Математическая Теория Игр и её Приложения, т.11, в.2, с. 68–95

УДК 519.866.2.
ББК 22.18

ГАРАНТИРОВАННЫЙ ДЕТЕРМИНИСТСКИЙ ПОДХОД К СУПЕРХЕДЖИРОВАНИЮ: СВОЙСТВА «БЕЗАРБИТРАЖНОСТИ» РЫНКА

Сергей Н. Смирнов
Кафедра системного анализа
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова
119992, Москва, ГСП-1, Воробьевы горы, МГУ
e-mail: s.n.smirnov@gmail.com

Для задачи суперрепликации с дискретным временем рассматривается гарантированная детерминистская постановка: задача состоит в гарантированном покрытии обусловленного обязательства по опциону при всех допустимых сценариях. Эти сценарии задаются при помощи априорно заданных компактов, зависящих от предыстории цен: приращения цены в каждый момент времени должны лежать в соответствующих компактах. Рассматривается рынок с торговыми ограничениями, предполагается отсутствие транзакционных издержек. Постановка задачи носит теоретико-игровой характер и приводит к уравнениям Беллмана–Айзекса. В настоящей статье изучаются несколько понятий, формализующих «безарбитражность» рынка в контексте детерминистского подхода и рассматриваются их свойства. Вводится новое понятие грубости (структурной устойчивости) свойств «безарбитражности» рынка.

Ключевые слова: гарантированные оценки, детерминистская динамика цен, суперрепликация, опцион, арбитраж, отсутствие арбитражных возможностей, уравнения Беллмана–Айзекса, многозначное отображение, робастность, структурная устойчивость модели.

Поступила в редакцию: 28.01.19 *После доработки*: 03.04.19 *Принята к публикации*: 10.06.19

1. Введение

В работе [10] подробно изложен гарантированный детерминистский подход, описаны модель финансового рынка, торговые ограничения и условия безарбитражности, а также поставлена задача суперхеджирования обусловленных обязательств по опционам, приведена соответствующая библиография. Здесь мы ограничимся минимальным описанием необходимых сведений, касающихся постановки задачи, приведенных в [10].

Основной посылкой в предлагаемом подходе является задание «неопределенной» динамики цен посредством предположения об априорной информации о движении цен[1] в момент времени t, а именно, что приращения ΔX_t дисконтированных цен[2] лежат в априорно заданных компактах[3] $K_t(\cdot) \subseteq \mathbb{R}^n$, где точкой обозначена предыстория цен до момента $t-1$ включительно, $t = 1, \dots, N$. Обозначим через $v_t^*(\cdot)$ точную нижнюю грань для стоимости портфеля в момент времени t, при известной предыстории, гарантирующей, при определенном выборе допустимой хеджирующей стратегии, исполнение текущих и будущих обязательств, возникающих в отношении возможных выплат по американскому опциону. Соответствующие уравнения Беллмана-Айзекса в дисконтированных ценах возникают непосредственно из экономического смысла посредством выбора на шаге t «наилучшей» допустимой стратегии[4] хеджирования $h \in D_t(\cdot) \subseteq \mathbb{R}^n$

---

[1] Приращения берутся «назад», т.е. $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$, где X_t вектор дисконтированных цен в момент времени t; i-ая компонента этого вектора представляет собой цену единицы i-го актива.

[2] Считаем, что безрисковый актив имеет постоянную цену равную единице.

[3] Точкой обозначены переменные, описывающие эволюцию цен. Более точно, это предыстория $\bar{x}_{t-1} = (x_0, \dots, x_{t-1}) \in (\mathbb{R}^n)^t$ для K_t, в то время как для функций v_t^* и g_t, введенных ниже, это история $\bar{x}_t = (x_0, \dots, x_t) \in (\mathbb{R}^n)^{t+1}$.

[4] Вектор h описывает размеры занимаемых в активах позиций, т.е. i-ая компонента этого вектора представляет собой количество покупаемых или продаваемых единиц i-го актива.

для «наихудшего» сценария $y \in K_t(\cdot)$ приращения (дисконтированных) цен для заданных функций $g_t(\cdot)$, описывающих потенциальные выплаты по опциону. Таким образом,[5] получаем рекуррентные соотношения:[6]

$$\begin{gathered} v_N^*(\bar{x}_N) = g_N(\bar{x}_N), \\ v_{t-1}^*(\bar{x}_{t-1}) = g_{t-1}(\bar{x}_{t-1}) \bigvee \inf_{h \in D_t(\bar{x}_{t-1})} \sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} \left[v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y) - hy \right], \\ t = N, \ldots, 1, \end{gathered} \tag{BA}$$

где $\bar{x}_{t-1} = (x_0, \ldots, x_{t-1})$ описывает предысторию по отношению к настоящему моменту t. Условия для справедливости (BA) сформулированы в Теореме 3.1 из [10].

При этом удобно (формально) считать, что $g_0 = -\infty$ (отсутствие обязательств по выплатам в начальный момент времени); $g_t \geq 0$ для $t = 1, \ldots, N$ в случае американского опциона. Множество $D_t(\cdot)$ предполагается выпуклым и $0 \in D_t(\cdot)$.

---

[5] Неформальным экономическим языком можно это пояснить следующим образом, считая для упрощения, что точные верхние и нижние грани в (BA) достигаются. Пусть $t \leq N$; к текущему (настоящему) моменту времени $t-1$ известна предыстория (дисконтированных) цен $x_1, \ldots, x_{t-1}$. Стоимость V_{t-1} портфеля, хеджирующего обусловленное обязательство по проданному американскому опциону, для гарантированного исполнения обязательств должна быть, во-первых, не менее текущих обязательств, равных потенциальным выплатам $g_t(x_1, \ldots, x_{t-1})$. Во-вторых, стоимость портфеля в следующий момент $V_t = V_{t-1} + H_t \Delta X_t$ (здесь стратегия H_t формируется в момент $t-1$ и может зависеть только от предыстории цен $x_1, \ldots, x_{t-1}$) должна быть гарантированно, при любом сценарии $\Delta X_t = y \in K_t(x_1, \ldots, x_{t-1})$ движения цен на шаге t, не меньше, чем $v_t^*(x_1, \ldots, x_{t-1}, x_{t-1} + y)$. Тем самым, для покрытия будущих обязательств стоимость V_{t-1}портфеля при выборе стратегии $H_t = h \in D_t(x_1, ..., x_{t-1})$ должна быть не менее величины $v_t^*(x_1, \ldots, x_{t-1}, x_{t-1} + y) - hy$ при наиболее неблагоприятном сценарии $y \in K_t(x_1, ..., x_{t-1})$ движения цен на шаге t, т.е. при $y \in K_t(x_1, ..., x_{t-1})$, максимизирующем выражение $v_t^*(x_1, \ldots, x_{t-1}, x_{t-1}+y) - hy$. Полученное значение минимизируется посредством выбора стратегии $h \in D_t(x_1, ..., x_{t-1})$, чтобы оценить требуемые резервы на покрытие будущих потенциальных выплат. Осталось положить $v_t^*(x_1, \ldots, x_{t-1})$ равным максимуму из величины текущих обязательств и величины резервов на покрытие будущих потенциальных выплат.

[6] Знак $\bigvee$ обозначает максимум, $hy = \langle h, y \rangle$ – скалярное произведение вектора h на вектор y.

Многозначные отображения $x \mapsto K_t(x)$ и $x \mapsto D_t(x)$, а также функции $x \mapsto g_t(x)$, предполагаются заданными для всех $x \in (\mathbb{R}^n)^t$, $t = 1, \ldots, N$. Поэтому функции $x \mapsto v_t^*(x)$ задаются уравнениями (BA) для всех $x \in (\mathbb{R}^n)^t$.

В уравнениях (BA) функции v_t^*, а также соответствующие точные верхние и нижние грани принимают значения в расширенном множестве вещественных чисел $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = [-\infty, +\infty]$ – двухточечной компактификации[7] $\mathbb{R}$.

Сделаем важное предположение об ограниченности функций выплат g_t, благодаря которому функции v_t^* являются ограниченными сверху. Предположение заключается в следующем.

Найдутся константы $C_t \geq 0$ такие, что для каждого $t = 1, \ldots, N$ и всех возможных траекторий $\bar{x}_t = (x_0, \ldots, x_t) \in B_t$ выполнено $g_t(x_0, \ldots, x_t) \leq C_t$.

