Математическая Теория Игр и её Приложения, т.11, в.1, с. 73–95

УДК 519.834
ББК 22.18

ИНДИВИДУАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ КОАЛИЦИОННЫХ СТРУКТУР В ИГРАХ ТРЕХ ЛИЦ

Фэнянь Сунь
Школа математики и статистики, Университет Циндао
266071, Циндао, Китай
Санкт-Петербургский государственный университет
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7-9
Елена М. Парилина*
Санкт-Петербургский государственный университет
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7-9
Школа математики и статистики, Университет Циндао
266071, Циндао, Китай
Институт прикладной математики провинции Шаньдун
266071, Циндао, Китай
Хунвэй Гао**
Школа математики и статистики, Университет Циндао
266071, Циндао, Китай
e-mail: sunfengyan1212@outlook.com, e.parilina@spbu.ru,
gaohongwei@qdu.edu.cn

* Работа поддержана грантом провинции Шаньдун (Shandong Province) “Double-Hundred Talent Plan” (No. WST2017009).

**Работа поддержана Национальным фондом естественных наук Китая (National Natural Science Foundation of China), No. 71571108.

Мы рассматриваем кооперативные игры с коалиционными структурами и понятие индивидуальной устойчивости коалиционной структуры относительно фиксированного кооперативного решения. По сравнению с определением устойчивой коалиционной структурой из работы (Sedakov et al., 2013), мы допускаем возможность блокировать присоединение игрока к коалиции в случае, если выигрыш хотя бы одного из игроков этой коалиции уменьшится в результате присоединения нового игрока. В работе доказано существование индивидуально устойчивой коалиционной структуры в играх трех лиц, когда в качестве решения игры выбран вектор Шепли (или вектор Ауманна-Дрезе) и ES-значение.

Ключевые слова: коалиционная структура, устойчивость, вектор Шепли, вектор Ауманна-Дрезе, ES-значение.

Поступила в редакцию: 24.12.18 *После доработки*: 18.03.19 *Принята к публикации*: 20.03.19

1. Введение

В работе рассматриваются игры с коалиционной структурой, частным случаем которых является классическая кооперативная игра, при решении которой предполагается, что игроки образуют единственную максимальную коалицию. В случае, когда допускается образование коалиций меньшего размера, естественно допустить формирование коалиционной структуры или разбиения множества игроков на непересекающиеся подмножества. В качестве дележей рассматриваются одноточечные кооперативные решения – ES-значение [7] и вектор Шепли [16] или так называемый вектор Ауманна-Дрезе [2], являющийся аналогом вектора Шепли для игр с коалиционной структурой. Так как игроки могут формировать разные коалиции, то возникает проблема нахождения в некотором смысле устойчивой коалиционной структуры. Ранее понятие устойчивой коалиционной структуры введено в работе [15], где предполагалась устойчивость структуры относительно индивидуальных отклонений игроков, которые могли выйти из текущей коалиции и стать индивидуальными игроками или присоединиться к любой другой коалиции в коалиционной структуре. В нашей же работе не все такие отклонения считаются возможными. Мы предполагаем, что игрок может войти только в ту коалицию, в которой выигрыши игроков из этой коалиции не уменьшатся после присоединения игрока. Это требование кажется естественным, поскольку учитывает возможность «блокирования» игроками входа нового игрока, если их выигрыши уменьшатся после этого. Устойчивые в этом смысле коалиционные структуры были названы *индивидуально устойчивым равновесием* в работах [9] и *индивидуально устойчивыми* в статье [4]. В нашей работе мы будем использовать понятие *индивидуально устойчивой коалиционной структуры относительно вектора Шепли или ES-значения.*

В статье [12] рассматривается одна игра распределения издержек, для которой найдены все возможные устойчивые коалиционные структуры. Понятие устойчивой коалиционной структуры при наличии фиксированной коммуникационной структуры, заданной в виде графа, вводится в статье [13]. Также существуют другие подходы к определению устойчивых коалиционных структур ([10], [11], [5]). Стоит отметить близость задач нахождения устойчивой коалиционной структуры и стабильных по Нэшу разбиений сети [3]. Проблема построения кооперативной игры на основе формируемого игроками графа изучается в работе [8], где также рассматривается проблема динамической устойчивости с-ядра.

Задача нахождения устойчивых в некотором смысле коалиционных структур рассматривалась во многих работах. Отметим первые работы на эту тему, среди которых [9] и [6], в которых предложены некоторые подходы к определению устойчивых коалиционных структур, когда выигрыши игроков определяются с помощью специальным образом заданной функции полезности, учитывающей коалицию, которой принадлежит игрок. Внутренняя и внешняя устойчивость картеля в игре n фирм, производящих однородный товар, изучается в работе [1]. В работе [18] рассматривается устойчивость коалиционных структур в случае, когда отношение предпочтения определяется моделью Неймана-Моргенштерна. Хочется отметить прикладное значение задачи нахождения устойчивых коалиционных структур в области составления международных соглашений по охране окружающей среды ([14], [19], [20]).

Различные подходы к определению устойчивых коалиционных структур в случае гедонических игр, где сравнение выигрышей игроков производится на основе заданных отношений предпочтений, рассматриваются в статье [4]. В этой работе понятие индивидуальной устойчивости коалиционной структуры приводится для гедонических игр и находятся условия на отношения предпочтениий, при которых такая коалиционная структура существует. Под индивидуально устойчивой коалиционной структурой понимается та, в которой не существует игрока и коалиции (возможно пустой) в структуре, не содержащей этого игрока, для которого было бы выгодно присоединиться к этой коалиции и всем игрокам из последней коалиции не было бы невыгодно его принять. В нашей работе также исследуется индивидуальная устойчивость коалиционных структур и вопрос ее существования, когда выигрыши игроков во всех коалиционных структурах считаются в соответствии с одним и тем же принципом оптимальности. В качестве одноточечных принципов оптимальности в работе взяты вектор Ауманна-Дрезе (вектор Шепли) и ES-значение. В связи с этим мы называем структуру индивидуально устойчивой относительно выбранного кооперативного решения.

Существование устойчивых (или устойчивых по Нэшу) коалиционных структур относительно вектора Шепли и ES-значения в играх трех лиц было доказано в [15]. Проблема существования устойчивых коалиционных структур в играх четырех лиц изучена в [17], где найдены специальные классы характеристических функций, для которых всегда существует хотя бы одна коалиционная структура. Для произвольной игры четырех лиц показано, что не существует устойчивой коалиционной структуры. В связи с этим результатом возникло предположение о существовании устойчивых коалиционных структур в случае, если не все индивидуальные отклонения игроков допустимы. В настоящей работе доказано существование индивидуально устойчивых коалиционных структур относительно вектора Шепли и ES-значения в играх трех лиц, показана связь между устойчивыми и индивидуально устойчивыми коалиционными структурами. Полученные теоретические результаты демонстрируются на примере.

