Математическая Теория Игр и её Приложения, т.11, в.2, с. 3–18

УДК 519.83
ББК 22.18

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ БОНДАРЕВОЙ-ШЕПЛИ II. ПРИМЕРЫ V-СБАЛАНСИРОВАННЫХ НЕЧЕТКИХ ИГР

Валерий А. Васильев*
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН
630090, Новосибирск, пр. ак. Коптюга, 4
Новосибирский государственный университет
630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 2
e-mail: vasilev@math.nsc.ru

Заметка продолжает работу [2], посвященную обобщению известной теоремы Бондаревой-Шепли на случай нечетких кооперативных игр n лиц. Изучаются условия V-сбалансированности трех классов нечетких игр: 1) нечетких игр трансферабельных рынков [3], 2) игр, ассоциированных с линейно-производственными моделями [6] и 3) нечетких игр, порождаемых моделями рационального распределения общественных издержек при строительстве объектов транспортной инфраструктуры (так называемых airport games [5]). Помимо условий, гарантирующих непустоту ядер, дается также описание некоторых видов недоминируемых дележей этих игр. Для нечетких игр типа airport game такое описание является исчерпывающим.

Ключевые слова: нечеткая кооперативная игра, V-сбалансированность, ядро нечеткой кооперативной игры, нечеткая игра трансферабельного рынка, LP-игра, нечеткая игра «Аэропорт».

Поступила в редакцию: 06.10.18 *После доработки*: 20.04.19 *Принята к публикации*: 10.06.19

---

* Работа поддержана грантом РФФИ 16-06-00101.

1. Введение

Настоящая заметка является продолжением работы [2], посвященной обобщению известной теоремы Бондаревой-Шепли на случай нечетких TU кооперативных игр n лиц. В отличие от общих конструкций упомянутой работы, ниже рассматриваются примеры конкретных нечетких кооперативных игр, имеющих важное значение в социально-экономических приложениях. Исследуются условия непустоты ядер нечетких игр, порожденных трансферабельными рынками [3], линейно-производственными моделями [6] и задачами рационального распределения общественных издержек при финансировании объектов транспортной инфраструктуры [5,7]. К числу основных результатов относится доказательство V-сбалансированности соответствующих обобщенных характеристических функций при тех же условиях, которые обеспечивают сбалансированность стандартных игр рынка и линейно-производственных игр. Что касается нечетких игр, являющихся аналогами известных в литературе airport games [5,7], то здесь, помимо сбалансированности, удается получить полное описание недоминируемых дележей всех таких нечетких игр.

Работа состоит из пяти разделов. Помимо введения (раздел 1) и секции, где излагаются необходимые понятия и обозначения (раздел 2), имеется три основных раздела, посвященных рассмотрению вышеперечисленных классов нечетких кооперативных игр. В разделе 3 устанавливаются условия V-сбалансированности нечетких игр, порождаемых трансферабельными рынками. В разделе 4 дается доказательство V-сбалансированности нечетких игр, характеризующих эффективность кооперации в линейно-производственных моделях. Последний, пятый раздел, содержит обоснование сбалансированности нечеткой игры «Аэропорт» (airport game) и описание анти-ядра этой игры в самом общем виде.

2. Основные понятия и обозначения

Далее предполагается, что совокупность игроков составляет n-элементное множество $N = \{1, \ldots, n\}$. Важную роль в рассматриваемых задачах играют так называемые нечеткие коалиции игроков из N. Напомним определение этих коалиций. Обозначим через I^N единичный гиперкуб: $I^N = \{\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n) \in \mathbf{R}^N \mid \tau_i \in [0,1],\, i \in N\}$.

Согласно [4] совокупность σ_F нечетких коалиций, определенных на множестве N, задается формулой $\sigma_F = I^N \setminus \{0\}$. Компонента τ_i нечеткой коалиции $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$ указывает степень участия игрока i в «большой коалиции» N (см., например, [4]). Напомним также [4], что каждая стандартная коалиция $S \subseteq N$ отождествляется с ее индикаторной функцией $e_S \in I^N$, определяемой по формуле: $(e_S)_i = 1$ для $i \in S$, и $(e_S)_i = 0$ для $i \in N \setminus S$. Далее, для каждой $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n) \in \sigma_F$ через $N(\tau)$ будем обозначать носитель нечеткой коалиции $\tau : N(\tau) = \{i \in N \mid \tau_i > 0\}$. Как обычно, для вектора $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^N$ и множества $S \subseteq N$ через $x_S \in \mathbf{R}^S$ обозначается сужение x на S : $(x_S)_i = x_i$, $i \in S$. Для сужения нечеткой коалиции τ на ее носитель $N(\tau)$ будем использовать сокращение $\tau^+ := \tau_{N(\tau)}$. Следуя [4], будем применять обозначение $\mathbb{R}^\tau := \mathbb{R}^{N(\tau)}$. Наконец, через $x \cdot y$, как обычно, обозначается скалярное произведение векторов x, y.

