
**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ТЕОРИЯ ИГР
И ЕЁ
ПРИЛОЖЕНИЯ**

МТИ&П

ТОМ 11

ВЫПУСК 4

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИГР И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ

ОСНОВАН В 2009 г., ВЫХОДИТ ЕЖЕКВАРТАЛЬНО

издается под руководством **Отделения Математических Наук РАН**

Главный редактор

Л.А. ПЕТРОСЯН

Санкт-Петербургский

Государственный Университет

Зам. главного редактора

В.В. МАЗАЛОВ

Институт Прикладных

Математических Исследований

Карельский Научный Центр РАН

Ответственный редактор

Н.А. ЗЕНКЕВИЧ

Санкт-Петербургский

Государственный Университет

Выпускающий редактор

А.Н. РЕТТИЕВА

Институт Прикладных

Математических Исследований

Карельский Научный Центр РАН

Редакционная коллегия

Ф.Т. АЛЕСКЕРОВ

Высшая Школа

Экономики

Д.А. НОВИКОВ

Институт Проблем

Управления РАН

В.А. ВАСИЛЬЕВ

Институт Математики

им. С.Л. Соболева СО РАН

Ю.С. ОСИПОВ

Математический Институт

им. В.А. Стеклова РАН

А.А. ВАСИН

Московский

Государственный Университет

Г.А. УГОЛЬНИЦКИЙ

Южный

Федеральный Университет

А.Ф. КЛЕЙМЕНОВ

Институт математики

и механики УрО РАН

И.И. ШЕВЧЕНКО

Дальневосточный

Государственный Университет

Д. ЯНГ

Санкт-Петербургский

Государственный Университет

Е.Б. ЯНОВСКАЯ

Санкт-Петербургский Экономико-

Математический Институт РАН

Редакция, издатель журнала:

185910, Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11. тел. (8142)781108

e-mail: mgta@krc.karelia.ru

url: <http://mgta.krc.karelia.ru>

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИГР И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ

МТИ&П

ТОМ 11

ВЫПУСК 4

2019

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИГР

И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ

ОСНОВАН В 2009 г., ВЫХОДИТ ЕЖЕКВАРТАЛЬНО

издается под руководством **Отделения Математических Наук РАН**

Журнал «МТИ&П» публикует статьи, касающиеся теоретико-игрового анализа и методов оптимального управления для решения прикладных задач в экономике, экологии, политике и менеджменте. Теоретико-игровой подход обладает обширным потенциалом в социальных, экономических и политических задачах. С другой стороны сама теория игр может быть обогащена исследованиями реальных проблем принятия решений.

Целью публикаций задач стратегического анализа является поддержка взаимосвязи между математической теорией и приложениями. Публикуемые статьи содержат строгий анализ современных проблем и перспективы новых исследований. Журнал «МТИ&П» принимает статьи, связанные с теоретико-игровым подходом из всех областей применения в экономике, менеджменте, экологии и политике.

Важной задачей журнала является поощрение междисциплинарных взаимосвязей (математические и экономические науки, математические и биологические науки, математические и политические науки) и взаимодействия исследователей в области теории игр. Журнал «МТИ&П» приветствует не только статьи по теории игр и приложениям, но и технические заметки, комментарии, примеры, численный анализ, моделирование и вычислительные алгоритмы.

Редакция журнала:

185910, Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11. тел. (8142)781108.

e-mail: mgta@krc.karelia.ru

url: <http://mgta.krc.karelia.ru>

© КарНЦ РАН
© ИПМИ КарНЦ РАН
© ПМ-ПУ СПбГУ



К юбилею Российского математика Мазалова Владимира Викторовича

Мазалов Владимир Викторович родился 6 марта 1954 года в Магнитогорске. После окончания Ленинградского университета в 1979 году работал в Восточной Сибири, в Читинском институте природных ресурсов СО РАН, с 1994 года стал его директором. С 1999 года – организатор и первый директор Института прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН.

Мазалов В.В. широко известный в России и за рубежом специалист в области теории игр и исследования операций, автор более 200 научных работ в ведущих научных журналах, а также автор 7 монографий и учебных пособий. Основные научные результаты Мазалова В.В. относятся к теории игр и ее приложениям. Им был исследован широкий класс динамических и эволюционных игр, возникающих в задачах экологии поведения животных и разработаны методы нахождения равновесия в таких играх. Предложенные модели позволяют понять эволюцию ряда важных аспектов поведения животных, таких, как миграция, конкуренция за ресурсы, выбор партнера и фуражирование. Им разработан принципиально новый подход управления биологическими популяциями на основе выделения охраняемой территории.

Предложены новые теоретико-игровые методы в задачах анализа структуры информационно-коммуникационных систем. Показано, что для определения мер центральности вершин и ребер графа эффективно использовать теоретико-игровые меры, связанные с данным графом. Задача кластеризации сетей представлена как коалиционная игра, в которой ищется устойчивое по Нэшу коалиционное разбиение. Разработан новый метод кластеризации на основе методов потенциальных игр. Предложены разные типы потенциалов, которые приводят к построению устойчивого коалиционного разбиения. Показано, что данный потенциальный метод эквивалентен методу максимального правдоподобия, если сеть моделируется случайным графом. Разработаны теоретико-игровые модели рынков телекоммуникационных услуг: для рынка мобильной связи и для рынка облачных вычислений.

Мазалов В.В. – председатель Российского общества исследования операций (ruors.ru), с 2016 года — президент Международного общества динамических игр (ISDG). Руководитель ряда научных проектов, поддержанных Отделением математических наук РАН, РФФИ, РГНФ, ИНТАС, Швейцарским научным фондом, Шведским институтом, Японским фондом развития науки, Академией наук Финляндии.

Мазалов В.В. – член редколлегии математических журналов: «Scientiae Mathematicae Japonica», «International Game Theory Review», «Operations Research and Decisions», «Journal of Algebra and Applied Mathematics», «Journal of Dynamics & Games», «Управление большими системами», «Математическая теория игр и ее приложения», является соредактором ежегодника «Game Theory and Applications» (Nova Science Publishers) и серии «Modeling and Optimization in Science and Technologies» (Springer).

Он ведет большую преподавательскую работу не только в Петрозаводском университете, но и в университетах г. Оулу (Финляндия), г. Йёнчёпинг (Швеция), г. Циндао (Китай). Среди его учеников 24 кандидата и один доктор наук.

**Члены Редакционной коллегии поздравляют
Владимира Викторовича с его Юбилеем
и желают ему творческих успехов!**

УДК 517.97

ББК 22.18

ИГРА ПРЕСЛЕДОВАНИЯ-УБЕГАНИЯ НА РЕБЕРНОМ ОСТОВЕ ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОГРАННИКОВ.

III*

АБДУЛЛА А. АЗАМОВ

АТАМУРАТ Ш. КУЧКАРОВ

АЗАМАТ Г. ХОЛБОЕВ

Институт математики

100170, Узбекистан, Ташкент, ул. Мирзо Улугбек, 81

e-mail: abdulla.azamov@gmail.com, azamatholboyev@gmail.com

Продолжено решение задачи качества для игры между группой из n преследователей и одним убегающим, движущимся по графу реберного остова правильного многогранника с одинаковой максимальной скоростью. В этой части рассмотрены случаи правильных многогранников с 24 и 120 вершинами в пространстве $\mathbb{R}^4$. Доказано, что если $n \leq 2$, то игра заканчивается в пользу убегающего, а при $n \geq 3$ – в пользу группы преследователей.

Ключевые слова: игра преследования-убегания, задача сближения, задача уклонения, позиционная стратегия, контрстратегия, точная поимка, правильный 24-вершинник, правильный 120-вершинник, одномерный остов.

Поступила в редакцию: 16.01.19 *После доработки:* 25.04.19 *Принята к публикации:* 10.06.19

* Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета по координации развития науки и технологий РУз (грант № ОТ-Ф4-84)

1. Введение

В этой части будет продолжено решение задачи качества для игры преследования-убегания по графу, состоящему из одномерного остова, т.е. из ребер правильных многогранников ([5], глава 22 и [4], глава 12). Случай многогранников в $\mathbb{R}^3$, а также симплекса, куба и кокуба в $\mathbb{R}^d$, $d \geq 4$, были разобраны в первых двух частях статьи [1, 2] (о постановке задач см. [1]). Первоначально авторы предполагали рассмотреть в этой части оставшиеся три многогранника в $\mathbb{R}^4$ – так называемые 24, 120 и 600-вершинники, которые будут обозначены M_{24} , M_{120} , M_{600} , соответственно. Решение задачи для M_{24} не сложнее, чем для додекаэдра, но случаи M_{120} , M_{600} оказались намного сложнее, чем казалось первоначально. В связи с этим, в этой статье будут разобраны случаи M_{24} и M_{120} , а случай 600-вершинника будет рассмотрен отдельно.

Таким образом, основной результат этой части состоит в доказательстве равенств $N(M_{24}) = N(M_{120}) = 3$, где $N(M)$ – минимальное число преследователей, достаточных для поимки убегающего на графе M .

2. Графометрия правильных многогранников M_{24} и M_{120}

Прежде чем приступить к доказательству теоремы, обсудим строение графов, состоящих из одномерных остовов многогранников M_{24} и M_{120} (эти обозначения сохраняются и для соответствующих графов).

M_{24} конструктивно есть выпуклая оболочка 24 своих вершин с координатами $(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$, $(\pm 2, 0, 0, 0)$, $(0, \pm 2, 0, 0)$, $(0, 0, \pm 2, 0)$ и $(0, 0, 0, \pm 2)$ (при всевозможных комбинациях знаков). Из каждой вершины выходят по 8 ребер, вторые концы которых образуют трехмерный куб, а общее число ребер равняется 96.

M_{120} конструктивно есть выпуклая оболочка вершин трех типов: 16 точек с координатами $(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$, 8 точек с координатами $(\pm 2, 0, 0, 0)$, $(0, \pm 2, 0, 0)$, $(0, 0, \pm 2, 0)$, $(0, 0, 0, \pm 2)$ (эти 24 точки образуют M_{24}) и еще 96 точек, которые получаются из наборов $(\pm \tau, \pm 1, \pm \tau^{-1}, 0)$ при всевозможных комбинациях знаков и четных перестановках координат ($\tau = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ – отношение «золотого сечения»). Из каждой вершины выходят по 12 ребер, вторые концы которых

образуют икосаэдр.

Какие вершины соединены ребром однозначно определяется длиной ребер. А именно, если A и B – вершины, то AB есть ребро тогда и только тогда, когда $|AB|$ равно 2 в случае M_{24} и $2\tau^{-1}$ в случае M_{120} . Этим условием графы M_{24} и M_{120} полностью определяются.

Помимо евклидовой метрики на этих графах, посредством которой определены длины ребер, будем пользоваться и метрикой графа, когда за единицу измерения принимается длина ребра, а за расстояние между точками – длина наименьшего пути, соединяющего эти точки.

В наших рассуждениях существенную роль играют изображения графов M_{24} и M_{120} . С многогранником M_{24} проблем нет, но в отличие от него изобразить граф M_{120} непросто. В литературе обычно приводится изображение в виде симметричной розетки ([4], рис. 12.5.6.2), но такое изображение для нашей цели совсем не подходит – M_{120} имеет 720 ребер.

В связи с этим, мы будем пользоваться другим, послойным изображением. При таком изображении, например, обычный трехмерный куб $|x_i| \leq 1, i = 1, 2, 3$, представляется в виде графа из 4 слоев: самый верхний и самый нижний слой состоят из вершин $(1, 1, 1), (-1, -1, -1)$, соответственно, второй слой – из вершин $(-1, 1, 1), (1, -1, 1)$ и $(1, 1, -1)$, еще один слой – из вершин $(1, -1, -1), (-1, 1, -1)$ и $(-1, -1, 1)$. Уровень слоев определяется «потенциалом» $x_1 + x_2 + x_3$.

В случае многогранников M_{24} и M_{120} для послойного изображения «потенциал» окажется еще проще: вершины многогранника, имеющие одну и ту же первую координату, равную e , лежат на гиперплоскости $x_1 = e$ и образуют соответствующий слой $\Sigma(e)$.

Так, M_{24} будет иметь 5 слоев (рис. 1; наряду со слоями изображены примеры смежности вершин из разных слоев):

слои $\Sigma(\pm 2)$ содержат по одной вершине $(\pm 2, 0, 0, 0)$, соответственно; слой $\Sigma(+1)$ содержит 8 вершин $(+1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$, образующих трехмерный куб (аналогично $\Sigma(-1)$);

слой $\Sigma(0)$ содержит 6 вершин $(0, \pm 2, 0, 0), (0, 0, \pm 2, 0)$ и $(0, 0, 0, \pm 2)$, никакая пара из которых не соединена ребром (т.е. образуют пустой граф без ребер).

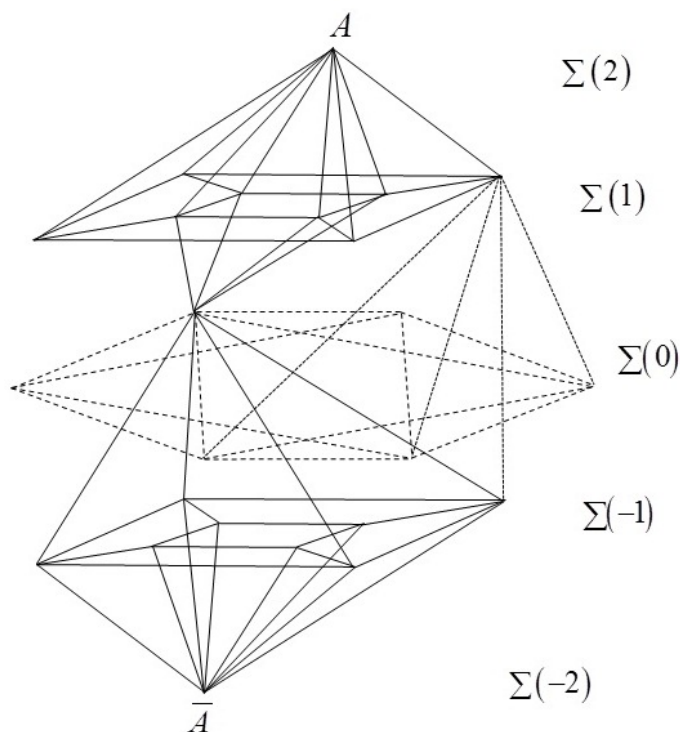


Рисунок 1.

Аналогично, вершины M_{120} лежат на девяти слоях (рис. 2). Укажем составы слоев (ограничимся слоями с $x_1 \geq 0$):

слой $\Sigma(2)$ состоит из вершины $(2, 0, 0, 0)$;

слой $\Sigma(\tau)$ состоит из 12 вершин $(\tau, \pm 1, \pm \tau^{-1}, 0)$, $(\tau, \pm \tau^{-1}, 0, \pm 1)$, $(\tau, 0, \pm 1, \pm \tau^{-1})$, образующих икосаэдр, который является подграфом M_{120} ;

слой $\Sigma(1)$ состоит из 20 вершин $(1, \pm \tau, 0, \pm \tau^{-1})$, $(1, \pm \tau^{-1}, \pm \tau, 0)$, $(1, 0, \pm \tau^{-1}, \pm \tau)$, $(1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$, которые образуют додекаэдр, также являющийся подграфом;

слой $\Sigma(\tau^{-1})$ состоит из 12 вершин $(\tau^{-1}, \pm \tau, \pm 1, 0)$, $(\tau^{-1}, \pm 1, 0, \pm \tau)$, $(\tau^{-1}, 0, \pm \tau, \pm 1)$, образующих снова икосаэдр, но на этот раз являющийся пустым подграфом;

слой $\Sigma(0)$ состоит из 30 вершин $(0, \pm \tau, \pm \tau^{-1}, \pm 1)$, $(0, \pm 1, \pm \tau, \pm \tau^{-1})$, $(0, \pm \tau^{-1}, \pm 1, \pm \tau)$, $(0, \pm 2, 0, 0)$, $(0, 0, \pm 2, 0)$, $(0, 0, 0, \pm 2)$, образующих полуправильный многогранник, называемый икосододекаэдром [6].

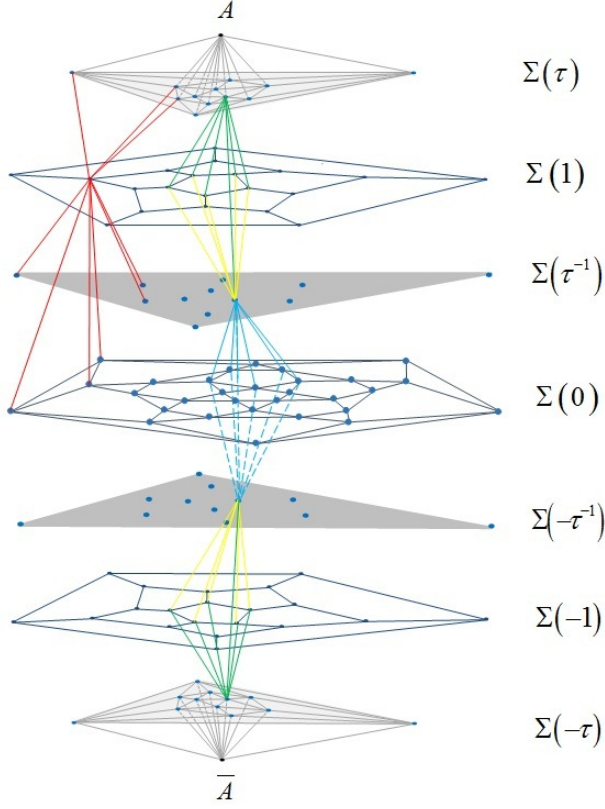


Рисунок 2.

Его одномерный остов образует граф Кэли степени 4. Другие особенности графов M_{24} , M_{120} будут описаны в соответствующем месте рассуждений при доказательстве Теорем 2 и 3.

3. Теорема 1. $N(M_{24}) = 3$

Начнем с доказательства того, что два преследователя P_1 и P_2 не в состоянии поймать Q . Отметим, что в нашей постановке в начале игры убегающему Q предоставляется возможность выбирать свое начальное положение, зная начальные положения преследователей, чтобы исключить тривиальные случаи, например, когда Q находится между преследователями на одном ребре [1].

В рассматриваемом случае в начальный момент времени Q может выбрать любую вершину M_{24} . Обозначим ее A . Пусть $A_1, A_2, \dots, A_8$

– соседние с ней вершины. Можно считать, что при этом по крайней мере один из преследователей, скажем P_1 , находится на расстоянии (в метрике графа) меньше $1/2$ от A . Пусть это будет $P_1 \in AA_1$. Тогда где бы ни находился преследователь P_2 , игрок Q в состоянии добраться до одной из вершин $A_k, k = 2, 3, \dots, 8$, раньше P_2 . Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть случаи, когда P_2 в начальный момент времени находится на одной из вершин слоев $\Sigma(1)$ и $\Sigma(0)$, поскольку остальные вершины находятся от вершины A на расстоянии больше 2 (рис. 3).

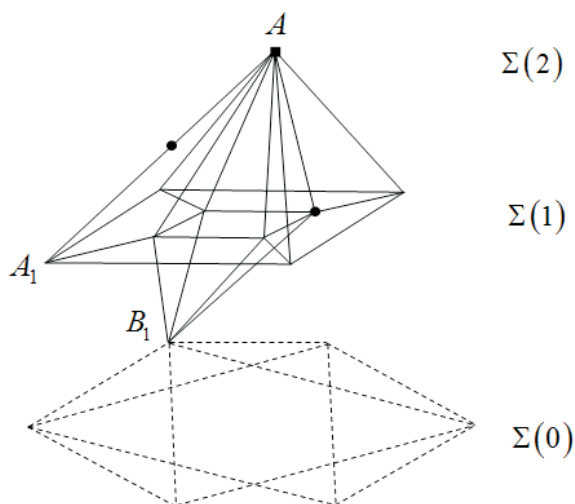


Рисунок 3.

В случае $P_2 \in \Sigma(1)$ имеет место неравенство $P_2 A_k > 2$ (в метрике графа) по крайней мере для четырех значений k , а в случае $P_2 \in \Sigma(0)$ оно имеет место по крайней мере для трех значений k . Следовательно, Q всегда имеет возможность безопасно перейти на одну из таких вершин.

Теперь покажем, что три преследователя P_1, P_2 и P_3 в состоянии поймать Q . Предпишем P_1 и P_2 занять пару антиподальных вершин, скажем $A = (2, 0, 0, 0)$ и $\bar{A} = (-2, 0, 0, 0)$, а P_3 – преследовать Q «по пятам». Тогда Q будет вынужден пройти через какую-то вершину M_{24} . Пусть это будет вершина B . Соответствующий момент времени обозначим t_0 . Без потери общности можно считать, что B находится

на одном из слоев $\Sigma(1)$ и $\Sigma(0)$. Под натиском P_3 убегающий Q будет вынужден направляться к одной из соседних с B вершин.

В случае $B \in \Sigma(1)$ преследователю P_1 предпишем следующий способ движения: если Q пойдет по ребру AB , то P_1 движется симметрично с ним относительно центра этого ребра. Если же Q двинется в сторону вершины A_k из слоя $\Sigma(1)$, то P_1 двинется по ребру AA_k . Тогда Q , очевидно, будет пойман преследователем P_1 .

Рассмотрим теперь случай, когда Q первоначально находился в слое $\Sigma(0)$ или был вынужден перейти к нему из слоя $\Sigma(1)$. Пусть $Q \in \Sigma(0)$ в момент времени $t = t_1$. Теперь вспомним, что никакая пара вершин слоя $\Sigma(0)$ не соединена ребром, поэтому в дальнейшем Q будет вынужден покинуть слой $\Sigma(0)$ из-за преследования P_3 и будет вынужден перейти на один из слоев $\Sigma(\pm 1)$. Начиная с этого момента времени $t = t_1$ преследователям P_1 и P_2 предпишем придерживаться следующего способа движения: если Q пойдет по ребру CD , $C \in \Sigma(0)$, $D \in \Sigma(1)$, то P_2 останется на месте, а P_1 двинется по ребру AD (аналогично для $D \in \Sigma(-1)$).

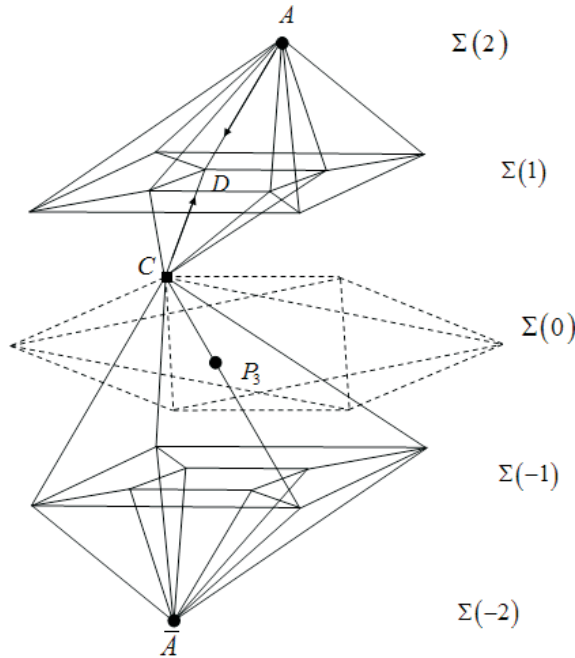


Рисунок 4.