Статья имеет следующую структуру. В разделе 2 приведены основные понятия игр с коалиционной структурой. Устойчивая и индивидуально устойчивая коалиционная структура определяются в разделе 3. Существование индивидуально устойчивых структур в играх трех лиц доказано в разделе 4 (в п. 4.1 – относительно вектора Шепли, в п. 4.2 – относительно ES-значения). Сравнение условий устойчивости и индивидуальной устойчивости проводится в разделе 5. Пример в разделе 6 иллюстрирует теоретические результаты. Описание результатов работы проводится в Заключении.

2. Игра с коалиционной структурой

Пусть задана кооперативная игра (N, v), где N – конечное множество игроков, $v : 2^N \to \mathbb{R}$ – характеристическая функция, значения которой определены для каждого множества $S \subseteq N$, называемого коалицией. Если образовалась коалиция N, то игроки из этой коалиции распределяют суммарный выигрыш $v(N)$ в соответствии с некоторым кооперативным решением. Предположим, что свойство супераддитивности не выполнено в общем случае, т.е. может существовать по крайней мере две непересекающиеся коалиции $S, T \subset N$ такие, что $v(S \cup T) < v(S) + v(T)$. Таким образом, игрокам может быть выгодно образовывать меньшие коалиции, и некоторые игроки получат большие выигрыши в меньших коалициях при использовании одного и того же кооперативного решения в качестве дележа суммарного выигрыша. Поэтому мы допускаем образование коалиционной структуры, а не только максимальной коалиции N.

Определение 2.1. *Коалиционная структура* π *есть разбиение* $\{B_1, \ldots, B_m\}$ *множества* N*, т.е.* $B_1 \cup \ldots \cup B_m = N$*, и* $B_i \cap B_j = \varnothing$ *для всех* i*,* $j = 1, \ldots, m$*,* $i \neq j$*.*

Обозначим игру с множеством игроков N, характеристической функцией v и коалиционной структурой π через (N, v, π).

Определение 2.2. *Вектор* $x^\pi = (x_1^\pi, \ldots, x_n^\pi) \in \mathbb{R}^n$ *– распределение выигрыша в игре* (N, v, π) *с коалиционной структурой* π*, если выполнено условие эффективности: равенство* $\sum\limits_{i \in B_j} x_i^\pi = v(B_j)$ *справедливо для всех множеств* $B_j \in \pi$*,* $j = 1, \ldots, m$*.*

Определение 2.3. *Распределение выигрыша* x^π *называется дележом в игре* (N, v, π) *с коалиционной структурой* π*, если выполнено условие индивидуальной рациональности: неравенство* $x_i^\pi \geqslant v(\{i\})$

справедливо для любого игрока $i \in N$.

Введем обозначение: $\pi_{-B_i} = \pi \setminus B_i \subset \pi$ и $B(i) \in \pi$ – коалиция, содержащая игрока $i \in N$.

3. Индивидуально устойчивые коалиционные структуры

В статье [15] устойчивая коалиционная структура определяется с учетом выигрышей игроков, являющихся членами соответствующих коалиций. Игрок сравнивает выигрыш в текущей коалиционной структуре и при индивидуальном отклонении. В [15] предполагалось, что игрок может отклониться от текущей коалиции, став индивидуальным игроком или присоединившись к любой другой коалиции в имеющейся коалиционной структуре. Если ни один игрок не может увеличить свой выигрыш, отклоняясь, то коалиционная структура называлась устойчивой.

Определение 3.1. [15] *Коалиционная структура $\pi = \{B_1, \ldots, B_m\}$ называется устойчивой относительно одноточечного кооперативного решения, если для любого игрока $i \in N$ справедливо неравенство*

$$x_i^\pi \geqslant x_i^{\pi'} \quad \text{для всех } \pi' = \{B(i) \setminus \{i\}, B_j \cup \{i\}, \pi_{-B(i) \cup B_j}\},$$

где $B_j \in \pi \cup \varnothing$, $B_j \neq B(i)$, и x^π и $x^{\pi'}$ – распределения выигрышей, рассчитанные в соответствии с выбранным кооперативным решением для игр (N, v, π) и (N, v, π') с коалиционными структурами π, π' соответственно.

В соответствии с определением 3.1 все индивидуальные отклонения игроков считаются возможными. Но отклонившийся игрок, который становится индивидуальным игроком или присоединяется к другой коалиции, меняет коалиционную структуру. В случае, когда игрок покидает текущую коалицию и присоединяется к другой, игроки, принадлежащие последней коалиции могут сравнить свои выигрыши до присоединения этого игрока и после его присоединения. В случае, если выигрыш какого-либо игрока из этой коалиции уменьшится после присоединения отклонившегося игрока, разумно было бы предположить, что он может заблокировать это присоединение. Учитывая это обстоятельство, дадим новое определение устойчивой коалиционной структуры.

Определение 3.2. *Коалиционная структура $\pi = \{B_1, \ldots, B_m\}$ называется индивидуально устойчивой относительно одноточечного кооперативного решения, если для любого игрока $i \in N$ справедливо неравенство*

$$x_i^{\pi} \geqslant x_i^{\pi''} \text{ для всех } \pi'' = \{B(i) \setminus \{i\}, B_j \cup \{i\}, \pi_{-B(i) \cup B_j}\}, \text{ и } x_k^{\pi''} \geqslant x_k^{\pi} \text{ для всех } k \in B_j,$$

где $B_j \in \pi \cup \varnothing$, $B_j \neq B(i)$, и x^{π} и $x^{\pi''}$ – распределения выигрышей, рассчитанные по одному и тому же решению в играх (N, υ, π) и (N, υ, π'') с коалиционными структурами π, π'' соответственно.

В качестве решения кооперативной игры мы рассмотрим вектор Шепли [16] и ES-значение [7]. В игре (N, υ, π) с коалиционной структурой $\pi = \{B_1, \ldots, B_m\}$ вектор Шепли $\phi^{\pi} = (\phi_1^{\pi}, \ldots, \phi_n^{\pi})$ известный также как вектор Ауманна–Дрезе [2], компоненты которого могут быть вычислены по формуле:

$$\phi_i^{\pi} = \sum_{\substack{i \in S \\ S \subseteq B(i)}} \frac{(|B(i)| - |S|)!(|S| - 1)!}{|B(i)|!} [\upsilon(S) - \upsilon(S \setminus \{i\})] \tag{3.1}$$

для всех $i \in N$.