В указанных обозначениях рассматриваемые далее игры определяются следующим образом (ср. с [4]).

Определение 2.1. *Нечеткой TU кооперативной игрой n лиц, порождаемой обобщенной характеристической функцией* $v : \sigma_F \to \mathbf{R}$, *будем называть многозначное отображение* $\tau \mapsto G_v(\tau)$, *сопоставляющее каждой нечеткой коалиции* τ *множество* $G_v(\tau)$ *достижимых ею дележей, определяемое формулой*

$$G_v(\tau) = \{x \in \mathbf{R}^\tau \mid \tau^+ \cdot x \le v(\tau)\}.$$

В дальнейшем нечеткие TU кооперативные игры G_v будем отождествлять с их характеристическими функциями v [1]. Кроме того, элементы множеств $G_v(\tau)$ будем называть *дележами* соответствующих коалиций; при этом дележи «большой коалиции» e_N будем называть, для краткости, *дележами игры* v. Напомним еще, что в литературе нечеткие TU кооперативные игры называются также *нечеткими кооперативными играми с побочными платежами.*

Следуя [2], перенесем понятие сбалансированного семейства обычных коалиций на случай нечетких коалиций: конечное семейство $\{\tau_k\}_{k \in K} \subseteq \sigma_F$ называется *F-сбалансированным* семейством, если су-

[1] По аналогии с обычными играми, функция v доопределяется в начале координат соотношением $v(0) = 0$.

ществуют числа $\lambda_k \geq 0$, $k \in K$, такие, что выполняется равенство

$$\sum_{k\in K} \lambda_k \tau_k = e_N. \tag{2.1}$$

По аналогии с классическим определением из [1], неотрицательные числа λ_k, фигурирующие в равенстве (2.1), будем называть *весами*, отвечающими семейству $\{\tau_k\}_{k\in K}$. Совокупность всех F-сбалансированных семейств нечетких коалиций обозначим через Σ_F.

Определение 2.2. *Нечеткую кооперативную игру $v : \sigma_F \to \mathbf{R}$ будем называть V-сбалансированной, если для любого F-сбалансированного семейства нечетких коалиций $\{\tau_k\}_{k\in K}$ и отвечающего ему набора весов λ_k, $k \in K$, выполняется неравенство*

$$\sum_{k\in K} \lambda_k v(\tau_k) \leq v(e_N). \tag{2.2}$$

Отметим, что неравенство (2.2) вполне аналогично неравенству, определяющему сбалансированность классических кооперативных игр [1].

Сформулируем основные понятия работы – определение блокирования в нечеткой игре v и понятие ядра этой игры [2].

Определение 2.3. *Будем говорить, что нечеткая коалиция τ блокирует дележ $x \in G_v(e_N)$, если существует дележ этой коалиции y такой, что $y_i > x_i$ для всех $i \in N(\tau)$.*

Определение 2.4. *Ядром нечеткой кооперативной игры v будем называть совокупность всех дележей этой игры, не блокируемых никакой коалицией $\tau \in \sigma_F$. Ядро игры v будем обозначать через $C(v)$.*

Описание блокирования в развернутой форме имеет следующий вид: нечеткая коалиция $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$ блокирует дележ $x = (x_i)_{i\in N} \in G_v(e_N)$, если существует вектор $y = (y_i)_{i\in N(\tau)} \in \mathbf{R}^\tau$ такой, что

$(b.1)$ $\sum\limits_{i\in N(\tau)} \tau_i y_i \leq v(\tau)$;

$(b.2)$ $y_i > x_i$, $i \in N(\tau)$.

Используя соотношения $(b.1)$ и $(b.2)$, нетрудно убедиться, что справедлив следующий аналог описания ядра классической кооперативной игры.

Предложение 2.1. [2] *Ядро $C(v)$ нечеткой кооперативной игры v совпадает с множеством решений бесконечной системы линейных неравенств*

$$C(v) = \{x \in \mathbf{R}^N \mid e_N \cdot x = v(e_N),\ \tau \cdot x \geq v(\tau), \quad \tau \in \sigma_F\}. \tag{2.3}$$

Применяя предложение 2.1 и теорему двойственности линейного программирования, удается получить следующий аналог теоремы Бондаревой-Шепли [1,8], дающий критерий непустоты ядра нечеткой кооперативной игры с побочными платежами (доказательство см. в [2]).