В результате Q будет пойман преследователем P_1 по достижении слоя $\Sigma(1)$ или преследователем P_2 , когда Q достигнет $\Sigma(-1)$.

4. Теорема 2. $N(M_{120}) \geq 3$

Мы должны показать, что два преследователя P_1 и P_2 не в состоянии поймать Q . Можно считать, что в начальный момент время Q находится в вершине $A = (2, 0, 0, 0)$. Соседние с ней вершины A_k , $k = 1, 2, 3, \dots, 12$ образуют икосаэдр (который в [4] назван звездой этой вершины; см. рис. 5).

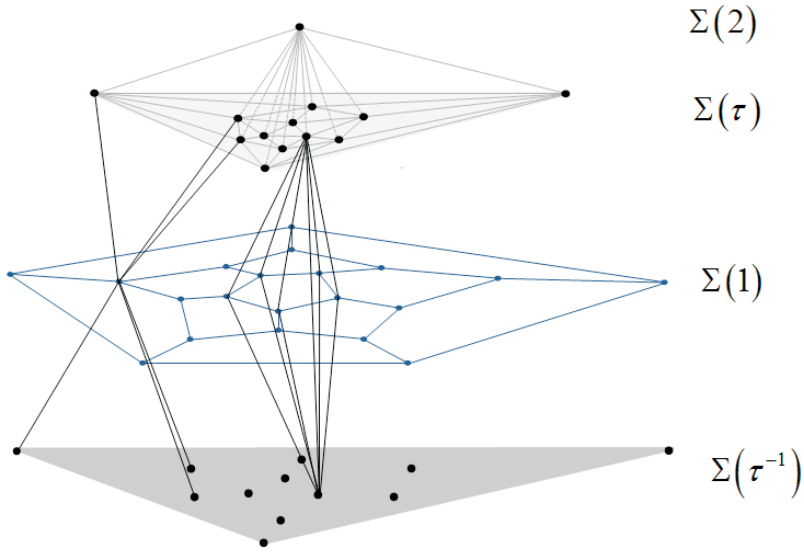


Рисунок 5.

Пусть $P_1 \in AA_k$ для некоторого $k, k = 1, 2, \dots, 12$. Здесь также можем считать $|AP_1| < 1/2$ в метрике графа. Если при этом $|AP_2| > 2$, то Q может перейти к любой из соседних вершин, отличной от A_k , не опасаясь встречи с P_2 . Пусть далее $|AP_2| \leq 2$. Более того, можно ограничиться рассмотрением случая, когда P_2 занимает какую-то вершину. Разберем возможные случаи расположения P_2 .

1-случай: $P_2 \in \Sigma(\tau)$. Вершина P_2 имеет 5 соседей в этом же слое $\Sigma(\tau)$. Если учесть то, что P_1 загораживает от Q еще одну вершину, то окажется, что Q может перейти к любой из оставшихся 5 вершин слоя $\Sigma(\tau)$ без всякого опасения быть пойманным.

2-случай: $P_2 \in \Sigma(1)$. Согласно графометрии M_{120} , в этом случае P_2 имеет 3 соседа в слое $\Sigma(\tau)$, и Q имеет возможность безопасно перейти к одной из 8 вершин слоя $\Sigma(\tau)$.

3-случай: $P_2 \in \Sigma(\tau^{-1})$. Каждая вершина из слоя $\Sigma(\tau^{-1})$ имеет ровно одну соседнюю вершину в слое $\Sigma(\tau)$, поэтому, с учетом того, что P_2 загораживает еще одну вершину из этого же слоя, для Q будет безопасным переход к любой из десяти оставшихся вершин слоя $\Sigma(\tau)$.

Таким образом, во всех случаях Q в состоянии перейти в одну из соседних вершин, избежав поимки.

5. Теорема 3. $N(M_{120}) \leq 3$

Требуется показать, что три преследователя P_1, P_2, P_3 смогут завершить преследование. Доказательство разобьем на несколько этапов.

5.1. Начальный этап преследования: симметризация

Предпишем преследователям P_1 и P_2 занять пару антиподальных вершин, например, $P_1 = (2, 0, 0, 0), P_2 = (-2, 0, 0, 0)$. Начиная с этого момента времени предпишем P_3 приступить к преследованию «по пятам» Q . Пусть t_0 – первый момент времени, когда Q окажется на какой-то вершине графа M_{120} . Эту вершину обозначим $E = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ и разберем послойно все возможные ситуации в момент времени t_0 . В виду симметрии достаточно рассмотреть случаи, когда Q находится в одном из слоев $\Sigma(\tau), \Sigma(1), \Sigma(\tau^{-1})$ и $\Sigma(0)$.

I. $Q \in \Sigma(\tau)$ так, что P_1 и Q находятся на соседних вершинах. Многогранник M_{120} является симметричным относительно гиперплоскости $(\tau - 2)x_1 + e_2x_2 + e_3x_3 + e_4x_4 = 0$, которая перпендикулярна ребру с концами $(2, 0, 0, 0)$, E и проходит через его середину.

Положение, возникающее в процессе преследования, когда убегающий и один из преследователей окажутся на соседних вершинах, назовем S_I -ситуацией.

Таким образом, в случае I имеет место S_I -ситуация.

II. $Q \in \Sigma(1)$, т.е. $E = (1, e_2, e_3, e_4)$. В этом случае M_{120} будет симметричным относительно гиперплоскости $-x_1 + e_2x_2 + e_3x_3 + e_4x_4 = 0$, перпендикулярной диагонали с концами $(2, 0, 0, 0)$ и E , проходящей через середину этой диагонали. При этом расстояние между пресе-

дователем и убегающим равняется 2 как в метрике графа, так и в евклидовой метрике.

Взаимное расположение, в котором убегающий окажется с одним из преследователей на расстоянии 2, назовем S_{II} -ситуацией. Таким образом, в рассматриваемом случае реализуется S_{II} -ситуация.

III. $Q \in \Sigma(\tau^{-1})$. Без потери общности можно считать $E = (\tau^{-1}, 1, 0, \tau)$. 12 вершин этого слоя $\Sigma(\tau^{-1})$ образуют пустой подграф, т.е. никакая пара вершин не соединена ребром. Поэтому убегающий под натиском P_3 будет вынужден покинуть этот слой. Тогда возможны 4 подслучая.

III₁. Q перейдет на слой $\Sigma(\tau)$. В этом случае Q и P_1 окажутся в S_I -ситуации.

III₂. Q перейдет на слой $\Sigma(1)$. В этом случае Q и P_1 окажутся в S_{II} -ситуации.

III₃. Q двинется в направлении к одной из пяти соседних вершин в слое $\Sigma(0)$.

Чтобы определить стратегию преследователей в случае III₃, понадобится специальное соответствие Π между слоями $\Sigma(0)$ и $\Sigma(\tau)$. Для полноты дадим аналитическое описание этого соответствия.

Каждая вершина $\Sigma(\tau^{-1})$ имеет единственную соседнюю вершину из $\Sigma(\tau)$. Это соответствие аналитически выражается формулой

$$\sigma(\tau^{-1}, e_1, e_2, e_3) = (\tau, \tau^{-1}e_1, \tau^{-1}e_2, \tau^{-1}e_3).$$

Далее, $\Sigma(0)$ имеет 12 пятиугольных граней. Вершины каждой такой грани имеют ровно одну общую соседнюю вершину в слое $\Sigma(\tau^{-1})$ (рис. 6).

Например, для вершины $E = (\tau^{-1}, 1, 0, \tau)$ соседний пятиугольник слоя $\Sigma(0)$ состоит из вершин $V_1 = (0, \tau, \tau^{-1}, 1)$, $V_2 = (0, \tau^{-1}, 1, \tau)$, $V_3 = (0, 0, 0, 2)$, $V_4 = (0, \tau^{-1}, -1, \tau)$, $V_5 = (0, \tau, -\tau^{-1}, 1)$.

В свою очередь, вершина $(\tau, \tau^{-1}, 0, 1) = \sigma(\tau^{-1}, 1, 0, \tau)$ имеет ровно 5 соседей в этом же слое $\Sigma(\tau)$, а именно, $W_1 = (\tau, 1, \tau^{-1}, 0)$, $W_2 = (\tau, 0, 1, \tau^{-1})$, $W_3 = (\tau, -\tau^{-1}, 0, 1)$, $W_4 = (\tau, 0, -1, \tau^{-1})$, $W_5 = (\tau, 1, -\tau^{-1}, 0)$. Искомое соответствие Π определяется как $V_j \longleftrightarrow W_j$, $j = \overline{1, 5}$. Таким образом, Π на самом деле устанавливает соответствие между пятиугольными звездами 12 вершин слоя $\Sigma(\tau)$ и 12 пятиугольными гранями слоя $\Sigma(0)$. Оно определяется для других вершин по

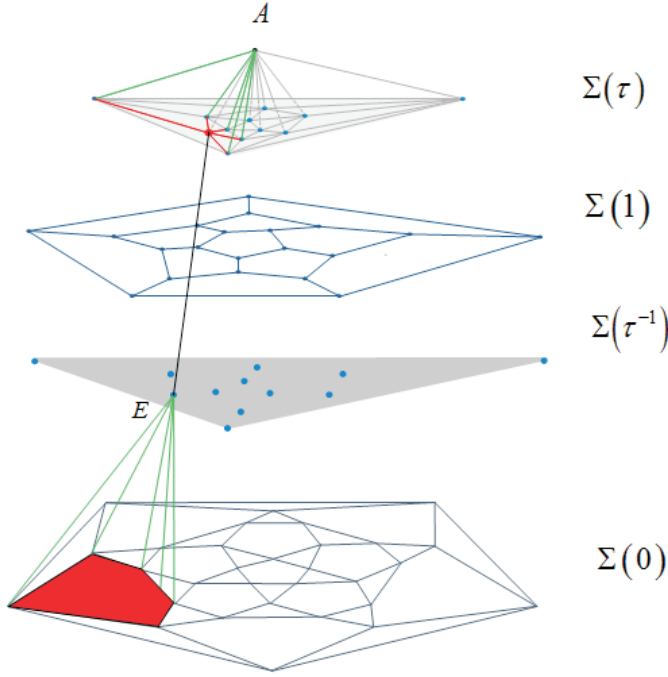


Рисунок 6.

следующему правилу. Остальные 11 вершин слоя $\Sigma(\tau^{-1})$ получаются из $E = (\tau^{-1}, 1, 0, \tau)$ четными перестановками $(\tau^{-1}, \tau, 1, 0)$, $(\tau^{-1}, 0, \tau, 1)$ и переменной знаков у координат, равных 1 и τ . Если вершина F получается из $E = (\tau^{-1}, 1, 0, \tau)$ каким-то преобразованием, то и соответствующие вершины слоев $\Sigma(0)$ и $\Sigma(\tau)$, составляются из наборов $\{V_j\}$ и $\{W_j\}$, $j = \overline{1,5}$, тем же преобразованием.

Теперь можно строить способ движения P_1 . Если Q из вершины $(\tau^{-1}, 1, 0, \tau)$ направится к вершине V_j , то преследователю P_1 предписывается двигаться в направлении к вершине W_j .

При этом, как легко в этом убедиться, при достижении убегающим вершины V_j , преследователь P_1 достигнет W_j и произойдет S_{II} -ситуация.

III₄. Наконец, Q может перейти из слоя $\Sigma(\tau^{-1})$ еще и на слой $\Sigma(-\tau^{-1})$. Здесь для него имеется единственная возможность – перейти к вершине $(-\tau^{-1}, 1, 0, \tau)$, симметричной к $E = (\tau^{-1}, 1, 0, \tau)$ относительно гиперплоскости $x_1 = 0$. В этом случае P_1 должен оставаться на месте, а P_2 должен двигаться из вершины $(-2, 0, 0, 0)$ в сторону

вершины $(-\tau, \tau^{-1}, 0, 1)$. Если Q достигнет вершины $(-\tau^{-1}, 1, 0, \tau)$, то P_2 окажется на вершине $(-\tau, \tau^{-1}, 0, 1)$ и реализуется ситуация S_I , в чем легко убедиться прямым вычислением расстояния между этими вершинами.

IV. Теперь рассмотрим последний случай первого этапа: $Q \in \Sigma(0)$. Этот слой содержит 30 вершин, образующих икосододекаэдр [6], который является подграфом M_{120} . Поскольку все вершины равноправны, можно положить $Q = (0, 1, \tau, \tau^{-1})$. Избегая встречи с P_3 , убегающий будет вынужден покинуть эту вершину. При этом он может достичь одной из четырех соседних вершин этого же слоя или одной из двух вершин каждого из слоев $\Sigma(-1)$, $\Sigma(-\tau^{-1})$, $\Sigma(\tau^{-1})$, $\Sigma(1)$. Снова переберем эти варианты.

IV₁. Q направится к одной из соседних вершин $(0, 0, 2, 0)$, $(0, \tau, \tau^{-1}, 1)$, $(0, 1, \tau, -\tau^{-1})$, $(0, \tau^{-1}, 1, \tau)$ слоя $\Sigma(0)$. Поставим в соответствие к ним вершины $(\tau, 0, 1, -\tau^{-1})$, $(\tau, \tau^{-1}, 0, 1)$, $(\tau, 1, \tau^{-1}, 0)$, $(\tau, 0, 1, \tau^{-1})$ в этой же последовательности, аналогично тому, как это было сделано при разборе случая III₃. Затем предпишем преследователю P_1 двигаться в сторону соответствующей вершины. Если при этом Q достигнет какую-то вершину из первого списка, то P_1 одновременно с ним достигнет соответствующую вершину из второго списка, в результате P_1 и Q окажутся в S_{II} -ситуации.

IV₂. Q направится к одной из вершин $(\tau^{-1}, 0, \tau, 1)$, $(\tau^{-1}, \tau, 1, 0)$ слоя $\Sigma(\tau^{-1})$. Тогда P_1 должен двигаться в направлении вершин $(\tau, 0, 1, \tau^{-1})$ и $(\tau, 1, \tau^{-1}, 0)$, соответственно. Тогда при достижении убегающим слоя $\Sigma(\tau^{-1})$ преследователь P_1 окажется на слое $\Sigma(\tau)$ и осуществится ситуация S_I .

IV₃. Пусть теперь Q решит перейти к одной из вершин $(1, \tau^{-1}, \tau, 0)$ и $(1, 1, 1, 1)$ слоя $\Sigma(1)$. В этом случае даже без маневра преследователей убегающий попадет в S_{II} ситуацию с преследователем P_1 , остающимся на месте, т.е. на вершине A .

Случаи перехода Q к вершинам на слоях $\Sigma(-\tau^{-1})$ и $\Sigma(-1)$ симметричны к рассмотренным.

Тем самым первый этап преследования завершается: как бы не маневрировал убегающий, он в некоторый момент времени окажется на вершине, симметричной с одним из преследователей по отношению к некоторой гиперплоскости симметрии M_{120} .

5.2. Эвристические соображения

Тут уместно отметить, почему необходимо «загнать» Q в одну из ситуаций S_I и S_{II} . Дело в том, что за исключением этих двух случаев, многогранник M_{120} не является симметричным относительно гиперплоскости, проходящей через середину диагонали перпендикулярно к ней. Здесь ситуация аналогична с трехмерным кубом: средняя перпендикулярная плоскость большой диагонали не является плоскостью симметрии. Аналогичное явление можно наблюдать и на додекаэдре и икосаэдре – не для каждой диагонали срединная перпендикулярная плоскость служит плоскостью симметрии.

Как бы то ни было, к концу первого этапа хотя бы один из преследователей займет положение, симметричное к убегающему. Пусть это будет в момент времени $t = t_1$. С этого момента начнется второй этап процесса преследования. При этом соответствующему преследователю, которого переобозначим P_1 , предписывается держаться симметричного положения с убегающим, т.е. применять стратегию параллельного преследования [3, 7]. Если убегающий по мере движения попадает на гиперплоскость симметрии, то там он встретится с преследователем P_1 . Это вынуждает убегающего оставаться на одной стороне от гиперплоскости симметрии, что сведет игру к игре на сильно урезанном подграфе $M' = M_{120} \cap \{x_1 > 0\}$, но при этом с двумя преследователями вместо трех.

Несложно было доказать неравенства $N(M_{120}) \geq 3$ и $N(M_{120}) \leq 4$. Первоначально авторам казалось, что должно быть $N(M_{120}) = 4$, поскольку M' – все еще достаточно сложный граф с 45 вершинами, содержащий к тому же икосаэдр и додекаэдр в качестве подграфов, для которых $N(M) = 3$ [1]. Однако доказать возможность уклонения от двух преследователей на M' , т.е. от трех – на M_{120} никак не удавалось. Только послойное представление M_{120} позволило заметить особое строение M' и доказать, что два преследователя в состоянии поймать Q на M' .

Еще одно замечание относительно того, почему в игре на додекаэдре $N(M) = 3$, в то время как в игре на графе M' , содержащем додекаэдр в качестве подграфа, можно обойтись двумя преследователями. Это объясняется особым строением графа M' . Чтобы было легче следить за дальнейшим построением стратегии группы пресле-

дователей, опишем эти особенности:

1) все вершины слоя $\Sigma(\tau)$ соединены с вершиной $(2, 0, 0, 0)$, что облегчает преследование; здесь ситуация аналогична следующему: в игре на икосаэдре $N(M) = 3$, но в игре на конусе $\hat{M}$ над икосаэдром, полученном добавлением одной вершины, соединенной ребрами со всеми вершинами, очевидно, $N(\hat{M}) = 2$;

2) вершины слоя $\Sigma(\tau^{-1})$ образуют пустой граф, так что если Q спустится на этот слой, то не может там долго оставаться и будет вынужден возвращаться в верхние слои, позволив тем самым преследователям выиграть темп в терминологии шахматистов;

3) между слоями $\Sigma(\tau^{-1})$ и $\Sigma(\tau)$ существует естественная биекция, такая, что соответствующие вершины вместе с некоторой гранью додекаэдра $\Sigma(1)$ образует пятиугольную бипирамиду (см. рис. 7).

5.3. 2-этап преследования: достижение S^* -ситуации

На этом этапе построения стратегии преследования для удобства за гиперплоскость симметрии примем $x_1 = 0$. Преследователь, занимающий симметричное с убегающим положение, ранее обозначен P_1 . В силу отмеченного выше свойства, можно считать, что Q и два других преследователя P_2, P_3 в дальнейшем останутся на подграфе M' .

Преследователю P_3 предписывается продолжить погоню за Q , а преследователю P_2 – занять вершину $(2, 0, 0, 0)$. Если это осуществится в момент времени $t = t_2$, то при необходимости несколько увеличив t_2 , можно добиться того, что в этот момент времени Q окажется на вершине, принадлежащей одному из слоев $\Sigma(\tau^{-1})$, $\Sigma(1)$ и $\Sigma(\tau)$.

Основная цель этого этапа – «загнать» убегающего на слой $\Sigma(1)$. Состояние, в котором P_2 находится на вершине A , а Q – на одной из вершин слоя $\Sigma(1)$, будем называть S^* -ситуацией.

I. Пусть $Q \in \Sigma(\tau^{-1})$. Никакая пара вершин этого слоя не соединена ребром между собой, поэтому под натиском P_3 убегающий Q будет вынужден перейти к вершине из другого слоя. Если он направится к слоям $\Sigma(0)$ и $\Sigma(-\tau^{-1})$, то будет пойман преследователем P_1 . Если перейдет к слою $\Sigma(1)$, то возникнет требуется S^* -ситуация. Переход к слою $\Sigma(\tau)$ рассмотрим вместе со случаем, когда Q в момент времени $t = t_2$ уже находился в этом слое.

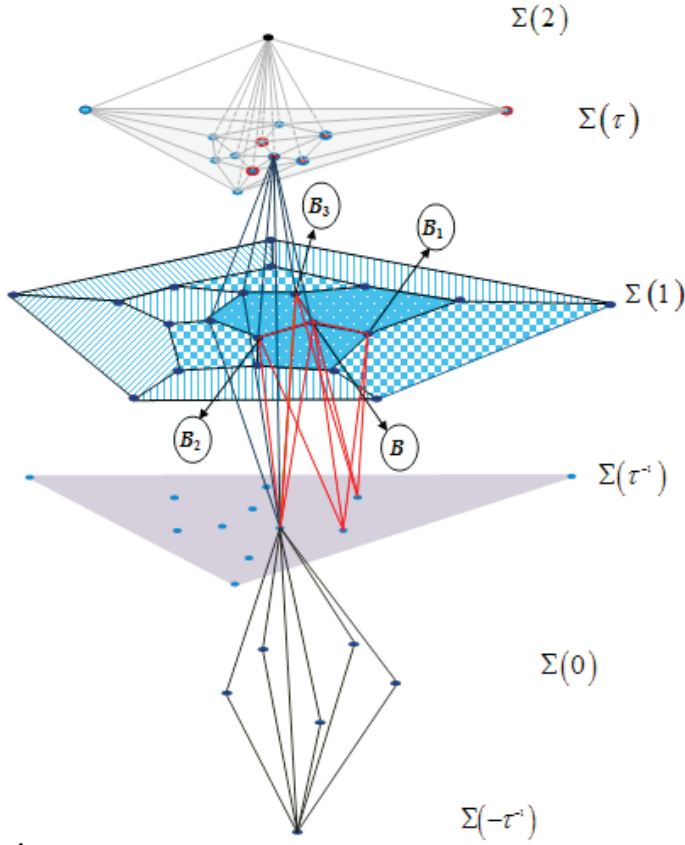


Рисунок 7.

II. Итак, пусть $Q \in \Sigma(\tau)$ в какой-то момент времени $t = t_2$. Если после этого Q решает перейти к другой вершине $\Sigma(\tau)$, то такие переходы не могут долго повторяться, так как будет пойман преследователем P_3 , поэтому он вынужден перейти к одному из слоев $\Sigma(1)$ или $\Sigma(\tau^{-1})$. Переход на слой $\Sigma(1)$ означает возникновение S^* -ситуации. Рассмотрим случай, когда Q опустится на слой $\Sigma(\tau^{-1})$.

Казалось бы, убегающий сможет бесконечное число раз переходить из слоя $\Sigma(\tau)$ на слой $\Sigma(\tau^{-1})$ и обратно. Но при таком движении Q преследователь P_2 легко осуществит его поимку при возвращении из слоя $\Sigma(\tau^{-1})$ на слой $\Sigma(\tau)$. В самом деле, согласно графометрии M_{120} , оба слоя $\Sigma(\tau), \Sigma(\tau^{-1})$ – икосаэдры, причем каждая вершина одного из них соединена ребром лишь с одной вершиной другого. Сле-

довательно, если Q из слоя $\Sigma(\tau^{-1})$ направится к вершине $B \in \Sigma(\tau)$, то P_2 может также направляться на ту же вершину. Поэтому Q будет вынужден перейти из слоя $\Sigma(\tau^{-1})$ на слой $\Sigma(1)$, что означает реализацию S^* -ситуации.