Рассмотрим также ES-значение $\psi^{\pi} = (\psi_1^{\pi}, \ldots, \psi_n^{\pi})$ в качестве решения кооперативной игры. Компоненты ES-значения могут быть вычислены по формуле:

$$\psi_i^{\pi} = \upsilon(\{i\}) + \frac{\upsilon(B(i)) - \sum_{j \in B(i)} \upsilon(\{j\})}{|B(i)|} \tag{3.2}$$

для всех $i \in N$.

4. Существование индивидуально устойчивых коалиционных структур в играх трех лиц

Рассмотрим кооперативную игру (N, υ, π) с множеством игроков $N = \{1, 2, 3\}$ и коалиционной структурой $\pi = \{B_1, \ldots, B_m\}$. Не умаляя общности, проведем преобразование произвольной характеристической функции по правилу, описанному в статье [15]. В дальнейшем будем рассматривать только характеристические функции

$\upsilon(\cdot)$ следующего вида:

$$\upsilon(\{1,2,3\}) = c, \quad \upsilon(\{1,2\}) = c_3, \quad \upsilon(\{1,3\}) = c_2,$$
$$\upsilon(\{2,3\}) = c_1, \quad \upsilon(\{1\}) = \upsilon(\{2\}) = \upsilon(\{3\}) = 0.$$

4.1. Индивидуально устойчивые коалиционные структуры относительно вектора Шепли

В игре (N, υ, π) с коалиционной структурой $\pi = \{B_1, \dots, B_m\}$ компоненты вектора Шепли вычисляются по формуле (3.1). В игре трех лиц существует пять коалиционных структур: $\pi_1 = \{\{1,2,3\}\}$, $\pi_2 = \{\{1,2\},\{3\}\}$, $\pi_3 = \{\{1,3\},\{2\}\}$, $\pi_4 = \{\{1\},\{2,3\}\}$, $\pi_5 = \{\{1\},\{2\},\{3\}\}$. Компоненты векторов Шепли для всех коалиционных структур представлены в табл. 4.1.

π	ϕ_1^π	ϕ_2^π	ϕ_3^π
π_1	$(2c - 2c_1 + c_2 + c_3)/6$	$(2c - 2c_2 + c_1 + c_3)/6$	$(2c - 2c_3 + c_1 + c_2)/6$
π_2	$c_3/2$	$c_3/2$	0
π_3	$c_2/2$	0	$c_2/2$
π_4	0	$c_1/2$	$c_1/2$
π_5	0	0	0

Таблица 1. Вектор Шепли в игре трех лиц с коалиционной структурой π.

Далее выпишем условия индивидуальной устойчивости коалиционных структур согласно определению 3.2. В коалиционной структуре π_1 единственное возможное отклонение любого игрока – покинуть коалицию $\{1,2,3\}$, став индивидуальным игроком. Коалиционная структура π_1 устойчива тогда и только тогда, когда система неравенств

$$\begin{cases} 2c_1 - c_2 - c_3 \leqslant 2c, \\ 2c_2 - c_1 - c_3 \leqslant 2c, \\ 2c_3 - c_1 - c_2 \leqslant 2c \end{cases}$$

имеет решение.

В дальнейшем, при доказательстве существования будем использовать системы неравенств:

$$\begin{cases} 2c_1 - c_2 + 2c_3 \leqslant 2c, \\ -c_1 + 2c_2 + 2c_3 \leqslant 2c, \end{cases} \tag{4.1}$$

$$\begin{cases} 2c_1 + 2c_2 - c_3 \leqslant 2c, \\ -c_1 + 2c_2 + 2c_3 \leqslant 2c, \end{cases} \tag{4.2}$$

$$\begin{cases} 2c_1 + 2c_2 - c_3 \leqslant 2c, \\ 2c_1 - c_2 + 2c_3 \leqslant 2c. \end{cases} \tag{4.3}$$

Условия индивидуальной устойчивости коалиционных структур π_2, π_3, π_4 представлены в табл. 2. Условия устойчивости коалиционной

π_2	π_3	π_4
$\begin{cases} c_3 \geqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} c_2 \geqslant 0, \\ c_3 \geqslant c_2 \end{cases} \\ \text{или} \\ c_2 < 0 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} c_1 \geqslant 0, \\ c_3 \geqslant c_1 \end{cases} \\ \text{или} \\ c_1 < 0 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2c_1 - c_2 + 2c_3 \leqslant 2c, \\ -c_1 + 2c_2 + 2c_3 \leqslant 2c, \\ c_1 + c_2 - 2c_3 \leqslant -2c \end{cases} \\ \text{или} \\ \text{(4.1) несовместна.} \end{array}\right. \end{cases}$	$\begin{cases} c_2 \geqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} c_3 \geqslant 0 \\ c_2 \geqslant c_3 \end{cases} \\ \text{или} \\ c_3 < 0 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} c_1 \geqslant 0, \\ c_2 \geqslant c_1 \end{cases} \\ \text{или} \\ c_1 < 0 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2c_1 + 2c_2 - c_3 \leqslant 2c, \\ -c_1 + 2c_2 + 2c_3 \leqslant 2c, \\ c_1 - 2c_2 + c_3 \leqslant -2c \end{cases} \\ \text{или} \\ \text{(4.2) несовместна.} \end{array}\right. \end{cases}$	$\begin{cases} c_1 \geqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} c_3 \geqslant 0, \\ c_1 \geqslant c_3 \end{cases} \\ \text{или} \\ c_3 < 0 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} c_2 \geqslant 0 \\ c_1 \geqslant c_2 \end{cases} \\ \text{или} \\ c_2 < 0 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2c_1 + 2c_2 - c_3 \leqslant 2c, \\ 2c_1 - c_2 + 2c_3 \leqslant 2c, \\ -2c_1 + c_2 + c_3 \leqslant -2c \end{cases} \\ \text{или} \\ \text{(4.3) несовместна.} \end{array}\right. \end{cases}$

Таблица 2. Условия индивидуальной устойчивости структур π_2, π_3, π_4 относительно вектора Шепли.

структуры π_5 есть $c_i \leqslant 0$, $i = 1, 2, 3$ при любом c.

