}{\partial x}.$$

Второй этап. Найдем решение вида $V = V^P(t,x) = x'\Theta^P x$, $\Theta^P = \left[\Theta^P(t)\right]'$ дифференциального уравнения с частными производными

$$W[t,x,V] = 0$$

и граничным условием $(C = C_1 + \beta C_2 + \gamma C_3)$

$$V(\vartheta, x) = x'Cx\ \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

т.е. для $\forall t \in [0,\vartheta]$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ должно иметь место

$$W\big[t, x, V(t,x) = x'\Theta^P x\big] = 0,\ V(\vartheta, x) = x'Cx\ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Оба эти требования выполнены, если симметричная $n\times n$-матрица $\Theta^P(t)$ удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению типа Риккати ($0_{n\times n}$ – нулевая $n \times n$-матрица)

$$\dot\Theta^P(t) + \Theta^P(t)A(t) + A(t)\Theta^P(t) - \Theta^P(t)\big[D_1^{-1}+D_2^{-1}+D_3^{-1}\big]\Theta^P(t)=0_{n\times n},$$
$$\Theta^P(\vartheta) = C = C_1 + \beta C_2 + \gamma C_3.$$

Решение $\Theta^P(t)$ полученного матричного уравнения типа Риккати имеет [12, с. 65] вид (3.6). Здесь учтена импликация

$$C_i < 0\ (i = 1,2,3) \Rightarrow C_1 + \beta C_2 + \gamma C_3 < 0.$$

Наконец, из (3.11), а так же учитывая

$$\big[V(t,x) = x'\Theta^P(t)x\big] \Rightarrow \left[\frac{\partial V(t,x)}{\partial x} = 2\Theta^P(t)x\right],$$

приходим к справедливости (3.5). Таким образом, максимальная по Парето ситуация U^P в задаче Γ_ν имеет вид (3.5)–(3.7). □

Перейдем к построению максимальных по Парето выигрышей $J^P = (J_1(U^P,t_0,x_0), J_2(U^P,t_0,x_0), J_3(U^P,t_0,x_0)) = (J_1^P, J_2^P, J_3^P)$ опять-таки с помощью идей МДП.

Утверждение 3.2. *Пусть выполнены требования (3.4) (из утверждения 3.1) и для дифференциальной игры* Γ *удалось найти три скалярные непрерывно дифференцируемые функции вида* $V_i(t,x) = x'\Theta_i(t)x$ $(i = 1,2,3)$ *такие, что*

1) $V_i(\vartheta,x) = x'C_i x\ \forall x \in \mathbb{R}^n$*;*

2) система из трех уравнений с частными производными

$$\begin{gathered}\tfrac{\partial V_i}{\partial t} + \left(\tfrac{\partial V_i}{\partial x}\right)'\big(N(t)x + x'\Theta^P(t)M_i(t)\Theta^P(t)x\big) = 0,\\ V_i(\vartheta,x) = x'C_i x\ \forall x \in \mathbb{R}^n\ (i=1,2,3),\end{gathered} \tag{3.12}$$

имеет решение вида $V_i(t,x) = x'\Theta_i(t)x$, $[\Theta_i(t)]' = \Theta_i(t)$ $(i = 1,2,3)$*.*

Тогда при любой начальной позиции $(t_0, x_0) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^n$, $x_0 \neq 0_n$ *имеет место*

$$J_i^P = J_i(U^P, t_0, x_0) = x_0' \Theta_i^P(t_0) x_0 \ (i = 1, 2, 3).$$

В (3.12) непрерывные $n \times n$*-матрицы*

$$\begin{gathered} N(t) = A(t) - \big(D_1^{-1} + D_2^{-1} + D_3^{-1}\big)\Theta^P(t), \\ M_i(t) = \Theta^P(t)\big[D_1^{-1} D_{i1} D_1^{-1} + D_2^{-1} D_{i2} D_2^{-1} + \\ D_3^{-1} D_{i3} D_3^{-1}\big]\Theta^P(t) \ (i = 1, 2, 3), \end{gathered}$$

$n \times n$*-матрицы* D_i, $\Theta^P(t)$ *приведены в (3.6), (3.7), а симметричные* $n \times n$*-матрицы*

$$\Theta_i(t) = \big[Y^{-1}(t)\big]'\Big\{C_i - \int_t^{\vartheta} Y'(\tau)\Theta^P(\tau) M_i(\tau)\Theta^P(\tau) Y(\tau) d\tau\Big\} Y^{-1}(t) \quad (i = 1, 2, 3). \tag{3.13}$$

Наконец, $Y(t)$ *– фундаментальная матрица решения однородной системы* $\dot{y} = N(t) y$, $Y(\vartheta) = E_n$.

Доказательство. Составим три скалярные функции

$$\begin{gathered} W_i[t, x, V_i] = \tfrac{\partial V_i}{\partial t} + \Big[\tfrac{\partial V_i}{\partial x}\Big]'\big(N(t)x + \big[u_1^P(t, x)\big]' D_{i1} u_1^P(t, x) + \\ + \big[u_2^P(t, x)\big]' D_{i2} u_2^P(t, x) + \big[u_3^P(t, x)\big]' D_{i3} u_3^P(t, x) \ (i = 1, 2, 3), \end{gathered} \tag{3.14}$$

причем $u_i^P(t, x)$ – n-вектор-функции, определенные в (3.5).

Ищем решение $V_i(t, x)$ $(i = 1, 2, 3)$ системы из трех уравнений с частными производными

$$W_i[t, x, V_i] = 0, \ V_i(\vartheta, x) = x' C_i x \ \forall x \in \mathbb{R}^n \ (i = 1, 2, 3) \tag{3.15}$$

в виде квадратичной формы $V_i(t, x) = x'\Theta_i(t) x$, $[\Theta_i(t)]' = \Theta_i(t)$ $(i = 1, 2, 3)$.

Установим два факта.

Во-первых, решению системы (3.14), (3.15) присуще свойство

$$V_i(t_0, x_0) = J_i(U^P, t_0, x_0) \ (i = 1, 2, 3), \tag{3.16}$$

где ситуация $U^P = (U_1^P, U_2^P, U_3^P)$ имеет вид (3.5). В самом деле, если U^P – ситуация из (3.5)–(3.7), то, согласно (3.14) и (3.15), решение $x^P(t)$ системы $\dot{x} = N(t)x$, $x(t_0) = x_0 \neq 0_n$, при $x = x^P(t)$ будет

$$0 = W_i[t, x^P(t), V_i(t, x^P(t))] = \frac{\partial V_i(t,x^P(t))}{\partial t} + \left[\frac{\partial V_i(t,x^P(t))}{\partial x}\right]' N(t)x^P(t) +$$
$$+ \sum_{j=1}^{3} \left[u_j^P(t, x^P(t))\right]' D_{ij} u_j^P(t, x^P(t)) = \bar{W}_i[t] \ \forall t \in [t_0, \vartheta] \ (i = 1, 2, 3).$$

Интегрируя обе части этого тождества в пределах отt_0 до ϑ, с учетом граничных условий из (3.15), приходим к

$$0 = \int_{t_0}^{\vartheta} \bar{W}_i[t]dt = \int_{t_0}^{\vartheta} \frac{dV_i^P(t,x^P(t))}{dt} dt + \int_{t_0}^{\vartheta} \sum_{j=1}^{3} \left[u_j^P(t, x^P(t))\right]' D_{ij} u_j^P(t, x^P(t)) dt =$$
$$= V_i^P(\vartheta, x^P(\vartheta)) - V_i^P(t_0, x^P(t_0)) + \int_{t_0}^{\vartheta} \sum_{j=1}^{3} \left[u_j^P(t, x^P(t))\right]' D_{ij} u_j^P(t, x^P(t)) dt =$$
$$= x'(\vartheta) C_i x(\vartheta) + \int_{t_0}^{\vartheta} \sum_{j=1}^{3} \left[u_j^P(t, x^P(t))\right]' D_{ij} u_j^P(t, x^P(t)) dt - V_i^P(t_0, x^P(t_0)) =$$
$$= J_i(U^P, t_0, x_0) - V_i^P(t_0, x^P(t_0)) \ (i = 1, 2, 3).$$

Откуда сразу следует справедливость равенств (3.16).