Таким образом, во всех случаях к концу второго этапа реализуется S^* -ситуации.

5.4. Заключительный этап преследования

Итак, пусть в некоторый момент времени $t = t_3$ имеет место S^* -ситуация, в которой Q находится на какой-то вершине $B \in \Sigma(1)$, P_2 – на вершине $(2, 0, 0, 0)$, а P_3 по следам преследует Q . Следовательно, Q не может долго находиться на одной вершине слоя $\Sigma(1)$ и должен двигаться в сторону одной из 12 соседних вершин. Согласно графометрии M_{120} эти вершины по три принадлежат слоям $\Sigma(0)$, $\Sigma(\tau^{-1})$, $\Sigma(1)$ и $\Sigma(\tau)$.

Переход к слою $\Sigma(0)$ сразу исключается. Также можно не рассматривать случай, когда Q достигнет какую-то из вершин слоя $\Sigma(\tau)$, так как он будет пойман преследователем P_2 – для этого ему достаточно спуститься к той вершине слоя $\Sigma(\tau)$, куда направился убегающий.

Если Q двинется в сторону слоя $\Sigma(\tau^{-1})$, скажем по ребру BA_3 , то преследователю P_2 предпишем двигаться в сторону вершины C_3 слоя $\Sigma(\tau)$, которая является единственной соседней к A_3 из $\Sigma(\tau^{-1})$. Поскольку никакая пара вершин слоя $\Sigma(\tau^{-1})$ не образует ребра, то Q будет вынужден перейти из $\Sigma(\tau^{-1})$ к слою $\Sigma(\tau)$ или $\Sigma(1)$. В обоих случаях Q будет пойман преследователем P_2 .

Таким образом, остается разобрать такой случай: Q перейдет из вершины B к одной из соседних вершин B_1, B_2, B_3 этого же слоя (рис. 8). В этом случае преследователю P_2 предпишем двигаться в сторону соответствующей из вершин C_4, C_5, C_6 . Это соответствие определяется по следующему правилу. Вершина B_i является общей для трех граней додекаэдра $\Sigma(1)$. При этом вершин B является общей для двух из этих граней, но, в отличие от B_i , не является вершиной для третьей грани. Пусть это будет грань Λ_i . Согласно графометрии, одна из вершин $\Sigma(\tau)$, скажем C_{i+3} , соединена со всеми вершинами Λ_i . Именно эта вершина C_{i+3} и ставится в соответствие к B_i , $i = 1, 2, 3$ (см. рис. 8).

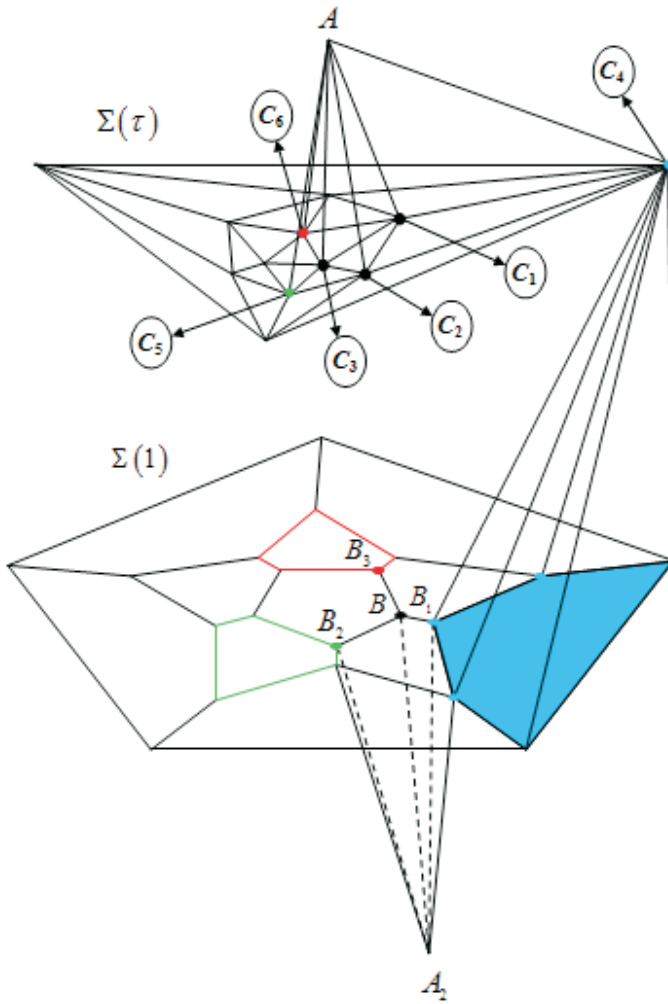


Рисунок 8.

Пусть $t = t_4$ – момент времени, когда Q достигнет, скажем, вершины B_1 . В этой ситуации возможны три случая дальнейших действий убегающего Q :

1-случай: Из вершины B_1 убегающий Q направится к одной из соседних вершин C_1 и C_2 слоя $\Sigma(\tau)$ (третья соседняя вершина C_4 занята преследователем P_2). В обоих случаях Q будет пойман ввиду того, что C_1 и C_2 являются соседними к C_4 .

2-случай: Q попытается возвратиться из B_1 к вершине B . Поскольку P_3 преследует его по следам, то такой маневр Q , т.е. переход

из вершины B_1 к одной из соседних вершин в слое $\Sigma(1)$ не может продолжаться дольше, чем диаметр M' , иначе Q будет пойман преследователем P_2 .

3-случай: Q движется в сторону слоя $\Sigma(\tau^{-1})$. В слое $\Sigma(\tau^{-1})$ вершина B_1 имеет три соседние вершины, а именно A_1, A_2 и A_4 , которые являются соседними также к вершинам C_1, C_2 и C_4 , соответственно (см. 1-случай). Если Q достигнет вершины A_4 , то будет пойман преследователем P_2 (A_4 и C_4 – соседние вершины). Остается случай, когда Q направится в сторону одной из вершин A_1 и A_2 , которым соответствуют вершины C_1 и C_2 слоя $\Sigma(\tau)$. В этих случаях преследователю P_2 предпишем двигаться к соответствующей из вершин C_1 и C_2 . Пусть Q достигнет A_2 . Тогда одновременно с ним P_2 достигнет C_2 (рис. 8). В результате точки P_2 и Q окажутся в вершинах пятиугольной бипирамиды (рис. 7) и преследование Q успешно завершается: либо Q движется по ребру этой бипирамиды, и будет пойман преследователем P_2 , либо Q будет вынужден попасть в слой $\Sigma(0)$, где его встретит P_1 . Теорема доказана полностью.

6. Заключение

К нашему огорчению, в самом начале работы над этой частью исследования, А.Ш. Кучкаров, внесший существенный вклад в предыдущие части, скоростно скончался. Мы посвящаем статью его памяти.

Отметим, что точное значение $N(M_{600})$ нам пока неизвестно, можем лишь утверждать $4 \leq N(M_{600}) \leq 6$.

Авторы выражают свою признательность О.С. Ахмедову за полезное обсуждение и помощь при построении рисунков.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Azamov A.A., Kuchkarov A.Sh., Holboyev A.G. *The pursuit-evasion game on the 1-skeleton graph of regular polyhedron. I* // Automation and Remote Control. 2017. V. 78. N. 4. P. 754–761.
2. Azamov A.A., Kuchkarov A.Sh., Holboyev A.G. *The pursuit-evasion game on the 1-skeleton graph of regular polyhedron. II* // Automation and Remote Control. 2018. V. 78. N. 10. P. 345–351.

3. Azamov A.A., Samatov B.T. *П-strategy. An elementary introduction to the theory of differential games*. Tashkent: National University of Uzbekistan, 2000.
4. Berger M. *Geometry*. Volume 1. Berlin: Springer-Verlag, 1987.
5. Coxeter H.S.M. *Introduction to geometry*. New York: John Wiley and Sons, Inc. 1961.
6. Malkevitch J. *Shaping space: a polyhedral approach* // Senechal M., Flenk G.— Boston: Birkhauser, 1988. P. 80–92.
7. Petrosjan L.A. *Differential games of pursuit*. World Scientific Publisher, 1993.

THE PURSUIT-EVASION GAME ON THE 1-SKELETON GRAPH OF THE REGULAR POLYHEDRON. III

Abdulla A. Azamov, Institute of Mathematics, Doc. Acad.
(abdulla.azamov@gmail.com),

Atamurat Sh. Kuchkarov,

Azamat G. Holboyev, Tashkent State Pedagogical University,
Assistant Professor (azamatholboyev@gmail.com).

Abstract: It is considered a game between a group of n pursuers and one evader moving with the same maximal speed along 1-skeleton of a given regular polyhedron. In this paper it is considered the case of the regular polyhedrons with 24 and 120 vertices in the space $\mathbb{R}^4$. It is proven that if $n \leq 2$, then the evader wins in the game, and to the evader, if $n \geq 3$ then the game finishes successfully for the group of pursuers.

Keywords: pursuit-evasion game, approach problem, evasion problem, positional strategy, counter strategy, exact catch, regular polyhedron with 24 vertices, regular polyhedron with 120 vertices, one-dimensional graph.

УДК 519.834

ББК 22.18

ДВУХФАКТОРНОЕ DEA МОДЕЛИРОВАНИЕ И КЛАСТЕРИЗАЦИЯ МНОЖЕСТВА ОДНОРОДНЫХ ФИРМ*

ВЛАДИМИР М. БУРЕ^a

ЕЛЕНА М. ПАРИЛИНА^{a,b,c}

КСЕНИЯ Ю. СТАРОВЕРОВА^a

^a Санкт-Петербургский государственный университет
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9

^b Школа математики и статистики

Университет Циндао

Циндао 266071, Китай

^c Институт прикладной математики провинции Шаньдун
Циндао 266071, Китай

e-mail: v.bure@spbu.ru, e.parilina@spbu.ru, st016234@student.spbu.ru

В работе представлена модель кластеризации однородных фирм по эффективности их деятельности на некотором временном интервале. Эффективность деятельности фирм проводится с использованием DEA (Data envelopment analysis) методологии, которая основана на решении оптимизационных задач и позволяет проводить сравнительный анализ фирм, учитывая множество факторов их деятельности. На втором этапе анализа полученные в результате DEA моделирования временные ряды оценок эффективности фирм используются для кластеризации фирм и нахождения устойчивых разбиений совокупности фирм.

Ключевые слова: DEA моделирование, кластеризация временных рядов, анализ эффективности фирм.

Поступила в редакцию: 29.03.19 *После доработки:* 16.07.19 *Принята к публикации:* 30.07.19

1. Введение

В последнее время широкое применение получила методология DEA (Data envelopment analysis или анализ среды функционирования) моделирования, предложенная в работе [8]. Метод DEA позволяет найти оценки эффективности объектов, учитывая несколько показателей их деятельности, путем решения специальным образом сформулированных оптимизационных задач. Впоследствии было предложено несколько его модификаций, например, см. [6]. Главной задачей DEA моделирования является оценка технической эффективности работы фирмы среди совокупности достаточно однородных фирм и последующего упорядочения рассматриваемых фирм с точки зрения эффективности их работы. При этом оценивается прежде всего эффективность работы менеджмента фирмы или, другими словами, эффективность DMU (decision making unit), осуществляющей управление капиталом фирмы и трудовыми ресурсами. В настоящее время метод DEA используется повсеместно наряду со стандартными статистическими процедурами при анализе эффективности объектов, которые могут быть предприятиями, регионами, странами. Например, можно использовать методологию DEA при ранжировании грантозаявителей, учитывая их показатели деятельности в предыдущем периоде. Пример построения DEA модели при распределении ресурсов в разветвленной сети производства предложен в статье [13]. Метод оценки эффективности деятельности российских банков с использованием DEA методологии представлен в [1]. Проблема выбора эффективного портфеля, рассмотренная в [11], также использует анализ среды функционирования.

Нами предлагается метод нахождения устойчивых разбиений множества фирм в два этапа. На первом этапе проводится DEA моделирования деятельности фирм на некотором временном интервале. В результате первого этапа получается набор временных рядов оценок эффективностей фирм. На втором этапе предлагается использовать процедуру кластеризации временных рядов для нахождения разбиения множества фирм на непересекающиеся подмноже-

ства «близких» по эффективности фирм. Процедура кластеризации временных рядов изложена в [4]. Помимо решения задачи разбиения множества фирм на кластеры, мы предлагаем применить теоретико-игровой метод нахождения устойчивого разбиения, изложенный в [14], а впоследствии адаптированный для нахождения устойчивого множества кластеров в работе [2]. Под устойчивостью разбиения множества фирм на кластеры понимается невозможность улучшить целевую функцию, специальным образом зависящую от межкластерного и внутрикластерного расстояния, путем переноса какого-либо объекта из одного кластера в другой или выделением его в отдельный кластер. В последнее время теоретико-игровые модели стали применяться в кластеризации данных, например, при разбиении научных сообществ [3], нахождении разбиений в сети заданной конфигурации [7]. Элементы теории игр, в том числе, теории нечетких кооперативных игр, используются и при DEA моделировании [12,13]. В упомянутых работах проводится анализ «эффективностей» городов в Иране и эффективностей работы медицинских учреждений.

Статья имеет следующую структуру. В разделе 2 приведены теоретические основы DEA моделирования. Метод кластеризации полученных в результате DEA анализа временных рядов, основанный на теоретико-игровом подходе, представлен в разделе 3. Пример в разделе 4 иллюстрирует предложенную методологию анализа эффективности фирм. Описание результатов работы проводится в Заключение.

2. DEA моделирование

Как известно, двумя основными факторами производства являются труд и капитал. В экономических исследованиях часто используются двухфакторные производственные функции Кобба-Дугласа [10], имеющие следующий вид

$$Y = AK^{\alpha}L^{\beta}, \quad (2.1)$$

где Y – произведенная стоимость (стоимость выпущенной продукции), фактор K – капитал (или стоимость основных фондов), фактор L – труд (в денежном выражении может характеризовать размер выплат всем участникам производственного процесса), α – константа

(коэффициент эластичности производства по капиталу K), β – коэффициент эластичности производства по труду L , A – коэффициент, который часто связывают с уровнем технологий.

Предположим, что имеется n предприятий (фирм), выпускающих однотипную продукцию или оказывающих однотипные услуги (например, отели). Деятельность каждой из фирм за некоторый фиксированный период времени (например, квартал) будем характеризовать набором параметров $Y_i, K_i, L_i, (i = 1, \dots, n)$, имеющих тот же смысл, что и в производственной функции Кобба-Дугласа.

Для оценки технической эффективности фирм и последующего составления рейтинга применим подход на основе DEA моделирования. Будем характеризовать эффективность работы фирмы за рассматриваемый период времени величиной

$$T_i(\delta_0, \delta_1, \delta_2) = \frac{\delta_0 Y_i}{\delta_1 K_i + \delta_2 L_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.2)$$

Введем множество D допустимых значений весовых коэффициентов $(\delta_0, \delta_1, \delta_2)$:

$$D = \{(\delta_0, \delta_1, \delta_2) \mid \delta_0 \geq 0, \delta_1 \geq 0, \delta_2 \geq 0, \quad T_i(\delta_0, \delta_1, \delta_2) \leq 1, i = 1, \dots, n\}. \quad (2.3)$$

Рассмотрим n оптимизационных задач:

$$\max_{(\delta_0, \delta_1, \delta_2) \in D} T_i(\delta_0, \delta_1, \delta_2), \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.4)$$

Предположим, что набор весовых коэффициентов $(\delta_{0i}^*, \delta_{1i}^*, \delta_{2i}^*)$ является решением сформулированной задачи (2.4), то есть

$$T_i^* = T_i(\delta_{0i}^*, \delta_{1i}^*, \delta_{2i}^*) = \max_{(\delta_0, \delta_1, \delta_2) \in D} T_i(\delta_0, \delta_1, \delta_2). \quad (2.5)$$

Назовем величину T_i^* показателем (коэффициентом) технической эффективности фирмы $i = 1, \dots, n$. Очевидно, что коэффициенты $T_i(\delta_{0i}^*, \delta_{1i}^*, \delta_{2i}^*) \leq 1, i = 1, \dots, n$. Коэффициенты технической эффективности очевидным образом упорядочиваются в виде вариационного ряда¹ значений коэффициентов технической эффективности всех

¹Упорядочим коэффициенты T_i^* в порядке невозрастания и присвоим им новые номера $T_{(i)}^*$ в круглых скобках, которые будут использоваться в дальнейшем для упорядоченных выборок (вариационных рядов).

n фирм:

$$T_{(1)}^* \geq T_{(2)}^* \geq \dots \geq T_{(k)}^* \geq T_{(k+1)}^* \geq \dots \geq T_{(n)}^*. \quad (2.6)$$

Ряд (2.6) представляет собой рейтинг рассматриваемой совокупности однородных фирм для данного периода времени. Предположим, что первые k коэффициентов вариационного ряда равны единице, то есть

$$T_{(1)}^* = T_{(2)}^* = \dots = T_{(k)}^* = 1,$$

тогда в соответствии с методологией DEA моделирования соответствующие этим коэффициентам фирмы рассматриваются как фирмы с максимальной технической эффективностью (оптимально функционирующие) в данной совокупности фирм на рассматриваемом промежутке времени.

Преобразуем выражения для коэффициентов $T_i(\delta_0, \delta_1, \delta_2)$, $i = 1, \dots, n$ следующим образом:

$$T_i(\delta_0, \delta_1, \delta_2) = \frac{\delta_0 Y_i}{\delta_1 K_i + \delta_2 L_i} = \frac{1}{\theta_1 x_{1i} + \theta_2 x_{2i}} = \frac{1}{S_i(\theta_1, \theta_2)},$$

где

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{\delta_1}{\delta_0}, & \theta_2 &= \frac{\delta_2}{\delta_0}, \\ x_{1i} &= \frac{K_i}{Y_i}, & x_{2i} &= \frac{L_i}{Y_i}, \\ S_i(\theta_1, \theta_2) &= \theta_1 x_{1i} + \theta_2 x_{2i}. \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение множество

$$\tilde{D} = \{(\theta_1, \theta_2) \mid \theta_1 \geq 0, \theta_2 \geq 0, S_i(\theta_1, \theta_2) \geq 1, i = 1, \dots, n\}.$$

Рассмотрим оптимизационные задачи следующего вида:

$$\min_{(\theta_1, \theta_2) \in \tilde{D}} S_i(\theta_1, \theta_2), \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.7)$$

Пусть набор $(\theta_{1i}^*, \theta_{2i}^*)$ является решением i -ой оптимизационной задачи (2.7):

$$S_i^* = S_i(\theta_{1i}^*, \theta_{2i}^*) = \min_{(\theta_1, \theta_2) \in \tilde{D}} S_i(\theta_1, \theta_2), \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.8)$$

Для значений n оптимизационных задач S_i^* , $i = 1, \dots, n$ можно построить вариационный ряд

$$S_{(1)}^* \leq S_{(2)}^* \leq \dots \leq S_{(k)}^* \leq S_{(k+1)}^* \leq \dots \leq S_{(n)}^*, \quad (2.9)$$

который эквивалентен рейтингу (2.6). В системе декартовых координат (θ_1, θ_2) на плоскости рассмотрим n прямых в первом квадранте, $(\theta_1 \geq 0, \theta_2 \geq 0)$, определяемых уравнениями

$$S_i(\theta_1, \theta_2) = 1, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.10)$$

Считая, что $x_{2i} > 0$, уравнения (2.10) можно разрешить относительно θ_2 , в результате получаем линейные функции вида:

$$\theta_2 = -b_i\theta_1 + a_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.11)$$

где

$$b_i = \frac{x_{1i}}{x_{2i}}, \quad a_i = \frac{1}{x_{2i}}.$$

Рассмотрим кусочно-линейную огибающую этих прямых

$$\hat{\theta}_2(\theta_1) = \max_{i=1, \dots, n} (-b_i\theta_1 + a_i), \quad (2.12)$$

где $\theta_1 \in [0, \max_{i=1, \dots, n} \{ \frac{1}{x_{1i}} \}]$.

Теорема 2.1. *Справедливы следующие утверждения:*

1. Огибающая $\hat{\theta}_2(\theta_1)$ на множестве $[0, \max_{i=1, \dots, n} \{ \frac{1}{x_{1i}} \}]$ является вогнутой функцией аргумента θ_1 .
2. Множество $\tilde{D} = \{(\theta_1, \theta_2) \mid \theta_1 \geq 0, \theta_2 \geq 0, S_i(\theta_1, \theta_2) \geq 1, i = 1, \dots, n\}$ совпадает с множеством

$$\left\{ (\theta_1, \theta_2) \mid \theta_1 \in \left[0, \max_{i=1, \dots, n} \left\{ \frac{1}{x_{1i}} \right\} \right], \theta_2 \geq \hat{\theta}_2(\theta_1) \right\}$$

3. Для оптимизационных задач (2.4) и (2.7) выполняется равенство

$$T_i^* = \frac{1}{S_i^*}, \quad i = 1, \dots, n.$$

4. Решения задач (2.4) и (2.7) существуют.

5. Выполняется равенство $T_{(1)}^* = S_{(1)}^* = 1$.

Доказательство. Утверждение 1 теоремы очевидным образом следует из определения функции $\hat{\theta}_2(\theta_1)$ по формуле (2.12). Второе утверждение теоремы следует из построения вспомогательной оптимизационной задачи вида (2.7). Условие $S_i(\theta_1, \theta_2) \geq 1$ эквивалентно условию $\theta_2 \geq \hat{\theta}_2(\theta_1)$. Условия $\theta_1 \geq 0$, $\theta_2 \geq 0$ эквивалентны условию $\theta_1 \in \left[0, \max_{i=1, \dots, n} \left\{ \frac{1}{x_{1i}} \right\} \right]$. По построению эквивалентной оптимизационной задачи (2.7), описанной выше, очевидно, что решения задач (2.4) и (2.7) удовлетворяют соотношению $T_i^* = \frac{1}{S_i^*}$ для всех $i = 1, \dots, n$. Поскольку область D – непустое множество, то решение задачи (2.4) существует, из чего следует существование решения задачи (2.7) в силу их эквивалентности. Так как сформулированные оптимизационные задачи являются задачами линейного программирования (2.4) с ограничениями в виде области D , где $T_i \leq 1$, то можно утверждать, то существует хотя бы одно i , для которого $T_i^* = 1$. Следовательно, в вариационном ряду $T_{(1)}^* = 1$. В силу эквивалентности оптимизационных задач (2.4) и (2.7), значению $T_{(1)}^* = 1$ соответствует значение $S_{(1)}^* = 1$ в вариационном ряду (2.9). $\square$

Следствие 2.1. Для значений индекса i , таких что при каком-либо $\theta_1 \in \left[0, \max_{i=1, \dots, n} \left\{ \frac{1}{x_{1i}} \right\} \right]$ и $\hat{\theta}_2(\theta_1) = -b_i\theta_1 + a_i$, где $b_i = \frac{x_{1i}}{x_{2i}}$, $a_i = \frac{1}{x_{2i}}$, выполняется равенство $T_i^* = S_i^* = 1$, фирма i в данной совокупности фирм обладает максимальной эффективностью.