Сначала рассмотрим случай, когда $c_1 \geqslant 0$, $c_2 \geqslant 0$, $c_3 \geqslant 0$ и $c \geqslant 0$. Легко заметить, что коалиционная структура π_5 не является устой-

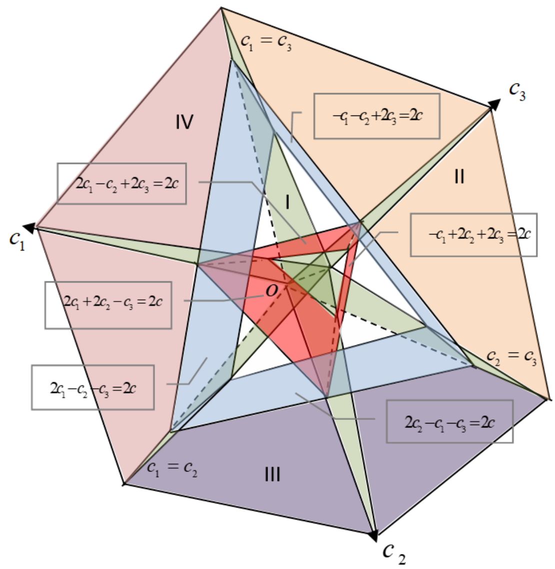

Рисунок 1. Случай $c_1, c_2, c_3 \geqslant 0$ и $c \geqslant 0$.

чивой относительно вектора Шепли. По рис. 1 и из условий устойчивости коалиционных структур нетрудно показать, что устойчивыми могут быть четыре оставшиеся коалиционные структуры. Решения соответствующих систем неравенств покрывают первый октант при $c \geqslant 0$. Коалиционная структура π_1 устойчива в области I; структура π_2 – в области II; структура π_3 – в области III; структура π_4 – в области IV.

Теперь рассмотрим случай, когда $c_1 \geqslant 0$, $c_2 \geqslant 0$, $c_3 \geqslant 0$ и $c \leqslant 0$. Вычисления показывают, что коалиционная структура π_1 неустойчива относительно вектора Шепли. По рис. 2 и из условий устойчивости нетрудно заметить, что устойчивыми могут быть только три коалиционные структуры. Решения соответствующих систем неравенств покрывают первый октант, если $c \leqslant 0$. А именно, коалиционная структура π_2 устойчива в области I; структура π_3 – в области II; структура π_4 – в области III.

Пусть теперь $c_1 \leqslant 0$, $c_2 \geqslant 0$, $c_3 \geqslant 0$ и $c \geqslant 0$. По рис. 3 и из условий устойчивости нетрудно заметить, что устойчивыми могут быть три коалиционные структуры. Решения соответствующих систем неравенств покрывают второй октант, если $c \geqslant 0$. Коалиционная струк-

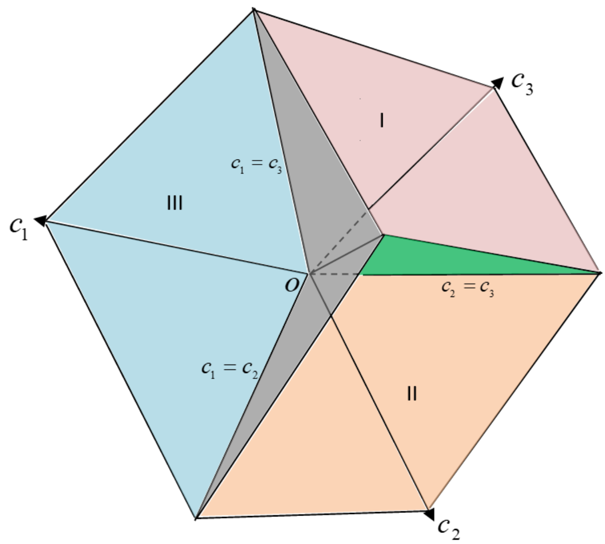

Рисунок 2. Случай $c_1, c_2, c_3 \geqslant 0$ и $c \leqslant 0$.

тура π_1 устойчива в области I; структура π_2 – в области II; структура π_3 – в области III.

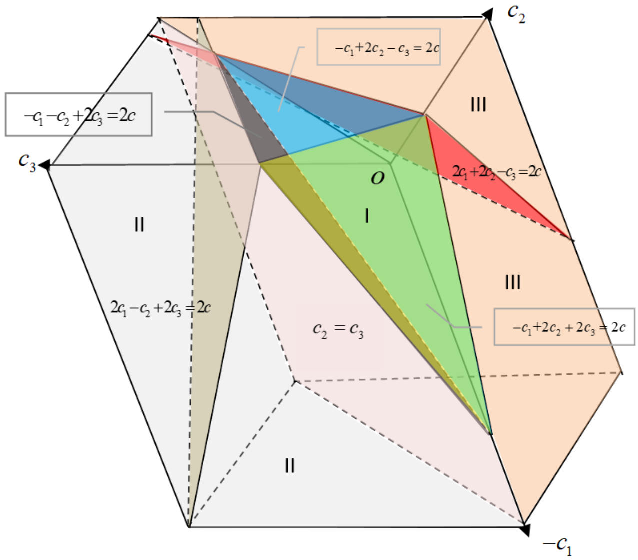

Рисунок 3. Случай $c_1 \leqslant 0, c_2, c_3 \geqslant 0$ и $c \geqslant 0$.

Пусть $c_1 \leqslant 0$, $c_2 \geqslant 0$, $c_3 \geqslant 0$ и $c \leqslant 0$. Вычисления показывают, что коалиционные структуры π_1, π_4, π_5 всегда неустойчивы относительно вектора Шепли. По рис. 4 и из условий устойчивости нетрудно заметить, что устойчивыми могут быть две коалиционные структуры. Решения соответствующих систем неравенств покрывают второй октант, если $c \leqslant 0$. Коалиционная структура π_3 устойчива в области I; структура π_2 – в области II.

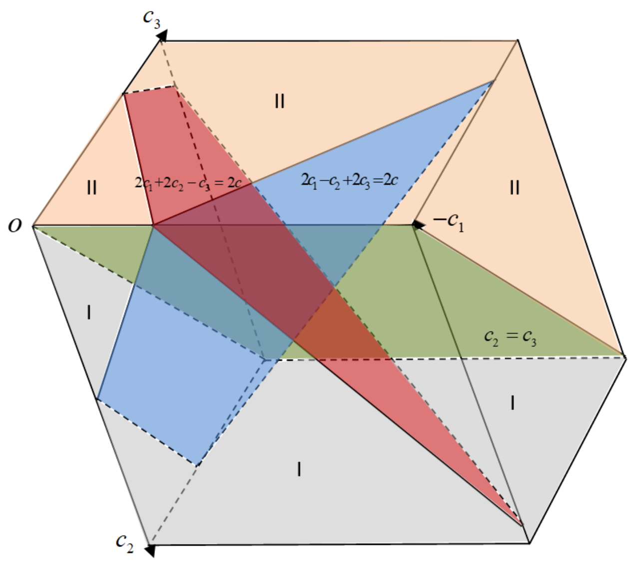

Рисунок 4. Случай $c_1 \leqslant 0, c_2, c_3 \geqslant 0$ и $c \leqslant 0$.