Во-вторых, установим, что решение $V_i(t, x)$ $(i = 1, 2, 3)$ системы (3.15) имеет вид $V_i(t, x) = x'\Theta_i(t)x$, симметричная $n \times n$-матрица $\Theta_i(t)$ представима в виде (3.13). В самом деле, подставив $V_i(t, x) = x'\Theta_i(t)x$ в (3.15), получаем справедливость (3.16), если только $\Theta_i(t)$ $(i = 1, 2, 3)$ является решением матричного линейного неоднородного дифференциального уравнения

$$\Theta_i + \Theta_i N + N\Theta_i + \Theta^P(t) M_i \Theta^P(t) = 0_{n\times n}, \ \Theta_i(\vartheta) = C_i \ (i = 1, 2, 3). \tag{3.17}$$

Нетрудно подстановкой $\Theta_i(t)$ из (3.13) убедиться, что симметричная $n \times n$-матрица $\Theta_i(t)$ из (3.13) в самом деле является решением (3.17), что и завершает доказательство утверждения 3.2. □

Замечание 3.2. Наконец, объединение утверждений 3.1 и 3.2 приводит к следующему итоговому результату, касающемуся явного вида максимального по Парето решения $(U^P, J^P) \in \mathcal{U} \times \mathbb{R}^3$ игры Г.

Пусть для дифференциальной игры Г

1^0. постоянные симметричные $n \times n$-матрицы

$$D_{ii} > 0, \ D_{ij} < 0, \ C_i < 0 \ (i, j = 1, 2, 3; j \neq i);$$

2^0. $[\Lambda_{11}\Lambda_{22} < \lambda_{12}\lambda_{21}]$.

Тогда при $\forall(t_0, x_0) \in [0,\vartheta) \times \mathbb{R}^n$, $x_0 \neq 0_n$ будет

$$U^P \div u^P(t,x) = (-D_1^{-1}\Theta^P(t)x, -D_2^{-1}\Theta^P(t)x, -D_3^{-1}\Theta^P(t)x),$$
$$J^P = (J_1^P, J_2^P, J_3^P),\ J_i^P = x_0'\Theta_i(t_0)x_0\ (i = 1,2,3),$$

а симметричные $n \times n$-матрицы

$$\Theta^P(t) = [X^{-1}(t)]'\{C^{-1}+$$
$$+\int\limits_t^\vartheta X^{-1}(\tau)[D_1^{-1} + D_2^{-1} + D_3^{-1}]X^{-1}(\tau)d\tau\}^{-1}X^{-1}(t),$$
$$\Theta_i(t) = \left[Y^{-1}(t)\right]'\left\{C_i - \int\limits_t^\vartheta Y'(\tau)\Theta^P(\tau)M_i(\tau)\Theta^P(\tau)Y(\tau)d\tau\right\}Y^{-1}(t),$$

$n \times n$-матрица $X(t)$, $(Y(t))$ – фундаментальная матрица решения системы $\dot{x} = A(t)x$, $X(\vartheta) = E_n$ (соответственно, $\dot{y} = N(t)y$, $Y(\vartheta) = E_n$); матрицы

$$C = C_1 + \beta C_2 + \gamma C_3,\ D_i = D_{i1} + \beta D_{i2} + \gamma D_{i3},$$
$$N(t) = A(t) - \left(D_1^{-1} + D_2^{-1} + D_3^{-1}\right)\Theta^P(t),$$
$$M_i(t) = \Theta^P(t)\left[D_1^{-1}D_{i1}D_1^{-1} + D_2^{-1}D_{i2}D_2^{-1}+\right.$$
$$\left.D_3^{-1}D_{i3}D_3^{-1}\right]\Theta^P(t),$$
$$\beta = \frac{1}{2}\left[\frac{\Lambda_{11}}{\lambda_{21}} + \frac{\lambda_{12}}{\Lambda_{22}}\right],\ \gamma = \frac{1}{2}\left[\frac{\lambda_{13}}{\Lambda_{33}} + \frac{1}{2}\left(\frac{\Lambda_{11}}{\lambda_{21}} + \frac{\lambda_{12}}{\Lambda_{22}}\right)\frac{\lambda_{23}}{\Lambda_{33}}\right],$$

величина Λ_{ii} $(-\lambda_{ij})$ – наибольший корень характеристического уравнения $det[D_{ii} - \Lambda E_n] = 0$ (соответственно, $det[D_{ij} - \lambda E_n] = 0$) $(i,j = 1,2,3;\ j \neq i)$.

4. Леммы о мажорантах

Перейдем к утверждениям, которые

– *во-первых*, позволяют сразу судить об отсутствии в дифференциальных играх вида Г равновесия по Нэшу (конечно, при выполнении (3.4)),

– *во-вторых*, реализуют для Г концепцию равновесия угроз и контругроз.

Причем эти сведения получаются на основании специальной знакоопределенности квадратичных форм, используемых в интегральных слагаемых функций выигрыша (2.3)).

Не оговаривая особо, далее предполагаем выполненными ограничения (3.4) и поэтому существует максимальная по Парето в Γ_ν ситуация

$$U^P = (U_1^P, U_2^P, U_3^P) \div (u_1^P(t,x), u_2^P(t,x), u_3^P(t,x)) = u^P(t,x) =$$
$$= (Q_1^P(t)x, Q_2^P(t)x, Q_3^P(t)x) =$$
$$= (-D_1^{-1}\Theta^P(t)x, -D_2^{-1}\Theta^P(t)x, -D_3^{-1}\Theta^P(t)x).$$

Лемма 4.1. *Пусть в (2.3) при $i = 1$ матрица $D_{11} > 0$, тогда для максимальной по Парето в Γ ситуации U^P существует постоянная $\alpha^{(1)}(U^P, t_0, x_0) > 0$ такая, что при $\forall\alpha \geq \alpha^{(1)}(U^P, t_0, x_0) > 0$ и стратегии первого игрока $U_1^T \div \alpha x$ будет*

$$J_1(U_1^T, U_2^P, U_3^P, t_0, x_0) > J_1(U_1^P, U_2^P, U_3^P, t_0, x_0) \tag{4.1}$$

для любых начальных позиций $(t_0, x_0) \in [0, \vartheta) \times [\mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}]$.

Доказательство. В утверждении 3.2 уже установлено существование функции Беллмана $V_1(t,x) = x'\Theta_1(t)x$, для которой

$$J_1(U^P, t_0, x_0) = V_1(t_0, x_0) = x_0'\Theta_1(t_0)x_0,$$

здесь непрерывная и симметричная на $[0,\vartheta)$ $n\times n$-матрица $\Theta_1(t)$ имеет вид (3.13) ($i = 1$).

Рассмотрим теперь стратегию первого игрока $U_1^T \div u_1^T(t,x) = \alpha x$, величину числового параметра $\alpha > 0$ определим ниже. Вследствие симметричности матрицы D_{11} и дополнительно $D_{11} > 0$ имеет место

$$u_1'D_{11}u_1 \geq \lambda_1\|u_1\|^2 = \lambda_1 u_1'u_1 \ \ \forall u_1 \in \mathbb{R}^n, \tag{4.2}$$

где $\|\cdot\|$ – евклидова норма и $\lambda_1 > 0$ – наименьший корень характеристического уравнения $det[D_{11} - \lambda E_n] = 0$ [6, с. 89].