Рассмотрение, проведенное выше, относится к некоторому фиксированному промежутку времени (например, к некоторому кварталу определенного года). Разумеется, целесообразно исследование динамики рейтингов фирм [3], другими словами, для последовательных промежутков времени $m = 1, \dots, M$, аналогично предыдущему строятся оценки технической эффективности каждой из фирм среди рассматриваемой совокупности фирм для последовательных временных интервалов. Таким образом, для каждой фирмы $i = 1, \dots, n$ строится последовательность коэффициентов T_{im}^* , $m = 1, \dots, M$, характеризующих техническую эффективность фирмы i среди совокупности

рассматриваемых фирм для последовательных промежутков времени (одинаковой длины) $m = 1, \dots, M$. Вместо рассмотрения коэффициентов T_{im}^* , $m = 1, \dots, M$, можно исследовать эквивалентные им коэффициенты S_{im}^* , $m = 1, \dots, M$.

Следовательно, каждая фирма i порождает временной ряд коэффициентов, характеризующих техническую эффективность фирмы. Особенность этого временного ряда в том, что имеется идеальная точка, то есть ряд, состоящий из единиц, так как максимальное (наилучшее) значение коэффициента равно единице. Кластеризация фирм и поиск устойчивых коалиционных разбиений полностью основывается на кластеризации временных рядов коэффициентов технической эффективности.

3. Теоретико-игровой подход в кластерном анализе

Кластеризация – это задача разбиения объектов на группы таким образом, чтобы внутри каждой группы оказались похожие (относительно заранее заданного функционала) объекты, а объекты разных групп должны быть как можно более отличны. Известно, что результаты кластеризации зависят от многих факторов: выбора метрики или меры близости, подхода кластеризации, методов определения количества кластеров. В рамках данной работы предлагается использовать теоретико-игровой подход [2], так как он позволяет найти устойчивую кластерную структуру.

3.1. Игры с коалиционной структурой

Метод кластеризации, предложенный в [2], основанный на теоретико-игровом подходе, поэтому напомним сначала основные определения и теоремы, используемые далее в работе. Рассмотрим игру (N, v, π) со множеством игроков N , характеристической функцией v и коалиционной структурой π .

Определение 3.1. *Характеристической функцией в игре с множеством игроков N называется функция $v : 2^N \rightarrow \mathbb{R}^1$, определенная на множестве подмножеств N , где $v(S)$, $S \subset N$, показывает «силу» коалиции S . При этом, $v(\emptyset) = 0$.*

Определение 3.2. Коалиционная структура π – это разбиение множества всех игроков N следующим образом: $\pi = \{B_1, \dots, B_m\}$, причем

- $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_m = N$,
- $B_i \cap B_j = \emptyset, \forall i, j = 1, \dots, m, i \neq j$.

Определение 3.3. Вектор $\psi^\pi = (\psi_1^\pi, \dots, \psi_n^\pi) \in \mathbb{R}^n$ называется распределением выигрыша в игре (N, v, π) , если выполняется условие коллективной рациональности:

$$\sum_{i \in B_j} \psi_i^\pi = v(B_j), \quad \forall B_j \in \pi.$$

Определение 3.4. Распределение выигрыша $\psi^\pi \in \mathbb{R}^n$ называется дележом в игре (N, v, π) , если выполняется условие индивидуальной рациональности:

$$\psi_i^\pi \geq v(\{i\}), \quad \forall i \in N.$$

В кооперативной теории игр существует ряд процедур для распределения выигрыша ψ^π , в этой работе будут рассмотрены вектор Ауманна–Дрезе

$$\phi_k^\pi = \sum_{\substack{S \subseteq B(k) \\ S \ni k}} \frac{(|B(k)| - |S|)! (|S| - 1)!}{|B(k)|!} [v(S) - v(S \setminus \{k\})]$$

и ES-вектор (equal surplus division value)

$$\xi_k^\pi = v(\{k\}) + \frac{\left(v(B(k)) - \sum_{i \in B(k)} v(\{i\}) \right)}{|B(k)|},$$

где $B(k) \in \pi$ – коалиция, содержащая игрока $k \in N$.

Практический интерес представляет поиск такой коалиционной структуры, от которой не выгодно отклоняться ни одному игроку. Наличие такой коалиционной структуры свидетельствует о существовании четкой кластеризации. Определение устойчивой коалиционной структуры может быть сформулировано различными способами, в этой работе использовано определение из работы [15], так как оно соответствует концепции равновесия Нэша.

Определение 3.5. Коалиционную структуру π будем называть устойчивой относительно выбранного одноточечного принципа оптимальности, если для любого игрока $k \in N$, любой коалиции $B(k) \in \pi$ и коалиционной структуры π' :

$$\psi_k^\pi \geq \psi_k^{\pi'},$$

где разбиение π' отличается от π тем, что игрок k переходит из коалиции $B(k)$ в B , т. е. $\pi' = \{B(k) \setminus \{k\}, B \cup \{k\}, \pi_{-B(k) \cup B}\}$, причем $B \in \pi_{-B(k)} \cup \emptyset$ и π_{-B_k} , такое что $\pi_{-B_k} = \pi \setminus B_k$.

Представим, что коалиционная структура π устойчива и игрок $k \in B(k)$ имеет следующие стратегии:

1. Остаться в коалиции $B(k)$.
2. Сформировать новую коалицию $\{k\}$.
3. Присоединиться к другой существующей коалиции в π .

Тогда игрок k не может получить больший выигрыш, придерживаясь стратегий 2 и 3, чем он получит при стратегии 1, при условии, что остальные игроки не отклоняются. Из этих принципов вытекает следующая теорема, доказательство которой приведено в [4].

Теорема 3.1. Для того, чтобы коалиционная структура π была устойчивой относительно выбранного принципа оптимальности необходимо, чтобы распределение выигрыша ψ^π , вычисленное согласно этому принципу оптимальности для коалиционной структуры π , являлось дележом.

3.2. Кластеризация как задача теории игр

Пусть $N = \{1, 2, \dots, n\}$ – множество объектов таких, что для любых двух объектов определена функция расстояния $d(i, j) : N \times N \mapsto [0, 1]$ и функция сходства $f(i, j) : N \times N \mapsto [0, 1]$. В задаче кластеризации коалицию $S \subset N$ будем называть кластером. Причем для этих функций выполнено свойство симметричности, т. е. $d(i, j) = d(j, i)$ и $f(i, j) = f(j, i)$ при всех $i, j \in N$ и с возрастанием одной функции вторая не возрастает:

$$d(i, j) \geq d(k, l) \iff f(i, j) \leq f(k, l) \text{ для всех } i, j, k, l \in N.$$

Под коалицией S понимается некоторое непустое подмножество множества объектов N , которые объединяются в кластер. Рассмотрим характеристическую функцию игры (N, v, π) в виде

$$v(S) = \sum_{\substack{i, j \in S \\ i \neq j}} f(i, j) + 2 \sum_{\substack{i \in S \\ k \in N \setminus S}} d(i, k). \quad (3.1)$$

Значение характеристической функции $v(S)$ велико для кластеров S , которые содержат такие объекты, которые имеют большое значение функции сходства $f(i, j)$ для объектов, входящих в кластер $i, j \in S$, и в то же время большое расстояние $d(i, k)$ до объектов других кластеров $k \in N \setminus S$.

Характеристическая функция $v(\cdot)$, определяемая согласно (3.1), не является монотонной, т. е. неравенство $v(S) \leq v(T)$ не выполняется для любых двух коалиций $S \subset N$ и $T \subset N$, таких что $S \subseteq T$. Характеристическая функция $v(\cdot)$, определяемая согласно (3.1), не является супераддитивной, т. е. неравенство $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$ не выполняется для любых двух непересекающихся непустых коалиций $S \subset N$ и $T \subset N$. Также значение характеристической функции объединения двух кластеров $v(S \cup T)$ будет больше, чем сумма значений характеристических функций на кластерах $v(S) + v(T)$, только при условии, что сходство объектов хотя бы в 2 раза больше, чем расстояние между ними $\sum_{\substack{i \in S \\ j \in T}} f(i, j) \geq 2 \sum_{\substack{i \in S \\ j \in T}} d(i, j)$. Эти свойства построенной характеристической функции вида (3.1) доказаны в [2].

Отсутствие свойства супераддитивности говорит о том, что в общем случае игрокам не выгодно объединяться в гранд-коалицию, что естественно для задачи кластеризации, и именно поэтому имеет смысл рассматривать игры с коалиционной структурой π , коалиционную структуру можно интерпретировать как возможный вариант кластеризации. Таким образом, задача кластеризации сводится к поиску устойчивой коалиционной структуры.

3.3. Существование устойчивых коалиционных структур

Утверждение 3.1. В игре (N, v, π) с коалиционной структурой π и характеристической функцией v вида (3.1) компоненты вектора

Ауманна–Дрезе ϕ^π определяются формулой:

$$\phi_k^\pi = \sum_{\substack{S \subseteq B(k) \\ S \ni k}} \frac{2(b-s)!(s-1)!}{b!} \left[\sum_{i \in S \setminus \{k\}} (f(i, k) - d(i, k)) + \sum_{i \in N \setminus S} d(i, k) \right],$$

где $|B(k)| = b$ и $|S| = s$.

Следствие 3.1. $\phi_k^\pi \geq 0$ тогда и только тогда, когда выполнено следующее неравенство

$$\sum_{\substack{S \subseteq B(k) \\ S \ni k}} \frac{2(b-s)!(s-1)!}{b!} \left[\sum_{i \in S \setminus \{k\}} (f(i, k) - d(i, k)) + \sum_{i \in N \setminus S} d(i, k) \right] \geq 0.$$

Можно заметить, что в тривиальном случае, когда для некоторого игрока $k \in N$ и всех $S \subseteq B(k)$, содержащих k , выполнено неравенство

$$f(i, k) \geq d(i, k), \forall i \in S \setminus \{k\},$$

компоненты вектора Ауманна–Дрезе ϕ_k^π будут неотрицательны.

Утверждение 3.2. Коалиционная структура π в игре (N, v, π) устойчива относительно вектора Ауманна–Дрезе, если

$$\forall k \in N, \forall B \in \pi_{-B(k)} \cup \emptyset \implies$$

$$\sum_{\substack{S \subseteq B(k) \\ S \ni k}} \frac{2(b-s)!(s-1)!}{b!} \left[\sum_{i \in S \setminus \{k\}} (f(i, k) - d(i, k)) + \sum_{i \in N \setminus S} d(i, k) \right] \geq \sum_{\substack{S' \subseteq B \cup \{k\} \\ S' \ni k}} \frac{2(b'-s')!(s'-1)!}{b'!} \left[\sum_{i \in S' \setminus \{k\}} (f(i, k) - d(i, k)) + \sum_{i \in N \setminus S'} d(i, k) \right],$$

здесь $|B(k)| = b$, $|S| = s$, $|B| = b'$, $|S'| = s'$ и $B \cap B(k) = \emptyset$, $B \in \pi \cup \emptyset$, $B(k) \in \pi$.

Замечание 3.1. В игре (N, v, π) не всегда существует устойчивая относительно вектора Ауманна–Дрезе коалиционная структура.

Утверждение 3.3. В игре (N, v, π) с коалиционной структурой π и характеристической функцией v вида (3.1) компоненты ES -вектора

ξ^π заданы формулой:

$$\xi_k^\pi = 2 \sum_{j \in N \setminus \{k\}} d(k, j) + \frac{1}{b} \left(\sum_{\substack{i \in B(k) \\ j \in B(k) \\ i \neq j}} (f(i, j) - 2d(i, j)) \right),$$

где $|B(k)| = b$.

Следствие 3.2. $\xi_k^\pi \geq 0$ тогда и только тогда, когда выполнено следующее неравенство

$$2 \sum_{j \in N \setminus \{k\}} d(k, j) \geq \frac{1}{b} \left(\sum_{\substack{i \in B(k) \\ j \in B(k) \\ i \neq j}} (2d(i, j) - f(i, j)) \right).$$

Можно заметить, что в случае объединения в кластер сильно схожих объектов выполняется условие неотрицательности компонент вектора (3.2). Под сильно схожими объектами $i, j \in N$ здесь понимаются такие, что выполняется $f(i, j) \geq 2d(i, j)$.

Утверждение 3.4. Коалиционная структура π в игре (N, v, π) устойчива относительно ES -вектора, если

$$\forall B \in \pi, \forall B' \in \pi_{-B} \cup \emptyset \implies$$

$$\frac{1}{b} \left[\sum_{\substack{i \in B \\ j \in B \\ i \neq j}} (f(i, j) - 2d(i, j)) \right] \geq \frac{1}{b'} \left[\sum_{\substack{i \in B' \\ j \in B' \\ i \neq j}} (f(i, j) - 2d(i, j)) \right],$$

$|B| = b$, $|B'| = b'$ и $B \cap B' = \emptyset$, $B' \in \pi \cup \emptyset$, $B \in \pi$.

Следствие 3.3. Из предыдущего утверждения и теоремы 3.1 следует, что необходимым условием устойчивости коалиционной структуры π в игре (N, v, π) является выполнение следующего неравенства:

$$\frac{1}{b} \left[\sum_{\substack{i \in B \\ j \in B \\ i \neq j}} (f(i, j) - 2d(i, j)) \right] \geq 0$$

для всех B в коалиционной структуре π .

Замечание 3.2. В игре (N, v, π) не всегда существует устойчивая относительно вектора ES-вектора структура.

Все утверждения раздела 3.3 доказаны в работе [2].

4. Пример

В этом разделе представлен результат работы предложенного метода по нахождению кластеров фирм-пекарен с учетом эффективности их работы на протяжении 20 лет. Пусть каждая пекарня имеет номер i от 0 до 9 и заданы Y_i, K_i, L_i – произведенная стоимость, стоимость основных фондов и размер выплат членам трудового коллектива соответственно как основные характеристики их деятельности за последние 20 лет (1998–2018). Эти характеристики представлены на рис. 1–3.

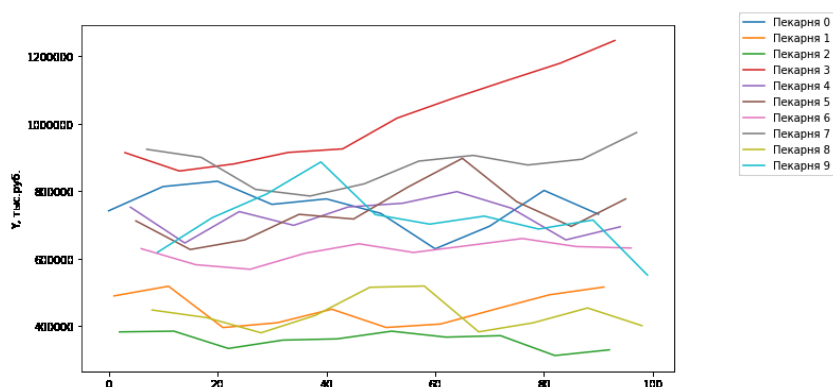


Рисунок 1. Характеристики эффективности пекарен: стоимость выпущенной продукции

Решив оптимизационные задачи вида (2.8) для каждого года, получим набор временных рядов, каждый ряд соответствует некоторой пекарне и содержит величины, обратные коэффициентам технической эффективности (см. полученные временные ряды на рис.4).

Для того чтобы найти пекарни с похожей эффективностью, мы будем решать задачу кластеризации временных рядов $S_{(i,t)}^*$, $i = \{0, 1, \dots, 9\}$, $t = \{1998, 1999, \dots, 2018\}$. В качестве функции расстояния выбрана мера различия d , основанная на временной корреляции и

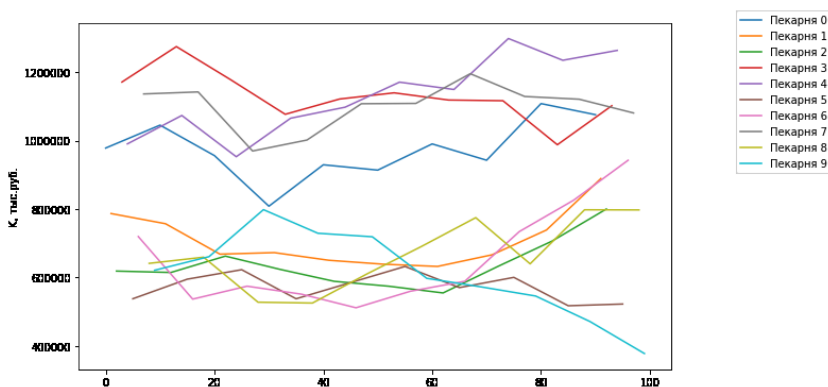


Рисунок 2. Характеристики эффективности пекарен: капитал

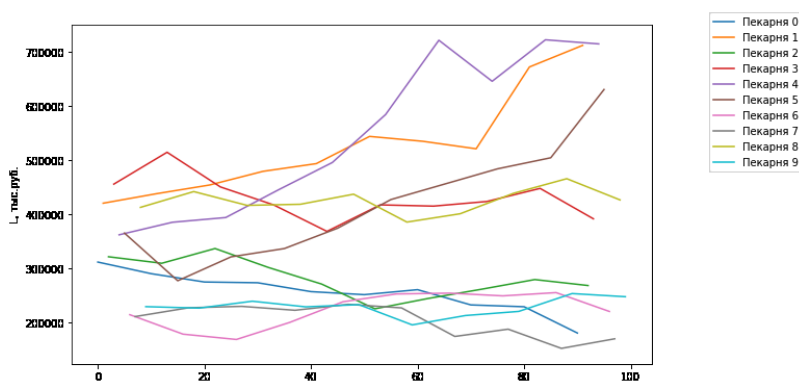


Рисунок 3. Характеристики эффективности пекарен: оплата труда

евклидовом расстоянии (CORT) с параметром k , равным единице [8]:

$$c(x, y) = \frac{\sum_{t=1}^{n-1} (x(t+1) - x(t))(y(t+1) - y(t))}{\sqrt{\sum_{t=1}^{n-1} (x(t+1) - x(t))^2} \sqrt{\sum_{t=1}^{n-1} (y(t+1) - y(t))^2}},$$

$$d(x, y) = \frac{2}{1 + \exp(kc(x, y))} \|x - y\|_2.$$

т.к. при поиске расстояния она учитывает динамику временных рядов. Теоретико-игровая процедура кластеризации показала, что для

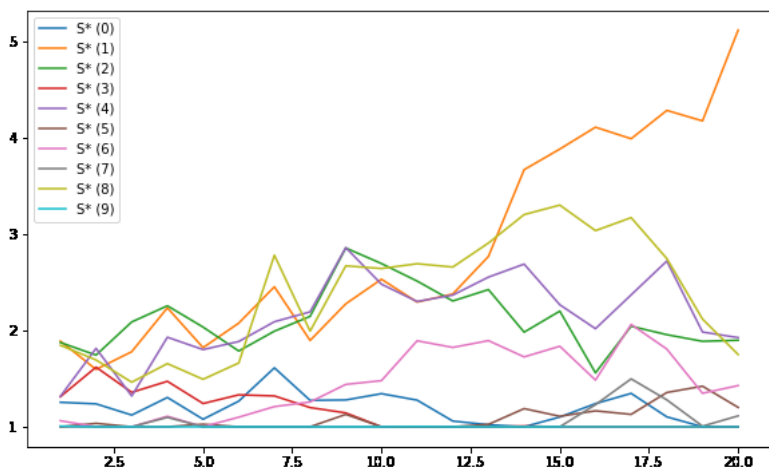


Рисунок 4. Решения оптимизационных задач (2.8) для пекарен

такой задачи существует устойчивое разбиение относительно ES -вектора и вектора Ауманна–Дрезе:

$$K = \{\{1\}, \{2, 4, 8\}, \{0, 3, 5, 6, 7, 9\}\}.$$

При этом ES -вектор для коалиционной структуры K выглядит следующим образом:

$$\xi^K = \{8.36, 14.43, 8.87, 9.57, 8.27, 9.56, 8.77, 8.95, 9.53, 9.95\}.$$

Вектор Ауманна–Дрезе для коалиционной структуры K равен

$$\phi_K = \{8.75, 14.43, 8.81, 9.52, 8.49, 9.67, 7.40, 9.57, 9.36, 10.22\}.$$

На рис. 5 временные ряды с величинами обратными коэффициентам технической эффективности разбиты на кластеры (каждый кластер имеет свой цвет и тип линии), можно заметить, что пекарни $\{0, 3, 5, 6, 7, 9\}$ образуют кластер наиболее эффективных пекарен, $\{2, 4, 8\}$ показывают среднюю эффективность и пекарня 1 образует отдельный кластер, так как в последние 7 лет демонстрирует ухудшение в работе.

Результаты DEA моделирования для пекарни 1 подтверждают первоначальную гипотезу о неэффективности работы пекарни 1. Если посмотреть на первоначальные характеристики работы пекарни 1

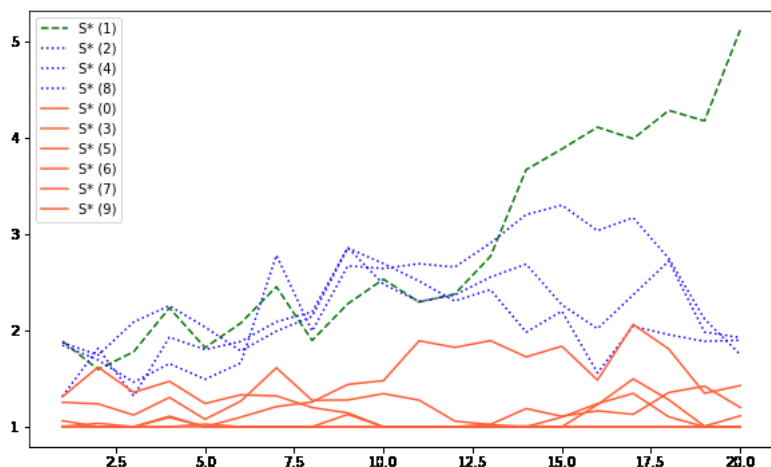


Рисунок 5. Разбиение пекарен на кластеры согласно эффективности их работы

в табл. 4, стоимость выпущенной продукции Y_1 убывает, в то время как величины L_1 и K_1 растут.