Пусть $c_1 \leqslant 0$, $c_2 \leqslant 0$, $c_3 \geqslant 0$ и $c \geq 0$. Нетрудно показать, что коалиционные структуры π_3, π_4 и π_5 всегда неустойчивы относительно вектора Шепли в этом случае. По рис. 5 и из условий устойчивости заметим, что устойчивыми могут быть две коалиционные структуры. Решения соответствующих систем неравенств покрывают октант. Коалиционная структура π_1 устойчива в области I; структура π_2 – в области II.

Рассмотрим случай, когда $c_1 \leqslant 0$, $c_2 \leqslant 0$, $c_3 \geqslant 0$ и $c \leqslant 0$. Можно показать, что π_1, π_3, π_4 и π_5 всегда неустойчивы относительно вектора Шепли в этом случае. По рис. 6 и из условий устойчивости заметим, что устойчивой является единственная коалиционная структура π_2. Решения соответствующей системы неравенств покрывают весь октант.

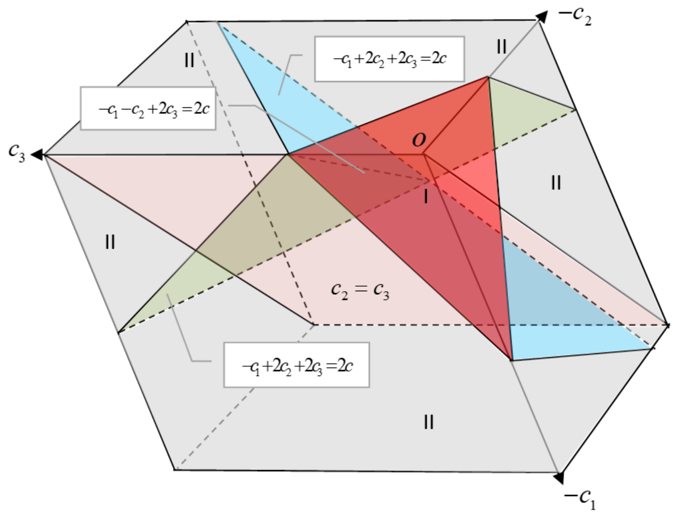

Рисунок 5. Случай $c_1, c_2 \leqslant 0, c_3 \geqslant 0$ и $c \geqslant 0$.

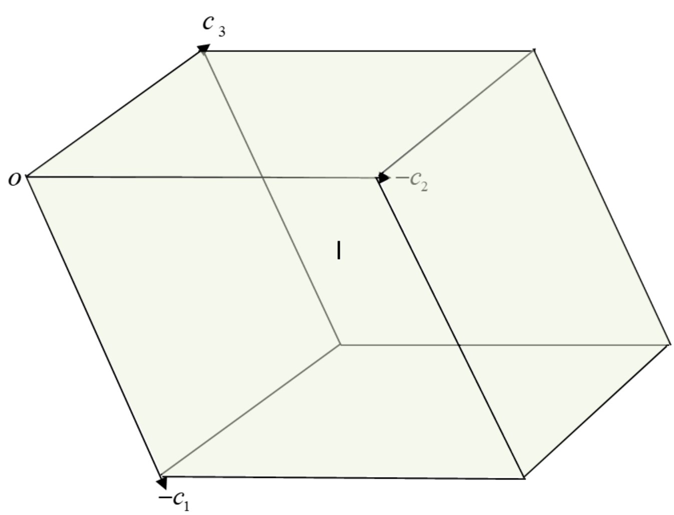

Рисунок 6. Случай $c_1, c_2 \leqslant 0, c_3 \geqslant 0$ и $c \leqslant 0$.

Анализ остальных случаев близок к рассмотренным выше, поэтому может быть опущен. Например, случаи $\{c_1 \geqslant 0, c_2 \geqslant 0, c_3 \leqslant 0, c \geqslant 0\}$ и $\{c_1 \geqslant 0, c_2 \leqslant 0, c_3 \geqslant 0, c \geqslant 0\}$ схожи по анализу со случаем $\{c_1 \leqslant 0, c_2 \geqslant 0, c_3 \geqslant 0, c \geqslant 0\}$. Случаи $\{c_1 \geqslant 0, c_2 \leqslant 0, c_3 \leqslant 0, c \geqslant 0\}$

и $\{c_1 \leqslant 0, c_2 \geqslant 0, c_3 \leqslant 0, c \geqslant 0\}$ близки к анализу случая $\{c_1 \leqslant 0, c_2 \leqslant 0, c_3 \geqslant 0, c \geqslant 0\}$. Случаи $\{c_1 \geqslant 0, c_2 \geqslant 0, c_3 \leqslant 0, c \leqslant 0\}$ и $\{c_1 \geqslant 0, c_2 \leqslant 0, c_3 \geqslant 0, c \leqslant 0\}$ схожи по анализу со случаем $\{c_1 \leqslant 0, c_2 \geqslant 0, c_3 \geqslant 0, c \leqslant 0\}$. Случаи $\{c_1 \geqslant 0, c_2 \leqslant 0, c_3 \leqslant 0, c \leqslant 0\}$ и $\{c_1 \leqslant 0, c_2 \geqslant 0, c_3 \leqslant 0, c \leqslant 0\}$ близки к анализу случая $\{c_1 \leqslant 0, c_2 \leqslant 0, c_3 \geqslant 0, c \leqslant 0\}$.

Следовательно, мы доказали теорему.

Теорема 4.1. *В любой игре трех лиц (N, v, π) существует по крайней мере одна индивидуально устойчивая коалиционная структура относительно вектора Шепли.*

4.2. Индивидуально устойчивые коалиционные структуры относительно ES-значения

В игре (N, v, π) с коалиционной структурой $\pi = \{B_1, \ldots, B_m\}$ компоненты ES-значения могут быть вычислены по формуле (3.2). Компоненты ES-значений для всех коалиционных структур в игре трех лиц представлены в табл. 3.

π	ψ_1^π	ψ_2^π	ψ_3^π
π_1	$c/3$	$c/3$	$c/3$
π_2	$c_3/2$	$c_3/2$	0
π_3	$c_2/2$	0	$c_2/2$
π_4	0	$c_1/2$	$c_1/2$
π_5	0	0	0

Таблица 3. ES-значения в игре трех лиц.

В табл. 4 представлены условия устойчивости коалиционных структур π_2, π_3, π_4 согласно определению 3.2. Коалиционная структура π_1 устойчива тогда и только тогда, когда $c \geqslant 0$ при любых c_i, $i = 1, 2, 3$, поскольку единственное возможное отклонение любого игрока согласно определению 3.2 – покинуть коалицию $\{1, 2, 3\}$ и стать индивидуальным игроком. Условие устойчивости структуры π_5 есть $c_i \leqslant 0$ для любого $i = 1, 2, 3$.