(B)

Будем считать, что константы C_t выбраны минимальными, т.е.

$$C_t = \sup_{x \ \in B_t} g_t(x),$$

и будем обозначать

$$C = \bigvee_{t=1}^{N} C_t. \tag{1.1}$$

Траекторию на временном интервале $[0, t] = \{0, \ldots, t\}$ цен активов $(x_0, \ldots, x_t) = \bar{x}_t$ мы назовем возможной, если $x_0 \in K_0$, $\Delta x_1 \in K_1(x_0)$, $\ldots$, $\Delta x_t \in K_t(x_0, \ldots, x_{t-1})$; $t = 0, 1, \ldots, N$. Обозначим B_t – множество возможных траекторий цен активов на временном интервале $[0, t]$; тем самым

$$B_t = \{(x_0, \ldots, x_t) : x_0 \in K_0, \Delta x_1 \in K_1(x_0), \ldots, \Delta x_t \in K_t(x_0, \ldots, x_{t-1})\}. \tag{1.2}$$

Везде далее будем считать выполненными предположения, перечисленные в Теореме 3.1 из [10], а также предположения, перечисленные в пункте 1) Замечания 3.1 из [10].

[7] Окрестности точек $-\infty$ и $+\infty$ имеют вид $[\infty, a)$, $a \in \mathbb{R}$ и $(b, +\infty]$, $b \in \mathbb{R}$ соответственно.

В настоящей работе вводятся понятия «безарбитражности» для детерминистской модели рынка – отсутствие гарантированного арбитража, отсутствии арбитражных возможностей, отсутствие гарантированного арбитража с неограниченной прибылью. Вводится новое понятие грубости (структурной устойчивости) «безарбитражности», получены критерии грубости.

2. Арбитраж и безарбитражность рынка

Само понятие арбитража, чрезвычайно важное для описания поведения финансовых рынков, является изначально противоречивым. В качестве типичного образца приведем определение из Investopedia[8]. "Arbitrage occurs when a security is purchased in one market and simultaneously sold in another market at a higher price, thus considered to be risk-free profit for the trader. Arbitrage provides a mechanism to ensure prices do not deviate substantially from fair value for long periods of time. With advancements in technology, it has become extremely difficult to profit from pricing errors in the market. Many traders have computerized trading systems set to monitor fluctuations in similar financial instruments. Any inefficient pricing setups are usually acted upon quickly, and the opportunity is often eliminated in a matter of seconds. Arbitrage is a necessary force in the financial marketplace".

С одной стороны, и это наиболее существенная характеристика арбитража, речь идет о совершении сделок, приносящих прибыль без риска. С другой стороны, необходимо учитывать, что различные участники рынка имеют неодинаковые возможности в отношении доступа к информации и доступа к рынку. Здесь играет роль не только

[8] Арбитраж возникает, когда ценная бумага приобретается на одном рынке и одновременно продается на другом рынке по более высокой цене, что считается безрисковой прибылью для трейдера. Арбитраж создает механизм для того, чтобы цены не отличались существенно от справедливой стоимости в течение длительных периодов времени. Благодаря достижениям в области технологий стало чрезвычайно сложно получить прибыль из-за неадекватного ценообразования на рынке. Многие трейдеры имеют компьютеризированные торговые системы, предназначенные для мониторинга колебаний аналогичных финансовых инструментов. Неэффективные конфигурации цен обычно быстро приводят рынок в действие, и возможность часто устраняется в считанные секунды. Арбитраж является необходимой силой на финансовом рынке. URL: https://www.investopedia.com/terms/a/arbitrage.asp

время реакции, но и скорость исполнения сделок. При этом следует учитывать, что действия участников рынка по реализации «арбитража» торгуемых на рынке активов, разумеется, оказывают влияние на рыночную стоимость этих активов, приводя не просто к выравниванию цен, но и к возможности возникновения в течении короткого промежутка времени ценовой ситуации, противоположной изначальной. Это связано с некоторой инерцией рынка, неодновременности действий участников рынка, вызванной различием доступа к рынку. Таким образом, в действительности у участников рынка всегда имеется риск, а «безрисковость» могла бы быть только у участника рынка, который «всегда первый» - с этим и связано развитие высокочастотной торговли, где речь идет уже о малых долях секунды на исполнение сделок.

Несмотря на описанную выше противоречивость, понятие «безарбитражности» рынка, однако, является исключительно важным для построения корректных моделей рынка. Если в рамках модели возможен «арбитраж» с неограниченной прибылью[9], то здравый смысл подсказывает, что постановка задачи оптимального хеджирования обусловленных обязательств по опционам, как и задачи оптимального портфельного инвестирования, теряет смысл, поскольку такая модель рынка будет поощрять лишь торговые стратегии получения неограниченной безрисковой прибыли посредством арбитража. Формализация понятия «арбитража» и «безарбитражности» рынка при этом оказывается сложной проблемой и порождает множество различных математических определений, причем далеко не всегда ясно, какое из определений лучше соответствует реальности. Наиболее нетривиальная ситуация возникает при построении моделей рынка с непрерывным временем; мы ограничимся здесь ссылками на некоторые фундаментальные работы теории арбитража, начиная с основополагающей работы Росса (1978) [26]. Так, математически точная формулировка условий безарбитражности предложена в работе Харрисона и Крепса (1979) [18]; взаимосвязь между безарбитражностью и мартингальными мерами найдена в работе Харрисона и Плиски

[9] В случае отсутствия торговых ограничений «арбитраж» всегда ассоциируется с неограниченной прибылью, причем для реализации арбитража в этом случае не требуется начального капитала.

(1981) [19]; Крепс (1981) [21] адаптирует понятие безарбитражности к бесконечному количеству активов; Делбан (1992) [15], а также Делбан и Шахермаейер (1994) [16] применяют результаты Крепса для получения условий существования мартингальных мер, а также Делбан и Шахермаейер (1998) [17] находят максимально общие условия такого типа; Дана, Ван и Маньен (1999) [14] устанавливают связь безарбитражности с равновесием на рынке.

Весьма естественная, на наш взгляд, формализация концепции безарбитражности No Generalised Arbitrage (NGA), была предложена Черным (2007) [13]. Согласно его версии фундаментальной теоремы ценообразования активов, модель рынка с конечным горизонтом удовлетворяет условию NGA тогда и только тогда, когда существует эквивалентная (по отношению к референтной мере) вероятностная мера, в отношении которой процесс дисконтированных цен является (настоящим[10]) мартингалом; модель с бесконечным горизонтом удовлетворяет условию NGA тогда и только тогда, когда существует эквивалентная мера, в отношении которой дисконтированная цена процесс является равномерно интегрируемым мартингалом. Отметим, что этот подход основан на элементарных (или простых) торговых стратегиях, которые, безусловно, ближе к реальности, чем более общие стратегии «непрерывной торговли».

В условиях «детерминистской» модели рынка с дискретным временем понятие безарбитражности также может быть формализовано разными способами. Соответствующие формулировки отличаются от «вероятностных» определений, хотя и близки к ним по смыслу. Определение (детерминистской) арбитражной возможности восходит к работе Мертона (1973) [23] и формулируется при помощи термина «доминантный актив (портфель)»; приведем соответствующую цитату. “Definition: Security (portfolio) A is dominant over security (portfolio) B, if on some known date in the future, the return on A will exceed the return on B for some possible states of the world[11], and will be at least as large as on B, in all possible states of the world. Note that in perfect markets with no transactions costs and the ability to borrow and short-

---

[10] А не локальным мартингалом, т.е. математическое ожидание процесса в каждый момент времени конечно.

[11] В рамках предложенной в [21] модели, «состояниями мира» можно считать, например, возможные траектории цен рассматриваемых активов.

sell without restriction, the existence of a dominated security[12] would be equivalent to the existence of an arbitrage situation"[13].

При наличии безрискового актива естественно сравнивать доход портфеля с доходом от безрискового актива, а наличие арбитражной возможности равносильно тому, что безрисковый актив будет либо доминируемым, либо доминантным (см. Предложение 3.2 далее, в разделе 3).

«Безарбитражность» (в том или ином смысле[14]) на временном интервале $t = 1, \ldots, N$ будем определять как «безарбитражность» на каждом шаге времени, поэтому достаточно рассмотреть одношаговую задачу; «безарбитражность» на одном временном шаге t определим как безарбитражность для любой предыстории цен $x_1, \ldots, x_{t-1}$.

3. Арбитражная возможность и гарантированный арбитраж

Определение 3.1. *В «детерминистской» постановке под арбитражной возможностью на шаге $t \in \{1, \ldots, N\}$ будем понимать следующее.*

1^0. *Найдется допустимая стратегия $h^* \in D_t(\cdot)$, такая что $h^* y \geq 0$ для всех $y \in K_t(\cdot)$.*

2^0. *Найдется $y^* \in K_t(\cdot)$, такое что $h^* y^* > 0$.*

Замечание 3.1. В «вероятностной» постановке условие 1^0 выполняется почти наверное, а условие 2^0 заменяется на более сильное, указывающее на «реалистичность» арбитражной возможности, а именно,

---

[12] Здесь, по-видимому, Мертон имел в виде доминируемые портфели, а не только активы.