Далее будем использовать симметричную $n\times n$-матрицу $\Theta^P(t)$ из (3.6)–(3.8), а из (3.5) стратегию $U_2^P \div Q_2^P(t)x$ второго и $U_3^P \div Q_3^P(t)x$ третьего игроков. Затем рассмотрим скалярную функцию

$$W_1[t,x] = W_1(t, x, u_1^T(t,x) = \alpha x, u_2^P(t,x) = Q_2^P(t)x,$$
$$u_3^P(t,x) = Q_3^P(t)x, V_1(t,x) = x'\Theta_1(t)x) =$$

$$
\begin{gathered}
= \tfrac{\partial V_1(t,x)}{\partial t} + \left[\tfrac{\partial V_1(t,x)}{\partial x}\right]'(A(t)x + u_1^T(t,x) + u_2^P(t,x) + u_3^P(t,x)) + \\
+[u_1^T(t,x)]'D_1u_1^T(t,x) + [u_2^P(t,x)]'D_2u_2^P(t,x) + [u_3^P(t,x)]'D_3u_3^P(t,x) \geq \\
\geq x'\tfrac{d\Theta_1(t)}{dt}x + 2x'\Theta_1(t)\big[A(t) + \alpha E_n + Q_2^P(t) + Q_3^P(t)\big]x + \\
+x'(\lambda_1\alpha^2E_n)x + x'\big[Q_2^P(t)\big]'D_{12}Q_2^P(t)x + x'\big[Q_3^P(t)\big]'D_{13}Q_3^P(t)x = \\
= x'\big\{\tfrac{d\Theta_1(t)}{dt} + \Theta_1(t)\big[A(t) + \alpha E_n + Q_2^P(t) + Q_3^P(t)\big] + \\
+\big[A'(t) + \alpha E_n + \big(Q_2^P(t)\big)' + \big(Q_3^P(t)\big)'\big]\Theta_1(t) + \lambda_1\alpha^2E_n + \\
+\big[Q_2^P(t)\big]'D_{12}Q_2^P(t) + \big[Q_3^P(t)\big]'D_{13}Q_3^P(t)\big\}x = x'M_1(t,\alpha)x.
\end{gathered}
$$

Используемая здесь в фигурных скобках матрица $M_1(t,\alpha)$ симметрична и имеет следующий вид

$$
M_1(t,\alpha) = \lambda_1\alpha^2E_n + 2\alpha\Theta_1(t) + K_1(t),
$$

где непрерывная и симметричная $n \times n$-матрица

$$
\begin{gathered}
K_1(t) = \dot{\Theta}_1(t) + \Theta_1(t)\big[A(t) + Q_2^P(t) + Q_3^P(t)\big] + \big[Q_2^P(t)\big]'D_{12}Q_2^P(t) + \\
+\big[Q_3^P(t)\big]'D_{13}Q_3^P(t) + \big[A'(t) + \big(Q_2^P(t)\big)' + \big(Q_3^P(t)\big)'\big]\Theta_1(t).
\end{gathered}
$$

Элементы матриц $\Theta_1(t)$ и $K_1(t)$ непрерывны на $[0,\vartheta]$ и, следовательно, равномерно ограничены на компакте $[0,\vartheta]$. Множитель α^2 входит только в диагональные элементы матрицы $M_1(t,\alpha)$. Напомним, что $\lambda_1 > 0$ является наименьшим корнем характеристического уравнения $det[D_{11} - \lambda E_n] = 0$, а E_n – единичная $n \times n$-матрица. Поэтому постоянную $\alpha = \alpha^{(1)}(U^P, t_0, x_0) > 0$ можно выбрать настолько большой, чтобы все ведущие миноры матрицы $M_1(t,\alpha)$ стали положительными при $\forall t \in [0,\vartheta]$ и $\forall \alpha \geq \alpha^{(1)}(U^P, t_0, x_0)$ (для полноты изложения далее в конце этого раздела (перед замечанием 4.1) приводится доказательство данного факта). Тогда, согласно лемме 3.2 и [6, с. 88], квадратичная форма $x'M_1(t,\alpha)x$ будет определенно положительной для всех $t \in [0,\vartheta]$ и постоянных $\alpha \geq \alpha^{(1)}(U^P, t_0, x_0)$.

Перейдем к доказательству существования постоянной $\alpha^{(1)}(U^P, t_0, x_0) > 0$ такой, что при всех $\alpha \geq \alpha^{(1)}(U^P, t_0, x_0)$ квадратичная форма $x'M_1(t,\alpha)x$ будет определенно положительной для $\forall t \in [0,\vartheta]$ и $x \in \mathbb{R}^n$. Заметим, что $n \times n$-матрица $M_1(t,\alpha)$ симметрична. По критерию Сильвестра квадратичная форма $x'M_1(t,\alpha)x$ определенно положительна, если все ведущие (угловые) миноры

Δ_r $(r = 1,\ldots,n)$ матрицы $M_1(t,\alpha)$ положительны. Миноры Δ_r расположены в первых r строках и первых r столбцах матрицы $M_1(t,\alpha)$, именно, $(r = 1,\ldots,n)$

$$\Delta_r(t,\alpha) = \begin{vmatrix} \lambda_1\alpha^2 n + \alpha l_{11}(t) + k_{11}(t) & \ldots & \alpha l_{1r}(t) + k_{1r}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha l_{r1}(t) + k_{r1}(t) & \ldots & \lambda_1\alpha^2 n + \alpha l_{rr}(t) + k_{rr}(t) \end{vmatrix}$$

должны быть положительны при $\forall t \in [0,\vartheta]$, $\forall \alpha \geq \alpha^{(1)}(U^P, t_0, x_0) > 0$. Раскрывая определители $\Delta_r(t,\alpha)$ и располагая слагаемые по убыванию степени параметра α, получаем

$$\Delta_r(t,\alpha) = a_0\alpha^{2r} + a_1(t)\alpha^{2r-1} + \ldots + a_{2r-1}(t)\alpha + a_{2r}(t),$$

причем постоянная $a_0 = \lambda_1^r n^r > 0$, а остальные коэффициенты $a_1(t)$, $\ldots$, $a_{2r}(t)$ непрерывны на компакте $[0,\vartheta]$ (и поэтому равномерно ограниченны). Заметим, что данная равномерная ограниченность приводит к существованию $\Omega_r = const > 0$ такого, что

$$\max_{0\leq t\leq\vartheta} \left\{a_p(t)|\ p = 0,1,\ldots,2r\right\} < \Omega_r.$$

Покажем ниже, что при

$$\alpha > \frac{\Omega_r}{|a_0|} + 1 = \alpha^{(1)}(U^P, t_0, x_0)$$

будет

$$|a_1(t)\alpha^{2r-1} + a_2(t)\alpha^{2r-2} + \ldots + a_{2r-1}(t)\alpha + a_{2r}(t)| < |a_0\alpha^{2r}|,$$

т.е. знак многочлена при достаточно большом $|\alpha|$ определяется знаком его старшего члена. Действительно,

$$\begin{gathered} |a_1(t)\alpha^{2r-1} + a_2(t)\alpha^{2r-2} + \ldots + a_{2r-1}(t)\alpha + a_{2r}(t)| \leq \\ \leq |a_1(t)|\alpha^{2r-1} + |a_2(t)|\alpha^{2r-2} + \ldots + |a_{2r-1}(t)|\alpha + |a_{2r}(t)| \leq \\ \leq \Omega_r\big(\alpha^{2r-1} + \alpha^{2r-2} + \ldots + \alpha + 1\big) = \Omega_r\tfrac{\alpha^{2r}-1}{\alpha-1}. \end{gathered}$$