Рассмотрим случай, когда $c_1 \geqslant 0$, $c_2 \geqslant 0$, $c_3 \geqslant 0$ и $c \leqslant 0$. По рис. 2 и из условий устойчивости заметим, что устойчивыми могут

π_2	π_3	π_4
$\begin{cases} c_3 \geqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} c_2 \geqslant 0, \\ c_3 \geqslant c_2 \end{cases} \\ \text{или} \\ c_2 < 0 \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} c_1 \geqslant 0, \\ c_3 \geqslant c_1 \end{cases} \\ \text{или} \\ c_1 < 0 \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2c \geqslant 3c_3, \\ c \leqslant 0 \end{cases} \\ \text{или} \\ 2c < 3c_3 \end{array} \right. \end{cases}$	$\begin{cases} c_2 \geqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} c_3 \geqslant 0, \\ c_2 \geqslant c_3 \end{cases} \\ \text{или} \\ c_3 < 0 \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} c_1 \geqslant 0, \\ c_2 \geqslant c_1 \end{cases} \\ \text{или} \\ c_1 < 0 \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2c \geqslant 3c_2, \\ c \leqslant 0 \end{cases} \\ \text{или} \\ 2c < 3c_2 \end{array} \right. \end{cases}$	$\begin{cases} c_1 \geqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} c_2 \geqslant 0, \\ c_1 \geqslant c_2 \end{cases} \\ \text{или} \\ c_2 < 0 \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} c_3 \geqslant 0, \\ c_1 \geqslant c_3 \end{cases} \\ \text{или} \\ c_3 < 0 \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2c \geqslant 3c_1, \\ c \leqslant 0 \end{cases} \\ \text{или} \\ 2c < 3c_1 \end{array} \right. \end{cases}$

Таблица 4. Условия индивидуальной устойчивости коалиционных структур π_2, π_3, π_4 относительно ES-значения.

быть три коалиционные структуры. Решения соответствующих систем неравенств покрывает первый октант, если $c \leqslant 0$. Коалиционная структура π_2 устойчива в области I; структура π_3 – в области II; структура π_4 – в области III.

Пусть $c_1 \leqslant 0$, $c_2 \geqslant 0$, $c_3 \geqslant 0$ и $c \leqslant 0$. По рис. 4 очевидно, что коалиционная структура π_3 устойчива в области I; структура π_2 – в области II.

Пусть $c_1 \leqslant 0$, $c_2 \leqslant 0$, $c_3 \geqslant 0$ и $c \leqslant 0$. Из условий устойчивости и по рис. 6 получаем, что единственная устойчивая структура в этом случае – π_2.

Анализ остальных случаев близок к рассмотренным выше, поэтому мы его опустим. Коалиционные структуры π_2 и π_3 устойчивы, когда $c_1 \geqslant 0$, $c_2 \geqslant 0$, $c_3 \leqslant 0$ и $c \leqslant 0$. Коалиционные структуры π_2 и π_4 устойчивы, когда $c_1 \geqslant 0$, $c_2 \leqslant 0$, $c_3 \geqslant 0$ и $c \leqslant 0$. Коалиционная структура π_4 устойчива при $c_1 \geqslant 0$, $c_2 \leqslant 0$, $c_3 \leqslant 0$ и $c \leqslant 0$. Коалиционная структура π_3 устойчива, когда $c_1 \leqslant 0$, $c_2 \geqslant 0$, $c_3 \leqslant 0$ и $c \leqslant 0$.

Приведенные выше рассуждения доказывают теорему.

Теорема 4.2. *В любой игре трех лиц (N, v, π) существует по крайней мере одна индивидуально устойчивая коалиционная структура относительно ES-значения.*

5. Сравнение условий устойчивости и индивидуальной устойчивости

Проведем сравнение условий определения 3.1 устойчивости коалиционных структур [15] и определения 3.2 индивидуальной устойчивости коалиционных структур. Справедлива теорема.

Теорема 5.1. *Если коалиционная структура π устойчива относительно одноточечного кооперативного решения, то она индивидуально устойчива относительно того же решения.*

Доказательство. Пусть структура π устойчива согласно определению 3.1 и x^π – распределение выигрыша согласно выбранного кооперативного решения. Это означает, что для любого игрока $i \in N$ справедливо неравенство

$$x_i^\pi \geqslant x_i^{\pi'}. \tag{5.1}$$

где $\pi' = \{B(i) \setminus \{i\}, B_j \cup \{i\}, \pi_{-B(i)\cup B_j}\}$ для всех $B_j \in \pi \cup \varnothing,\ B_j \neq B(i)$. Пусть $P_i^{'}$ – множество коалиционных структур, удовлетворяющих условию (5.1), т. е.

$$P_i^{'} = \Big\{\pi' \in \Pi : \pi' = \{B(i) \setminus \{i\}, B_j \cup \{i\}, \pi_{-B(i)\cup B_j}\}\Big\},$$

где $B_j \in \pi \cup \varnothing$, $B_j \neq B(i)$ и Π – множество всех коалиционных структур.

По определению 3.2 структура $\pi^{''}$ есть

$$\pi'' = \{B(i) \setminus \{i\}, B_j \cup \{i\}, \pi_{-B(i)\cup B_j}\}, \tag{5.2}$$

при этом $x_k^{\pi''} \geqslant x_k^\pi$ для всех $k \in B_j$. Пусть $P_i^{''}$ – множество всех таких структур π''. Очевидно, что $P_i^{''} \subseteq P_i^{'}$, поскольку в определении структуры π'' добавлено условие $\{x_k^{\pi''} \geqslant x_k^\pi,$ для всех $k \in B_j\}$ к определению структуры π'.

Если π устойчива согласно определению 3.1, то

$$x_i^\pi \geqslant x_i^{\pi'},\ \text{для всех } \pi^{'} \in P_i^{'},$$

тогда

$$x_i^{\pi} \geqslant x_i^{\pi''},\ \text{для всех } \pi'' \in P_i'' \subseteq P_i',$$

что означает устойчивость коалиционной структуры π согласно определению 3.2. □

Теперь проиллюстрируем результат теоремы 5.1 на примере. Рассмотрим в качестве кооперативного решения вектор Шепли. Пусть $c_1, c_2, c_3 \geqslant 0$ и $c \geqslant 0$. По определению 3.1, существует единственная устойчивая коалиционная структура в области, образующейся при решении неравенств $2c_1 - c_2 - c_3 \leqslant 2c$, $-c_1 + 2c_2 - c_3 \leqslant 2c$, $-c_1 - c_2 + 2c_3 \leqslant 2c$. Обозначим эту область через R. На рис. 7 эта область ограничена голубыми плоскостями. Единственная устойчивая коалиционная структура в области R согласно определению 3.1 есть π_1. По определению 3.2 существует область $R \setminus C$ и область C ограничена плоскостями, изображенными красным цветом на рис. 8. Область C – решение системы неравенств $c_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, 3$, $2c_1 + 2c_2 + 2c_3 \geqslant 2c$, $2c_1 - c_2 + 2c_3 \leqslant 2c$, $-c_1 + 2c_2 + 2c_3 \leqslant 2c$. Таким образом, в области $R \setminus C$ существует дополнительная структура, которая не является устойчивой, но является индивидуально устойчивой согласно определению 3.2.