Теорема 2.1. [2] *Ядро $C(v)$ нечеткой кооперативной игры v с побочными платежами непусто тогда и только тогда, когда характеристическая функция v является V-сбалансированной.*

3. Нечеткая игра трансферабельного рынка

Трансферабельный рынок (рынок с трансферабельной полезностью в терминологии [3]) определяется следующим набором параметров

$$\mathcal{E} =< N, \{\widehat{X}_i, \widehat{w}^i, \widehat{u}_i\}_{i\in N} >, \tag{3.1}$$

где $N = \{1, \ldots, n\}$ – множество экономических агентов, а $\widehat{X}_i = \mathbb{R}^l_+ \times \mathbb{R}$, $\widehat{w}^i = (w^i, 0) \in \mathbb{R}^l_+ \times \mathbb{R}$ и $\widehat{u}_i(x,\zeta) = u_i(x) + \zeta$ – их потребительские множества, начальные запасы и функции полезности, соответственно. Последняя компонента ζ набора $\widehat{x} = (x, \zeta) \in \mathbb{R}^l_+ \times \mathbb{R}$ указывает количество денег в этом наборе, а функция $u_i : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}$ измеряет полезность «товарной» составляющей x в наборе $\widehat{x}$ («товарные» составляющие в наборах $\widehat{w}^i$ определяются векторами $w^i \in \mathbb{R}^l_+$). Таким образом, речь идет о рынке с функциями полезности, значения которых измеряются в единой денежной шкале При этом допускается свободный обмен денег внутри любой из возможных коалиций $S \subseteq N$ (дальнейшие подробности, касающиеся интерпретации модели можно найти, например, в [3,7]).

Напомним [3], что кооперативная игра $v_{\mathcal{E}}$ рынка $\mathcal{E}$ определяется формулой

$$v_{\mathcal{E}}(S) = \sup\ \{\sum_{i\in S} u_i(x^i) \mid (x^i)_{i\in S} \in X_{\mathcal{E}}(S)\}, \quad S \subseteq N,$$

где

$$X_{\mathcal{E}}(S) = \{(x^i)_{i\in S} \in (\mathbb{R}^l_+)^S \mid \sum_{i\in S} x^i = \sum_{i\in S} w^i\}.$$

Рассмотрим следующее продолжение $v^f_{\mathcal{E}}$ функции $v_{\mathcal{E}}$ на множество нечетких коалиций σ_F

$$v^f_{\mathcal{E}}(\tau) = \sup\,\{\sum_{i\in N(\tau)} \tau_i u_i(x^i) \mid (x^i)_{i\in N(\tau)} \in X_{\mathcal{E}}(\tau)\}, \quad \tau\in\sigma_F, \qquad (3.2)$$

где

$$X_{\mathcal{E}}(\tau) = \{(x^i)_{i\in N(\tau)} \in \prod_{i\in N(\tau)} X_i \mid \sum_{i\in N(\tau)} \tau_i x^i = \sum_{i\in N(\tau)} \tau_i w^i\}, \quad \tau\in\sigma_F. (3.3)$$

Определение 3.1. *Функцию $v^f_{\mathcal{E}}$, определенную формулами* (3.2),(3.3) *будем называть нечеткой игрой рынка $\mathcal{E}$.*

Приведем условия, гарантирующие V-сбалансированность игры $v^f_{\mathcal{E}}$.

Предложение 3.1. *Если функции u_i непрерывны и вогнуты, то нечеткая игра рынка $v^f_{\mathcal{E}}$ является V-сбалансированной.*

Доказательство. Отметим сразу же, что в силу неотрицательности векторов w^i, $i\in N$, каждое множество $X(\tau)$, $\tau\in\sigma$, будучи совокупностью решений системы линейных уравнений и неравенств

$$\sum_{i\in N(\tau)} \tau_i x^i_r = \sum_{i\in N(\tau)} \tau_i w^i_r, \quad x^i_r \ge 0,\ i\in N(\tau),\, r=1,\dots,l,$$

является непустым замкнутым множеством. Далее, в силу неравенств

$$0 \le x^j_r \le \sum_{i\in N(\tau)} \tau_i w^i_r/\tau_j,\ j\in N(\tau),\, r=1,\dots,l,$$

все множества $X(\tau)$, $\tau\in\sigma_F$, являются ограниченными. Таким образом, для каждого $\tau\in\sigma_F$ совокупность коалиционных распределений $X(\tau)$ является непустым ограниченным замкнутым множеством. Но тогда, ввиду компактности этих множеств и непрерывности функций u_i, для каждой коалиции τ существует распределение $x(\tau) = (x^i(\tau))_{i\in N(\tau)} \in X(\tau)$ такое, что

$$v^f_{\mathcal{E}}(\tau) = \sum_{i\in N(\tau)} \tau_i u_i(x^i(\tau)), \quad \tau\in\sigma_F.$$

Рассмотрим произвольное сбалансированное семейство $\{\tau_k\}_{k\in K}$ и отвечающую ему систему весов $\{\lambda_k\}_{k\in K}$. Согласно вышесказанному, для каждого $k \in K$ существует распределение $x(\tau_k) = (x^i(\tau_k))_{i\in N(\tau_k)} \in X(\tau_k)$ такое, что

$$v^f_{\mathcal{E}}(\tau_k) = \sum_{i\in N_k} \tau_{ki} u_i(x^{ki}), \quad k \in K, \tag{3.4}$$