Кроме того,

$$\left[\alpha > \tfrac{\Omega_r}{a_0} + 1\right] \Rightarrow [\Omega_r < a_0(\alpha - 1)].$$

Поэтому, подставляя в предыдущее неравенство вместо Ω_r заведомо большую величину $a_0(\alpha-1)$, получаем

$$|a_1(t)\alpha^{2r-1}+a_2(t)\alpha^{2r-2}+\ldots+a_{2r}(t)|<$$
$$<a_0(\alpha-1)\tfrac{\alpha^{2r}-1}{\alpha-1}=a_0(\alpha^{2r}-1)<a_0\alpha^{2r}.$$

Итак, при $\forall\alpha\geq\Omega_r=\alpha^{(r)}(U,t_0,x_0)>0$ и $\forall t\in[0,\vartheta]$ имеет место

$$|a_1(t)\alpha^{2r-1}+a_2(t)\alpha^{2r-2}+\ldots+a_{2r}(t)|<a_0\alpha^{2r},$$

т.е. при достаточно большом α знак многочлена $\Delta_r(t,\alpha)$ определяется знаком его старшего члена. Наконец, для каждого $r=1,\ldots,n$ находим число $\Omega_r>0$ и считаем $\alpha^{(1)}(U^P,t_0,x_0)=\max\limits_{r=1,\ldots,n}\Omega_r$.

Тогда при $\alpha^{(1)}=\alpha^{(1)}(U^P,t_0,x_0)$ получаем

$$\tilde{W}_1[t,x]=x'M_1(t,\alpha^{(1)})x>0\ \ \forall t\in[0,\vartheta],\ \forall x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0_n\}. \tag{4.3}$$

Обозначим через $\tilde{x}(t)$ решение (при $t\in[0,\vartheta]$) векторного дифференциального уравнения

$$\dot{x}=A(t)x+\alpha^{(1)}x+Q_2^P(t)x+Q_3^P(t)x,\ x(t_0)=x_0\neq 0_n.$$

Так как (лемма 3.2) $[x_0\neq 0_n]\Rightarrow(\tilde{x}(t)\neq 0_n\ \forall t\in[0,\vartheta])$, то, согласно (4.3), будет

$$\tilde{W}_1[t,\tilde{x}(t)]>0\ \ \forall t\in[0,\vartheta].$$

Отсюда, интегрируя снова обе части последнего неравенства в пределах от t_0 до ϑ и учитывая граничное условие $\Theta_1(\vartheta)=C_1$, а также $u_1^T[t]=\alpha^{(1)}\tilde{x}(t)$, получаем

$$0=\int\limits_{t_0}^{\vartheta}\tilde{W}_1[t,\tilde{x}(t)]dt=\int\limits_{t_0}^{\vartheta}\Big\{\tfrac{\partial V_1(t,x)}{\partial t}+$$
$$+\big[\tfrac{\partial V_1(t,x)}{\partial x}\big]'\big[A(t)x+\alpha^{(1)}E_nx+Q_2^P(t)x+Q_3^P(t)x\big]\Big\}_{x=\tilde{x}(t)}dt+$$
$$+\int\limits_{t_0}^{\vartheta}\Big\{(\alpha^{(1)})^2x'D_{11}x+x'\big[Q_2^P(t)\big]'D_{12}Q_2^P(t)x+$$
$$+x'\big[Q_3^P(t)\big]'D_{13}Q_3^P(t)x\Big\}_{x=\tilde{x}(t)}dt=$$
$$=\int\limits_{t_0}^{\vartheta}\tfrac{dV_1(t,\tilde{x}(t))}{dt}dt+\int\limits_{t_0}^{\vartheta}\sum_{j=1}^{3}\big[u_j^T[t]\big]'D_{1j}u_j^T[t]dt=$$
$$=[\tilde{x}(\vartheta)]'C_1\tilde{x}(\vartheta)+\int\limits_{t_0}^{\vartheta}\sum_{j=1}^{3}\big[u_j^T[t]\big]'D_{1j}u_j^T[t]dt-V_1(t_0,x_0)=$$
$$=J_1(U_1^T,U_2^P,U_3^P,t_0,x_0)-V_1(t_0,x_0).$$

Отсюда и из $J_1(U_1^P, U_2^P, U_3^P, t_0, x_0) = V_1(t_0, x_0)$ сразу следует справедливость леммы 4.1. $\square$

Замечание 4.1. Рассмотрим внутреннюю оптимизационную задачу в игре Γ: найти $\max\limits_{U_1 \in \mathcal{U}_1} J_1(U_1, U_2^P, U_3^P, t_0, x_0)$ при ограничении (2.1), фиксированных стратегиях $U_2^P \in \mathcal{U}_2$ второго и $U_3^P \in \mathcal{U}_3$ третьего игроков, а также любых $(t_0, x_0) \in [0, \vartheta) \times [\mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}]$. Фактически лемма 4.1 утверждает, что при $D_{11} > 0$ и $x_0 \neq 0_n$ эта задача максимизации не имеет решения. В самом деле, какую бы стратегию $U_1 \in \mathcal{U}_1$ первый игрок не выбрал, всегда существует стратегия $\tilde{U}_1 \in \mathcal{U}_1$ этого игрока такая, что

$$J_1(\tilde{U}_1, U_2^P, U_3^P, t_0, x_0) > J_1(U_1, U_2^P, U_3^P, t_0, x_0)\ \forall (t_0, x_0) \in [0, \vartheta) \times [\mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}].$$

Такой результат позволяет сразу «отметать» (при выборе решения игры Γ) те концепции принятия равновесных решений игровых задач вида Γ, в условиях которых фигурирует максимизация функции выигрыша первого игрока (например, не применять при $D_{11} > 0$ концепцию равновесия по Нэшу в качестве принципа выбора решения в игре Γ).

Таким образом, в дифференциальной игре Γ при выполнении (3.4) ситуация равновесия по Нэшу $U^e \in \mathcal{U}$ *не существует*. Одновременно с тем стратегия первого игрока $U_1^T \div \alpha x$, $\forall \alpha \geq \alpha^{(1)} = \alpha^{(1)}(U^P, t_0, x_0)$ реализует, согласно (2.5), угрозу первого игрока на максимальную по Парето ситуацию U^P. В следующих леммах считаем начальную позицию (t_0, x_0) «замороженной» и совпадающей с той, которая фигурирует в лемме 4.1, а в «угрожающей» стратегии первого игрока $U_1^T \div \alpha x$ также считаем постоянным скаляр $\alpha = \alpha^{(1)}$. Напомним, что, не оговаривая особо, считаем выполненными ограничения 3.4.

Итак фактически лемма 4.1 устанавливает справедливость следующего

Утверждение 4.1. *Если в игре* Γ *хотя бы одна из постоянных симметричных* $n \times n$*-матриц* $D_{ii} > 0$ $(i = 1, 2, 3)$*, то в дифференциальной игре* Γ *не существует равновесия по Нэшу, именно не существует стратегии* $U_i^e \in \mathcal{U}_i$*, для которой выполнено соответствующее требование для* U_i^e *из определения 2.2.*

Здесь следует отметить, что , во-первых, условие $D_{ii} > 0$ (при «замороженном» $i \in \{1, 2, 3\}$) не допускает выполнения только i-го равенства из определения 2.2. Этого *достаточно для отсутствия равновесной по Нэшу ситуации* U^e в игре Γ. Если же $D_{ii} > 0$ при всех $i = 1, 2, 3$, то не могут реализоваться *все три* равенства (из определения 2.2).