6. Пример

Рассмотрим кооперативную игру со специальным образом определенной характеристической функцией. Продемонстрируем разницу в определениях устойчивой и индивидуально устойчивой коалиционной структуры.

Пусть характеристическая функция $v(\cdot)$ определена следующим образом:

$$v(S) = a \ln s,$$

где $a \in \mathbb{R}^+$ – положительное число, s – количество игроков в коалиции S. Сначала рассмотрим вектор Шепли в качестве решения кооперативной игры, компоненты которого могут быть вычислены по формуле (3.1). Так как игроки в этой игре симметричны, то компонента вектора Шепли любого игрока из коалиции S равна s-ой части значения характеристической функции $v(S)$. Для коалиционной структуры $\pi_1 = \big\{\{1\}, \ldots, \{n\}\big\}$ компоненты вектора Шепли есть $\phi_i^{\pi_1} = 0$ для

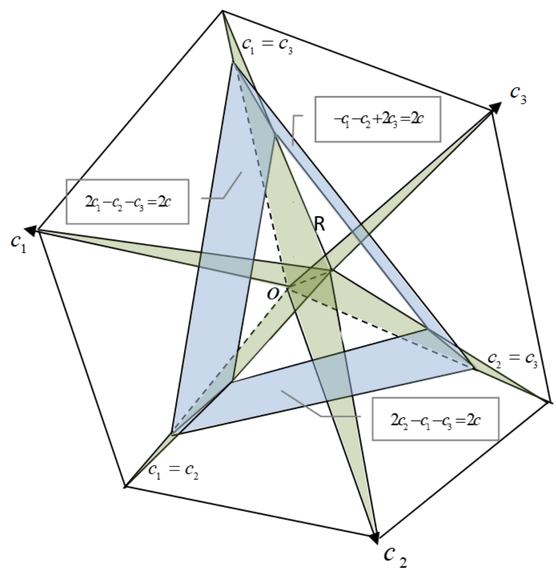

Рисунок 7. Устойчивость коалиционных структур согласно определению 3.1.

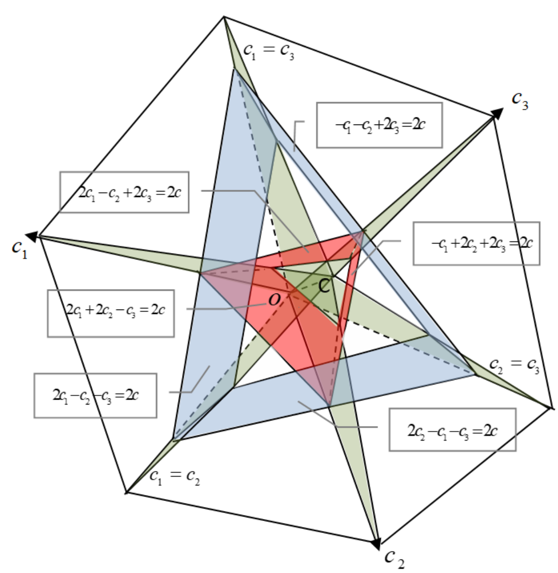

Рисунок 8. Индивидуальная устойчивость коалиционных структур согласно определению 3.2.

всех $i = 1, \dots, n$. Для коалиционной структуры $\pi_n = \big\{\{1, \dots, n\}\big\}$ компоненты вектора Шепли $\phi_i^{\pi_n} = \frac{a}{n} \ln n$, $i = 1, \dots, n$. Если коалиция из коалиционной структуры π содержит k игроков под номерами 1,…, k, то компоненты вектора Шепли этих игроков будут равны $\phi_i^{\pi} = \frac{a}{k} \ln k$, $i = 1, \dots, k$.

Сначала проверим устойчивость некоторых коалиционных структур в соответствии с определением 3.1. Коалиционная структура π_n устойчива для любого параметра $a \in \mathbb{R}^+$, поскольку условие $\frac{a}{n} \ln n \geqslant 0$ всегда выполняется при $n > 1$. Также нетрудно заметить, что коалиционная структура π_1 неустойчива для любого положительного a, поскольку условие устойчивости этой структуры $\frac{a}{2} \ln 2 \leqslant 0$ не выполняется. Также рассмотрим коалиционную структуру $\pi_{n-1} = \big\{\{1, \dots, n-1\}, \{n\}\big\}$, в которой $n-1$ игрок с первого по $n-1$-ого объединены в одну коалицию, а игрок n играет индивидуально. Условие устойчивости структуры π_{n-1} – система неравенств

$$\begin{cases} \frac{a}{n-1} \ln(n-1) \geqslant 0, \\ \frac{a}{n-1} \ln(n-1) \geqslant \frac{a}{2} \ln 2, \\ \frac{a}{n} \ln n \leqslant 0, \end{cases}$$

которая несовместна, что означает, что структура π_{n-1} неустойчива при любом положительном a согласно определению 3.1.

Теперь исследуем индивидуальную устойчивость упомянутых коалиционных структур по определению 3.2. Коалиционная структура $\pi_n = \big\{\{1, \dots, n\}\big\}$ устойчива при любом положительном a, так как условие устойчивости этой структуры – неравенство $\frac{a}{n} \ln n \geqslant 0$ всегда выполнено. Коалиционная структура π_1 индивидуально неустойчива при любом положительном a, так как условие ее устойчивости можно записать в виде:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \frac{a}{2} \ln 2 \geqslant 0, \\ \frac{a}{2} \ln 2 \leqslant 0 \end{cases} \\ \text{или} \\ \frac{a}{2} \ln 2 < 0. \end{array} \right.$$

Последняя система решений не имеет.