где $N_k = N(\tau_k)$, $x^{ki} = x^i(\tau_k)$ и $\tau_{ki} = (\tau_k)_i$. Умножая равенства (3.4) на соответствующие балансирующие коэффициенты λ_k, и суммируя левые и правые части, получаем

$$\sum_{k\in K} \lambda_k v^f_{\mathcal{E}}(\tau_k) = \sum_{k\in K} \lambda_k (\sum_{i\in N_k} \tau_{ki} u_i(x^{ki})). \tag{3.5}$$

Далее, вводя обозначения $\mu_{ki} = \lambda_k \tau_{ki}$, $i \in N_k$, $k \in K$, определим наборы

$$\bar{x}^i = \sum_{k\in K_i} \mu_{ki} x^{ki}, \quad i \in N, \tag{3.6}$$

где $K_i = \{k \in K \mid i \in N_k\}$, $i \in N$. Убедимся, что распределение $\bar{x} = (\bar{x}^i)_{i\in N}$ принадлежит множеству $X(e_N)$. Складывая равенства (3.6) и меняя порядок суммирования, получаем соотношения

$$\sum_{i\in N} \bar{x}^i = \sum_{i\in N} \sum_{k\in K_i} \mu_{ki} x^{ki} = \sum_{k\in K} \sum_{i\in N_k} \mu_{ki} x^{ki} = \sum_{k\in K} \lambda_k (\sum_{i\in N_k} \tau_{ki} x^{ki}). \tag{3.7}$$

Поскольку распределения $(x^{ki})_{i\in N_k}$ по построению принадлежат $X(\tau_k)$ для каждого $k \in K$, последняя сумма в цепочке (3.7), согласно формуле (3.3) удовлетворяет равенству

$$\sum_{k\in K} \lambda_k (\sum_{i\in N_k} \tau_{ki} x^{ki}) = \sum_{k\in K} \lambda_k (\sum_{i\in N_k} \tau_{ki} w^i).$$

Отсюда, еще раз используя (3.7) и соотношения $\mu_{ki} = \lambda_k \tau_{ki}$, $k \in K$, $i \in N_k$, получаем

$$\sum_{i\in N} \bar{x}^i = \sum_{k\in K} \lambda_k (\sum_{i\in N_k} \tau_{ki} w^i) = \sum_{i\in N} (\sum_{k\in K_i} \mu_{ki} w^i). \tag{3.8}$$

Из того, что веса λ_k являются балансирующими для семейства $\{\tau_k\}_{k\in K}$, вытекают равенства

$$\sum_{k\in K_i} \mu_{ki} = \sum_{k\in K_i} \lambda_k \tau_{ki} = 1, \quad i \in N. \tag{3.9}$$

Значит, объединяя цепочки равенств (3.8) и (3.9), имеем: $\sum\limits_{i\in N} \bar{x}^i = \sum\limits_{i\in N} w^i$, что и завершает доказательство включения $\bar{x} = (\bar{x}^i)_{i\in N} \in X(e_N)$.

Далее, учитывая неотрицательность чисел μ_{ki} и соотношения (3.6) и (3.9), получаем: для каждого $i \in N$ набор $\bar{x}^i$ является выпуклой комбинацией наборов x^{ki}, $k \in K_i$. Отсюда, с учетом вогнутости функций u_i, имеем

$$u_i(\bar{x}^i) \geq \sum_{k\in K_i} \mu_{ki} u_i(x^{ki}), \quad i \in N.$$

Суммируя эти неравенства и учитывая соотношения (3.4), (3.5) и равенства $\mu_{ki} = \lambda_k \tau_{ki}$, $i \in N_k$, $k \in K$, получаем

$$v^f_{\mathcal{E}}(e_N) \geq \sum_{i\in N} u_i(\bar{x}^i) \geq \sum_{i\in N} \sum_{k\in K_i} \mu_{ki} u_i(x^{ki}) =$$
$$= \sum_{k\in K} \lambda_k \sum_{i\in N_k} \tau_{ki} u_i(x^{ki}) = \sum_{k\in K} \lambda_k v^f_{\mathcal{E}}(\tau_k),$$

что и доказывает требуемое неравенство

$$v^f_{\mathcal{E}}(e_N) \geq \sum_{k\in K} \lambda_k v^f_{\mathcal{E}}(\tau_k).$$

$\square$

На основании теоремы 2.1 и предложения 3.1 получаем следующую теорему об условиях непустоты ядра нечеткой кооперативной игры трансферабельного рынка (3.1).