Во-вторых, очевидна эквиваленция

$$D > 0 \Leftrightarrow -D < 0.$$

$(-D)$ означает, что все элементы матрицы D умножаются на -1.

Тогда лемма 4.1 приводит к справедливости следующего утверждения.

Лемма 4.2. *Пусть в (2.3) матрица* $D_{12} < 0$. *Тогда существует постоянная* $\alpha^{(2)} = \alpha^{(2)}(U^P, U_1^T, t_0, x_0) > 0$ *такая, что для стратегии второго игрока* $U_2^C \div \alpha x$ *при* $\forall \alpha \geq \alpha^{(2)}$ *будет*

$$J_1(U_1^T, U_2^C, U_3^P, t_0, x_0) < J_1(U^P, t_0, x_0), \tag{4.4}$$

т.е. стратегия $U_2^C \div \alpha x$ *при* $\forall \alpha \geq \alpha^{(2)}$ *реализует в игре* Γ *неполную контругрозу в ответ на угрозу* U_1^T *первого игрока.*

Доказательство. Доказательство, с очевидными изменениями, сразу следует из леммы 4.1, мы все же (для полноты изложения) проведем его, следуя этапам из доказательства леммы 4.1. Именно, на *первом* этапе построим функцию Беллмана $\bar{V}_1(t, x) = x'\bar{\Theta}_1(t)x$, $\bar{\Theta}_1(t) = \bar{\Theta}_1'(t)$ такую, что

$$J_1(U_1^T, U_2^P, U_3^P, t_0, x_0) = \bar{V}_1(t_0, x_0), \tag{4.5}$$

на *втором* установим выполнение (4.4) при $\forall \alpha \geq \alpha^{(2)}$ для стратегии второго игрока $U_2^C \div \alpha x$.

Этап 1. Рассмотрим скалярную функцию Беллмана («диктуемую» МДП)

$$\begin{gathered}
\bar{W}_1[t, x, \bar{V}_1] = W_1(t, x, u_1^T(t, x) = \alpha^{(1)} x, \\
u_2^P(t, x) = -D_2^{-1}\Theta^P(t)x, u_3^P(t, x) = -D_3^{-1}\Theta^P(t)x, \bar{V}_1) = \\
= \frac{\partial \bar{V}_1}{\partial t} + \left[\frac{\partial \bar{V}_1}{\partial x}\right]' \left[A(t) + \alpha^{(1)} E_n - \left(D_2^{-1} + D_3^{-1}\right)\Theta^P(t)\right]x + \\
+ \left(\alpha^{(1)}\right)^2 x' D_{11} x + (u_2^P(t, x))' D_{12} u_2^P(t, x) + (u_3^P(t, x))' D_{13} u_3^P(t, x).
\end{gathered} \tag{4.6}$$

Тогда $\bar{W}_1[t, x, \bar{V}_1 = x'\Theta_1^C(t)x] = 0$, если $\Theta_1^C(t)$ будет решением матричного линейного неоднородного дифференциального уравнения

$$\begin{gathered}\dot{\Theta}_1^C(t) + \Theta_1^C\big[A(t) + \alpha^{(1)}E_n - \big(D_2^{-1} + D_3^{-1}\big)\Theta^P(t)\big] + \\ \big[A'(t) + \alpha^{(1)}E_n - \Theta^P(t)\big(D_2^{-1} + D_3^{-1}\big)\big]\Theta_1^C + \\ +\big(\alpha^{(1)}\big)^2 x'D_{11} + \Theta^P(t)\big[D_2^{-1}D_{12}D_2^{-1} + D_3^{-1}D_{13}D_3^{-1}\big]\Theta^P(t) = 0_{n\times n}, \\ \big[\Theta_1^C(\vartheta) = C_1\big] \Leftarrow \big[x'\Theta_1^C(\vartheta)x = x'C_1x \ \forall x \in \mathbb{R}^n\big].\end{gathered}$$

Решение $\Theta_1^C(t)$ этого уравнения существует, единственно и продолжимо влево на $[t_0, \vartheta]$. Пусть теперь n-вектор-функция $x^C(t)$ является решением однородного линейного дифференциального уравнения

$$\dot{x} = \big[A(t) + \alpha^{(1)}E_n - \big(D_2^{-1} + D_3^{-1}\big)\Theta^P(t)\big]x, \ x(t_0) = x_0.$$

Тогда, с учетом (4.6), при $\forall t \in [t_0, \vartheta]$ будет

$$\begin{gathered}\bar{W}_1[t, x = x^C(t), \bar{V}_1(t, x^C(t))] = (x^C(t))'\Theta_1^C(t)x^C(t))] = \\ = \tfrac{d\bar{V}_1(t, x^C(t))}{dt} + \big[u_1^C(t, x^C(t))\big]'D_{11}u_1^C(t, x^C(t)) + \\ +\big[u_2^P(t, x^C(t))\big]'D_{12}u_2^P(t, x^C(t)) + \big[u_3^P(t, x^C(t))\big]'D_{13}u_3^P(t, x^C(t)) = \\ = \bar{W}_1^C[t] = 0.\end{gathered}$$

Интегрируя обе части этого равенства в пределах от t_0 до ϑ, получим

$$\begin{gathered}u_1^C[t] = \alpha^{(1)}x^C(t), \ u_j^P[t] = -D_j^{-1}\Theta^P(t)x^C(t) \ (j = 2, 3), \\ \bar{V}_1(\vartheta, x^C(\vartheta)) - \bar{V}_1(t_0, x_0) + \int\limits_{t_0}^{\vartheta}\big\{(u_1^C[t])'D_{11}u_1^C[t] + (u_2^P[t])'D_{12}u_2^P[t] + \\ +(u_3^P[t])'D_{13}u_3^P[t]\big\}dt = \\ = J_1(U_1^C, U_2^P, U_3^P, t_0, x_0) - \bar{V}_1(t_0, x_0) = 0,\end{gathered}$$

что и доказывает справедливость (4.5).

Этап 2. Здесь учтем, что из симметричности постоянной $n \times n$-матрицы следует $\Big[D_{12} < 0\Big] \Rightarrow \Big[\exists\lambda_{12} = const > 0\Big]$ такая, что

$$u_2'D_{12}u_2 \le -\lambda_{12}u_2'u_2 = -\lambda_{12}\|u_2\|^2, \tag{4.7}$$

где $-\lambda_{12}$ – наибольший корень характеристического уравнения $det[D_{12} - \lambda E_n] = 0$. С учетом (4.6) вернемся к скалярной функции

$\bar{W}_1[t,x,\bar{V}_1 = x'\Theta_1^C(t)x] = \overline{\overline{W_1}}[t,x]$, где с учетом (4.9), именно

$$\begin{gathered}\overline{\overline{W}}_1[t,x] = \tfrac{\partial\bar{V}_1(t,x)}{\partial t} + \Big(\tfrac{\partial\bar{V}_1(t,x)}{\partial x}\Big)'\big[A(t)+\alpha^{(1)}E_n + \alpha E_n - D_3^{-1}\Theta^P(t)\big]x+\\ +\big(\alpha^{(1)}\big)^2 x'D_{11}x + \alpha^2 x'D_{12}x + x'\Theta^P(t)D_3^{-1}D_{13}D_3^{-1}\Theta^P(t)x \geq\\ \geq -\lambda_{12}\alpha^2 x'x + 2x'\Theta^C(t)\big[A(t)+\alpha^{(1)}E_n+\alpha E_n - D_3^{-1}\Theta^P(t)\big]x+\\ +x'\Theta^P(t)D_3^{-1}D_{13}D_3^{-1}\Theta^P(t)x + \big(\alpha^{(1)}\big)^2x'D_{11}x =\\ = x'L(t,\alpha)x,\ L(t,\alpha)=L'(t,\alpha),\end{gathered}$$

где $L(t,\alpha) = -\lambda_{12}\alpha^2 E_n + 2\alpha\Theta_1^C(t) + \Xi_1(t)$.