Таблица 1. Показатели эффективности работы пекарни 1 (нечетные года), тыс.руб

t	1999	2001	2003	2005	2007	2009	2011	2013	2015	2017
K_1	757	672	638	666	889	680	756	726	891	1283
L_1	437	479	543	521	712	634	658	819	893	906
Y_1	517	409	395	449	515	414	361	312	331	340

5. Заключение

В работе описана методология анализа деятельности предприятий – DEA моделирование. Такой подход особенно удобен для сравнения эффективности работы «однородных» объектов, так как методология нечувствительна к различиям в масштабе числовых характеристик. В связи с тем, что в финансовом анализе обычно интерес представляет динамика показателей, в статье предложен двухэтапный алгоритм: на первом этапе DEA моделирование позволяет получить временные ряды для каждого предприятия, характеризующие

их эффективность, на втором – объекты разбиваются на группы при помощи методов кластеризации. Причем для многих задач возможно получить разбиение, которое будет устойчивым относительно выбранного одноточечного принципа оптимальности, отсутствие устойчивого разбиения говорит о несуществовании четкой кластеризации (в рамках определения 3.5). Таким образом, получая на входе характеристики функционирования предприятий, на выходе алгоритм выдает разбиение этих предприятий на группы объектов, схожих по динамике эффективности. Для наглядности в разделе 4 приведен пример анализа деятельности пекарен за последние 20 лет.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бондаренко Ю. В., Глазьева Ю. В., Бутырина Н. А. *Алгоритм количественной оценки эффективности деятельности российских банков на основе подхода DEA* // Управление строительством. 2018. № 1 (10). С. 109–114.
2. Буре В. М., Староверова К. Ю. *Применение теории кооперативных игр с коалиционной структурой для кластеризации данных* // Математическая теория игр и ее приложения. 2018. Т. 10. № 1. С. 23–39.
3. Ермолин Н. А., Мазалов В. В., Печников А. А. *Теоретико-игровые методы нахождения сообществ в академическом Вебе* // Труды СПИИРАН. 2017. № 55. С. 237–254.
4. Парилина Е. М., Седаков А. А. *Устойчивость коалиционных структур одной модели банковской кооперации* // Математическая Теория Игр и ее Приложения. 2012. Т. 4, вып. 4. С. 45–62.
5. Староверова К. Ю., Буре В. М. *Мера различия временных рядов, основанная на их характеристиках* // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2017. Т. 13. № 1. С. 51–60.

6. Andersen P., Petersen N. C. *A Procedure for Ranking Efficient Units in Data Envelopment Analysis* // Management Science. 1993. Vol. 39. No. 10. P. 1261–1264.
7. Avrachenkov K. E., Kondratev A. Y, Mazalov V. V., Rubanov D. G. *Network partitioning algorithms as cooperative games* // Computational Social Networks. 2018. Vol. 5. No. 11. P. 1-28.
8. Charnes A., Cooper W.W., Rhodes E. *Measuring efficiency of decision making units* // European Journal of Operational Research. 1978. Vol. 2(6). P. 429–444.
9. Chouakria A.D., Nagabhushan P.N. *Adaptive dissimilarity index for measuring time series proximity* // Advances in Data Analysis and Classification. 2007. Vol. 1(1). Pp. 5–21.
10. Cobb C.W., Douglas P.H. *A Theory of Production* // American Economic Review. 1928. Vol. 18. No. 1. P. 139–165.
11. Fiala F. *Project portfolio designing using data envelopment analysis and De Novo optimisation* // Central European Journal of Operations Research. 2018. Vol. 26. P. 847–859.
12. Omrani H., Fahimi P., Mahmood A. *A data envelopment analysis game theory approach for constructing composite indicator: An application to find out development degree of cities in West Azarbaijan province of Iran* // Socio-Economic Planning Sciences (article in press)
13. Omrani H., Shafaat K., Emrouznejad A. *An integrated fuzzy clustering cooperative game data envelopment analysis model with application in hospital efficiency* // Expert Systems With Applications. 2018. Vol. 114. P. 615–628.
14. Shao Y., Bi G., Yang F., Xia Q. *Resource allocation for branch network system with considering heterogeneity based on DEA method* // Central European Journal of Operations Research. 2018. Vol. 26. P. 1005–1025.

15. Sedakov A., Parilina E., Volobuev Yu. & Klimuk D. *Existence of Stable Coalition Structures in Three-person Games* // Contributions to Game Theory and Management. 2013. Vol. 6. P. 407–422.

TWO-FACTOR DEA MODELING AND CLUSTARIZATION OF HOMOGENEOUS FIRMS

Vladimir M. Bure, Saint Petersburg State University, Dr.Sc.,
professor (v.bure@spbu.ru),

Elena M. Parilina, Saint Petersburg State University, School of
Mathematics and Statistics, Qingdao University, Institute of Applied
Mathematics of Shandong, Ph.D., associate professor
(e.parilina@spbu.ru),

Kseniya Yu. Staroverova, Saint Petersburg State University,
postgraduate student (st016234@student.spbu.ru).

Abstract: The paper presents a clusterization model for homogeneous firms using effectiveness of their activities over a certain time period. The firm efficiency is investigated by the DEA (Data envelopment analysis) methodology, which is based on solving optimization problems and allows to compare firms taking into account many factors of their activities. At the second step of the analysis, the time series of estimators of firm effectiveness obtained as a result of DEA modeling are used to cluster firms and find stable partitions of the set of firms.

Keywords: DEA modeling, time series clustarization, analysis of firm efficiencies.

УДК 519.865+519.95

ББК 22.18

ДЕЛЕГИРОВАНИЕ ПОЛНОМОЧИЙ В ИЕРАРХИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

МИХАИЛ А. ГОРЕЛОВ

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына

ФИЦ ИУ РАН

119333, Москва, ул. Вавилова, д. 44, кор.2

e-mail: griefer@ccas.ru

Рассматривается иерархическая игра двух лиц с неопределенным фактором. Считается, что агент более информирован о значении этого фактора, чем Центр. В этих предположениях изучается целесообразность для Центра передачи агенту части полномочий по выбору своих управлений.

Ключевые слова: принятие решений в условиях неопределенности, иерархические игры, децентрализация управления.

Поступила в редакцию: 28.02.19 *После доработки:* 16.05.19 *Принята к публикации:* 14.10.19

1. Введение

Будем рассматривать модель иерархической системы, в которой элемент верхнего уровня (Центр) задает некоторое множество. Из этого множества его подчиненный имеет право выбрать «физическое» управление, от которого зависят выигрыши обоих игроков. При этом учитывается наличие внешнего неопределенного фактора, значение которого в момент принятия решения известно подчиненному, но не известно Центру.

Подобные модели, в которых стратегиями одного из игроков являлись множества (точнее, точечно-множественные отображения) уже встречались. Видимо, впервые они появились в работах [6] и [8].

Но в этих и нескольких более поздних работах подобные конструкции играли вспомогательную роль. С одной стороны использование точечно-множественных отображений вместо функций улучшало аналитические свойства решаемой задачи. С другой стороны таким способом «легализовывались» добровольные обмены информацией.

Но на ситуацию можно взглянуть по-другому. Если Центр, вместо того, чтобы выбирать управление самостоятельно, передоверяет это право агенту, то можно говорить о некой децентрализации управления. А задача выбора оптимальной степени децентрализации или, более обще, оптимальной структуры системы управления является весьма актуальной (см. [2,5,9]). Поэтому имеет смысл изучить подобные конструкции более детально. Сразу же отметим, что общих методов решения подобных задач пока нет.

В данной статье строится и исследуется самая простая и самая общая модель такого рода. Поэтому удастся получить лишь самые простые результаты. Конечно же, они недостаточно конструктивны, чтобы считать поставленную задачу решенной. Но некоторые важные качественные выводы получить удалось.

В частности, стало ясно, что задачу выбора оптимальной степени децентрализации можно поставить математически корректно и в то же время достаточно осмысленно в содержательном плане. Правда, задачи о максимальной и о минимальной степени децентрализации ставятся в разных терминах. В задаче о минимальной степени децентрализации в качестве меры децентрализации можно использовать мощность выбранного множества–стратегии. А в задаче о максимальной степени децентрализации разумно использовать частичную упорядоченность множеств отношением включения.

2. Базовая модель

В дальнейшем будут удобны следующие обозначения. Обозначим через $\Phi(X, Y)$ класс всех функций, отображающих множество X в множество Y , $\Sigma(X)$ – семейство всех непустых подмножеств множества X , а $\Psi(X, Y)$ – семейство всех точечно-множественных отображений, ставящих в соответствие каждой точке $x \in X$ непустое подмножество множества Y (разумеется, $\Psi(X, Y) = \Phi(X, \Sigma(Y))$). Буква $\mathbb{R}$, как обычно, обозначает множество действительных чисел.

Как отмечалось во введении, в данной статье основной интерес будут представлять модели, в которых агент выбирает управления из множества, выбранного Центром, т. е., модели, в которых возможности агента зависят от выбора Центра. Кроме того, существенно наличие неопределенных факторов. Таким образом, адекватная логическая схема – это игра с запрещенными ситуациями и неопределенными факторами.

На протяжении данной статьи игрой будем называть набор $\Gamma = \langle U, V, \Omega, A, g, h \rangle$. Здесь U, V, A – множества, $\Omega \in \Psi(U, V)$, $g : \text{graph}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ и $h : \text{graph}(\Omega) \times A \rightarrow \mathbb{R}$ – функции, а

$$\text{graph}(\Omega) = \{(u, v) \in U \times V : v \in \Omega(u)\} -$$

график точечно-множественного отображения Ω .

Содержательно эти конструкции интерпретируются следующим образом. Первый игрок (Центр) выбирает свое управление u из множества U . Множество $\Omega(u)$ задает ограничения, накладываемые на выбор управления v второго игрока. Именно он отвечает за выполнение этих ограничений. При выбранных управлениях u и v первый игрок получает выигрыш $g(u, v)$. При тех же условиях выигрыш $h(u, v, \alpha)$ второго игрока зависит не только от выбранных управлений, но еще и от реализовавшегося значения $\alpha \in A$ неопределенного фактора.

Приведем два определения максимального гарантированного результата.

Определение 2.1. *Множество рациональных ответов второго игрока на стратегию u определяется условием*

$$BR(u, \alpha) = \left\{ v \in \Omega(u) : h(u, v, \alpha) = \max_{w \in \Omega(u)} h(u, w, \alpha) \right\},$$

если максимум в этой формуле достигается, и

$$BR(u, \alpha) = \left\{ v \in \Omega(u) : h(u, v, \alpha) > \max_{w \in \Omega(u)} h(u, w, \alpha) - \kappa \right\}$$

в противном случае (здесь κ – некоторое фиксированное положительное число). Максимальный гарантированный результат $R_\kappa(\Gamma)$ первого игрока в игре Γ равен

$$R_\kappa(\Gamma) = \sup_{u \in U} \inf_{\alpha \in A} \inf_{v \in BR(u, \alpha)} g(u, v).$$

Это определение традиционно и смысл введенных конструкций понятен. Пусть первый игрок выбрал управление u , и реализовалось значение неопределенного фактора α . Если это станет известно второму игроку, то для него естественно выбрать одно из управлений из множества $BR(u, \alpha)$. Это множество может заранее оценить первый игрок, но он не знает окончательного выбора партнера, так же как и реализовавшееся значение неопределенного фактора. В этих условиях он может гарантированно получить выигрыш

$$\inf_{\alpha \in A} \inf_{v \in BR(u)} g(u, v).$$

Естественно выбирать управление u так, чтобы этот гарантированный выигрыш был побольше.

В работе удобнее альтернативное определение максимального гарантированного результата.

Определение 2.2. Число γ называется гарантированным результатом первого игрока в игре Γ , если существует стратегия $u \in U$ и для любого значения $\alpha \in A$ найдется такое число λ , что выполняются условия:

1. существует стратегия $w \in \Omega(u)$, для которой $h(u, w, \alpha) \geq \lambda$;
2. для любого управления $v \in \Omega(u)$ справедливо одно из неравенств $g(u, v) \geq \gamma$ или $h(u, v, \alpha) < \lambda$.

Точная верхняя грань $R(\Gamma)$ гарантированных результатов первого игрока в игре Γ называется его максимальным гарантированным результатом в игре Γ .

Интерпретация этих конструкций тоже понятна. При фиксированных $u \in U$ и $\alpha \in A$ все доступные второму игроку стратегии разбиваются на два класса: рациональные и нерациональные. Естественно считать, что при некотором значении λ для рациональных стратегий выполняется условие $h(u, w, \alpha) \geq \lambda$, а для нерациональных – противоположное неравенство. Число γ является гарантированным результатом первого игрока, если при всяком рациональном выборе партнера он получает выигрыш, не меньший γ . За это отвечает второй пункт определения. Поскольку какой-то выбор второй игрок сделать должен, хотя бы одна стратегия должна считаться рациональной. Это содержание первого пункта определения.

Разумеется, использование двух определений для одного термина оправдано только в том случае, когда эти определения эквивалентны. В общем случае эквивалентности определений 2.1 и 2.2 нет. Это видно хотя бы из того, что величина $R_\kappa(\Gamma)$, вообще говоря, зависит от κ , а величина $R(\Gamma)$ – нет. Но в данной статье будут исследоваться два более узких класса игр, для которых эти определения эквивалентны. Для каждого из этих классов игр Γ доказательства равенств $R(\Gamma) = R_\kappa(\Gamma)$ разбиваются на две части: одну стандартную, а другую – специфичную для каждого из классов. В этом разделе будут сформулированы и доказаны два утверждения, относящиеся к стандартной части.

В множестве U можно выделить подмножество U^r таких стратегий u , что максимум $\max_{v \in \Omega(u)} h(u, v, \alpha)$ достигается для всех $\alpha \in A$. Наряду с игрой $\Gamma = \langle U, V, \Omega, A, g, h \rangle$ можно рассмотреть другую игру $\Gamma^r = \langle U^r, V, \Omega, A, g, h \rangle$ (здесь сужение точечно множественного отображения Ω на множество U^r обозначено той же буквой Ω ; то же относится к функциям g и h). Малоинтересный случай, когда $U^r = \emptyset$ оставим без внимания.

Очевидно, $R(\Gamma^r) \leq R(\Gamma)$ и $R_\kappa(\Gamma^r) \leq R_\kappa(\Gamma)$.

Лемма 2.1. *Справедливо неравенство $R(\Gamma^r) \leq R_\kappa(\Gamma)$.*

Доказательство. Пусть γ – любой гарантированный результат первого игрока в игре Γ^r в смысле определения 2.2. Фиксируем стратегию $u \in U^r$, существование которой предусмотрено определением 2.2, произвольное $\alpha \in A$ и число λ , для которого выполняются пункты 1 и 2 этого определения (для выбранных u и α).

В силу первого пункта определения для некоторого $w \in \Omega(u)$ выполняется неравенство $h(u, w, \alpha) \geq \lambda$, поэтому $\lambda \leq \max_{v \in \Omega(u)} h(u, v, \alpha)$. Тогда для любого $v \in BR(u, \alpha)$ имеем $h(u, v, \alpha) \geq \lambda$ и в силу второго пункта определения будет верно неравенство $g(u, v) \geq \gamma$. В силу произвольности $v \in BR(u, \alpha)$ отсюда следует условие $\inf_{v \in BR(u)} g(u, v) \geq \gamma$, а так как $\alpha \in A$ выбрано произвольно, то $\inf_{\alpha \in A} \inf_{v \in BR(u)} g(u, v) \geq \gamma$ и тем более $R_\kappa(\Gamma) = \sup_{u \in U} \inf_{\alpha \in A} \inf_{v \in BR(u)} g(u, v) \geq \gamma$.

Так как γ – произвольный гарантированный результат в игре Γ^r , отсюда следует неравенство $R(\Gamma^r) \leq R_\kappa(\Gamma)$. $\square$

Справедливо аналогичное утверждение.

Лемма 2.2. *Имеет место неравенство $R_\kappa(\Gamma^r) \leq R(\Gamma)$.*

Доказательство. Фиксируем произвольное число $\gamma < R_\kappa(\Gamma^r)$. Выберем стратегию $u \in U^r$ так, что

$$\inf_{\alpha \in A} \inf_{v \in BR(u)} g(u, v) \geq \gamma. \quad (2.1)$$

Пусть α – любой параметр из множества A . Положим

$$\lambda = \max_{v \in \Omega(u)} h(u, v, \alpha).$$

Тогда для любого $w \in BR(u, \alpha)$ будет выполняться неравенство $h(u, w, \alpha) \geq \lambda$ (конечно же, на самом деле имеет место равенство). Следовательно, пункт 1 определения 2.2 выполнен. В силу условия (2.1) для всех $v \in BR(u, \alpha)$ выполнено неравенство $g(u, v) \geq \gamma$. А в силу определения числа λ для $v \notin BR(u, \alpha)$ выполняется неравенство $h(u, v, \alpha) < \lambda$. Таким образом, выполнен и второй пункт определения 2.2. Значит, γ – гарантированный результат первого игрока в игре Γ .

Поэтому $\gamma < R(\Gamma)$. В силу произвольности γ отсюда следует неравенство $R_\kappa(\Gamma^r) \leq R(\Gamma)$. $\square$

Таким образом, для того, чтобы доказать равенство $R(\Gamma) = R_\kappa(\Gamma)$ достаточно установить одно из двух равенств $R(\Gamma^r) = R(\Gamma)$ или $R_\kappa(\Gamma^r) = R_\kappa(\Gamma)$.

Опишем первый класс игр, который будет рассматриваться в данной статье. В него входят игры вида $\Gamma_0 = \langle U, V, \Omega_0, A, g, h \rangle$ в которых Ω_0 – тождественное отображение, которое каждому $u \in U$ ставит в соответствие множество V . Множества U, V и A будем считать наделенными топологиями и компактными, а функции g и h – непрерывными в топологиях декартовых произведений $U \times V$ и $U \times V \times A$ соответственно.

Тогда в силу стандартных теорем анализа для любой стратегии $u \in U$ и любого $\alpha \in A$ максимум $\max_{v \in \Omega(u)} h(u, v, \alpha)$ достигается, т.е. $U^r = U$. Значит, по определению $R(\Gamma^r) = R(\Gamma)$ и, следовательно, $R(\Gamma) = R_\kappa(\Gamma)$.

3. Делегирование полномочий

На основе игры Γ_0 построим другую модель. Пусть $U_{\#} = \Sigma(U)$, $V_{\#} = U \times V$. Определим точечно-множественное отображение $\Omega_{\#} : U_{\#} \rightarrow V_{\#}$ условием $\Omega_{\#}(u_{\#}) = u_{\#} \times V$, а функции выигрыша $g_{\#} : U_{\#} \times V_{\#} \rightarrow R$ и $h_{\#} : U_{\#} \times V_{\#} \times A \rightarrow R$ равенствами $g_{\#}(u_{\#}, v_{\#}) = g(v_{\#})$ и $h_{\#}(u_{\#}, v_{\#}, \alpha) = h(v_{\#}, \alpha)$. Получим новую игру $\Gamma_{\#} = \langle U_{\#}, V_{\#}, \Omega_{\#}, A, g_{\#}, h_{\#} \rangle$ (с тем же множеством неопределенных факторов).

Содержательно эти конструкции интерпретируются следующим образом. Право выбора «физического» управления $u \in U$ принадлежит первому игроку. Но он считает выгодным делегировать часть этого права своему партнеру. А именно, он выбирает некоторое подмножество $u_{\#} \subset U$ и позволяет второму игроку выбрать произвольное управление $u \in u_{\#}$. Кроме того, у второго игрока остается естественное право выбора «своего» управления $v \in V$. После того, как эти выборы сделаны и реализовалось какое-то значение неопределенного фактора, игроки получают свои выигрыши, которые, разумеется, зависят только от «физических» управлений и не зависят от процедуры принятия решений.

При сделанных в конце предыдущего раздела топологических предположениях выполняется равенство $R(\Gamma_{\#}) = R_{\kappa}(\Gamma_{\#})$. Как установлено выше, для доказательства этого равенства достаточно установить справедливость равенства $R_{\kappa}(\Gamma_{\#}^r) = R_{\kappa}(\Gamma_{\#})$. Сделаем это.

Пусть γ – произвольное число, удовлетворяющее неравенству $\gamma < R_{\kappa}(\Gamma_{\#})$. Фиксируем положительное число ε так, что выполнено условие $\varepsilon < R_{\kappa}(\Gamma_{\#}) - \gamma$. Покажем, что существует стратегия $w_{\#} \in U_{\#}^r$, для которой выполняется неравенство

$$\gamma < \inf_{\alpha \in A} \inf_{v_{\#} \in BR(w_{\#}, \alpha)} g_{\#}(w_{\#}, v_{\#}) = \inf_{\alpha \in A} \inf_{v_{\#} \in BR(w_{\#}, \alpha)} g(v_{\#}). \quad (3.1)$$

В силу выбора числа γ существует стратегия $u_{\#}$ для которой

$$\gamma < \inf_{\alpha \in A} \inf_{v_{\#} \in BR(u_{\#}, \alpha)} g_{\#}(u_{\#}, v_{\#}) = \inf_{\alpha \in A} \inf_{v_{\#} \in BR(u_{\#}, \alpha)} g(v_{\#}).$$

Если стратегия $u_{\#} \in U_{\#}^r$, то можно положить $w_{\#} = u_{\#}$, и все доказано. В противном случае пусть множество $w_{\#}$ есть замыкание множества $u_{\#}$ в топологии пространства U .

Так как функция h непрерывна, а множества U и V компактны стратегия $w_{\#} \in U_{\#}^r$.

Фиксируем произвольное $\alpha \in A$. Пусть $v_{\#}^0 = (u^0, v^0)$ – произвольная точка множества $BR(w_{\#}, \alpha)$. В силу непрерывности функций g и h можно выбрать такую окрестность O точки $v_{\#}^0 = (u^0, v^0)$, что для всех $(u, v) \in O$ будут выполнены неравенства $|g(u^0, v^0) - g(u, v)| < \varepsilon$ и $|h(u^0, v^0, \alpha) - h(u, v, \alpha)| < \kappa$. Так как $v_{\#}^0$ принадлежит замыканию множества $u_{\#} \times V$ в окрестности O существует точка $(u, v) \in u_{\#} \times V$. Поскольку $u_{\#} \subset w_{\#}$ имеем $\sup_{(u,v) \in u_{\#}} h(u, v, \alpha) \leq \max_{(u,v) \in w_{\#}} h(u, v, \alpha)$. Тогда в силу неравенства $|h(u^0, v^0, \alpha) - h(u, v, \alpha)| < \kappa$ и предположения $u_{\#} \notin U_{\#}^r$ выполняются включение $(u, v) \in BR(u_{\#}, \alpha)$ а, значит, и неравенство $\inf_{\alpha \in A} \inf_{v_{\#} \in BR(u_{\#}, \alpha)} g_{\#}(u_{\#}, v_{\#}) \leq g(u, v)$. Следовательно, в силу выбора числа ε и неравенства $|g(u^0, v^0) - g(u, v)| < \varepsilon$ будем иметь $\gamma < g(u^0, v^0)$. А поскольку $v_{\#}^0 = (u^0, v^0)$ и α произвольны, отсюда следует неравенство (3.1).

Так как число γ выбрано произвольно, выполняется неравенство $R_{\kappa}(\Gamma_{\#}^r) \geq R_{\kappa}(\Gamma_{\#})$, а так как обратное неравенство очевидно, то и равенство $R_{\kappa}(\Gamma_{\#}^r) = R_{\kappa}(\Gamma_{\#})$.