[13] Определение: актив (портфель) A доминирует над активом (портфелем) B, если на какую-то известную дату в будущем доход от A будет (строго) превышать доход от B для некоторых возможных состояний мира и будет по крайней мере не меньше, чем от B, для всех возможных состояний мира. Отметим, что на совершенных рынках без транзакционных издержек и с возможностью заимствовать и коротко продавать без ограничений, существование доминируемого актива будет эквивалентно существованию арбитражной возможности.

[14] Мы будем использовать три способа формализации «безарбитражности», которые будут введены далее в разделах 3 и 4.

предполагающее положительную (референтную) вероятность события $H_t^*\Delta X_t > 0$, где $H_t^* = h_t^*(X_0, \ldots, X_{t-1})$. Однако для «вероятностного» аналога задачи, т.е. когда $K_t(\cdot)$ являются носителями регулярного условного распределения ΔX_t при известной предыстории цен, из условий определения 3.1 вытекает, что событие $H^*\Delta X > 0$ имеет положительную (референтную) вероятность.

Действительно, обозначим $P_{\Delta X_t|\overline{X}_{t-1}=\cdot}$ соответствующие условные распределения и предположим, что существуют измеримые селекторы[15] $h^*(\cdot) \in D_t(\cdot)$ и $y^*(\cdot) \in K_t(\cdot)$ со свойствами 1^0 и 2^0; это можно, в принципе,[16] обеспечить надлежащими свойствами многозначных отображений $\overline{x}_{t-1} \mapsto D_t(\overline{x}_{t-1})$ и $\overline{x}_{t-1} \mapsto K_t(\overline{x}_{t-1})$. Открытый шар $B(\cdot)$ радиуса $\frac{1}{2}h^*(\cdot)y^*(\cdot)$ с центром в $y^*(\cdot)$ содержится в положительном полупространстве $S(\cdot) = \{y : \ h^*(\cdot)y > 0\}$, а поскольку $y^*(\cdot)$ точка носителя для условного распределения $P_{\Delta X_t|\overline{X}_{t-1}=\cdot}$, то $P_{\Delta X_t|\overline{X}_{t-1}=\cdot}(B(\cdot)) > 0$, так что $P_{\Delta X_t|\overline{X}_{t-1}=\cdot}(S(\cdot)) > 0$, а значит, и для безусловной (референтной) вероятности имеем $\mathbb{P}(H_t\Delta X_t) > 0$.

Отметим, что для критериев безарбитражности в терминах носителей $K_t(\cdot)$ при «вероятностном» подходе серьезные усилия приходится предпринимать для «борьбы» с проблемой измеримости, в том числе используются те или иные (неконструктивные) результаты, касающиеся измеримых селекторов (см., например, [9], [20]). В то же время, «детерминистский» подход, в принципе, позволяет хотя бы частично обойти эти проблемы.

Определение 3.2. *Под гарантированным арбитражем*[17] *на шаге*

---

[15] К сожалению, терминология в многозначном анализе на русском языке расходится. Так авторы [4] и [3] используют термин «сечение», авторы [6] предпочитают говорить о «селекции», у авторов [2] «ветвь» признается синонимом термина «селектор», а в [7] для многозначных отображений «ветвь» относится к многозначным отображениям, в том время как «селектор» понимается как функция выбора (в смысле теории множеств) для класса множеств.

[16] Например, достаточно полунепрерывности сверху или снизу, или же измеримости многозначных отображений, см. § 15 и § 20 [7].

[17] Устойчивый термин не сложился; мы предпочли термин "sure arbitrage", как наиболее точно выражающий смысл понятия. Например, в книге [24], посвященной моделям с дискретным временем и конечным числом «состояний мира» (приращения цен в этом случае принимают конечное число значений), наличие dominant strategy (термин отличает от значения из работы [23]) равносильно на-

$t \in \{1, \ldots, N\}$ *будем понимать следующее:*

найдется допустимая стратегия $h^* \in D_t(\cdot)$ *, такая что* $h^* y > 0$ *для всех* $y \in K_t(\cdot)$.

Поскольку $K_t(\cdot)$ – компакт, то для стратегии h^* в случае гарантированного подхода имеем $\min\limits_{y \in K_t(\cdot)} h^* y > 0$.

Будем обозначать условие отсутствия арбитражных возможностей через NDAO[18], а условие отсутствия гарантированного арбитража – через NDSA[19]. Очевидно, что NDAO влечет NDSA. Условие NDSA, безусловно, весьма слабое (грубое) требование «безарбитражности» рынка, тем не менее именно эта форма «безарбитражности» рынка является вполне релевантной для детерминистской постановки с торговыми ограничениями и при анализе игрового равновесия (в игре «хеджера» и «рынка»). Приведем пример экономического характера, подтверждающий этот тезис.

Пример 3.1. Цена v_t, по которой на рынке в момент времени t можно продать американский опцион, не должна быть больше, чем значение v_t^*, определяемое уравнениями (BA) – из соображений отсутствия гарантированного арбитража (если $v_t > v_t^*$, продаем опцион за v_t, а средства $v_t^* + \varepsilon$, где $0 < \varepsilon < v_t - v_t^*$, достаточны для суперхеджирования). □

Будем обозначать

$$K_t^*(\cdot) = \operatorname{conv}(K_t(\cdot)). \tag{3.1}$$

Замечание 3.2. 1) Наличие арбитражной возможности или же гарантированного арбитража для исходной системы с компактами $K_t(\cdot)$ и для «загрубленной» системы с априорными ограничениями на приращения цен в виде компактов $K_t^*(\cdot)$, т.е. выпуклых оболочек компактов $K_t(\cdot)$, суть одно и то же, причем «арбитраж» реализуется при помощи одной и той же «арбитражной» стратегии $h^* \in D_t(\cdot)$.

Действительно, если имеется арбитражная возможность $h^* \in D_t(\cdot)$ или же гарантированный арбитраж для «загрубленной» системы (т.е.

личию гарантированного арбитража.

[18] Акроним от «No Deterministic Arbitrage Opportunity».

[19] Акроним от «No Deterministic Sure Arbitrage».

когда $\Delta X_t \in K_t^*(\cdot)$), тогда то же самое имеет место для исходной системы (т.е. когда $\Delta X_t \in K_t(\cdot)$). Для гарантированного арбитража это утверждение непосредственно вытекает из определения 3.2. Если h^* – арбитражная возможность, условие 1^0 определения 3.1 очевидно выполняется с тем же h^* для исходной системы. Что касается условия 2^0 из определения 3.1, поскольку найдется $y^* \in K_t^*(\cdot) = \mathrm{conv}(K_t(\cdot))$ такой, что $h^*y^* > 0$, то y^* представим в виде выпуклой комбинации конечного[20] числа точек $y_1, \ldots, y_m$ из $K_t(\cdot)$, т.е. для некоторых чисел $p_i > 0$ $i = 1, \ldots, m$, таких что $\sum\limits_{i=1}^{m} p_i = 1$, имеем $y^* = \sum\limits_{i=1}^{m} p_i y_i$. Напомним, что $h^* y_i \geq 0$; $h^* y^* = \sum\limits_{i=1}^{m} p_i h^* y_i > 0$, отсюда следует, что для некоторого i имеет место $h^* y_i > 0$, т.е условие 2^0 выполнено для $y_i \in K_t(\cdot)$.

Обратно, если имеется арбитражная возможность или же гарантированный арбитраж для исходной системы, то, поскольку для арбитражной стратегии h^* в исходной системе замкнутое полупространство $\{y : \ h^* y \geq 0\}$ или открытое полупространство $\{y : \ h^* y > 0\}$ выпуклы, эти множества содержат вместе с $K_t(\cdot)$ и его выпуклую оболочку $K_t^*(\cdot)$, которая автоматически компактна.

2) В [10] мы ввели понятие «реалистичности» стохастической модели динамики цен – переходные ядра Q_t, отвечающие условным вероятностям цены $X_t \in \mathbb{R}^n$ в момент времени t при известной предыстории $\bar{X}_{t-1} = \bar{x}_{t-1} \in (\mathbb{R}^{\ltimes})^t$, обладают феллеровским свойством. Если для распределения вектора $\bar{X}_t = (\bar{X}_{t-1}, X_t)$ существует (регулярный) вариант условного распределения $P(X \in \cdot | \bar{X}_{t-1} = x) = Q_t(x, \cdot)$, обладающий феллеровским свойством, то такой вариант единственный для $x \in \mathrm{supp}(P_{\bar{X}_{t-1}})$, где $P_{\bar{X}_{t-1}}$ – распределение случайного вектора $\bar{X}_{t-1}$, а $\mathrm{supp}(\pi)$ обозначает (топологический) носитель меры π. В этом случае естественно выбирать именно феллеровский вариант регулярного условного распределения, а детерминистский и стохастический подходы приводят к одинаковым понятиям «безарбитражности».