Элементы матрицы $L(t,\alpha)$ непрерывны на компакте $[0,\vartheta]$ и, следовательно, равномерно ограничены, множитель α^2 входит только в диагональные элементы матрицы $L(t,\alpha)$. Тогда существует достаточно большое положительное число $\alpha^{(2)}$, такое, чтобы при $\forall\alpha\geq\alpha^{(2)}$ все ведущие миноры матрицы $L(t,\alpha)$ нечетного порядка были отрицательны и четного – положительны. Согласно [6, с.88], при $\alpha\geq\alpha^{(2)}$ квадратичная форма $x'L(t,\alpha)x$ тогда станет определенно отрицательной при $\forall t\in[t_0,\vartheta]$.

Воспользуемся снова уже введенной выше скалярной функцией $\overline{\overline{W}}_1[t,x]$, где заменим x на $x^C(t)$ - решение однородного векторного дифференциального уравнения

$$\dot{x}^C = \big[A(t)+\alpha^{(1)}E_n+\alpha E_n - D_3^{-1}\Theta^P(t)\big]x^C,\ x^C(t_0)=x_0. \tag{4.8}$$

В силу леммы 3.2 будет $x^C(t)\neq 0_n$ при $\forall t\in[t_0,\vartheta]$. Поэтому для $\alpha\geq\alpha^{(2)}$ имеем

$$\overline{W}_1[t,x^C(t)] = [x^C(t)]'L(t,\alpha)x^C(t) < 0,\ t\in[t_0,\vartheta].$$

Интегрируя обе части полученного строго неравенства в пределах от t_0 до ϑ, с учетом $u_1^T(t,x)=\alpha^{(1)}x$, $\bar{V}_1(\vartheta,x)=x'C_1x$, $x=x^C(t)$, приходим к

$$\begin{gathered}0 > \int\limits_{t_0}^{\vartheta}\overline{\overline{W}}_1[t,x^C(t)]dt = \int\limits_{t_0}^{\vartheta}\big\{\tfrac{\partial\bar{V}_1(t,x^C(t))}{\partial t} + \Big[\tfrac{\partial\bar{V}_1(t,x^C(t))}{\partial x}\Big]'\big[A(t)+\\ +(\alpha^{(1)}+\alpha)E_n - D_3^{-1}\Theta^P(t)\big]x^C(t)+\\ +[u_1^T(t,x^C(t))]'D_{11}u_1^T(t,x^C(t)) + \alpha^2(x^C(t))'D_{12}x^C(t)+\\ +(x^C(t))'\Theta^P(t)D_3^{-1}D_{13}D_3^{-1}\Theta^P(t)x^C(t)\big\}dt =\end{gathered}$$

$$
= \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \frac{d\bar{V}_1}{dt} dt + \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \big\{ [u_1^T(t, x^C(t))]' D_{11} u_1^T(t, x^C(t)) +
$$
$$
+ \alpha^2 (x^C(t))' D_{12} x^C(t) + (x^C(t))' \Theta^P(t) D_3^{-1} D_{13} D_3^{-1} \Theta^P(t) x^C(t) \big\} dt =
$$
$$
= \bar{V}_1(\vartheta, x^C(\vartheta)) - \bar{V}_1(t_0, x_0) + \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \big\{ u_1^T[t] D_{11} u_1^T[t] + \alpha^2 (x^C(t))' D_{12} x^C(t) +
$$
$$
+ (x^C(t))' \Theta^P(t) D_3^{-1} D_{13} D_3^{-1} \Theta^P(t) x^C(t) \big\} dt =
$$
$$
= J_1(U_1^T, U_2^C, U_3^P, t_0, x_0) - \bar{V}_1(t_0, x_0).
$$

Откуда из (4.5) сразу получаем справедливость (4.4). □

Аналогично доказательству лемм 4.1 и 4.2 устанавливается справедливость следующих двух утверждений (леммы 4.3 и 4.4). В них, напомним, считаем «замороженными» начальную позицию (t_0, x_0), $n \times n$-непрерывную матрицу $\Theta^P(t)$, стратегию $U_2^C \div \alpha^{(2)} x$ неполной угрозы, фигурирующих в леммах 4.1 и 4.2, и выполнены ограничения (4.5).

Лемма 4.3. *Имеет место импликация* $D_{22} > 0 \Rightarrow \exists \alpha^{(3)} = \alpha^{(2)}(U^P, U_1^T, t_0, x_0) = const > 0$ *такая, что при* $\forall \alpha \geq \alpha^{(3)}$ *и стратегии* $U_2^C \div \alpha x$ *будет*

$$
J_2(U_1^T, U_2^C, U_3^P, t_0, x_0) > J_2(U_1^T, U_2^P, U_3^P, t_0, x_0), \tag{4.9}
$$

т.е. стратегия второго игрока $U_2^C \div (\max\{\alpha^{(2)}, \alpha^{(3)}\}) x$ *завершает полную контругрозу (совместно с* $U_2^C \div \alpha^{(2)} x$*) на угрозу первого на* U^P.

Доказательство. Начнем с применения неполной контругрозы U_1^T первого игрока на U^P, такой, что

$$
J_1(U_1^T, U_2^P, U_3^P, t_0, x_0) > J_1(U_1^P, U_2^P, U_3^P, t_0, x_0), \tag{4.10}
$$

На основании максимальности по Парето U^P, а также свойства 2.1 (из раздела 2 настоящей статьи) получаем

$$
J_2(U_1^T, U_2^P, U_3^P, t_0, x_0) < J_2(U_1^P, U_2^P, U_3^P, t_0, x_0). \tag{4.11}
$$

Затем, также как в доказательстве леммы 4.1, во-первых, установим существование функции Беллмана $V_2(t, x) = x' \Theta_2(t) x$, для которой

$$
J_2(U_1^C, U_2^P, U_3^P, t_0, x_0) = V_2(t_0, x_0) = x_0' \Theta_2(t_0) x_0, \tag{4.12}
$$

во-вторых, с учетом $D_{22} = D'_{22}$ и $D_{22} > 0$ и следующего неравенства

$$u_2 D_{22} u_2 \geq \lambda_{22} \|u_2\|^2 = \lambda_{22} u'_2 u_2 \; \forall u_2 \in \mathbb{R}^n, \tag{4.13}$$

где $\lambda_{22} > 0$ - наименьший корень характеристического уравнения $det[D_{22} - \lambda E_n] = 0$, составим

$$\begin{gathered}
\bar{W}_2[t,x] = W_2(t,x,u_1^T(t,x) = \alpha^{(1)}x, u_2(t,x) = \alpha x, \\
u_3^P(t,x) = -D_3^{-1}\Theta^P(t)x, V_2 = x'\Theta_2(t)x) \geq \\
\geq \tfrac{\partial V_2(t,x)}{\partial t} + \left(\tfrac{\partial V_2}{\partial x}\right)' \left[A(t)x + u_1^T(t,x) + u_2(t,x) - D_3^{-1}\Theta^P(t)x\right] + \\
+ [u_1^T(t,x)]' D_{21} u_1^T(t,x) + \alpha^2 \lambda_{22} x'x + x'\Theta^P(t) D_3^{-1} D_{23} D_3^{-1} \Theta^P(t) x = \\
= x' \Big\{ \tfrac{d\Theta_2(t)}{dt} + \Theta_2(t) \left[A(t) + \left(\alpha^{(1)}\right)^2 E_n + \alpha^2 \lambda_{22} E_n \,\breve{}\, D_3^{-1} \Theta^P(t)\right] + \\
+ \left[A'(t) + \left(\alpha^{(1)}\right)^2 E_n + \alpha^2 \lambda_{22} E_n \,\breve{}\, \Theta^P(t) D_3^{-1}\right] \Theta_2(t) + \\
+ \left(\alpha^{(1)}\right)^2 E_n + \alpha^2 \lambda_{22} E_n + \Theta^P(t) D_3^{-1} D_{23} D_3^{-1} \Theta^P(t) \Big\} x = x' M_2(t,\alpha) x.
\end{gathered}$$