Таким образом, для рассматриваемой модели определения 2.1 и 2.2 эквивалентны.

Сравним максимальные гарантированные результаты в играх Γ_0 и $\Gamma_{\#}$.

Пусть $u \in U$ – произвольная стратегия первого игрока в игре Γ_0 . Положим $u_{\#} = \{u\}$ ($u_{\#}$ – множество, состоящее из одной точки). Фиксируем произвольное $\alpha \in A$. Непосредственно проверяется, что если $v \in BR(u, \alpha)$, то $(u, v) \in BR(u_{\#}, \alpha)$, и обратно, если $v_{\#} \in BR(u_{\#}, \alpha)$, то $v_{\#}$ имеет вид $v_{\#} = (u, v)$ при некотором $v \in V$ и это управление v принадлежит множеству $BR(u, \alpha)$. Поэтому

$$\inf_{\alpha \in A} \inf_{v_{\#} \in BR(u_{\#}, \alpha)} g_{\#}(u_{\#}, v_{\#}) = \inf_{\alpha \in A} \inf_{v \in BR(u, \alpha)} g(u, v).$$

Обозначим через U^1 класс одноэлементных подмножеств множества U . Тогда из последнего равенства следует, что

$$\sup_{u_{\#} \in U^1} \inf_{\alpha \in A} \inf_{v_{\#} \in BR(u_{\#}, \alpha)} g_{\#}(u_{\#}, v_{\#}) = \sup_{u \in U} \inf_{\alpha \in A} \inf_{v \in BR(u, \alpha)} g(u, v). \quad (3.2)$$

А поскольку $U^1 \subset U_\#$, отсюда следует неравенство $R(\Gamma_\#) \geq R(\Gamma_0)$.

Обратное, вообще говоря, не верно, что демонстрирует следующий пример.

Пример 3.1. Пусть $U = V = [-1, 1]$, $A = \{-1, 1\}$, $g(u, v) = (uv)^2$, $h(u, v, \alpha) = \alpha uv^2$.

Если $u > 0$, то при $\alpha = -1$ имеем $h(u, v, \alpha) \leq 0$, поэтому имеем $BR(u, -1) = \{0\}$. Аналогично, при $u < 0$ выполняется равенство $BR(u, 1) = \{0\}$. При $u = 0$ для второго игрока все выборы равноценны, поэтому $0 \in BR(0, \alpha)$. Таким образом, $R(\Gamma_0) = 0$.

Рассмотрим теперь стратегию $u_\# = \{-1, 1\}$ в игре $\Gamma_\#$. Очевидно, при $\alpha = 1$ имеем $BR(u_\#, \alpha) = \{(1, 1), (1, -1)\}$, а при $\alpha = -1$ выполняется равенство $BR(u_\#, \alpha) = \{(-1, 1), (-1, -1)\}$. Таким образом, выбор стратегии $u_\# = \{-1, 1\}$ гарантирует первому игроку получение выигрыша, равного 1.

Итак, в общем случае делегирование партнеру прав по выбору управлений может быть выгодно первому игроку. Правда, при этом существенно наличие неопределенных факторов. Действительно, в случае, когда множество A состоит из одного элемента α имеет место равенство $R(\Gamma_\#) = R(\Gamma_0)$. Покажем это.

Пусть γ – любое число, удовлетворяющее условию $\gamma < R_\kappa(\Gamma_\#)$. Выберем стратегию $u_\#$ так, чтобы выполнялось условие

$$\gamma < \inf_{v_\# \in BR(u_\#, \alpha)} g_\#(u_\#, v_\#).$$

Как установлено выше, можно считать, что множество $u_\#$ компактно.

Тогда максимум функции h на множестве $u_\# \times V$ достигается. Фиксируем произвольную точку (u^0, v^0) в которой это происходит. Положим $w_\# = \{u^0\}$. Тогда, очевидно,

$$\max_{v_\# \in \Omega_\#(u_\#)} h_\#(u_\#, v_\#, \alpha) = \max_{v_\# \in \Omega_\#(w_\#)} h_\#(w_\#, v_\#, \alpha)$$

и, следовательно, $BR(w_\#, \alpha) \subset BR(v_\#, \alpha)$. Значит,

$$\gamma < \inf_{v_\# \in BR(w_\#, \alpha)} g_\#(w_\#, v_\#) = \inf_{\alpha \in A} \inf_{v_\# \in BR(w_\#, \alpha)} g_\#(w_\#, v_\#)$$

и тем более

$$\gamma < \sup_{w_{\#} \in U_{\#}^1} \inf_{\alpha \in A} \inf_{v_{\#} \in BR(w_{\#}, \alpha)} g_{\#}(w_{\#}, v_{\#}).$$

В силу произвольности γ отсюда следует, что

$$R(\Gamma_{\#}) \leq \sup_{w_{\#} \in U_{\#}^1} \inf_{\alpha \in A} \inf_{v_{\#} \in BR(w_{\#}, \alpha)} g_{\#}(w_{\#}, v_{\#}).$$

Но поскольку в общем случае справедливо равенство (3.2), имеем $R(\Gamma_{\#}) \leq R(\Gamma_0)$. Поскольку обратное неравенство выполняется при любых множествах A , равенство $R(\Gamma_{\#}) = R(\Gamma_0)$ доказано.

Замечание 3.1. Равенство $R(\Gamma_{\#}) = R(\Gamma_0)$ (при одноточечном множестве A) может быть доказано и без использования топологических предположений. Но рассуждения в этом случае оказываются более длинными, поэтому здесь не приводятся.

Замечание 3.2. Аналогичным образом можно показать, что при поиске оптимальных стратегий в игре $\Gamma_{\#}$ можно ограничиться рассмотрением лишь таких множеств $u_{\#}$, мощность которых не превосходит мощности множества A . Подробнее об этом – в статье [4].

4. Аппроксимация

Определение максимального гарантированного результата в игре $\Gamma_{\#}$ содержит одну «неэлементарную» операцию. Скажем, формула в определении 2.1, задающая величину $R_{\kappa}(\Gamma_{\#})$, содержит верхнюю грань по классу $\Sigma(U)$ всех непустых подмножеств множества U . В общем случае множество $\Sigma(U)$ «очень велико» и стандартные методы оптимизации для вычисления этой верхней грани не работают. Цель данного раздела состоит в том, чтобы свести эту задачу к более простой и стандартной.

Во многих задачах теории иерархических игр присутствует некое функциональное пространство. При этом задача считается решенной, если ее удастся свести к исследованию каких-то конструкций, в которых это пространство не упоминается, а фигурируют лишь множество-образ и множество-прообраз. В данной задаче функционального пространства нет, но есть «неэлементарное» множество $\Sigma(U)$. Будем стремиться его «элиминировать».

Лемма 4.1. *Максимальный гарантированный результат первого игрока в игре $\Gamma_{\#}$ равен точной верхней грани $R'(\Gamma_{\#})$ множества чисел γ , удовлетворяющих условию: существует стратегия $u_{\#} \in U_{\#}$ и для любого значения $\alpha \in A$ найдется такое число λ , что выполняются условия:*

1. *существует стратегия $w_{\#} \in \Omega_{\#}(u_{\#})$, для которой выполняется неравенство $h_{\#}(u_{\#}, w_{\#}, \alpha) > \lambda$;*
2. *для любого управления $v_{\#} \in \Omega_{\#}(u_{\#})$ справедливо одно из неравенств $g_{\#}(u_{\#}, v_{\#}) > \gamma$ или $h_{\#}(u_{\#}, v_{\#}, \alpha) < \lambda$.*

Доказательство. Для сокращения текста перейдем на язык исчисления предикатов. Условие доказываемой леммы записывается в виде формулы

$$\begin{aligned} \exists u_{\#} \in U_{\#} \forall \alpha \in A \exists \lambda : [\exists w_{\#} \in \Omega_{\#}(u_{\#}) : h_{\#}(u_{\#}, w_{\#}, \alpha) > \lambda] \& \\ \& [\forall v_{\#} \in \Omega_{\#}(u_{\#}) g_{\#}(u_{\#}, v_{\#}) > \gamma \vee h_{\#}(u_{\#}, v_{\#}, \alpha) < \lambda]. \end{aligned}$$

С учетом структуры игры $\Gamma_{\#}$ это условие переписывается в виде

$$\begin{aligned} \exists u_{\#} \in \Sigma(U) \forall \alpha \in A \exists \lambda [\exists \omega \in u_{\#} \exists w \in V : h(\omega, w, \alpha) > \lambda] \& \\ \& [\forall u \in u_{\#} \forall v \in V g(u, v) > \gamma \vee h(u, v, \alpha) < \lambda]. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Аналогично условие определения 2.2 записывается в виде

$$\begin{aligned} \exists u_{\#} \in \Sigma(U) \forall \alpha \in A \exists \lambda [\exists \omega \in u_{\#} \exists w \in V : h(\omega, w, \alpha) \geq \lambda] \& \\ \& [\forall u \in u_{\#} \forall v \in V g(u, v) \geq \gamma \vee h(u, v, \alpha) < \lambda]. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Разница формул (4.2) и (4.1) состоит лишь в замене двух нестрогих неравенств на строгие. Очевидно, условие (4.1) влечет условие (4.2), поэтому $R(\Gamma_{\#}) \geq R'(\Gamma_{\#})$.

Докажем, что при сделанных топологических предположениях выполняется обратное неравенство $R(\Gamma_{\#}) \leq R'(\Gamma_{\#})$. Фиксируем произвольное число $\gamma < R(\Gamma_{\#})$.

Тогда любое число $\gamma' \in (\gamma, R(\Gamma_{\#}))$ является гарантированным результатом в игре $\Gamma_{\#}$, а потому выполняется условие

$$\begin{aligned} \exists u_{\#} \in \Sigma(U) \forall \alpha \in A \exists \lambda [\exists \omega \in u_{\#} \exists w \in V : h(\omega, w, \alpha) \geq \lambda] \& \\ \& [\forall u \in u_{\#} \forall v \in V g(u, v) \geq \gamma' \vee h(u, v, \alpha) < \lambda], \end{aligned}$$

а, значит,

$$\begin{aligned} \exists u_{\#} \in \Sigma(U) \forall \alpha \in A \exists \lambda [\exists \omega \in u_{\#} \exists w \in V : h(\omega, w, \alpha) \geq \lambda] \& \\ \& [\forall u \in u_{\#} \forall v \in V g(u, v) > \gamma \vee h(u, v, \alpha) < \lambda]. \end{aligned}$$

В силу результатов предыдущего раздела можно, не ограничивая общности, считать, что множество $u_{\#}$ в этой формуле замкнуто, а потому компактно. Фиксируем произвольное $\alpha \in A$ и выберем число λ так, чтобы выполнялось условие

$$\begin{aligned} [\exists \omega \in u_{\#} \exists w \in V : h(\omega, w, \alpha) \geq \lambda] \& \\ \& [\forall u \in u_{\#} \forall v \in V g(u, v) > \gamma \vee h(u, v, \alpha) < \lambda]. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Множество $G(u_{\#}, \gamma) = \{(u, v) \in u_{\#} \times V : g(u, v) \leq \gamma\}$ компактно. Следовательно, максимум

$$m(u_{\#}, \gamma, \alpha) = \max_{(u, v) \in G(u_{\#}, \gamma)} h(u, v, \alpha)$$

достигается в некоторой точке (u^0, v^0) . Так как $g(u^0, v^0) \leq \gamma$, в силу второй части условия (4.3) выполняется неравенство

$$m(u_{\#}, \gamma, \alpha) = h(u^0, v^0, \alpha) < \lambda.$$

Фиксируем $\lambda'' \in (m(u_{\#}, \gamma, \alpha), \lambda)$. Тогда в силу формулы (4.3) выполняется условие

$$\begin{aligned} [\exists \omega \in u_{\#} \exists w \in V : h(\omega, w, \alpha) > \lambda''] \& \\ \& [\forall u \in u_{\#} \forall v \in V g(u, v) > \gamma \vee h(u, v, \alpha) < \lambda'']. \end{aligned}$$

Тем более

$$\begin{aligned} \exists \lambda [\exists \omega \in u_{\#} \exists w \in V : h(\omega, w, \alpha) \geq \lambda] \& \\ \& [\forall u \in u_{\#} \forall v \in V g(u, v) > \gamma \vee h(u, v, \alpha) < \lambda], \end{aligned}$$

и в силу произвольности $\alpha \in A$

$$\begin{aligned} \forall \alpha \in A \exists \lambda [\exists \omega \in u_{\#} \exists w \in V : h(\omega, w, \alpha) \geq \lambda] \& \\ \& [\forall u \in u_{\#} \forall v \in V g(u, v) > \gamma \vee h(u, v, \alpha) < \lambda], \end{aligned}$$

Отсюда немедленно вытекает условие (4.1), что в силу произвольности γ доказывает неравенство $R(\Gamma_{\#}) \leq R'(\Gamma_{\#})$.

Итак, $R(\Gamma_{\#}) = R'(\Gamma_{\#})$, откуда и следует утверждение леммы. $\square$

Полученный результат позволяет применить аппроксимационную технику для поиска рациональных стратегий первого игрока в игре $\Gamma_{\#}$. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 4.2. *Максимальный гарантированный результат первого игрока в игре $\Gamma_{\#}$ равен точной верхней грани $R''(\Gamma_{\#})$ множества чисел γ , удовлетворяющих условию: существует конечное множество $u_{\#} \subset U$ и для любого значения $\alpha \in A$ найдется такое число λ , что выполняются условия:*

1. *существует стратегия $w_{\#} \in \Omega_{\#}(u_{\#})$, для которой выполняется неравенство $h_{\#}(u_{\#}, w_{\#}, \alpha) \geq \lambda$;*
2. *для любого управления $v_{\#} \in \Omega_{\#}(u_{\#})$ справедливо одно из неравенств $g_{\#}(u_{\#}, v_{\#}) \geq \gamma$ или $h_{\#}(u_{\#}, v_{\#}, \alpha) < \lambda$.*

Доказательство. Поскольку семейство конечных подмножеств множества U содержится в множестве $U_{\#}$, неравенство $R(\Gamma_{\#}) \geq R''(\Gamma_{\#})$ очевидно. Докажем обратное неравенство $R(\Gamma_{\#}) \leq R''(\Gamma_{\#})$.

Пусть γ – произвольное число, меньшее $R(\Gamma_{\#})$. Тогда выполняется условие (4.1). Выберем множество $\varpi_{\#} \in \Sigma(U)$ так, что

$$\begin{aligned} & \forall \alpha \in A \exists \lambda [\exists \omega \in \varpi_{\#} \exists w \in V : h(\omega, w, \alpha) > \lambda] \ \& \\ & \& [\forall u \in \varpi_{\#} \forall v \in V g(u, v) > \gamma \vee h(u, v, \alpha) < \lambda]. \end{aligned}$$

Вновь можно считать, что множество $\varpi_{\#}$ замкнуто. Для каждого $\alpha \in A$ фиксируем такое значение $\lambda(\alpha)$, что

$$\begin{aligned} & [\exists \omega \in \varpi_{\#} \exists w \in V : h(\omega, w, \alpha) > \lambda(\alpha)] \ \& \\ & \& [\forall u \in \varpi_{\#} \forall v \in V g(u, v) > \gamma \vee h(u, v, \alpha) < \lambda(\alpha)]. \end{aligned}$$

Это равносильно условию

$$[\exists \omega \in \varpi_{\#} \exists w \in V : h(\omega, w, \alpha) > \lambda(\alpha)] \ \& \ [m(\varpi_{\#}, \gamma, \alpha) < \lambda(\alpha)]. \quad (4.4)$$

Для каждого $\beta \in A$ зафиксируем $\omega(\beta) \in \varpi_{\#}, w(\beta) \in V$ так, что

$$h(\omega(\beta), w(\beta), \beta) > \lambda(\beta).$$

Определим множества

$$\begin{aligned} O_1(\beta) &= \{\alpha \in A : h(\omega(\beta), w(\beta), \alpha) > \lambda(\beta)\}, \\ O_2(\beta) &= \{\alpha \in A : m(\varpi_{\#}, \gamma, \alpha) < \lambda(\beta)\}. \end{aligned}$$

Функция h непрерывна, поэтому множество $O_1(\beta)$ открыто. Стандартными аналитическими рассуждениями доказывается, что величина $m(\varpi_{\#}, \gamma, \alpha)$ также непрерывно зависит от α . Следовательно, и множество $O_2(\beta)$ открыто. Значит, открыто и пересечение множеств $O_1(\beta) \cap O_2(\beta)$.

В силу формулы (4.4) множества $O_1(\beta) \cap O_2(\beta)$ покрывают компактное множество A . Следовательно, существует такое множество $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, что множества $O_1(\beta_i) \cap O_2(\beta_i), i = 1, 2, \dots, n$ тоже покрывают множество A . Положим $u_{\#} = \{\omega(\beta_1), \omega(\beta_2), \dots, \omega(\beta_n)\}$.

Если $\alpha \in O_1(\beta_i) \cap O_2(\beta_i)$, то

$$h(\omega(\beta_i), w(\beta_i), \alpha) > \lambda(\beta_i) \ \& \ m(\varpi_{\#}, \gamma, \alpha) < \lambda(\beta_i),$$

а поскольку $u_{\#} \subset \varpi_{\#}$ и $\omega(\beta_i) \in u_{\#}$, то тем более

$$[\exists \omega \in u_{\#} \exists w \in V h(\omega, w, \alpha) > \lambda(\beta_i)] \ \& \ m(u_{\#}, \gamma, \alpha) < \lambda(\beta_i),$$

значит,

$$\begin{aligned} & [\exists \omega \in \varpi_{\#} \exists w \in V : h(\omega, w, \alpha) > \lambda(\beta_i)] \ \& \\ & \ \& \ [\forall u \in u_{\#} \forall v \in V g(u, v) > \gamma \vee h(u, v, \alpha) < \lambda(\beta_i)]. \end{aligned}$$

Следовательно, для такого α выполнено условие

$$\begin{aligned} & \exists \lambda [\exists \omega \in u_{\#} \exists w \in V : h(\omega, w, \alpha) > \lambda] \ \& \\ & \ \& \ [\forall u \in u_{\#} \forall v \in V g(u, v) > \gamma \vee h(u, v, \alpha) < \lambda], \end{aligned}$$

а так как множества $O_1(\beta_i) \cap O_2(\beta_i), i = 1, 2, \dots, n$ покрывают множество A , то

$$\begin{aligned} & \forall \alpha \in A \exists \lambda [\exists \omega \in u_{\#} \exists w \in V : h(\omega, w, \alpha) > \lambda] \ \& \\ & \ \& \ [\forall u \in u_{\#} \forall v \in V g(u, v) > \gamma \vee h(u, v, \alpha) < \lambda]. \end{aligned}$$

Отсюда непосредственно следует, что число γ удовлетворяет условию доказываемой леммы, и, значит, $R(\Gamma_{\#}) \leq R''(\Gamma_{\#})$.

Вместе с неравенством $R(\Gamma_{\#}) \geq R''(\Gamma_{\#})$ это доказывает лемму. $\square$

5. Вычисление максимального гарантированного результата в игре $\Gamma_{\#}$

Доказанная лемма позволяет в известном смысле упростить вычисление величины $R(\Gamma_{\#})$. Если руководствоваться идеологией определения 2.1 то соответствующий результат выглядит следующим образом.

Теорема 5.1. *Справедливо равенство*

$$R(\Gamma_{\#}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{(u_1, \dots, u_n) \in U^n} \min_{(i, v) \in E(u_1, \dots, u_n)} g(u_i, v),$$

где

$$E(u_1, \dots, u_n) = \left\{ (i, v) \in \{1, \dots, n\} \times V : h(u_i, v) = \max_{(j, w) \in \{1, \dots, n\} \times V} h(u_j, w) \right\}.$$

Величина

$$\max_{(u_1, \dots, u_n) \in U^n} \min_{(i, v) \in E(u_1, \dots, u_n)} g(u_i, v),$$

очевидно, не убывает с ростом n , поэтому формулу из утверждения теоремы можно переписать в виде

$$R(\Gamma_{\#}) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \max_{(u_1, \dots, u_n) \in U^n} \min_{(i, v) \in E(u_1, \dots, u_n)} g(u_i, v).$$

Таким образом, формально поставленная задача решена: в последнем выражении нет никаких «бесконечномерных» пространств. Разумеется, поскольку с ростом n «размерность» задачи растет, конструктивность теоремы 5.2 меньше, чем у ее аналогов. Но в данном случае можно показать, что это связано с природой исходной задачи и добиться существенно лучших результатов без дополнительных предположений о структуре игры $\Gamma_{\#}$ нельзя. Одно из возможных предположений – использование обратной связи. На первый взгляд это может показаться парадоксальным, но при этом получается более простая задача. Однако изложение соответствующих результатов выходит за рамки данной статьи.

Можно вычислять величину $R(\Gamma_{\#})$ и отталкиваясь от определения 2.2.

Положим

$$H(\gamma, n, u_1, \dots, u_n) = \{(u, v) \in \{u_1, \dots, u_n\} \times V : g(u, v) \geq \gamma\},$$

$$l(\alpha, \gamma, n, u_1, \dots, u_n) = \max_{(u, v) \in H(\gamma, n, u_1, \dots, u_n)} h(u, v, \alpha).$$

В силу леммы 4.2 формула (4.2) может быть переписана в виде

$$\begin{aligned} & \exists n \in \mathbb{N} \exists (u_1, \dots, u_n) \in U^n \forall \alpha \in A \exists \lambda : \\ & [\exists j \in \{1, \dots, n\} \exists w \in V : h(u_j, w, \alpha) \geq \lambda] \ \& \\ & \& [\forall i \in \{1, \dots, n\} \forall v \in V g(u_i, v) \geq \gamma \vee h(u_i, v, \alpha) < \lambda]. \end{aligned}$$

Можно показать, что в данной формуле, не ограничивая общности, можно считать $\lambda = l(\alpha, \gamma, n, u_1, \dots, u_n)$. Тогда первая часть условия будет заведомо выполнена, о оставшаяся часть может быть записана в виде

$$\begin{aligned} & \exists n \in \mathbb{N} \exists (u_1, \dots, u_n) \in U^n \forall \alpha \in A \\ & \forall (i, v) \in \Xi(\gamma, n, u_1, \dots, u_n) h(u_i, v, \alpha) < l(\alpha, \gamma, n, u_1, \dots, u_n), \end{aligned}$$

где

$$\Xi(\gamma, n, u_1, \dots, u_n) = \{(i, v) \in \{1, \dots, n\} \times V : g(u_i, v) < \gamma\}.$$

Теперь, используя стандартную процедуру замены кванторов операторами максимума и минимума придем к следующему утверждению.

Теорема 5.2. *Для того, чтобы число γ было гарантированным результатом в игре $\Gamma_{\#}$ необходимо, чтобы*

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \min_{(u_1, \dots, u_n) \in U^n} \max_{\alpha \in A} \max_{(i, v) \in \Xi(\gamma, n, u_1, \dots, u_n)} [h(u_i, v, \alpha) - l(\alpha, \gamma, n, u_1, \dots, u_n)] \leq 0,$$

и достаточно, чтобы

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \min_{(u_1, \dots, u_n) \in U^n} \max_{\alpha \in A} \max_{(i, v) \in \Xi(\gamma, n, u_1, \dots, u_n)} [h(u_i, v, \alpha) - l(\alpha, \gamma, n, u_1, \dots, u_n)] < 0,$$

Как и в случае теоремы 5.1 инфимум по $n \in \mathbb{N}$ может быть заменен пределом.