Обозначим $D^0 = \{y : \ hy \leq 0 \text{ для всех } h \in D\}$ – полярный[21] к

[20] По теореме Каратеодори их можно выбрать в количестве не более чем $n+1$ (напомним, что $K_t(\cdot) \subseteq \mathbb{R}^n$).

[21] Строго говоря, корректно говорить о полярном к D конусе, если D – конус, но мы позволим себе некоторую вольность речи.

D конус. Если $y \in D_t^0(\cdot)$, то это «абсолютно неблагоприятный сценарий», не приносящий прибыль на шаге времени t ни при каких допустимых стратегиях. Очевидно, конус $D_t^0(\cdot)$ является замкнутым и выпуклым.

Рассмотрим условие[22]:

$$\operatorname{conv}(K_t(\cdot)) \cap D_t^0(\cdot) \neq \emptyset. \tag{GNSA}$$

Условие (GNSA) можно интерпретировать также следующим образом: для «загрубленной» системы имеются «абсолютно неблагоприятные сценарии».

Мы уже отмечали ранее, во Введении, что для нашей постановки задачи естественно использовать теоретико-игровые методы. Подтверждением этому может служить следующий результат[23], устанавливающий, в частности, эквивалентность условий NDSA и (GNSA) и сформулированный в терминах величины $\pi_t(\cdot)$ – значения «игры», определяемой заданными[24] $K_t^*(\cdot)$ и $D_t(\cdot)$, экономический смысл которой – максимальная прибыль от гарантированного арбитража, если таковой имеется, и нулевая прибыль в случае отсутствия такового.

Предложение 3.1.

1) $\pi_t(\cdot) = \sup\limits_{h \in D_t(\cdot)} \min\limits_{y \in K_t^*(\cdot)} hy = \min\limits_{y \in K_t^*(\cdot)} \sup\limits_{h \in D_t(\cdot)} hy.$

2) Величина $\pi_t(\cdot)$ всегда неотрицательна (возможно равна $+\infty$), причем она равна нулю, если выполнено NDSA, и положительна, если существует гарантированный арбитраж.

3) Условие NDSA равносильно условию (GNSA).

Доказательство. Равенство в пункте 1) является непосредственным следствием классической теоремы Кнезера [22]. Величина $\pi_t(\cdot)$ неотрицательна, т.к. $0 \in D_t(\cdot)$ и потому $\sup\limits_{h \in D_t(\cdot)} hy \geq 0$ для всех y. Допустим, что условие (GNSA) не выполняется, т.е. $K_t^*(\cdot)$ и $D_t^0(\cdot)$ не пере-

---

[22] Акроним от «Geometric condition of No Sure Arbitrage».

[23] Заметим, что условие компактности $D_t(\cdot)$ не требуется (достаточно компактности $K_t(\cdot)$).

[24] Здесь используется обозначение (3.1).

секаются. Тогда для любого $y \in \mathrm{conv}(K_t(\cdot))$ выполняется $\sup\limits_{h \in D_t(\cdot)} hy > 0$, поскольку $y \notin D_t^0(\cdot)$.

Минимум полунепрерывной снизу выпуклой функции $y \mapsto \sup\limits_{h \in D_t(\cdot)} hy$ достигается[25] в некоторой точке компакта $K_t^*(\cdot)$, так что

$$\min_{y \in K_t^*(\cdot)} \sup_{h \in D_t(\cdot)} hy > 0.$$

В силу установленного в пункте 1) равенства

$$\pi_t(\cdot) = \sup_{h \in D_t(\cdot)} \min_{y \in K_t^*(\cdot)} hy > 0.$$

Поэтому найдется $h^* \in D_t(\cdot)$ такой что

$$\min_{y \in K_t^*(\cdot)} h^* y > 0,$$

но это означает, что h^* реализует гарантированный арбитраж. Тем самым установлено утверждение 3).

Пусть теперь выполняется (GNSA), тогда найдется точка $y^* \in \mathrm{conv}(K_t(\cdot)) \cap D_t^0(\cdot)$. Поскольку $y^* \in D_t^0(\cdot)$, то $\sup\limits_{h \in D_t(\cdot)} hy^* \leq 0$. Поскольку $0 \in D_t(\cdot)$, то $\sup\limits_{h \in D_t(\cdot)} hy \geq 0$ для всех y, так что $\sup\limits_{h \in D_t(\cdot)} hy^* = 0$. Тем самым в точке $y^* \in K_t(\cdot)$ достигается минимум функции $y \mapsto \sup\limits_{h \in D_t(\cdot)} hy$, равный нулю, т.е. $\pi_t(\cdot) = 0$, а поскольку

$$\pi_t(\cdot) = \sup_{h \in D_t(\cdot)} \min_{y \in K_t^*(\cdot)} hy = 0,$$

то для любого $h \in D_t(\cdot)$ имеет место

$$\min_{y \in K_t^*(\cdot)} hy \leq 0.$$

Таким образом, не может существовать стратегия гарантированного арбитража $h^* \in D_t(\cdot)$, т.е. такая, что $h^* y > 0$ для всех $y \in K_t^*(\cdot)$. $\square$

---

[25] Функция $y \mapsto \sup\limits_{h \in D_t(\cdot)} hy = \sigma_{D_t(\cdot)}(y)$ может принимать значение $+\infty$, в случае неограниченного $D_t(\cdot)$. Здесь $\sigma_D(\cdot)$ – опорная функция множества D, т.е. $\sigma_D(y) = \sup\{hy : \ h \in D\}$, где hy – скалярное произведение векторов h и y.

Замечание 3.3. Достаточность условия (GNSA) для выполнения NDSA может быть доказана непосредственно, без использования величины $\pi_t(\cdot)$. Это следует, с учетом замечания 3.2, из того, что найдется точка $y^* = K_t^*(\cdot)$, такая что $hy^* \leq 0$ для всех $h \in D_t(\cdot)$.

Что касается условия NDAO, геометрические критерии, типа (GNSA), оказываются значительно деликатнее, даже для случая конечных $K_t(\cdot)$, см. [8, 9]. Однако при детерминированной постановке для анализа игрового равновесия важно именно[26] условие NDSA, а не NDAO. Поэтому, чтобы не загромождать изложение техническими деталями, мы ограничимся рассмотрением NDAO для частного (но наиболее часто рассматриваемого в работах по финансовой математике) случая отсутствия торговых ограничений, т.е. когда

$$D_t(\cdot) \equiv \mathbb{R}^n.$$

Имеет место следующий интуитивно наглядный критерий, непосредственно вытекающий из определения.

Предложение 3.2. *Для случая отсутствия торговых ограничений NDAO равносильно следующему утверждению*[27].

Для каждого $h \in \mathbb{R}^n$ верна альтернатива:

– *либо*[28] $hy = 0$ *для всех* $y \in K_t(\cdot)$;

– *либо найдутся* y_1, y_2 *из* $K_t(\cdot)$ *такие, что* $hy_1 > 0$ *и* $hy_2 < 0$.

В случае отсутствия торговых ограничений нетрудно получить критерий для NDAO в геометрической форме, аналогичный результатам [20] (см. также [11, 12]).

Предложение 3.3. *Для случая отсутствия торговых ограничений NDAO равносильно следующему утверждению:*

---

[26] Это, с экономической точки зрения, связано с тем, что условие $NDSA$ является критерием существования линейного правила ценообразования, см. например [24], утверждение (19) (в этой книге пространство «состояний мира» предполагается конечным).

[27] На самом деле, это условие означает, что (в терминах Мертона) безрисковый актив не является ни доминантным, ни доминируемым.

[28] Это возможно в вырожденном случае, когда $K_t(\cdot)$ содержится в аффинном многообразии меньшей чем n размерности.

а) либо $K_t(\cdot) = \{0\}$

а) либо $K_t(\cdot)$ *содержит не менее двух точек, и точка 0 содержится в относительной внутренности (по отношению к аффинной оболочке) выпуклой оболочки* $\mathrm{conv}(K_t(\cdot))$ *компакта* $K_t(\cdot)$ *для любого* $t = 1, \ldots, N$.