Теорема 3.1. *Если функции полезности u_i, $i \in N$, непрерывны и вогнуты, то ядро $C(v^f_{\mathcal{E}})$ нечеткой игры $v^f_{\mathcal{E}}$ трансферабельного рынка $\mathcal{E}$ непусто.*

4. Нечеткая игра «Инвесторы»

Ниже устанавливается, что ядро нечеткой игры «Инвесторы», являющейся продолжением на нечеткие коалиции известной LP-игры [6], непусто при тех же условиях, что и ядро самой LP-игры. Согласно [6], LP-игра $v_{(A,b,c)}$ определяется ее технологической $l \times m$-матрицей $A = (a^j)_{j=1}^m$, набором ресурсов $b^i \in \mathbb{R}^l$, $i \in N = \{1, \ldots, n\}$, имеющихся у инвесторов $i \in N$, и вектором $c = (c_1, \ldots, c_m)$, характеризующим величину прибыли, получаемой при единичной интенсивности использования производственных способов a^j, $j \in M = \{1, \ldots, m\}$. При этом компоненты a_k^j вектора a^j указывают производственные издержки продукта $k \in L = \{1, \ldots, l\}$ при выпуске единицы продукта $j \in M$. При объединении ресурсов какой - либо частью инвесторов $S \subseteq N$, максимальный доход от использования технологии, описываемой матрицей A и вектором c, определяется формулой

$$v_{(A,b,c)}(S) = \sup\,\{c \cdot x \mid Ax \leq \sum_{i \in S} b^i,\, x \geq 0\}, \quad S \subseteq N. \tag{4.1}$$

Известно [6], что при неотрицательности матрицы A и векторов b^i ядро игры $v_{(A,b,c)}$ непусто. Далее устанавливается, что эти же условия гарантируют непустоту ядра и для следующей «фаззификации» $v^f_{(A,b,c)}$ игры $v_{(A,b,c)}$ (называемой в дальнейшем нечеткой игрой «Инвесторы»)

$$v^f_{(A,b,c)}(\tau) = \sup\,\{c \cdot x \;\Big|\; Ax \leq \sum_{i \in N} \tau_i b^i,\, x \geq 0\}, \quad \tau \in \sigma_F \tag{4.2}$$

(другими словами, предполагается, что нечеткая коалиция $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$ располагает ресурсами в объеме $\sum\limits_{i \in N} \tau_i b^i$).

Согласно теореме 2.1, для доказательства непустоты ядра игры $v^f_{(A,b,c)}$ при вышеуказанных условиях достаточно убедиться, что эти условия гарантируют V-сбалансированность игры «Инвесторы».

Предложение 4.1. *Если $A \geq 0$ и $b^i \geq 0$ для каждого $i \in N$, то нечеткая игра $v^f_{(A,b,c)}$ является V-сбалансированной.*

Доказательство. Прежде всего отметим, что в условиях предложения 4.1 множество допустимых решений задачи

$$c \cdot x \to \max$$

$$Ax \le \sum_{i\in N} \tau_i b^i, \qquad (A_\tau)$$
$$x \ge 0$$

непусто и компактно для каждой коалиции $\tau \in \sigma_F$.

Рассмотрим произвольное F-сбалансированное семейство $\{\tau_k\}_{k\in K}$ и отвечающую ему систему весов $\{\lambda_k\}_{k\in K}$. Учитывая разрешимость задач (A_τ), получаем: для каждого $k \in K$ существует допустимое решение $x_{(k)}$ задачи (A_{τ_k}) такое, что

$$v^f_{(A,b,c)}(\tau_k) = c \cdot x_{(k)}. \qquad (4.3)$$

Построим вектор $\bar{x}$ по формуле

$$\bar{x} = \sum_{k\in K} \lambda_k x_{(k)}. \qquad (4.4)$$

Ясно, что в силу неотрицательности весов λ_k вектор $\bar{x}$ неотрицателен и, согласно условиям (A_τ) и (4.4), удовлетворяет соотношениям

$$A\bar{x} = \sum_{k\in K} \lambda_k A x_{(k)} \le \sum_{k\in K} \lambda_k b(\tau_k) = b(e_N), \qquad (4.5)$$

где

$$b(\tau) = \sum_{i\in N} \tau_i b^i \quad \text{при} \quad \tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n) \in \sigma_F.$$

Понятно, что в проверке нуждается только последнее равенство в цепочке (4.5). Меняя порядок суммирования в предпоследнем выражении из (4.5), и полагая $\tau_k = (\tau_{k1}, \ldots, \tau_{kn})$, получаем

$$\sum_{k\in K} \lambda_k b(\tau_k) = \sum_{k\in K} \lambda_k \sum_{i\in N} \tau_{ki} b^i = \sum_{i\in N} \sum_{k\in K} \lambda_k \tau_{ki} b^i.$$