При достаточно больших $\alpha \geq \alpha^{(3)}$, квадратичная форма $x'M_2(t,\alpha)x > 0$ (согласно критерию Сильвестра), кроме того, решение $x(t)$ системы

$$\dot{x} = \left[A(t) + \alpha^{(1)} E_n + \alpha E_n - D_3^{-1} \Theta^P(t)\right] x, \; x(t_0) = x_0. \tag{4.14}$$

При $x_0 \neq 0 \Rightarrow x(t) \neq 0_n$ (лемма 3.2), поэтому $x'(t) M_2(t,\alpha) x(t) > 0$ $\forall t \in [t_0, \vartheta]$. Интегрируя обе части этого неравенства, получаем

$$\begin{gathered}
0 < \int_{t_0}^{\vartheta} x'(t) M_2(t,\alpha) x(t) dt = \int_{t_0}^{\vartheta} \tfrac{dV_2(t,x(t))}{dt} dt + \\
+ \int_{t_0}^{\vartheta} \left\{ u_1^T[t] D_{21} u_1^T[t] + u_2^C[t] D_{22} u_2^C[t] + u_3^P[t] D_{23} u_3^P[t] \right\} dt = \\
= J_2(U_1^T, U_2^C, U_3^P, t_0, x_0) - V_2(t_0, x_0).
\end{gathered}$$

Отсюда и из (4.12) сразу следует справедливость (4.9). □

Аналогично лемме 4.2 доказывается

Лемма 4.4. *Пусть U_2^T - угроза второго игрока на максимальную по Парето в Γ_ν ситуацию $U^P = (U_1^P, U_2^P, U_3^P)$, т.е. нашлась стратегия $U_2^T \div \alpha x$ такая, что при $\alpha \geq \alpha^{(2)}$*

$$J_2(U_1^P, U_2^T, U_3^P, t_0, x_0) < J_2(U^P, t_0, x_0), \tag{4.15}$$

(такая стратегия U_2^T *существует вследствие* $D_{22} > 0$*).*

Тогда справедлива импликация

$$D_{21} < 0 \Rightarrow \exists \alpha^{(4)} = const > 0 \,:\, \forall \alpha = const \geq \alpha^{(4)}$$
$$J_2(U_1^C, U_2^T, U_3^P, t_0, x_0) < J_2(U^P, t_0, x_0)$$

для стратегии $U_1^C \div \alpha x$*, т.е.* U_1^C *реализует в игре* Γ *неполную контругрозу на ситуацию* U^P*.*

5. Доказательство существования

Теорема 5.1. *Предположим, что для игры* Γ *выполнены ограничения (3.4). Тогда четверка*

$$(U^P, J_1^P, J_2^P, J_3^P) =$$
$$\big((U_1^P, U_2^P, U_3^P), J_1(U^P, t_0, x_0), J_2(U^P, t_0, x_0), J_3(U^P, t_0, x_0)\big) =$$
$$= \big((-D_1^{-1}\Theta^P(t)x, -D_2^{-1}\Theta^P(t)x, -D_3^{-1}\Theta^P(t)x),$$
$$x_0'\Theta_1(t_0)x_0, x_0'\Theta_2(t_0)x_0, x_0'\Theta_3(t_0)x_0\big)$$

является равновесием угроз и контругроз для дифференциальной игры

$$\Gamma = \langle \{1,2,3\}, \Sigma \div (2.2), \{\mathcal{U}_i\}_{i=1,2,3}, \{J_i(U, t_0, x_0) \div (2.3)\}_{i=1,2,3} \rangle;$$

здесь матрица

$$\Theta^P(t) = [X^{-1}(t)]'\{C^{-1} +$$
$$+ \int_{t_0}^{\vartheta} X^{-1}(\tau)[D_1^{-1} + D_2^{-1} + D_3^{-1}][X^{-1}(\tau)]' d\tau\}^{-1} X^{-1}(t),$$
$$D_i = D_{1i} + \beta D_{2i} + \gamma D_{3i},\ C = C_1 + \beta C_2 + \gamma C_3,$$
$$\beta = \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{\Lambda_{11}}{\lambda_{21}} + \tfrac{\lambda_{12}}{\Lambda_{22}}\right],\ \gamma = \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{\lambda_{13}}{\Lambda_{33}} + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\Lambda_{11}}{\lambda_{21}} + \tfrac{\lambda_{12}}{\Lambda_{22}}\right)\tfrac{\lambda_{23}}{\Lambda_{33}}\right]$$

где Λ_{ii} *– наибольший корень уравнения* $det[D_{ii} - \Lambda E_n] = 0$*,* $-\lambda_{ij}$ *– наибольший корень уравнения* $det[D_{ij} - \lambda E_n] = 0$*,* $X(t)$ *– фундаментальная матрица системы* $\dot{x} = A(t)x$*,* $X(\vartheta) = E_n$ $(i, j = 1, 2, 3;$ $j \neq i)$*, а симметричные матрицы* $\Theta_i(t)$ $(i = 1, 2, 3)$ *определены в (3.13).*

Доказательство. Во-первых, из $D_{11} > 0$ следует сразу два вывода: отсутствие в Γ ситуации равновесия по Нэшу и наличие угрозы U_1^T со стороны первого игрока на максимальную по Парето ситуацию U^P в трехкритериальной задаче Γ_ν (замечание 4.1). Существование максимальной по Парето ситуации и максимальных по Парето выигрышей в Γ_ν (а также их явный вид при этом) получены в утверждениях 3.1 и 3.2 соответственно. Условие $D_{21} < 0$ позволяет построить неполную контругрозу U_2^C второго игрока в ответ на угрозу первого (лемма 4.2), а $D_{22} > 0$ и лемма 4.3 дают возможность довести второму игроку неполную контругрозу U_2^C до полной $\bar{U}_2^C$. Одновременно требование $D_{22} > 0$ влечет отсутствие ситуации равновесия по Нэшу (не существует $\max\limits_{U_1} J(U_1, U_2^e, U_3^e, t_0, x_0)$ при $\forall U_1 \in \mathbf{U}_1$) и возможность аналитически сконструировать второму игроку угрозу $U_2^T \in \mathbf{U}_2$ на U^P в игре Γ:

$$J_2(U_1^C, U_2^T, U_3^P, t_0, x_0) \leq J_2(U^P, t_0, x_0). \tag{5.1}$$

Условие $D_{21} < 0$ и лемма 4.4 обеспечивают существование неполной контругрозы $U_1^C \in \mathbf{U}_1$ первого игрока на угрозу U_2^T второго:

$$J_2(U_1^C, U_2^T, U_3^P, t_0, x_0) < J_2(U^P, t_0, x_0). \tag{5.2}$$

Наконец, из максимальности по Парето U^P и свойства 2.1 будет следовать

$$J_1(U_1^P, U_2^T, U_3^P, t_0, x_0) < J_1(U^P, t_0, x_0). \tag{5.3}$$

а из $D_{11} > 0$ и леммы 4.1 получаем существование $\bar{U}_1^C \in \mathbf{U}_1$ такого, что

$$J_1(\bar{U}_1^C, U_2^T, U_3^P, t_0, x_0) > J_1(U_1^P, U_2^T, U_3^P, t_0, x_0). \tag{5.4}$$

Аналогичны построения контругрозы в ответ на угрозу третьего на U^P.