Достаточность альтернативы а) и б) очевидна в силу предложения 3.2. Чтобы установить необходимость этой альтернативы, предположим, что точка 0 не содержится в относительной внутренности выпуклой оболочки компакта $K_t(\cdot)$. Тогда либо 0 не принадлежит выпуклой оболочке – в этом случае существует гарантированный арбитраж в силу строгой отделимости 0 и $K_t(\cdot)$ гиперплоскостью, либо точка 0 находится на границе выпуклой оболочки компакта $K_t(\cdot)$ – тогда выполняется 1^0 определения 3.1, поскольку существует опорная гиперплоскость в нуле. Если $K_t(\cdot)$ содержит одну точку, то эта точка, стало быть, должна быть точкой 0. Если в $K_t(\cdot)$ имеется по крайней мере две точки, то в $K_t(\cdot)$ имеется точка, отличная от нуля; опорную плоскость к точке 0 всегда можно выбрать так, чтобы эта точка лежала в «положительной» полуплоскости, то есть выполняется 2^0 Определения 3.1.

Замечание 3.4. С формальной математической точки зрения можно было бы не выделять случай а), поскольку относительная внутренность множества $\{0\}$ совпадает с этим множеством, однако используемая формулировка выигрывает в наглядности. Альтернативу а) и b) можно записать[29] в виде одного условия[30]:

$$0 \in \mathrm{ri}(\mathrm{conv}(K_t(\cdot))), \; t = 1, \ldots, N. \qquad \text{(GNAO-NTC)}$$

□

Следующий простой пример иллюстрирует введенные условия «безарбитражности».

Пример 3.2. В случае отсутствия торговых ограничений, вышеприведенные критерии можно проиллюстрировать на примере модели

[29] Акроним от “Geometric condition of No Arbitrage Opportunities under No Trading Constraints assumption”.

[30] Здесь $\mathrm{ri}(A)$ обозначает относительную внутренность A.

для случая одного «рискового» актива ($n = 1$), которую мы будем называть одномерной мультипликативной моделью. Цену единственного «рискового» актива X_t^1 будем записывать без верхнего индекса, т.е. как X_t. Динамика цены этого актива задается в виде мультипликативного представления вида:

$$X_t = M_t X_{t-1}, \quad t = 1, \dots, N,$$

где $X_0 > 0$.

Априорно известно, что $M_t \in [\alpha, \beta], \quad \beta > \alpha > 0$, так что модель является однородной по времени, со свойством мультипликативной независимости, см. раздел 2 статьи [10]; здесь $K_t(x_0, \dots, x_{t-1}) = \big[x_{t-1}(\alpha - 1), x_{t-1}(\beta - 1)\big]$.

Условие «безарбитражности» NDAO, т.е. отсутствия арбитражных возможностей, очевидно, равносильно $1 \in (\alpha, \beta)$, то есть через один период в будущем возможно как повышение, так и понижение цены рискового актива; другими словами, доходность на периоде t рискового актива $R_t = M_t - 1$ может быть как положительной, так и отрицательной. Если $\alpha = 1$ или $\beta = 1$, имеется арбитражная возможность, но выполнено условие «безарбитражности» NDSA, т.е. отсутствие гарантированного арбитража. Если же $\alpha > 1$ или $\beta < 1$, то имеет место гарантированный арбитраж: чтобы его реализовать, достаточно занять длинную позицию по рисковому активу при $\alpha > 1$ и короткую позицию – при $\beta < 1$.$\square$

4. Отсутствие гарантированного арбитража с неограниченной прибылью

В случае гарантированного арбитража (т.е. когда $\pi_t(\cdot) > 0$, в соответствии с Предложением 3.1) будем различать два случая.

Будем говорить о гарантированном арбитраже с неограниченной прибылью в момент t, если $\pi_t(\cdot) = +\infty$; обозначим такой арбитраж SAUP[31].

Будем также говорить о гарантированном арбитраже с ограниченной прибылью в момент t, если $0 < \pi_t(\cdot) < +\infty$, и обозначим такой арбитраж SABP[32].

---

[31] Акроним от «Sure Arbitrage with Unbounded Profit».

[32] Акроним от «Sure Arbitrage with Bounded Profit».

Достаточным условием отсутствия SAUP, т.е. отсутствия гарантированного арбитража с неограниченной прибылью, что будем обозначать как $NDSAUP$[33], является компактность $D_t(\cdot)$, поскольку в этом случае (выпуклая) функция $y \mapsto \sup\limits_{h \in D_t(\cdot)} hy = \sigma_{D_t(\cdot)}(y)$ принимает конечные значения; в этом случае $\operatorname{bar}\big(D_t(\cdot)\big) = \mathbb{R}^n$.

Отметим, что в отсутствии торговых ограничений при наличии гарантированного арбитража имеют место неограниченные прибыли, т.е. SAUP; в этом случае[34] $\operatorname{bar}\big(D_t(\cdot)\big) = \{0\}$.

Теорема 4.1. *Условие $NDSAUP$ выполняется тогда и только тогда, когда*[35]

$$\operatorname{conv}\big(K_t(\cdot)\big) \cap \operatorname{bar}\big(D_t(\cdot)\big) \neq \emptyset,\ t = 1, \ldots, N. \qquad (GNSAUP)$$

Доказательство. Предположим, что не выполняется условие ($GNSAUP$); ясно, что в этом случае множество $D_t(\cdot)$ является неограниченным. Обозначим $\bar{D}_t(\cdot)$ замыкание множества $D_t(\cdot)$, т.е. $\bar{D}_t(\cdot) = \operatorname{cl}(D_t(\cdot))$. Имеет место включение $\operatorname{bar}\big(\bar{D}_t(\cdot)\big) \subseteq \operatorname{bar}\big(D_t(\cdot)\big)$, поэтому имеем

$$\operatorname{conv}\big(K_t(\cdot)\big) \cap \operatorname{bar}\big(\bar{D}_t(\cdot)\big) = \emptyset.$$

В силу компактности $\operatorname{conv}\big(K_t(\cdot)\big)$, можно строго отделить гиперплоскостью, проходящей через начало координат, выпуклое множество $\operatorname{conv}\big(K_t(\cdot)\big)$ и конус $\operatorname{bar}\big(\bar{D}_t(\cdot)\big)$: найдется $h_t^*(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ такое, что

$$\min_{y \in \operatorname{conv}(K_t(\cdot))} h_t^*(\cdot) y = \varepsilon_t(\cdot) > 0 \qquad (4.1)$$

и

$$h_t^*(\cdot) y < 0 \text{ для } y \in \operatorname{bar}\big(\bar{D}_t(\cdot)\big), \qquad (4.2)$$

см. [25], следствие 11.4.2 и теорему 11.7.

---

[33] Акроним от «No Deterministic Sure Arbitrage with Unbounded Profit».

[34] Здесь $\operatorname{bar}(A)$ обозначает барьерный конус множества A, т.е. $\operatorname{bar}(A) = \{y \in \mathbb{R}^n : \ \sigma_A(y) < +\infty\}$.

[35] От «Geometric condition of No deterministic Sure Arbitrage with Unbounded Profit ».

Заметим, что для замкнутого непустого выпуклого множества A полярный к $\mathrm{bar}(A)$ конус $\big(\mathrm{bar}(A)\big)^o$ совпадает с рецессивным конусом[36] O^+A, см. [25], следствие 14.2.1.

Тем самым, (4.2) означает, что $h_t^*(\cdot) \in O^+\bar{D}_t(\cdot)$, а поскольку $0 \in D_t(\cdot) \subseteq \bar{D}_t(\cdot)$, то по следствию 8.2 из [25] $\alpha h_t^*(\cdot) \in \bar{D}_t(\cdot)$ для всех $\alpha \geq 0$, в том числе $h_t^*(\cdot) \in \bar{D}_t(\cdot)$.

Опорная функция выпуклого множества в $\mathbb{R}^n$ и его замыкание совпадают; с учетом этого получаем:

$$\pi_t(\cdot) =$$
$$= \min_{y\in\mathrm{conv}(K_t(\cdot))} \sup_{h\in D_t(\cdot)} hy = \min_{y\in\mathrm{conv}(K_t(\cdot))} \sup_{h\in\bar{D}_t(\cdot)} hy \geq \sup_{h\in\bar{D}_t(\cdot)} \min_{y\in\mathrm{conv}(K_t(\cdot))} hy \geq$$
$$\geq \sup_{\alpha\geq 0} \min_{y\in\mathrm{conv}(K_t(\cdot))} \alpha h_t^*(\cdot) y = \sup_{\alpha\geq 0} \alpha\varepsilon_t(\cdot) = +\infty.$$

Таким образом, в случае, если не выполнено ($GNSAUP$), то $\pi_t(\cdot) = +\infty$.