Отсюда, с учетом равенств $\sum\limits_{k\in K} \lambda_k \tau_{ki} = 1,\ i \in N$, вытекающих из соотношения $\sum\limits_{k\in K} \lambda_k \tau_k = e_N$, получаем требуемое: $\sum\limits_{k\in K} \lambda_k b(\tau_k) = b(e_N)$. Следовательно, вектор $\bar{x}$ является допустимым решением задачи (A_{e_N}). Далее, в силу соотношений (4.3) и (4.4) имеем

$$c \cdot \bar{x} = \sum_{k\in K} \lambda_k c \cdot x_{(k)} = \sum_{k\in K} \lambda_k v^f_{(A,b,c)}(\tau_k).$$

Значит, ввиду неравенства $c \cdot \bar{x} \le v^f_{(A,b,c)}(e_N)$, вытекающего из формулы (4.2), имеем требуемое соотношение $\sum\limits_{k\in K} \lambda_k v^f_{(A,b,c)}(\tau_k) \le v^f_{(A,b,c)}(e_N)$, что и завершает доказательство V-сбалансированности нечеткой игры $v^f_{(A,b,c)}$. $\square$

На основании теоремы 2.1 и предложения 4.1 получаем следующую теорему об условиях непустоты ядра нечеткой игры $v^f_{(A,b,c)}$.

Теорема 4.1. *Если $A \ge 0$ и $b^i \ge 0$ для каждого $i \in N$, то ядро нечеткой игры $v^f_{(A,b,c)}$ непусто.*

Замечание 4.1. Если через y^*_τ обозначить решение задачи

$$\begin{gathered} b(\tau)\cdot y \to \min \\ a^j \cdot y \ge c_j, \quad j \in M, \\ y \ge 0, \end{gathered} \tag{A^*_τ}$$

двойственной к задаче (A_τ), то при $\tau = e_N$ дележ $u^* = (u^*_1, \dots, u^*_n)$, где $u^*_i = b^i \cdot y^*_{e_N}$, $i \in N$, принадлежит ядру $C(v^f_{(A,b,c)})$. Проверка осуществляется по той же схеме, что и для включения $u^* \in C(v_{(A,b,c)})$, установленного в [6] (напомним, что $v_{(A,b,c)}$ определяется формулой (4.1)). Именно, ввиду того, что $y^* = y^*_{e_N}$ является допустимым решением каждой двойственной задачи (A^*_τ), $\tau \in \sigma_F$, получаем: для каждой нечеткой коалиции $\tau \in \sigma_F$, справедливы соотношения

$$u^* \cdot \tau = \Big(\sum_{i\in N} \tau_i b^i\Big) \cdot y^* \ge \min\ \{b(\tau)\cdot y \big|\ a^j \cdot y \ge c_j,\ j \in M; \quad y \ge 0\} \tag{4.6}$$

В силу теоремы двойственности имеем: $v^f_{(A,b,c)}(\tau) = a^*(\tau)$ для каждого $\tau \in \sigma_F$, где

$$a^*(\tau) = \min\{b(\tau)\cdot y \big|\ a^j \cdot y \ge c_j,\ j \in M; \quad y \ge 0\}.$$

Отсюда, на основании неравенства (4.6) получаем $u^* \cdot \tau \ge v^f_{(A,b,c)}(\tau)$ для всех $\tau \in \sigma_F$, что, ввиду равенств $v^f_{(A,b,c)}(e_N) = a^*(e_N) = b(e_N) \cdot y^* = u^* \cdot e_N$, и означает справедливость проверяемого включения $u^* \in C(v^f_{(A,b,c)})$.

5. Нечеткая игра «Аэропорт»

Имеется n авиакомпаний, объединяющих свои ресурсы для строительства взлетно-посадочной полосы (ВПП) нового аэропорта. Компании располагают самолетами, требующими ВПП длины a_i, $i \in N$, где $N = \{1, \ldots, n\}$ – совокупность упомянутых авиакомпаний. Положим $A = \{a_i \big| \ i \in N\}$ и будем считать, для определенности, что $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Предполагается, для простоты, что издержки на строительство указанных полос совпадают с величинами a_i, $i \in N$. Обозначим через v_A функцию издержек, необходимых для строительства полос, способных обслуживать самолеты всех типов, представленных в коалициях $S \subseteq N$:

$$v_A(S) = \max\,\{a_i \big| \ i \in S\}, \quad S \subseteq N. \tag{5.1}$$

Ясно, что $v_A(N) = a_n$. При этом одна из задач определения коалиционно-стабильного распределения издержек a_n на строительство полосы, способной обслуживать всех участников $i \in N$, состоит в отыскании элемента «анти-ядра» $C^-(v_A)$ игры v_A, где

$$C^-(v_A) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid \sum_{i \in N} x_i = a_n,\ \sum_{i \in S} x_i \leq v_A(S), \quad S \subseteq N\} \tag{5.2}$$

(подробности, касающиеся игры v_A, см. в [5,7]).