Вычисление величины $R(\Gamma_{\#})$ предложенными методами связано с поиском оптимальных множеств из n элементов с возрастающим числом n . Велик соблазн поступать следующим образом: берем оптимальное множество из n элементов, дополняем его правильно подобранным управлением и получаем оптимальное множество из $n + 1$ элемента. Следующий пример показывает, что в общем случае так поступать нельзя. Подобный эффект появляется не первый раз, поэтому можно предположить, что он определяется природой вещей.

Пример 5.1. Рассмотрим игру, с множествами $U = \{1, 2, 3\}$, $V = \{1, 2\}$, $A = \{0, 1\}$ и функциями выигрыша, заданными матрицей

$$\begin{pmatrix} (0, 0, 0) & (2, 1, 0) \\ (1, 2, 2) & (1, 2, 2) \\ (2, 1, 0) & (0, 0, 0) \end{pmatrix}$$

(здесь выбранное первым игроком управление – это номер строки, управление второго игрока – номер столбца, первое число в каждой тройке – выигрыш первого игрока, а два другие числа – выигрыши второго игрока при $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ соответственно).

Непосредственно проверяется, что единственное одноэлементное множество, гарантирующее первому игроку выигрыш равный 1 – это множество $\{2\}$. Аналогично, единственное двухэлементное множество, гарантирующее первому игроку выигрыш равный 2 – это множество $\{1, 3\}$.

6. Структура множества оптимальных стратегий

Даже при сделанных топологических предположениях максимальный гарантированный результат $R(\Gamma_{\#})$ в игре $\Gamma_{\#}$ может не быть гарантированным результатом. Соответствующий пример построить несложно. Рассмотрим игру с одноточечным множеством A . Тогда как показано в разделе 3, оптимальную стратегию в игре можно искать среди одноточечных множеств $u_{\#}$. Таким образом, приходим к стандартной задаче, для которой нужны контрпримеры известны (годится игра из приводимого ниже примера 6.1).

Таким образом, «настоящей» оптимальной стратегии в игре $\Gamma_{\#}$ может и не быть. Но всегда есть «почти оптимальные» стратегии.

Именно их мы и будем обсуждать в данном разделе, опуская для краткости слово «почти».

Как установлено в разделе 4 среди оптимальных стратегий всегда есть конечные множества. Это определенный аргумент в пользу рассматриваемой постановки. В самом деле, было бы нехорошо, если бы в качестве решения «простой» игры выступало какое-то множество типа ковра Серпинского. Нетрудно понять, что такие решения в «простых» играх могут существовать, но всегда существуют и «простые» решения.

Идеи разделов 4 и 5 нацелены на поиск «самых маленьких» оптимальных стратегий (в качестве характеристики «размера» стратегии в данном случае можно использовать, например, мощность соответствующего множества). Таких решений может быть много, и отличаться они могут существенно. Чтобы это понять, можно снова рассмотреть игру с одноточечным множеством A . Построить пример такой игры с несколькими разными решениями совсем нетрудно.

Определенный интерес представляет в известном смысле противоположная задача поиска «самой большой» оптимальной стратегии. Вот здесь появляется довольно интересный качественный эффект, который проще всего понять с помощью следующего, пусть и не самого общего результата.

Теорема 6.1. *Допустим, что в игре $\Gamma_{\#} = \langle U_{\#}, V_{\#}, \Omega_{\#}, A, g_{\#}, h_{\#} \rangle$ множество $U_{\#}$ конечно. Пусть γ – гарантированный результат в игре $\Gamma_{\#}$. Тогда существует такая стратегия $u_{\#}^0$, гарантирующая получение результата γ , что для любой стратегии $u_{\#}$, гарантирующей получение того же результата, выполнено включение $u_{\#} \subset u_{\#}^0$.*

Доказательство. Пусть γ – гарантированный результат в игре $\Gamma_{\#}$ и $u_{\#}^1, \dots, u_{\#}^n$ – все стратегии в игре $\Gamma_{\#}$, гарантирующие первому игроку получение результата γ . Тогда в силу определения 2.2 для любого $i = 1, \dots, n$ и любого $\alpha \in A$ существует число $\lambda(i, \alpha)$, для которого выполняется условие

$$\begin{aligned} & [\exists \omega \in u_{\#}^i \exists w \in V : h(\omega, w, \alpha) \geq \lambda(i, \alpha)] \& \\ & \& [\forall u \in u_{\#}^i \forall v \in V g(u, v) \geq \gamma \vee h(u, v, \alpha) < \lambda(i, \alpha)] . \end{aligned} \quad (6.1)$$

Покажем, что множество $u_{\#}^0 = \bigcup_{k=1}^n u_{\#}^k$ является искомым. Фиксируем произвольное $\alpha \in A$. Положим $\lambda(0, \alpha) = \max_{i=1, \dots, n} \lambda(i, \alpha)$ и выберем $m \in \{1, \dots, n\}$ так, что $\lambda(m, \alpha) = \lambda(0, \alpha)$. Достаточно доказать, что выполняется условие

$$\begin{aligned} & [\exists \omega \in u_{\#}^0 \exists w \in V : h(\omega, w, \alpha) \geq \lambda(0, \alpha)] \& \\ & \& [\forall u \in u_{\#}^0 \forall v \in V g(u, v) \geq \gamma \vee h(u, v, \alpha) < \lambda(0, \alpha)]. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Первая часть этого условия немедленно следует из условия (6.1) для $i = m$. Вторая часть условия (6.2) для $u \in u_{\#}^k$ следует из второй части условия (6.1) для $i = k$ и неравенства $\lambda(k, \alpha) \leq \lambda(0, \alpha)$. А поскольку $u_{\#}^0 = \bigcup_{k=1}^n u_{\#}^k$, вторая часть условия (6.2) выполняется для всех $u \in u_{\#}^0$. $\square$

Итак, если множество U конечно и выполняются обычные топологические предположения относительно множеств V и A и функций g и h , то существует наибольшая по включению оптимальная стратегия в игре $\Gamma_{\#}$. К сожалению, в общем случае это не так, о чем свидетельствует следующий пример.

Пример 6.1. Пусть $U = V = [0, 1]$, $A = \{0\}$, $g(u, v) = u - v$ и $h(u, v, \alpha) = v(u + v - 2)$.

Непосредственно проверяется, что в этом случае $R(\Gamma_{\#}) = 1$ (напомним, что поскольку множество A содержит одну точку, то тогда $R(\Gamma_{\#}) = R(\Gamma)$), но число $\gamma = 1$ не является гарантированным результатом. Поэтому гарантированными результатами являются числа $\gamma < 1$.

Если мы зафиксируем любое такое число, то оптимальной стратегией будет, например, одноточечное множество $u_{\#} = \{u\}$, где u – любое число из интервала $[\gamma, 1)$. Но объединение всех таких множеств есть стратегия $u_{\#}^1 = [\gamma, 1)$, которая гарантирует первому лишь нулевой выигрыш.

В самом деле, если стратегия $u_{\#}^1 = [\gamma, 1)$ гарантирует первому игроку получение выигрыша γ , то такой же выигрыш первый игрок может получить, используя в качестве стратегии замыкание $u_{\#}^2 = [0, 1]$

множества $u_{\#}^1$. Но в ответ на стратегию $u_{\#}^2$ второй игрок может выбрать стратегию $v_{\#} = (1, 1)$, в результате чего первый игрок получит ноль.

Эффект, отмеченный в тереме 6.1, представляется достаточно важным, чтобы его обсудить дополнительно. В самом деле, эта теорема говорит о том, что вопрос о максимальной степени децентрализации может быть корректно поставлен, хотя бы в случае, когда множество U конечно. В общем случае это не совсем так, но уже сейчас можно утверждать следующее.

Если задано конечное число стратегий $u_{\#}^1, \dots, u_{\#}^n$ в игре $\Gamma_{\#}$, каждая из которых гарантирует первому игроку получение результата γ , то и их объединение позволяет гарантированно получить того же результат. Доказательство этого факта практически дословно повторяет доказательство теоремы 6.1. Поэтому можно доказать результат следующего типа.

Допустим, множество U не слишком «велико», например, содержится в конечномерном евклидовом пространстве. Пусть γ – гарантированный результат в соответствующей игре $\Gamma_{\#}$. Тогда существует такая стратегия $u_{\#}^0$, гарантирующая получение результата γ , что любая другая стратегия, позволяющая гарантированно получить такой же результат, содержится в малой окрестности стратегии $u_{\#}^0$.

Точная формулировка этого результата требует использования несколько иного языка (в чисто топологических терминах его сформулировать не удастся). А потому и его доказательство требует привлечения новой техники. Поэтому данный вопрос отложим до другого раза. Здесь же остановимся на одном простом способе «расширения» оптимальной стратегии. Этот способ позволяет, в частности, превратить конечную оптимальную стратегию в достаточно «массивную».

Пусть стратегия $u_{\#}^0$ позволяет первому игроку гарантированно получить результат γ . Положим

$$L(\alpha) = \sup_{(u,v) \in u_{\#}^0 \times V} h(u, v, \alpha).$$

Определим множество

$$B(u, \alpha) = \left\{ v \in V : h(u, v, \alpha) = \max_{w \in V} h(u, w, \alpha) \right\}$$

и функцию

$$M(u, \alpha) = \min_{v \in B(u, \alpha)} g(u, v).$$

Пусть

$$u_{\#}^1 = \left\{ u \in U : \min_{\alpha \in A} \max \left[L(\alpha) - \max_{v \in V} h(u, v, \alpha), M(\alpha) - \gamma \right] > 0 \right\}.$$

Тогда стратегия $u_{\#} = u_{\#}^0 \cup u_{\#}^1$ позволит первому игроку с гарантией получить результат γ . Доказательство этого факта сводится к прямой проверке условий определения 2.2.

7. Заключение

В данной статье накладывались минимальные ограничения на структуру изучаемой модели. Используемая аппроксимационная техника тоже имеет весьма общий характер, но поэтому позволяет получить не слишком конструктивные результаты. Отметим здесь, что задача вычисления максимина со связанными переменными весьма неустойчива по отношению к изменениям параметров модели, поэтому поиск «правильной» аппроксимации сам по себе нетривиален.

Дальнейшее продвижение в исследовании данной модели, вероятно, должно быть связано с наложением каких-то дополнительных ограничений на ее структуру. Одно из самых естественных ограничений такого рода – включение в модель обратной связи.

Игры с неопределенным фактором и обратной связью гораздо более изучены [1,3,7,10–12]. По-видимому, это не в последнюю очередь связано с тем, что соответствующие задачи оказываются более простыми. На первый взгляд это звучит парадоксально, но объясняется весьма просто. Предполагая, что Центр в момент принятия решения знает выбор агента, мы, по сути, наделяем множество стратегий Центра некоторой дополнительной структурой – структурой функционального пространства. Таким образом, мы получаем более частную модель. Вряд ли стоит удивляться, что исследовать ее проще.

Есть и другие направления исследования. Например, уже предположение наличия метрики на множестве стратегий Центра дает возможность получить кое-что новое. Объем статьи не позволяет остановиться на этом более подробно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бурков В.Н., Новиков Д.А. *Теория активных систем: состояние и перспективы*. – М.: Синтег, 1999.
2. Воронин А.А., Мишин С.П. *Оптимальные иерархические структуры*. М.: ИПУ РАН, 2003.
3. Горелик В.А., Горелов М.А., Кононенко А.Ф. *Анализ конфликтных ситуаций в системах управления*. М.: Радио и связь, 1991.
4. Горелов М.А. *Модель институционального управления* // Управление большими системами, Вып. 35. М.: ИПУ РАН, 2011. С. 68–93.
5. Горелов М.А., Ерешко Ф.И. *О моделях централизации и децентрализации управления в цифровом обществе* // Контуры цифровой реальности: Гуманитарно-технологическая революция и выбор будущего / Под ред. В.В.Иванова, Г.Г. Малинецкого, С.Н. Сиренко. М.: Ленанд, 2018. С. 187–202
6. Кононенко А.Ф. *Роль информации о функции цели противника в играх двух лиц с фиксированной последовательностью ходов* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1973. Т. 13, №2. С. 311–317.
7. Кононенко А.Ф., Халезов А.Д., Чумаков В.В. *Принятие решений в условиях неопределенности*. М.: ВЦ АН СССР, 1991.
8. Кукушкин Н.С. *Об одной игре с неполной информацией* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1973. Т. 13, №1. С. 210–216.
9. Новиков Д.А. *Институциональное управление организационными системами*. М.: ИПУ РАН, 2004.
10. Новиков Д.А. *Теория управления организационными системами*. М.: МПСИ, 2005.
11. Bolton P., Dewatripont M. *Contract Theory*. Cambridge: The MIT Press, 2004.
12. Laffont J.-J., Martimort D. *The Theory of Incentives: The Principal-Agent Model*. Cambridge: The MIT Press, 2002.

TRANSFER OF RIGHTS IN HIERARCHICAL SYSTEMS

Mikhail A. Gorelov, Dorodnicyn Computing Centre, FRC CSC RAS, Moscow, Cand.Sc. (griefer@ccas.ru).

Abstract: Hierarchical game under uncertainty is considered. The agent is supposed to be more informed about the value of uncertain factor than Center. The reasonability for Center of partial transfer of rights to choose control from Center to agent is studied in such assumptions.

Keywords: decision making under uncertainty, hierarchical games, decentralization of control.

УДК 517.977

ББК 22.18

ПОЗИЦИОННЫЕ СТРАТЕГИИ В НЕАНТАГОНИСТИЧЕСКОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

ЕКАТЕРИНА А. КОЛПАКОВА*

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского

УрО РАН

620108, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16

e-mail: eakolpakova@gmail.com

Для неантагонистической дифференциальной игры двух лиц специального вида построены универсальные позиционные стратегии. Динамика первого игрока определяется его собственной позицией и управлением, в то время как динамика второго игрока зависит от позиций обоих игроков и собственного управления. Позиционные стратегии строятся с помощью решения системы уравнений Гамильтона–Якоби, которая имеет иерархический тип. В статье показано, что решение системы уравнений Гамильтона–Якоби лежит в классе многозначных отображений. Получена связь выигрышей игроков с обобщенным решением системы уравнений Гамильтона–Якоби.

Ключевые слова: система уравнений Гамильтона–Якоби, неантагонистическая дифференциальная игра, равновесие по Нэшу, многозначное решение.

Поступила в редакцию: 03.06.19 *После доработки:* 29.10.19 *Принята к публикации:* 30.11.19

1. Введение

Статья посвящена построению позиционных равновесных стратегий для неантагонистической дифференциальной игры двух лиц, основанному на решении системы уравнений Гамильтона–Якоби. Известно два подхода к построению позиционных стратегий в неантагонистической дифференциальной игре. Первый подход связан с наказанием игроков, которые отклоняются от оптимальной стратегии, согласно которой действуют остальные игроки. Второй подход основан на решении сильно связанной системы уравнений Гамильтона–Якоби. Интерес ко второму подходу связан с построением устойчивых стратегий в дифференциальной игре. Этот подход рассматривался в работах [12,13,15], где решение системы уравнений Гамильтона–Якоби предполагалось гладким. Однако решение системы уравнений Гамильтона–Якоби даже в случае антагонистической дифференциальной игры может быть негладким [6]. В работе [2] приведен пример, когда решение системы уравнений Гамильтона–Якоби разрывно при достаточно гладких начальных данных. В теории сильно связанных систем уравнений Гамильтона–Якоби нет общих результатов о существовании решения. Исследованы частные случаи систем уравнений Гамильтона–Якоби, в которых удалось построить непрерывное решение [10,11]. В этих случаях предполагалось, что динамика игроков описывается простыми движениями в $\mathbb{R}$.

В статье построено многозначное решение системы уравнений Гамильтона–Якоби. Рассмотрен случай, когда динамика и функционал платы первого игрока не зависят от действий второго игрока. Таким образом, рассматриваемая система уравнений Гамильтона–Якоби имеет иерархический вид. Мы рассмотрим дифференциальную игру в $\mathbb{R}^2$. Используя решение системы уравнений Гамильтона–Якоби, мы строим позиционные стратегии для неантагонистической дифференциальной игры двух лиц. В статье показано, что выигрыши игроков совпадают с многозначным решением системы уравнений Гамильтона–Якоби. Данные результаты обобщают результаты работы [3], в которой построено равновесие по Нэшу в классе программных стратегий на основе сильно связанной системы уравнений Гамильтона–Якоби и динамикой, зависящей только от управления лидера. Отметим, что в настоящей работе рассматривается динамика

более общего вида, которая зависит от управлений лидера и ведомого игрока.

2. Постановка задачи

Рассмотрим неантагонистическую дифференциальную игру двух лиц с динамикой вида

$$\dot{x}_1 = f_1(t, x_1, u), \quad x_1(t_0) = x_1^0, \quad u \in U, \quad (2.1)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(t, x, v), \quad x_2(t_0) = x_2^0, \quad v \in V. \quad (2.2)$$

Здесь $t \in [0, T]$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, U, V – компакты в $\mathbb{R}$. Обозначим множество допустимых управлений первого игрока символом $\tilde{U}$:

$$\tilde{U} = \{u : [t_0, T] \rightarrow U : u \text{ – измеримые функции}\}, \quad (2.3)$$

а множество допустимых управлений второго игрока символом $\tilde{V}$:

$$\tilde{V} = \{v : [t_0, T] \rightarrow V : v \text{ – измеримые функции}\}, \quad (2.4)$$

Первый игрок максимизирует следующий функционал платы

$$I_1(t_0, x_1^0; u(\cdot)) = \sigma_1(x_1(T)) + \int_{t_0}^T g_1(t, x_1(t), u(t)) dt \rightarrow \max_{u(\cdot) \in \tilde{U}},$$

функционал платы второго игрока имеет вид

$$I_2(t_0, x_0; u(\cdot), v(\cdot)) = \sigma_2(x(T)) + \int_{t_0}^T g_2(t, x_1(t), x_2(t), v(t)) dt \rightarrow \max_{v(\cdot) \in \tilde{V}}.$$

Отметим, что динамика и функционал платы первого игрока не зависят от действий второго игрока. Отсюда следует, что первый игрок решает задачу оптимального управления. Динамика и функционал платы второго игрока зависят от позиции первого игрока. Подставляя известную траекторию первого игрока $x_1(\cdot; x_1^0)$ в динамику и функционал платы второго игрока, получим задачу оптимального управления для второго игрока.

Предполагаем, что

A1 функция $f_1 : [0, T] \times \mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{R}$ липшицева по переменным t, x_1 и удовлетворяет условию подлинейного роста по x_1 .

A2 функция $\sigma_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ липшицева, g_1 непрерывна, удовлетворяет условию подлинейного роста по x_1 , и при любых (t, x_1) вектограмма $(f_1(t, x_1, U), g_1(t, x_1, U))$ выпукла.

A3 функция $f_2 : [0, T] \times \mathbb{R}^2 \times V \rightarrow \mathbb{R}$ липшицева по t, x и удовлетворяет условию подлинейного роста по x .

A4 функция $\sigma_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ липшицева, g_2 непрерывна, удовлетворяет условию подлинейного роста по x , и при любых (t, x) вектограмма $(f_2(t, x, V), g_2(t, x, V))$ выпукла.

Из предположений A2, A4 (выпуклость вектограмм) и непрерывности функций g_1, g_2 следует, что максимум в функционалах I_1, I_2 достигается [1].

3. Задача оптимального управления первого игрока

Мы построим позиционное управление первого игрока, опираясь на решение соответствующего уравнения Гамильтона–Якоби. Рассмотрим отображение

$$\varphi_1 : [t_0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

определенное следующим образом:

$$\varphi_1(t_0, x_1^0) = \max_{u(\cdot) \in \tilde{U}} I_1(t_0, x_1^0; u(\cdot)),$$

где $\tilde{U}$ задано (2.3). Отображение φ_1 называется функцией цены первого игрока. Построим гамильтониан для задачи (2.1), (2.3) с функционалом платы I_1 :

$$\begin{aligned} H_1(t, x_1, p) &= \max_{u \in U} [f_1(t, x_1, u)p + g_1(t, x_1, u)] = \\ &f_1(t, x_1, u^*(t, x_1, p))p + g_1(t, x_1, u^*(t, x_1, p)), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где p – сопряженная переменная, $u^* : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow U$ – измеримая функция, удовлетворяющая условию

$$u^*(t, x_1, p) \in \text{Arg max}_{u \in U} \{f_1(t, x_1, u)p + g_1(t, x_1, u)\}. \quad (3.2)$$

Покажем, что такая измеримая функция существует. Функция вида $F_1(t, x_1, p, u) = f_1(t, x_1, u)p + g_1(t, x_1, u)$ является функцией Каратеодори. Проверим определение функции Каратеодори:

1. для каждого $u \in U$, функция $F_1(\cdot, \cdot, \cdot, u) : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ измерима;
2. для каждого $(t, x_1, p) \in [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, функция $F_1(t, x_1, p, \cdot) : U \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна.

Из теоремы об измеримом максимуме следует, что измеримый селектор $u^* : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow U$, удовлетворяющий условию (3.2), существует [8].

Известно из работы [6], что функция цены φ_1 является единственным минимаксным/вязкостным решением задачи Коши

$$\frac{\partial \varphi_1(t, x_1)}{\partial t} + H_1(t, x_1, D_{x_1} \varphi_1(t, x_1)) = 0, \quad \varphi_1(T, x_1) = \sigma_1(x_1), \quad (3.3)$$

где H_1 задано (3.1). Напомним некоторые свойства минимаксного/вязкостного решения [7]:

1. минимаксное/вязкостное решение φ_1 является липшицевой функцией;
2. минимаксное/вязкостное решение φ_1 дифференцируемо по любому направлению в произвольной точке $(t, x_1) \in [0, T] \times \mathbb{R}$.

Чтобы определить движение системы (2.1) под действием позиционного управления, мы используем формализацию пошаговых движений, предложенную Н.Н. Красовским и А.И. Субботиным [4]. В работе [7] доказано, что универсальное позиционное управление принадлежит классу разрывных функций и имеет вид

$$u^0(t, x_1) \in \operatorname{Arg} \max_{u \in U} \left[\frac{d\varphi_1(t, x_1)}{d(1, f_1(t, x_1, u))} + g_1(t, x_1, u) \right]. \quad (3.4)$$

Здесь $\frac{d\varphi_1(t, x_1)}{d(1, f_1(t, x_1, u))}$ обозначает производную функции φ_1 по направлению $(1, f_1(t, x_1, u))$.