Если же ($GNSAUP$) выполняется, то найдется $y_t^*(\cdot) \in \mathrm{conv}\big(K_t(\cdot)\big) \cap \mathrm{bar}\big(D_t(\cdot)\big)$, поэтому

$$\pi_t(\cdot) = \min_{y\in\mathrm{conv}(K_t(\cdot))} \sup_{h\in D_t(\cdot)} hy \leq \sup_{h\in D_t(\cdot)} hy_t^*(\cdot) = \sigma_{D_t(\cdot)}(y^*) < +\infty,$$

поскольку $y^* \in \mathrm{bar}(D_t(\cdot))$. $\square$

Обсудим теперь вопрос, может ли иметь смысл хеджирование в случае, когда выполнено условие $NDSAUP$, но существует гарантированный арбитраж SABP (т.е. с ограниченной прибылью); в соответствии с Теоремой 4.1 это случай, когда выполняется[37] условие ($GNSAUP$) и, в соответствии с Предложением 3.1, $0 < \pi_t(\cdot) < \infty$.

Если рассматривать одномерную задачу (с одним рисковым активом), когда $K_t^*(\cdot) = \mathrm{conv}(K_t(\cdot))$ – выпуклый компакт, который в одномерном случае представляет собой замкнутый интервал вида $[\overline{a}_t(\cdot), \overline{b}_t(\cdot)]$, $\overline{a}_t(\cdot) < \overline{b}_t(\cdot)$, $0 \notin [\overline{a}_t(\cdot), \overline{b}_t(\cdot)]$, то ответ на этот вопрос будет отрицательным. Дело в том, что функция $h \mapsto \sup\limits_{y\in K_t(\cdot)} [v_t(\cdot, x_{t-1} + y) - hy]$ будет строго монотонной, причем

[36]См. § 8 гл. II из [25]. Рецессивный конус для непустого выпуклого множества A может быть определен как конус $O^+A = \{y : \ A + y \subseteq A\}$. Если A при этом замкнуто, то и конус O^+A тоже замкнут.

[37] В частности, это выполнено, когда $D_t(\cdot)$ компактны.

1) возрастающей, если $\bar{b}_t(\cdot) < 0$, а гарантированный арбитраж реализуется путем формирования короткой позиции по рисковому активу, т.е. $h < 0$;

2) убывающей, если $\bar{a}_t(\cdot) > 0$, а гарантированный арбитраж реализуется путем формирования длинной позиции по рисковому активу, т.е. $h > 0$.

Обозначим $\bar{c}_t(\cdot) = \inf D_t(\cdot)$, $\bar{d}_t(\cdot) = \sup D_t(\cdot)$. Напомним, что $D_t(\cdot)$ – выпуклое множество, так что оно является интервалом, причем $0 \in D_t(\cdot)$; таким образом, $-\infty \le \bar{c}_{t-1}(\cdot) \le 0 \le \bar{d}_t(\cdot) \le +\infty$. Чтобы обеспечить $NDSAUP$ и наличие $SABP$, нужно потребовать, чтобы в случае 1): $-\infty < \bar{c}_t(\cdot) < 0$; а в случае 2): $0 < \bar{d}_t(\cdot) < +\infty$. Таким образом, для минимизации рассматриваемой функции по h нужно в случае 1) выбирать минимально возможное h, т.е. $h \to \bar{c}_t(\cdot)$, если $c_t(\cdot) \notin D_t(\cdot)$, и $h = \bar{c}_t(\cdot)$, если $c_t(\cdot) \in D_t(\cdot)$, а в случае 2) наоборот, максимально возможно h, т.е. $h \to \bar{d}_t(\cdot)$, если $\bar{d}_t(\cdot) \notin D_t(\cdot)$, и $h = \bar{d}_t(\cdot)$, если $\bar{d}_t(\cdot) \in D_t(\cdot)$, что соответствует извлечению максимально возможной арбитражной прибыли.

В двумерном случае, однако, для компактных торговых ограничений можно дать положительный ответ на поставленный вопрос, но соответствующий пример мы приведем в одной из последующих публикаций, когда будут введены смешанные стратегии «рынка». Тем самым, условие безарбитражности, еще более слабое, чем $NDSA$, а именно $NDSAUP$ (отсутствие гарантированного арбитража с неограниченной прибылью), имеет экономический смысл.

Замечание 4.1. В случае отсутствия торговых ограничений, т.е. когда $\mathrm{bar}(D_t(\cdot)) = \{0\}$, условие $NDSAUP$ влечет условие отсутствия арбитражных возможностей $NDAO$: условие (GNAO-NTC) в этом случае, очевидно, равносильно условию ($GNSAUP$), так что достаточно сослаться на Предложение 3.3, Замечание 3.4 и Теорему 4.1.

5. Робастная форма безарбитражности

Для реалистичности модели при детерминистской постановке задачи имеет смысл опираться на принцип грубости[38] (структурной устойчивости) модели. Обычно торговые ограничения, описываемые многозначными отображениями $D_t(\cdot)$, известны точно; в противоположность этому задание компактов $K_t(\cdot)$, описывающих неопределенность движения цен, носит приблизительный характер. Поэтому для рассматриваемой модели принцип грубости заключается в том, что ключевые свойства модели должны сохраниться при достаточно малых возмущениях множеств $K_t(\cdot)$. Применительно к свойству «безарбитражности» рынка принцип грубости может быть формализован следующем образом.

Определение 5.1. *Грубое (робастное[39]) условие «безарбитражности» означает сохранение этого свойства для заданной предыстории цен при достаточно малых в смысле метрики Помпею-Хаусдорфа[40] возмущениях компактов $K_t(\cdot)$, описывающих неопределенность движения цен.*

Будем обозначать $RNDSAUP$[41] робастное условие отсутствия гарантированного арбитража с неограниченной прибылью, $RNDAO$[42] – робастное условие отсутствия арбитражных возможностей. Непосредственно из определения грубости вытекает, что $RNDSAUP$, влечет $NDSAUP$, а $RNDAO$ влечет $NDAO$.

Лемма 5.1. *Пусть N – ограниченное выпуклое множество, содер-*

---

[38] Это название выбрано по аналогии с термином из известной работы А.А. Андронова и Л.С. Понтрягина [1].

[39] Калька с английского “robust”; используется, например, в математической статистике.

[40] Расстояние Помпею-Хаусдорфа h_ρ, отвечающее метрике ρ (в данном случае ρ – евклидова метрика в $\mathbb{R}^n$, т.е. $\rho(x^1, x^2) = \|x^1 - x^2\|_2$, где $\|x\|_2 = (\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2)^{1/2}$), определяется для непустых множеств как $h_\rho(A_1, A_2) = \max(\sup\{\rho(x, A_2),\ x \in A_1\},\ \sup\{\rho(x, A_1),\ x \in A_2\})$, где $\rho(x, A) = \inf\{\rho(x, y),\ y \in A\}$. Это расстояние может принимать значение $+\infty$; на классе всех непустых замкнутых ограниченных множеств метрического пространства h_ρ является метрикой, см. Теорему 5.1 из [7].

[41] Акроним от «Robust No Deterministic Sure Arbitrage with Unbounded Profit».

[42] Акроним от «Robust No Deterministic Arbitrage Opportunity».

жащее шар $B_\varepsilon(y)$ радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в точке y. Тогда, если N' – выпуклое множество, такое что расстояние Помпею-Хаусдорфа $h_\rho(N', N) \le \delta < \varepsilon$, то

$$N' \supseteq B_{\varepsilon-\delta}(y). \tag{5.1}$$

Доказательство. Поскольку $N \supseteq B_\varepsilon(y)$, то для соответствующих опорных функций имеет место неравенство[43]

$$\sigma_N(h) \ge \sigma_{B_\varepsilon(y)}(h) = \varepsilon\|h\|_2 + \langle h, y\rangle.$$

Нетрудно видеть, что множество N' ограничено и по Предложению 9.11 из [7] справедливо неравенство

$$|\sigma_{N'}(h) - \sigma_N(h)| \le \|h\|_2 h_\rho(N', N) \le \delta\|h\|_2.$$

Поэтому

$$\sigma_{N'}(h) \ge (\varepsilon - \delta)\|h\|_2 + \langle h, y\rangle = \sigma_{B_{\varepsilon-\delta}(y)}(h);$$

по Предложению 9.5 из [7], с учетом выпуклости N', получаем $N' \supseteq B_{\varepsilon-\delta}(y)$, т.е. требуемое включение (5.1). □

Множество A будем называть полноразмерным, если его выпуклая оболочка $\mathrm{conv}(A)$ телесна[44], т.е. если $\mathrm{int}(\mathrm{conv}(A)) \ne \emptyset$.

Теорема 5.1.

1) Условие $RNDSAUP$ равносильно условию[45]

$$0 \in \mathrm{int}\{z: \ z + \mathrm{conv}(K_t(\cdot)) \bigcap \mathrm{bar}(D_t(\cdot)) \ne \emptyset\}. \tag{SR}$$

2) Два условия: $RNDSAUP$ и полноразмерность компактов[46] *$K_t(\cdot)$*

$$\mathrm{int}(\mathrm{conv}(K_t(\cdot))) \ne \emptyset, \ t = 1, \dots, N, \tag{CEB}$$

равносильны условию[47]*:*

$$\mathrm{int}(\mathrm{conv}(K_t(\cdot))) \bigcap \mathrm{bar}(D_t(\cdot)) \ne \emptyset, \ t = 1, \dots, N. \tag{SGNSAUP}$$

---

[43] Здесь $\langle h, y\rangle$ – скалярное произведение.