Известно [5], что анти-ядро $C^-(v_A)$ непусто при любом выборе положительных чисел a_i (нетрудно проверить, что оно всегда содержит дележи $(0, 0, \ldots, a_n)$ и $(a_1, a_2 - a_1, \ldots, a_n - a_{n-1})$). Рассмотрим один из вариантов конкретизации выбора из множества $C^-(v_A)$, состоящий в некоторой естественной «фаззификации» v_A^f игры v_A, и последующем выборе дележа из более узкого анти-ядра игры v_A^f. Именно, введем продолжение v_A^f функции v_A (заданной правилом (5.1)) на σ_F, определяемое формулой

$$v_A^f(\tau) = \max\,\{\tau_i a_i \ \mid i \in N(\tau)\}, \quad \tau \in \sigma_F. \tag{5.3}$$

Учитывая специфику задачи рационального распределения издержек (не прибыли!), определим понятие доминирования на множестве допустимых дележей $G_A^-(e_N) = G_{v_A^f}^-(e_N) = \{x \in \mathbb{R}^N \big| \ \sum\limits_{i \in N} x_i \geq a_n\}$.

Определение 5.1. *Будем говорить, что нечеткая коалиция* $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$ *доминирует дележ* $x = (x_1, \dots, x_n) \in G_A^-(e_N)$, *если существует вектор* $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^\tau$ *такой, что*

(c.1) $\sum\limits_{i \in N(\tau)} \tau_i y_i \geq v_A^f(\tau)$;

(c.2) $y_i < x_i, \quad i \in N(\tau)$.

Определение 5.2. *Анти-ядром нечеткой кооперативной игры* v_A^f *будем называть совокупность всех дележей этой игры, не доминируемых никакой коалицией* $\tau \in \sigma_F$. *Анти-ядро игры* v_A^f *будем обозначать через* $C^-(v_A^f)$.

Нетрудно убедиться, что анти-ядро $C^-(v_A^f)$ нечеткой игры v_A^f имеет представление, аналогичное описанию анти-ядра, стандартной игры v_A, данному формулой (5.2). Именно, справедлив следующий аналог (5.2):

$$C^-(v_A^f) = \{x \in \mathbb{R}^N \big| \; e_N \cdot x = v_A^f(e_N), \; \tau \cdot x \leq v_A^f(\tau), \quad \tau \in \sigma_F\}. \quad (5.4)$$

Применяя теорему 2.1 к нечеткой игре $v = -u$ и совершая необходимые элементарные преобразования, получаем, что анти-ядро нечеткой игры u непусто тогда и только тогда, когда для любого F-сбалансированного семейства нечетких коалиций $\{\tau_k\}_{k \in K}$ и отвечающего ему набора балансирующих весов $\{\lambda_k\}_{k \in K}$ выполняется неравенство

$$\sum_{k \in K} \lambda_k u(\tau_k) \geq u(e_N). \quad (5.5)$$

Проверяя выполнение этого критерия для нечеткой игры v_A^f, получаем: для любого сбалансированного семейства $\{\tau_k\}_{k \in K}$ и отвечающего ему семейства балансирующих весов $\{\lambda_k\}_{k \in K}$ выполняются соотношения (ниже используются обозначения $\tau_k = (\tau_{k1}, \dots, \tau_{kn})$, $k \in K$):

$$\sum_{k \in K} \lambda_k v_A^f(\tau_k) = \sum_{k \in K} \lambda_k a_{i(k)} \tau_{ki(k)},$$

где, согласно формуле (5.3), номера $i(k)$ для каждого $k \in K$ определяются из условий

$$a_{i(k)} \tau_{ki(k)} \geq a_i \tau_{ki}, \quad i \in N.$$

В частности, выполняются следующие соотношения

$$v_A^f(\tau_k) = a_{i(k)}\tau_{ki(k)} \geq a_n\tau_{kn}, \quad k \in K.$$

Умножая их на соответствующие веса λ_k и суммируя левые и правые части, получаем

$$\sum_{k\in K}\lambda_k v_A^f(\tau_k) = \sum_{k\in K}\lambda_k a_{i(k)}\tau_{ki(k)} \geq a_n(\sum_{k\in K}\lambda_k\tau_{kn}).$$