Теперь рассмотрим структуру π_{n-1}, для которой условие индивидуальной устойчивости имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{a}{n-1}\ln(n-1) \geqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \frac{a}{2}\ln 2 \geqslant 0, \\ \frac{a}{n-1}\ln(n-1) \geqslant \frac{a}{2}\ln 2, \end{cases} \\ \text{или} \\ \frac{a}{2}\ln 2 < 0, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \frac{a}{n}\ln n \geqslant \frac{a}{n-1}\ln(n-1), \\ \frac{a}{n}\ln n \leqslant 0, \end{cases} \\ \text{или} \\ \frac{a}{n}\ln n < \frac{a}{n-1}\ln(n-1). \end{array}\right. \end{cases}$$

Так как $\frac{a}{n-1}\ln(n-1) \geqslant \frac{a}{2}\ln 2$ выполняется только при $n = 3, 4, 5$, а условие $\frac{a}{n}\ln n < \frac{a}{n-1}\ln(n-1)$ не выполняется при $n = 3$, то коалиционная структура π_{n-1} индивидуально устойчива в играх четырех и пяти лиц и неустойчива в играх n лиц, где $n = 3$ и $n \geqslant 6$.

В игре с характеристической функций, определенной формулой $v(S) = a\ln s$, ES-значение совпадает с вектором Шепли, поэтому все результаты, приведенные выше для вектора Шепли, справедливы и для ES-значения.

Мы показали на примере разницу в определениях устойчивости коалиционных структур 3.1 и 3.2. В играх четырех и пяти лиц коалиционная структура, которая была неустойчива согласно определению 3.1, является индивидуально устойчивой согласно определению 3.2, где мы учитываем возможность «блокировки» отклонения игрока, если при этом выигрыши игроков коалиции, к которой хочет присоединиться игрок, уменьшаются.

7. Заключение

В статье изучены игры с коалиционной структурой и предложен новый подход к определению устойчивой коалиционной структуры относительно заданного кооперативного принципа оптимальности. Предполагается, что игрок, отклоняясь от текущей коалиционной структуры, покидая свою коалицию, не может присоединиться к коалиции, если в результате такого присоединения выигрыш какого-либо игрока последней коалиции уменьшится. В работе доказано существование индивидуально устойчивой коалиционной структуры в случае игры трех лиц, находится соответствие между множествами устойчивых и индивидуально устойчивых коалиционных структур. Также на примере демонстрируется отличие определения индивидуально устойчивой коалиционной структуры от предложенного ранее в работе [15].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. d'Aspremont C., Jacquemin A., Gabszewicz J. J., Weymark J. A. *On the stability of collusive price leadership* // Canadian Journal of Economics. 1983. Vol. 16. No. 1. P. 17–25.

2. Aumann R. J., Dreze J. H. *Cooperative Games with Coalition Structures* // International Journal of Game Theory. 1974. Vol. 3. P. 217–237.

3. Avrachenkov K. E., Kondratev A. Y, Mazalov V. V., Rubanov D. G. *Network partitioning algorithms as cooperative games* // Computational Social Networks. 2018. Vol. 5. No. 11. P. 1-28.

4. Bogomolnaia A., Jackson M. O. *The Stability of Hedonic Coalition Structures* // Games and Economic Behavior. 2002. Vol. 38. P. 201–230.

5. Carraro C. *The Structure of International Environmental Agreements*, in International Environmental Agreements on Climate Change, C Carraro (ed.), Kluwer Academic Publishers. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997, pp. 9–26.

6. Drèze J., Greenberg J. *Hedonic Coalitions: Optimality and Stability* // Econometrica. 1980. Vol. 48. No. 4. P. 987–1003.

7. Driessen T., Funaki Y. *Coincidence of and collinearity between game theoretic solutions* // OR Spectrum. 1991. 13 (1). P. 15–30.

8. Gao H., Petrosyan L., Qiao H., Sedakov A. *Cooperation in two-stage games on undirected networks* // Journal of Systems Science and Complexity. 2017. Vol. 30(3). P. 680–693.

9. Greenberg J. *Pure and local public goods: A game-theoretic approach* // In: Public Finance, A. Sandmo (ed.) Lexington, MA, Heath and Co, 1977.

10. Haeringer G. *Stable Coalition Structures with Fixed Decision Scheme. Economics with Heterogeneous Interacting Agents* // Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. 2001. Vol. 503 (IV). P. 217–230.

11. Hart S., Kurz M. *Endogenous formation of coalitions* // Econometrica. 1983. Vol. 52. P. 1047–1064.

12. Parilina E., Sedakov A. *Stable Bank Cooperation for Cost Reduction Problem* // The Czech Economic Review. 2014. Vol. 8 (1). P. 7–25.

13. Parilina E., Sedakov A. *Stable Cooperation in Graph-Restricted Games* // Contributions to Game Theory and Management. 2014. Vol. 7. P. 271–281.

14. Rettieva A. N. *Stable Coalition Structure in Bioresource Management Problem* // Ecological Modelling. 2012. V. 235–236. P. 102–118.

15. Sedakov A., Parilina E., Volobuev Yu., Klimuk, D. *Existence of Stable Coalition Structures in Three-person Games* // Contributions to Game Theory and Management. 2013. Vol. 6. P. 407–422.

16. Shapley L. S. *A value for n-person games.* In: Kuhn, H. W., Tucker, A. W. (Eds.), Contributions to the Theory of Games, vol. II, Princeton University Press, 1953. P. 307–317.

17. Sun F. Y., Parilina E. *Existence of Stable Coalition Structures in Four-person Games* // Contributions to Game Theory and Management. 2018. Vol. 11. P. 224–248.

18. Xue L. *Coalition stability under imperfect foresight* // Economic Theory. 1998. Vol. 11, Is. 3. P. 603–627.

19. de Zeeuw A. *Dynamic effects on the stability of international environmental agreements* // Journal of Environmental Economics and Management. 2008. Vol. 55, Is. 2. P. 163–174.

20. de Zeeuw A. *International Environmental Agreements* // Annual Review of Resource Economics. 2015. Vol. 7. P. 151–168.

INDIVIDUAL STABILITY OF COALITION STRUCTURES IN THREE-PERSON GAMES

Fengyan Sun, School of Mathematics and Statistics, Qingdao University, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes, Saint Petersburg State University, master student (sunfengyan1212@outlook.com).
Elena M. Parilina, Saint Petersburg State University, School of Mathematics and Statistics, Qingdao University, Institute of Applied Mathematics of Shandong, Cand.Sc, associate professor (e.parilina@spbu.ru).
Hongwei Gao, School of Mathematics and Statistics, Qingdao University, Ph.D, professor (gaohongwei@qdu.edu.cn).

Abstract: Cooperative games with coalition structures are considered and a principle of coalition structure individual stability with respect to some cooperative solution concepts is determined. In comparison with the paper (Sedakov et al., 2013), we consider the opportunity of the players to block the deviation of a player in case their payoffs decrease with the deviation. We prove the existence of an individually stable coalition structure with respect to the Shapley and equal surplus division values for the case of three-person games according to the new definition of a stable coalition structure.

Keywords: coalition structure, stability, the Shapley value, the ES-value.