[44] Это равносильно тому, что для $A \subseteq \mathbb{R}^n$ оболочка $\mathrm{aff}(A)$ совпадает со всем пространством $\mathbb{R}^n$.

[45] Акроним от «Shift Robustness».

[46] Акроним от “Compact's Envelope is a convex Body”.

[47] Акроним от “Strong Geometric condition of No deterministic Sure Arbitrage with Unbounded Profit”.

Доказательство. Фиксируем время t и предысторию цен $\bar{x}_{t-1}$.

1) Для доказательства того, что $RNDSAUP$ влечет (SR), рассмотрим сдвиги вида $K_t^{(z)}(\cdot) = z + K_t(\cdot)$. Очевидно,

$$\operatorname{conv}(K_t^{(z)}(\cdot)) = z + \operatorname{conv}(K_t(\cdot)). \tag{5.2}$$

По Лемме 5.3 из [7]

$$\begin{gathered} h_\rho(K_t^{(z)}(\cdot), K_t(\cdot)) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\rho(x, K_t^{(z)}(\cdot)) - \rho(x, K_t(\cdot))| = \\ = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\rho(x-z, K_t(\cdot)) - \rho(x, K_t(\cdot))| \le \rho(x-z, x) = \\ = \|(x-z) - x\|_2 = \|z\|_2, \end{gathered} \tag{5.3}$$

где в последнем неравенстве использована Лемма 5.1 из [7]. По определению грубости, если рассматривать $K_t^{(z)}(\cdot)$ как «возмущенную» динамику рынка, условие $NDSAUP$ должно выполняться, с учетом (5.3), для $\|z\|_2 < \varepsilon$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$ (зависящем от $\bar{x}_{t-1}$). Учитывая (5.2), получаем, с учетом Теоремы 4.1:

$$[z + \operatorname{conv}(K_t(\bar{x}_{t-1}))] \bigcap \operatorname{bar}(D_t(\bar{x}_{t-1})) \neq \emptyset \tag{5.4}$$

для любого $z \in B_\varepsilon(0)$, так что условие (SR) выполняется.

Обратно, предположим, что условие $RNDSAUP$ не выполняются. Рассмотрим монотонно убывающую последовательность чисел $\varepsilon_n \to 0$; тогда, в соответствии со сделанным предположением, найдется последовательность компактов K_n, таких, что $h_\rho(K_n, K_t(\bar{x}_{t-1})) \le \varepsilon_n$ и

$$C_n \bigcap B = \emptyset, \tag{5.5}$$

где $C_n = \operatorname{conv}(K_n)$, $B = \operatorname{bar}(D_t(\bar{x}_{t-1}))$. При этом обозначая $C = \operatorname{conv}(K_t(\bar{x}_{t-1}))$ имеем

$$h_\rho(C_n, C) \le h_\rho(K_n, K_t(\bar{x}_{t-1})) \le \varepsilon_n \to 0, \tag{5.6}$$

где использована формула (5.12),Предложения 5.2 из [7]. По Теореме 3.1 из [5] выпуклые множества C^n и B для каждого $n = 1, 2, \ldots$ можно отделить гиперплоскостью $H_n = \{y : \ h_n y = \alpha_n\}$, для некоторых $\alpha_n \in \mathbb{R}$ и $h_n \in S_1(0) = \{z \in \mathbb{R} : \ \|z\| = 1\}$. Таким образом, имеют место неравенства:

$$\max_{y\in K_n} \langle h_n, y\rangle \le \alpha_n \le \inf_{y\in B} \langle h_n, y\rangle.$$

Разделяющую C^n и B гиперплоскость можно выбрать в виде H_n' так, чтобы она была опорной к C^n, выбирая точку $y_n \in C_n$, для которой достигается максимум,

$$\langle h_n, y_n\rangle = \max_{y\in K_n}\langle h_n, y\rangle = \max_{y\in C_n}\langle h_n, y\rangle = \sigma_{C_n}(h_n),$$

и полагая

$$H_n' = \{y : \ \langle h_n, y - y_n\rangle \leq 0\}.$$

Заметим, что в силу (5.6), с учетом компактности C, по Предложению 5.1 из [7], последовательность K_n равномерно ограничена. Поэтому можно выделить подпоследовательности, такие что $h_{n_k} \to h^* \in S_1(0)$, с учетом компактности сферы $S_1(0)$, и $y_{n_k} \to y^* \in C$, с использованием Предположения 5.4 из [7] и сходимости (5.6). Далее, поскольку в соответствии с Предложением 9.12 из [7]

$$\sup_{h\in S_1(0)} |\sigma_{C_n}(h) - \sigma_C(h)| = h_\rho(C_n, C) \leq \varepsilon_n,$$

то используя Предложение 9.11 из [7], получаем

$$|\sigma_n(h_n) - \sigma_C(h^*)| \leq |\sigma_{C_n}(h_n) - \sigma_C(h_n)| + |\sigma_C(h_n) + \sigma_C(h^*)| \leq$$

$$\leq \varepsilon_n - \|C\|\|h_n - h^*\| \to 0.$$

Переходя к пределу, получаем

$$\sigma_C(h^*) = \lim_{n_k\to\infty} \sigma_{C_n}(h_n) \leq \limsup_{n_k\to\infty}[\inf_{y\in B}\langle h_n, y\rangle] \leq \inf_{y\in B}\langle h^*, y\rangle; \tag{5.7}$$

последнее из неравенств в (5.7) имеет место, поскольку функция $h \mapsto \inf\limits_{y\in B}\langle h^*, y\rangle$ является полунепрерывной сверху. Выберем теперь в качестве сдвига $z_\delta = -\delta h^*$ для произвольного малого $\delta > 0$. Тогда

$$\sigma_{z_\delta + C}(h^*) = \sigma_C(h^*) + \langle z_\delta, h^*\rangle = \sigma_C(h^*) - \delta,$$

т.е. из (5.7)

$$\sigma_{z_\delta+C}(h^*) < \inf_{y\in B}\langle h^*, y\rangle - \delta,$$

и, стало быть, учитывая, что

$$z_\delta + C = z_\delta + \mathrm{conv}(K_t(\bar{x}_{t_1})) = \mathrm{conv}(z\delta + K_t(\bar{x}_{t-1})),$$

получаем: для любого $\delta > 0$

$$\mathrm{conv}(z_\delta + K_t(\bar{x}_{t-1}) \bigcap \mathrm{bar}(D_t(\bar{x}_{t-1}))) = \emptyset,$$

т.е. (SR) не выполняется.

2) Если выполняется условие (SGNSAUP), тогда найдется $y \in \mathrm{int}(\mathrm{conv}(K_t(\bar{x}_{t-1}))) \bigcap \mathrm{bar}(D_t(\bar{x}_{t-1}))$, а поскольку $y \in \mathrm{int}(\mathrm{conv}(K_t(\bar{x}_{t-1})))$, то для некоторого $\varepsilon > 0$ (зависящего от $\bar{x}_{t-1}$) шар $B_\varepsilon(y)$ содержится в $\mathrm{conv}(K_t(\bar{x}_{t-1}))$. Пусть $K'_t(\cdot)$ – «возмущенная» динамика рынка и $h_\rho(K_t(\bar{x}_{t-1}), K'_t(\bar{x}_{t-1})) = \delta < \varepsilon$. Тогда, с учетом Предложений 9.11 и 9.12 из [7], $h_\rho(\mathrm{conv}(K_t(\bar{x}_{t-1})), \mathrm{conv}(K'_t(\bar{x}_{t-1}))) \leq \delta$; используя Лемму 5.1, получаем $\mathrm{conv}(K'_t(\bar{x}_{t-1})) \supseteq B_{\varepsilon-\delta}(y)$, так что $y \in \mathrm{conv}(K'_t(\bar{x}_{t-1})) \bigcap \mathrm{bar}(D_t(\bar{x}_{t-1}))$, и по Теореме 4.1 условие $NDASUP$ выполняется для «возмущенной» динамики рынка. Таким образом, условие $RNDSAUP$ выполняется. Полноразмерность компактов $K_t(\cdot)$ очевидна.