Таким образом, установили, что в игре Γ в ответ на угрозу любого игрока на максимальную по Парето ситуацию U^P у одного из оставшихся имеется полная контругроза, что и доказывает теорему 5.1. $\square$

6. Заключение

Итак, в предлагаемой читателю статье установлено, что в линейно-квадратичной позиционной дифференциальной игре Γ при выполнении ограничений (3.4) не существует ситуации равновесия по Нэшу и одновременно существует равновесие угроз и контругроз. Этот факт показывает настоятельную необходимость дополнительных исследований свойств этого равновесия, вопросов существования, нахождения других классов игр (и не дифференциальных тоже!), обладающих выявленным утверждением 4.1 свойством (отсутствием ситуации равновесия по Нэшу и одновременного существования равновесия угроз и контругроз). Интерес представляют и вопросы устойчивости коалиционных структур [16]. Этому вопросу авторы надеются посвятить дальнейшие исследования.

В конце статьи хотелось бы остановиться на некоторых задачах, которые возникли при подготовке настоящей статьи.

1. Построение максимальной по Парето ситуации здесь сведено к нахождению постоянных $\beta > 0$ и $\gamma > 0$, удовлетворяющих системе из трех строгих неравенств (3.3). Явный вид возможных β и γ приведен перед замечанием 3.1, но хотелось бы иметь общий вид решений (3.3) и связь его с РУИК игры Γ (исключая вид β и γ из замечания 3.1).

2. РУИК для дифференциальных игр с числом участников больше трех и учет при этом интервальной неопределенности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Большой толковый словарь русского языка.* Санкт-Петербург: Норинт, 2003.

2. Вайсборд Э.М. *О коалиционных дифференциальных играх* // Дифференциальные уравнения. 1974. Т. 10, № 4. С. 613–623.

3. Вайсборд Э.М., Жуковский В.И. *Введение в дифференциальные игры нескольких лиц и их приложения.* М.: Советское радио, 1980.

4. Вилкас Э.И. *Формализация проблемы выбора теоретико-игрового критерия оптимальности* // Математические методы в социальных науках: Сб. статей. Вильнюс: Ин-т математики и кибернетики АН Лит. ССР, 1972. – Вып. 2. - С. 9–55.

5. Вилкас Э.И., Майминас Е.З. *Решения: теория, информация, моделирование.* М.: Радио и связь, 1981.
6. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. *Матрицы и вычисления.* М.: Наука, 1984.
7. Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц.* М.: Физматлит, 2004.
8. Жуковский В.И. *Введение в дифференциальные игры при неопределенности. Равновесие угроз и контругроз.* М.: КРАСАНД, 2010.
9. Жуковский В.И., Горбатов А.С., Кудрявцев К.Н. *Равновесие по Нэшу и по Бержу в одной линейно-квадратичной игре*// Математическая теория игр и ее приложения. 2017. Т. 9. Вып. 1. С. 62–94.
10. Жуковский В.И., Кудрявцев К.Н., Самсонов С.В., Высокос М.И., Бельских Ю.А. *Класс дифференциальных игр, в которых отсутствует равновесие по Нэшу, но существует равновесие угроз и контругроз* // Вестник Южно-Уральского университета. Серия Математика, Механика, Физика. 2018. Т. 10. № 2. С. 5–21.
11. Жуковский В.И., Тынянский Н.Т. *Равновесные управления многокритериальных динамических задач.* М.: КРАСАНД, 2010.
12. Жуковский В.И., Чикрий А.А. *Дифференциальные уравнения. Линейно-квадратичные дифференциальные игры. Учебное пособие для ВУЗов.* М.: Юрайт, 2017.
13. Красовский Н.Н., Субботин А.И. *Позиционные дифференциальные игры.* М.: Наука, 1984.
14. Льюс Р.Д., Райфа Х. *Игры и решения.* М: Иностранная литература, 1961.
15. Мамедов М.Б. *О равновесии по Нэшу ситуации, оптимальной по Парето* // Изв. АН Азербайджана. Серия физ.-тех. наук. 1983. 4, № 2. С. 11–17.

16. Оуэн Г. *Теория игр.* М: Мир, 1971.

17. Подиновский В.В., Ногин В.Д. *Парето-оптимальные решения многокритериальных задач.* М.: Физматлит, 2007.

18. Смольяков Э.Р. *Теория конфликтных равновесий.* М.: УРСС, 2005.

19. Biltchev S.V. *$\varepsilon-Z$-Equilibrium in a Differential Game Described by a Parabolic System* // Many Players Differential Game. - Bulgaria, Rousse: Technical Univ., 1984. P. 47–52.

20. Case J.H. *A class of games having Pareto optimal Nash equilibrium* // J. Optimiz. Theory Appl. 1974. V. 13. N 3. P. 378–385.

21. Dochev D.T., Stojanov N.V. *Existence of Z-Equilibrium in a Differential Game with Delay* // Many Players Differential Game. - Bulgaria, Rousse: Technical Univ., 1984. P. 64–72.

22. Gaidov S.D. *Z-Equilibrium in Stochastic Differential Game* // Many Players Differential Game. - Bulgaria, Rousse: Technical Univ., 1984. P. 53–63.

23. Nash J. *Equillibrium points in N-person games* // Proc. Nat. Academ. Sci. USA. 1950. V. 36. P. 48–49.

24. Nash J. *Non-cooperative games* // Annales of Mathematics. 1951. V. 54. P. 286–295.

25. Rashkov P.I. *Sufficient Conditions for Z-Equilibrium in a Differential Game in Banach Spase* // Many Players Differential Game. - Bulgaria, Rousse: Technical Univ., 1984. P. 91–99.

26. Tersian St.A. *On the Z-Equilibrium Points in a Differential Game* // Many Players Differential Game. - Bulgaria, Rousse: Technical Univ., 1984. P. 106–111.

27. Zhukovskii V.I. *Some Problems of Non-Antagonistic Differential Games* // Mathematical Method in Operation Research. – Bulgaria, Sofia: Academy of Sciences. 1985. P. 103–195.

28. Zhukovskii V.I., Kudryavtsev K.N. *Coalition equilibrium in a three-person game* // 2017 Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (dedicated to the memory of V.F. Demyanov) (CNSA). St. Petersburg, 22–27 May 2017. P. 1–4.

29. Zhukovskii V.I., Salukvadze M.E. *The Vector-Valued Maximin.* N.Y. etc.: Academic Press, 1994.

PARETO EQUILIBRIUM OF OBJECTIONS AND COUNTEROBJECTIONS IN A DIFFERENTIAL GAME OF THREE PERSONS

Vladislav I. Zhukovskiy, Moscow State University, Dr.Sc., professor (zhkvlad@yandex.ru).
Juliya N. Zhiteneva, State Humanity-Technology University, Cand.Sc. (unzh2011@mail.ru).
Juliya A. Belskih, State Humanity-Technology University, Cand.Sc. (fozbelskih@rambler.ru).

Abstract: The linear-quadratic positional differential game of three persons is considered. The coefficient criteria are established, here when they are realized there is no Nash equilibrium situation in the game and at the same time there is an equilibrium of objections and counterobjections.

Keywords: noncooperative games; Nash equilibrium; active equilibrium; equilibrium of objections and counterobjections.