Отсюда, учитывая равенство $\sum\limits_{k\in K}\lambda_k\tau_k = e_N$, имеем требуемый вариант соотношения (5.5) для $u = v_A^f$:

$$\sum_{k\in K}\lambda_k v_A^f(\tau_k) \geq a_n = v_A^f(e_N).$$

Итак, анти-ядро нечеткой игры v_A^f непусто. Покажем, что оно состоит из единственного элемента (который и предлагается в качестве коалиционно-стабильного распределения общих издержек между участниками большой коалиции N). Именно, полагая $m_A = (0, 0, \ldots, a_n)$, убедимся, что справедлива формула

$$C^-(v_A^f) = \{\ m_A\ \}. \tag{5.6}$$

Поскольку, по определению, выполняется вложение $C^-(v_A^f) \subseteq C^-(v_A)$, для доказательства формулы (5.6) достаточно установить, что всякий элемент анти-ядра $C^-(v_A)$, имеющий хотя бы одну ненулевую компоненту с номером $k \neq n$, не принадлежит множеству $C^-(v_A^f)$. Итак, пусть дележ $x = (x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит анти-ядру $C^-(v_A)$, и в то же время $x_k \neq 0$ для некоторого $k \in N \setminus \{n\}$. Рассмотрим нечеткую коалицию $\tau^A = (\tau_1^A, \ldots, \tau_n^A)$, определяемую формулой

$$\tau_i^A = a_1/a_i, \quad i \in N.$$

Ясно, что $v_A^f(\tau^A) = a_1$. Значит, для нашей цели достаточно установить неравенство $\tau^A \cdot x > a_1$, доказывающее, что x не принадлежит анти-ядру $C^-(v_A^f)$. Переходя к установлению указанного неравенства, отметим, что все компоненты вектора x неотрицательны, что вытекает из соотношений $\sum\limits_{i\in N} x_i = a_n$, $\sum\limits_{j\in N\setminus\{i\}} x_j \leq v_A(N \setminus \{i\}) \leq$

a_n, $i \in N$ (напомним, что x принадлежит анти-ядру $C^-(v_A)$). Учитывая неотрицательность компонент векторов x и τ^A, получаем неравенство

$$\tau^A \cdot x = \sum_{i \in N \setminus \{n\}} x_i \frac{a_1}{a_i} + x_n \frac{a_1}{a_n} \geq \Big(\sum_{i \in N \setminus \{n\}} x_i \Big) \frac{a_1}{a_n} + x_n \frac{a_1}{a_n} = a_1. \qquad (5.7)$$

Поскольку $a_1/a_i > a_1/a_n$ для всех $i \in N \setminus \{n\}$ и, по предположению, одно из слагаемых суммы $\sum\limits_{i \in N \setminus \{n\}} x_i$ строго положительное (при том, что остальные неотрицательные), неравенство в соотношении (5.7) является строгим. Но неравенство $\tau^A \cdot x > v_A^f(\tau^A)$ в силу формулы (5.4) и означает, что x не принадлежит анти-ядру $C^-(v_A^f)$.

Суммируя вышесказанное, получаем следующее утверждение.

Теорема 5.1. *При любых значениях положительных чисел $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ нечеткая игра v_A^f является V^--сбалансированной, а ее анти-ядро состоит из единственного дележа $m_A = (0, 0, \ldots, a_n)$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бондарева О.Н. *Теория ядра для игры n лиц* // Вестник ЛГУ. Сер. мат., мех., астрон. 1962. V. 13. No. 3. С. 141–142.

2. Васильев В.А. *Аналог теоремы Бондаревой-Шепли I. Непустота ядра нечеткой игры* // Математическая теория игр и ее приложения. 2017. Т. 9, вып.1, С. 3–26.

3. Розенмюллер И. *Кооперативные игры и рынки.* М.: Мир, 1974.

4. Aubin J.-P. *Optima and equilibria.* Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag. 1993.

5. Littlechild S.C., Owen G. *A simple expression for the Shapley value in a special case* // Management Science. 1973. V. 20. P. 370–372.

6. Owen G. *On the core of linear production game* // Math. Programming. 1975. V.9. P. 358–370.

7. Peleg B., Sudhölter P. *Introduction to the Theory of Cooperative Games*. Boston/Dordrecht/London: Kluver Academic Publishers. 2003.

8. Shapley L.S. *On balanced sets and cores* // Naval Res. Logist. Quart. 1967. V. 14, No. 4. P. 453–460.

AN ANALOG OF BONDAREVA-SHAPLEY THEOREM II. EXAMPLES OF V-BALANCED FUZZY GAMES

Valery A. Vasil'ev, Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of RAS, Novosibirsk State University, Dr.Sc., professor (vasilev@math.nsc.ru)

Abstract: The article is devoted to modeling the system of coordination of private and public interests in promoting innovations in the organization. Subjects of controls of two levels (supervisor, agents) are taken into account. The relations between subjects are hierarchical. The algorithms for constructing equilibria in the games of Germeyer Γ_{1t}, Γ_{2t} are indicated. In the study the method of qualitatively representative strategies is used. The results of a number of simulation experiments and their analysis are given.

Keywords: fuzzy cooperative game, V-balanced-ness, the core of a fuzzy game, TU fuzzy market game, fuzzy LP-game, fuzzy airport game.