Обратно, пусть выполнено условие $RNDSAUP$ и компакты $K_t(\cdot)$ полноразмерны. Если бы относительная внутренность $\mathrm{ri}(\mathrm{bar}(D_t(\cdot)))$ выпуклого конуса $\mathrm{bar}(D_t(\cdot))$ не пересекалась с $\mathrm{ri}(\mathrm{conv}(K_t(\cdot))) = \mathrm{int}(\mathrm{conv}(K_t(\cdot)))$, то по Теореме 11.3 из [25] выпуклые множества $\mathrm{conv}(K_t(\cdot))$ и $\mathrm{bar}(D_t(\cdot))$ можно было бы собственно разделить[48]. Поэтому, выбирая вектор нормали z разделяющей гиперплоскости, направленной в сторону[49] $\mathrm{conv}(K_t(\cdot))$, сколь угодно мало длины $\|z\|$, получаем, что

$$z + \mathrm{conv}(K_t(\cdot)) \bigcap \mathrm{bar}(D_t(\cdot)) = \emptyset,$$

что противоречит условию $RNDSAUP$ в соответствии с доказанным пунктом 1) данной теоремы, т.к. (SR) не выполняется. Таким образом, выполняется даже более сильное свойство, чем (SGNSAUP), а именно

$$\mathrm{int}(\mathrm{conv}(K_t(\cdot))) \bigcap \mathrm{ri}(\mathrm{bar}(D_t(\cdot))) \neq \emptyset.$$

□

Предложение 5.1. *В случае отсутствия торговых ограничений условие $RNDAO$ равносильно одновременному выполнению $NDAO$*

---

[48] В силу полноразмерности $K_t(\cdot)$ множество $\mathrm{conv}(K_t(\cdot))$ не может содержаться в разделяющей гиперплоскости.

[49] Т.е. $zy \geq 0$ для $y \in \mathrm{conv}(K_t(\cdot))$.

и (CEB). *Эти два условия равносильны одному условию*[50]

$$0 \in \mathrm{int}(\mathrm{conv}(K_t(\cdot))),\ t = 1, \ldots, N. \qquad \text{(GRNAO)}$$

Доказательство. В случае отсутствия торговых ограничений, т.е. когда $D_t(\cdot) = \mathbb{R}^n$, имеем $\mathrm{bar}(D_t(\cdot)) = \{0\}$. С учетом Замечания 4.1, условия $RNDAO$ и $RNDSAUP$ эквивалентны.

В свою очередь, условие $RNDSAUP$, по пункту 1) Теоремы 5.1, равносильно условию (SR), которое в случае отсутствия торговых ограничений влечет (CEB). Действительно, по условию (SR) имеем $\{z :\ z + \mathrm{conv}(K_t(\cdot)) \ni 0\} \supseteq B_\delta(0)$ для некоторого $\delta > 0$ (зависящего от предыстории цен), откуда $\mathrm{conv}(K_t(\cdot)) \supseteq B_\delta(0)$, т.е. выполняется (CEB). Таким образом, $RNDAO$, очевидно, влечет $NDAO$ и, как мы установили, (CEB).

Обратно, по Предложению 3.3 и Замечанию 3.4 при отсутствии торговых ограничений условие $NDAO$ равносильно (GNAO-NTC), т.е.

$$0 \in \mathrm{ri}(\mathrm{conv}(K_t(\cdot))) = \mathrm{int}(\mathrm{conv}(K_t(\cdot))),$$

где равенство выполняется в силу условия (CEB). В соответствии с пунктом 2) Теоремы 5.1, т.к. выполняется условие (SGNSAUP), условие $RNDSAUP$ выполняется, а как мы отмечали ранее, оно равносильно (при отсутствии торговых ограничений) условию $RNDAO$. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андронов А.А., Понтрягин Л.С. *Грубые системы* // Доклады Академии Наук СССР. 1937. Т. XIV, № 5, С. 247–250.

2. Благодатских В.И., Филиппов А.Ф. *Дифференциальные включения и оптимальное управление* // Тр. МИАН СССР. 1985. Т. 169. С 194–252.

[50] Акроним от “Geometric Robust condition of No deterministic Arbitrage Opportunities.”

3. Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В. *Многозначные отображения* // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анал. 1982. Т. 19. С. 127–230.

4. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. *Теория экстремальных задач.* М.: Издательство «Наука». 1974.

5. Лейхтвейс К. *Выпуклые множества.* Перевод с нем. М.: Издательство «Наука». 1985.

6. Реповш Д., Семенов П.В. *Теория Э. Майкла непрерывных селекций. Развитие и приложения* // Успехи математических наук. 1994. Т. 49, № 6(300). С. 151–190.

7. Половинкин Е.С. *Многозначный анализ и дифференциальные включения.* М.: Издательство «Наука». 2015.

8. Рохлин Д.Б. *Критерий отсутствия асимптотического бесплатного ленча на конечномерном рынке при выпуклых ограничениях на портфель и выпуклых операционных издержках* // Сибирский журнал индустриальной математики. 2002. Т. 1., № 9. С. 133–144.

9. Рохлин Д.Б. *Расширенная версия теоремы Даланга-Мортона-Виллинджера при выпуклых ограничениях на портфель* // Теория вероятн. и ее примен. 2004. Т. 49, № 3. С. 503–521.

10. Смирнов С.Н. *Гарантированный детерминистский подход к суперхеджированию: модель рынка, торговые ограничения, безарбитражность и уравнения Беллмана-Айзекса* // Математическая Теория Игр и ее Приложения. 2018. Т. 10. № 4 С. 59–99.

11. Ширяев А.Н. *Основы стохастической финансовой математики. Том 1. Факты. Модели.* М.: ФАЗИС, 1998.

12. Ширяев А.Н. *Основы стохастической финансовой математики. Том 2. Теория.* М.: ФАЗИС, 1998.

13. Cherny A. *General arbitrage pricing model: I–probability approach.* Séminaire de Probabilités XL. Springer, Berlin, Heidelberg, 2007. P. 415–445.

14. Dana R.A., Le Van C., Magnien F. *On the different notions of arbitrage and existence of equilibrium* // Journal of economic theory. 1999. V. 87. № 1. P. 169–193.

15. Delbaen F. *Representing martingale measures when asset prices are continuous and bounded* // Mathematical Finance. 1992. V. 2. № 2. P. 107–130.

16. Delbaen F., Schachermayer W. *A general version of the fundamental theorem of asset pricing* // Mathematische annalen. 1994. V. 300. № 1. P. 463–520.

17. Delbaen F., Schachermayer W. *The fundamental theorem of asset pricing for unbounded stochastic processes* // Mathematische annalen. 1998. V. 312. № 2. P. 215–250.

18. Harrison J.M., Kreps D.M. *Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets* // Journal of Economic theory. 1979. V. 20. № 3. P. 381–408.

19. Harrison J.M., Pliska S.R. *Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading* // Stochastic processes and their applications. 1981. V. 11., № 3. P. 215–260.

20. Jacod J., Shiryaev A.N. *Local martingales and the fundamental asset pricing theorems in the discrete-time case* // Finance And Stochastics. 1998. V. 2, № 3. P. 259–273.

21. Kreps D.M. *Arbitrage and equilibrium in economies with infinitely many commodities* // Journal of Mathematical Economics. 1981. V. 8. № 1. P. 15–35.

22. Kneser H. *Sur un theoreme fondamental de la theorie des jeux* // CR Acad. Sci. Paris. 1952. V. 234. P. 2418–2420.

23. Merton R.C. *Theory of rational option pricing* // The Bell Journal of Economics. 1973. V. 4, № 1. P. 141–183.

24. Pliska S.R. *Introduction to Mathematical Finance: Discrete Time Models.* Wiley, 1997.

25. Rockafellar R.T. *Convex Analysis.* Princeton: Princeton University Press, 1970.

26. Ross S.A. *A simple approach to the valuation of risky streams* //Journal of business. 1978. V. 51, № 3. P. 453–475.

A GUARANTEED DETERMINISTIC APPROACH TO SUPERHEDGING: NO ARBITRAGE MARKET CONDITION

Sergey N. Smirnov, Department of System Analysis, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University, Cand. Sc., associate professor (s.n.smirnov@gmail.com).

Abstract: For a discrete-time superreplication problem, a guaranteed deterministic formulation is considered: the problem is to ensure a complete coverage of the contingent claim on an option under all scenarios which are set using a priori defined compacts, depending on the price history: price increments at each moment of time must lie in the corresponding compacts. The market is considered with trading constraints and without transaction costs. The statement of the problem is game-theoretic in nature and leads directly to the Bellman – Isaacs equations. In this article, we study several notions that formalize the "no arbitrage" property of the market in the context of the deterministic approach and study their properties. A new concept of robustness (structural stability) of the "no arbitrage" properties of the market is introduced.

Keywords: guaranteed estimates, deterministic price dynamics, super-replication, option, arbitrage, absence of arbitrage opportunities, Bellman-Isaacs equations, multi-valued mapping, robustness, structural stability of the model.