Обозначим символом $U^0(t_0, x_1^0)$ множество оптимальных программных управлений $u(\cdot) \in \tilde{U}$ задачи (2.1) с начальным условием $x_1(t_0) = x_1^0$ и функционалом I_1 . Обозначим через $X_1(t_0, x_1^0)$ множество траекторий $x_1(\cdot; x_1^0) : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ таких, что

$$\dot{x}_1(t) = f_1(t, x_1(t), u(t)), \quad x_1(t_0) = x_1^0, \quad u(\cdot) \in U^0(t_0, x_1^0).$$

Из предположений $A1$, $A2$ следует, что для любого компакта $D_0 \subset [0, T] \times \mathbb{R}$ и $(t_0, x_1^0) \in D_0$ существуют константы $M_0, M_1 > 0$ такие, что

$$|x_1(t)| \leq M_0, \quad |\dot{x}_1(t)| \leq M_1, \quad t \in [t_0, T].$$

Из теоремы Арцела–Асколи [1] следует, что для любой (t_0, x_1^0) множество $X_1(t_0, x_1^0)$ является компактом в $C[t_0, T]$.

4. Задача оптимального управления для второго игрока

Ранее мы построили оптимальное управление и оптимальную траекторию первого игрока. Подставим оптимальную траекторию $x_1(\cdot; x_1^0)$ первого игрока в динамику второго игрока и рассмотрим вспомогательную задачу оптимального управления.

$$\dot{x}_2 = f_2(t, x_1(t; x_1^0), x_2, v), \quad x_1(t_0) = x_1^0, \quad x_2(t_0) = x_2^0. \quad (4.1)$$

Гамильтониан для задачи (4.1) с функционалом I_2 при фиксированной траектории $x_1(\cdot; x_1^0) \in X_1(t_0, x_1^0)$ имеет вид

$$\begin{aligned} H_2(t, x_2, q_2; x_1(\cdot; x_1^0)) = \\ \max_{v \in V} [f_2(t, x_1(t; x_1^0), x_2, v)q_2 + g_2(t, x_1(t; x_1^0), x_2, v)] = \\ f_2(t, x_1(t; x_1^0), x_2, v^*(t, x_2, q_2; x_1^0))q_2 + g_2(t, x_1(t; x_1^0), x_2, v^*(t, x_2, q_2; x_1^0)), \end{aligned} \quad (4.2)$$

где

$$\begin{aligned} v^*(t, x_2, q_2; x_1^0) \in \\ \text{Arg max}_{v \in V} \{f_2(t, x_1(t; x_1^0), x_2, v)q_2 + g_2(t, x_1(t; x_1^0), x_2, v)\}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Напомним, что функция

$$F_2(t, x_2, q_2, v; x_1(t; x_1^0)) = f_2(t, x_1(t; x_1^0), x_2, v)q_2 + g_2(t, x_1(t; x_1^0), x_2, v)$$

является функцией Каратеодори. Действительно, из определения функции Каратеодори имеем:

1. для любого $v \in V$ функция $F_2(\cdot, \cdot, \cdot, v; x_1(t; x_1^0)) : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ измерима;

2. для любого $(t, x_2, q_2) \in [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ функция $F_2(t, x_2, q_2, \cdot; x_1(t; x_1^0)) : V \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна.

Из теоремы об измеримом максимуме [8] следует, что функция $v^* : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow V$, удовлетворяющая условию (4.3), измерима.

Отметим, что для заданной траектории $x_1(\cdot; x_1^0) \in X_1(t_0, x_1^0)$ гамильтониан $H_2(\cdot, \cdot, \cdot; x_1(\cdot; x_1^0))$ липшицев по переменным x_2, q_2 согласно предположениям A3, A4.

Рассмотрим отображение

$$\varphi_2(\cdot, \cdot; x_1(\cdot; x_1^0)) : [t_0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

определенное следующим образом:

$$\varphi_2(t_0, x_2; x_1(\cdot; x_1^0)) = \max_{v(\cdot) \in \tilde{V}} I_2(t_0, x_0; u^*(\cdot), v(\cdot)),$$

где $\tilde{V}$ задано формулой (2.4), $u^*(\cdot) \in U^0(t_0, x_1^0)$. Отображение φ_2 называется функцией цены второго игрока при фиксированной траектории $x_1(\cdot; x_1^0)$, порожденной оптимальным управлением $u^*(\cdot)$ первого игрока. Из работы [6] известно, что функция цены φ_2 – единственное минимаксное/вязкостное решение задачи Коши

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + H_2(t, x_2, D_{x_2} \varphi_2; x_1(\cdot; x_1^0)) &= 0, \\ \varphi_2(T, x_2) &= \sigma_2(x_1(T; x_1^0), x_2). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Используя формализацию пошаговых движений, предложенную Н.Н. Красовским и А.И. Субботиным [4], получаем, что универсальное позиционное управление лежит в классе разрывных функций и, согласно работе [7], имеет вид

$$\begin{aligned} v^0(t, x_2; x_1(\cdot; x_1^0)) &\in \\ \text{Arg max}_{v \in V} \left[\frac{d\varphi_2(t, x_2; x_1(\cdot; x_1^0))}{d(1, f_2(t, x_1(t; x_1^0), x_2, v))} + g_2(t, x_1(t; x_1^0), x_2, v) \right]. \end{aligned} \quad (4.5)$$

5. Построение равновесия по Нэшу

Далее в статье мы докажем, что пара (u^0, v^0) , определенная формулами (3.4), (4.5), обеспечивает равновесие по Нэшу. Рассмотрим начальную точку $(t_0, x_0) \in [0, T] \times \mathbb{R}^2$ и позиционные управления u и v . Построим траектории $\hat{x}_1(\cdot, t_0, x_1^0, u)$ и $\hat{x}_2(\cdot, t_0, x_0, u, v)$ системы (2.1),

(2.2), порожденные позиционными управлениями u, v согласно формализации пошаговых движений, предложенной Н.Н. Красовским и А.И. Субботиным [4]. Рассмотрим следующие функционалы:

$$I_1(t_0, x_1^0, u) = \sigma_1(x_1(T)) + \int_{t_0}^T g_1(t, x_1(t), u(t, x_1(t)))dt,$$

$$I_2(t_0, x_0; u, v) = \sigma_2(x(T)) + \int_{t_0}^T g_2(t, x(t), v(t, x(t)))dt,$$

где $x_1(t) = \hat{x}_1(t, t_0, x_1^0, u)$, $x_2(t) = \hat{x}_2(t, t_0, x_0, u, v)$, $x = (x_1, x_2)$.

Определение 5.1. [9] Будем говорить, что пара позиционных стратегий (u^0, v^0) , где $u^0 : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow U$ и $v^0 : [0, T] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow V$, является позиционным равновесием по Нэшу в точке (t_0, x_0) , если для любых позиционных стратегий $u : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow U$ и $v : [0, T] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow V$

$$I_1(t_0, x_1^0, u) \leq I_1(t_0, x_1^0, u^0), \quad I_2(t_0, x_0; u^0, v) \leq I_2(t_0, x_0; u^0, v^0).$$

Так как u^0 – оптимальное управление задачи (2.1) с функционалом I_1 , первое неравенство справедливо. Для второго неравенства имеем

$$\begin{aligned} & \sigma_2(x_1^*(T), x_2(T)) + \int_{t_0}^T g_2(t, x_1^*(t), x_2(t), v(t, x_2(t); x_1^*(\cdot)))dt \leq \\ & \sigma_2(x_1^*(T), x_2^*(T)) + \int_{t_0}^T g_2(t, x_1^*(t), x_2^*(t), v^0(t, x_2^*(t); x_1^*(\cdot)))dt = \end{aligned}$$

$\varphi_2(t_0, x_2^*(t_0); x_1^*(\cdot))$, где $(x_1^*(\cdot), x_2^*(\cdot))$ – оптимальная траектория системы (2.1), (2.2), порожденная позиционными стратегиями u^0, v^0 , определенными (3.4), (4.5).

6. Выигрыши игроков

В этом разделе мы покажем связь между выигрышами игроков и обобщенным решением системы уравнений Гамильтона–Якоби. Рассмотрим функцию

$$H(t, x, p, q) = \max_{v \in V} [f_1(t, x_1, u^*(t, x_1, p))q_1 + f_2(t, x, v)q_2 + g_2(t, x, v)].$$

Здесь u^* определено формулой (3.2). Из свойств минимаксного решения φ_1 следует, что субдифференциал $D_{x_1}^- \varphi_1(t, x_1) \neq \emptyset$ для любой точки $(t, x_1) \in [0, T] \times \mathbb{R}$ [7]. Кроме того, субдифференциал $D_{x_1}^- \varphi_1(t, x_1)$ является выпуклым компактным множеством. Подставим в функцию H вместо p произвольный измеримый селектор $\partial_{x_1} \varphi_1 : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ многозначного отображения $D_{x_1}^- \varphi_1 : [0, T] \times \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$. Далее будем рассматривать разрывную по x_1 функцию

$$H(t, x, q) = \max_{v \in V} [f_1(t, x_1, u^*(t, x_1, \partial_{x_1} \varphi_1(t, x_1)))q_1 + f_2(t, x, v)q_2 + g_2(t, x, v)]. \quad (6.1)$$

Отметим, что функция H , определенная (6.1), липшицева по q с константой липшица $\lambda(t, x)$. Доказательство этого утверждения приведено в работе [6]. Выберем непрерывную функцию $\lambda : [0, T] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющую условию:

$$|H(t, x, q) - H(t, x, 0)| \leq \lambda(t, x) \|q\| \quad \forall q \in \mathbb{R}^2. \quad (6.2)$$

Рассмотрим разрывную по x_1 функцию:

$$H_*(t, x_1, x_2, q) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf_{(\tau, \xi) \in B(t, x; \varepsilon)} \min_{p \in D_{x_1}^- \varphi_1(\tau, \xi_1)} H(\tau, \xi, p, q),$$

$$H^*(t, x_1, x_2, q) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{(\tau, \xi) \in B(t, x; \varepsilon)} \max_{p \in D_{x_1}^- \varphi_1(\tau, \xi_1)} H(\tau, \xi, p, q).$$

Здесь символ $B(t, x; \varepsilon) \subset [0, T] \times \mathbb{R}^2$ обозначает шар с центром в точке (t, x) радиусом ε .

Лемма 6.1. *Функции H_* , H^* являются липшицевыми по переменной q .*

Доказательство. Покажем, что функция H^* является липшицевой по q . Рассмотрим максимизирующие последовательности $\{(t'_n, x'_n)\}_{n=1}^\infty$ и $\{(t''_n, x''_n)\}_{n=1}^\infty$ такие что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H(t'_n, x'_n, q') = H^*(t, x, q'), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} H(t''_n, x''_n, q'') = H^*(t, x, q'').$$

Оценим разность $|H^*(t, x, q') - H^*(t, x, q'')| \leq$

$$|H^*(t, x, q') - H(t'_n, x'_n, q')| + |H(t'_n, x'_n, q') - H(t''_n, x''_n, q'')| +$$

$$|H^*(t, x, q'') - H(t''_n, x''_n, q'')|.$$

В силу сходимости $H(t'_n, x'_n, q') \rightarrow H^*(t, x, q')$ и $H(t''_n, x''_n, q'') \rightarrow H^*(t, x, q'')$ при $n \rightarrow \infty$ получаем, что, начиная с некоторого номера N , справедливы неравенства

$$|H^*(t, x, q') - H(t'_n, x'_n, q')| < \varepsilon, \quad |H^*(t, x, q'') - H(t''_n, x''_n, q'')| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Тогда

$$|H^*(t, x, q_1) - H^*(t, x, q_2)| \leq 2\varepsilon + |H(t'_n, x'_n, q_1) - H(t''_n, x''_n, q_2)|.$$

Если $H(t'_n, x'_n, q') - H(t''_n, x''_n, q'') > 0$, то

$$H(t'_n, x'_n, q') - H(t''_n, x''_n, q'') < H(t'_n, x'_n, q') - H(t'_n, x'_n, q''),$$

так как $\{(t''_n, x''_n)\}_{n=1}^\infty$ — максимизирующая последовательность для $H^*(t, x, q'')$. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} H(t'_n, x'_n, q') - H(t''_n, x''_n, q'') &< H(t'_n, x'_n, q') - H(t'_n, x'_n, q'') \leq \\ &\leq \lambda(t'_n, x'_n) \|q' - q''\|. \end{aligned}$$

Если $H(t''_n, x''_n, q'') - H(t'_n, x'_n, q') > 0$, то

$$\begin{aligned} H(t''_n, x''_n, q'') - H(t'_n, x'_n, q') &< H(t'_n, x'_n, q'') - H(t''_n, x''_n, q') \leq \\ &\leq \lambda(t''_n, x''_n) \|q' - q''\|. \end{aligned}$$

В результате имеем

$$|H^*(t, x, q') - H^*(t, x, q'')| \leq 2\varepsilon + \max\{\lambda(t'_n, x'_n), \lambda(t''_n, x''_n)\} \|q' - q''\| \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Липшицевость по q функции H_* доказывается аналогично. □

Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + H^*(t, x, D_x \Phi) = 0 \tag{6.3}$$

с краевым условием $\Phi(T, x) = \sigma_2(x)$. Согласно лемме 6.1 гамильтониан H^* липшицев по q , а значит для определения решения задачи

(6.3) можно применить понятие М-решения, предложенное А.И. Субботиным для уравнения Гамильтона–Якоби с разрывным по фазовой переменной гамильтонианом [5]. Рассмотрим дифференциальное включение

$$(\dot{x}(t), \dot{z}(t)) \in E(t, x, q) = \{(\psi, g) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} : \|\psi\| \leq \lambda(t, x), \quad (6.4) \\ \langle \psi, q \rangle - g \in [H_*(t, x, q), H^*(t, x, q)]\} \forall q \in \mathbb{R}^2.$$

Здесь λ определено (6.2). Многозначное отображение $(t, x, q) \rightrightarrows E(t, x, q) \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ является допустимым (см. [5]).

Определение 6.1. Пусть $W \subset [0, T] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ – замкнутое множество. Множество W слабо инвариантно относительно дифференциального включения (6.4), если для любой точки $(t_0, x_0, z_0) \in W$ существует момент $\tau > 0$ и решение $(x(\cdot), z(\cdot))$ дифференциального включения (6.4) такое, что $(x(t_0), z(t_0)) = (x_0, z_0)$, $(t, x(t), z(t)) \in W$, когда $t \in [0, \tau]$.

Определение 6.2. Многозначное отображение $W : [0, T] \times \mathbb{R}^2 \rightrightarrows \mathbb{R}$ называется М-решением уравнения Гамильтона–Якоби (6.3), если график W слабо инвариантен относительно дифференциального включения (6.4).

М-решением задачи Коши называется М-решение уравнения Гамильтона–Якоби, удовлетворяющее краевому условию $W(T, x) = \sigma_2(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}^2$.

А.И. Субботин и А.С. Лахтин доказали следующую теорему [5].

Теорема 6.1. Пусть W – замкнутое множество в $[0, T] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$. Предположим, что $W(t, x) = \{z \in \mathbb{R} : (t, x, z) \in W\} \neq \emptyset$ и

$$W_*(t, x) = \inf_{z \in W(t, x)} z, \quad W^*(t, x) = \sup_{z \in W(t, x)} z.$$

Отображение W является М-решением уравнения (6.3) тогда и только тогда, когда $\text{epi } W_*$ и $\text{hypo } W^*$ – М-решения уравнения (6.3).

Рассмотрим многозначное отображение

$$\Phi(t_0, x_0) = \text{cl} \bigcup_{x_1(\cdot; x_1^0) \in X_1(t_0, x_1^0)} \{\varphi_2(t_0, x_2^0; x_1(\cdot, x_1^0))\}. \quad (6.5)$$

Здесь символ $\text{cl } A$ обозначает замыкание множества A , $\text{epi } W_*$ – надграфик отображения W_* , $\text{hypo } W^*$ – подграфик отображения W^* . Отметим, что отображение Φ компактнозначно по определению.

Теорема 6.2. *Отображение Φ , определенное формулой (6.5), является M -решением уравнения (6.3).*

Доказательство. Зафиксируем начальную точку $(t_0, x_0) \in [0, T] \times \mathbb{R}^2$ и обозначим $\Phi^*(t, x) = \max_{y \in \Phi(t, x)} y$. Мы покажем, что подграфик Φ^* слабо инвариантен относительно дифференциального включения (6.4). Выберем $\psi_1 = f_1(t, x_1, u^*(t, x_1^0))$, $u^*(\cdot, x_1^0) \in U^0(t_0, x_1^0)$, $\psi_2 = f_2(t, x_1, x_2, v^*(t))$. Здесь $v^*(\cdot)$ – оптимальное программное управление второго игрока при условии, что первый игрок выбрал управление $u^*(\cdot, x_1^0)$. Из формулы (6.2) следует, что $\|\psi\| \leq \lambda(t, x)$. Тогда решение $\xi(\cdot; t_0, x_0)$ дифференциального включения (6.4), где $\dot{\xi} = \psi$, совпадает с оптимальными траекториями задач оптимального управления (2.1), (2.2) с функционалами платы I_1, I_2 . Пусть $(t_0, x_0, z_0) \in \text{hypo } \Phi^*$.

1а. Рассмотрим случай, когда для траектории $\xi_1(\cdot) \in X_1(t_0, x_0)$ справедливо неравенство: $z_0 \leq \varphi_2(t_0, x_2^0; \xi_1(\cdot; x_1^0))$, где φ_2 – функция цены второго игрока. Из выбора точки z_0 и принципа динамического программирования имеем следующие неравенства:

$$\begin{aligned} z_0 &\leq \varphi_2(t_0, x_2^0; \xi_1(\cdot, x_1^0)) = \\ &= \varphi_2(t, \xi_2(t); \xi_1(\cdot, x_1^0)) + \int_{t_0}^t g_2(\tau, \xi(\tau; t_0, x_0), v^*(\tau)) d\tau, \end{aligned}$$

где $v^*(\cdot)$ порождает оптимальную траекторию $\xi_2(\cdot)$ системы (2.2) с функционалом I_2 . Для любого $t \in [t_0, T]$ справедливо неравенство

$$z_0 - \int_{t_0}^t g_2(\tau, \xi(\tau; t_0, x_0), v^*(\tau)) d\tau \leq \varphi_2(t, \xi_2(t); \xi_1(\cdot, x_1^0)).$$

Следовательно,

$$z(t) = z_0 - \int_{t_0}^t g_2(\tau, \xi(\tau; t_0, x_0), v^*(\tau)) d\tau \leq \varphi_2(t, \xi_2(t); \xi_1(\cdot, x_1^0)),$$

то есть $(t, \xi(t), z(t)) \in \text{хуро } \varphi_2$. Решение ξ удовлетворяет дифференциальному включению (6.4) по построению. Отметим, что

$$\dot{z}(t) = -g_2(t, \xi(t; t_0, x_0), v^*(t)),$$

$$\langle \dot{\xi}(t), q \rangle - \dot{z} = \langle \dot{\xi}(t), q \rangle + g_2(t, \xi(t; t_0, x_0), v^*(t)) \in [H_*(t, \xi(t), q), H^*(t, \xi(t), q)].$$

Таким образом, пара $(\xi(\cdot), z(\cdot))$ удовлетворяет дифференциальному включению (6.4). Значит $(t, \xi(t), z(t)) \in \text{хуро } \Phi^*$. Так как Φ^* – полунепрерывная сверху функция, то хуро Φ^* – замкнутое множество. Следовательно, хуро Φ^* является М-решением уравнения (6.3).

2а. Не существует траектории $\xi_1(\cdot) \in X_1(t_0, x_0)$ такой, что $z_0 \leq \varphi_2(t_0, x_2^0; \xi_1(\cdot; x_1^0))$, где φ_2 – функция цены второго игрока. Так как $(t_0, x_0, z_0) \in \text{хуро } \Phi^*(t_0, x_0)$, найдется последовательность $\{(\xi_1^k(\cdot), z_0^k)\}_{k=1}^\infty$, сходящаяся к $(\xi_1(\cdot), z_0)$ и такая, что $z_0^k < \varphi_2(t_0, x_2^0; \xi_1^k(\cdot, x_1^0))$. Применим рассуждения случая 1а к $(\xi_1^k(\cdot), z_0^k)$ и получим следующие неравенства:

$$z_0^k - \int_{t_0}^t g_2(\tau, \xi^k(\tau; t_0, x_0), v_k^*(\tau)) d\tau \leq \varphi_2^k(t, \xi_2^k(t); \xi_1^k(\cdot, x_1^0)).$$

Здесь $\varphi_2^k(\cdot, \cdot; \xi_1^k(\cdot, x_1^0))$ – функция цены второго игрока, когда первый игрок выбирает траекторию $\xi_1^k(\cdot, x_1^0) \in X_1(t_0, x_1^0)$, $\xi^k = (\xi_1^k, \xi_2^k)$ и $v_k^*(\cdot)$ – оптимальное управление второго игрока, порождающее траекторию ξ_2^k .

Множество оптимальных траекторий второго игрока, выпущенных из начальной точки (t_0, x_0) , обозначим $X_2(t_0, x_0)$. Согласно теореме Арцела – Асколи $X_2(t_0, x_0)$ – компакт. Действительно, существуют константы M_2, M_3 :

$$|\xi_2(t)| < M_2, \quad |\dot{\xi}_2(t)| \leq M_3, \quad \forall t \in [t_0, T].$$

Так как $X_1(t_0, x_1^0), X_2(t_0, x_0)$ – компакты, то $\xi^k(t) \rightarrow \xi(t)$ при $k \rightarrow \infty$. Следовательно,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} z_0^k - \int_{t_0}^t g_2(\tau, \xi^k(\tau; t_0, x_0), v_k^*(\tau)) d\tau \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_2^k(t, \xi_2^k(t); \xi_1^k(\cdot, x_1^0)),$$

$$z_0 - \int_{t_0}^t g_2(\tau, \xi(\tau; t_0, x_0), v^*(\tau)) d\tau \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_2^k(t, \xi_2^k(t); \xi_1^k(\cdot, x_1^0)) \leq \Phi^*(t_0, x_0).$$

Это означает, что $(t, \xi(t), z(t)) \in \text{hypo } \Phi^*$.

Пусть $\Phi_*(t, x) = \min_{y \in \Phi(t, x)} y$. Рассмотрим 2 случая. Пусть $(t_0, x_0, z_0) \in \text{epi } \Phi_*(t, x)$.

1b. Рассмотрим случай, когда существует траектория $\xi_1(\cdot) \in X_1(t_0, x_1^0)$ первого игрока такая, что $z_0 \geq \varphi_2(t_0, x_2^0; \xi_1(\cdot; x_1^0))$, где φ_2 – функция цены второго игрока. Для оптимальной траектории $\xi(\cdot) = (\xi_1(\cdot), \xi_2(\cdot))$ и оптимального управления $v^*(\cdot)$, порождающего $\xi_2(\cdot)$, имеем

$$\begin{aligned} \varphi_2(t, \xi_2(t); \xi_1(\cdot; x_1^0)) + \int_{t_0}^t g_2(\tau, \xi(\tau; t_0, x_0), v^*(\tau)) d\tau = \\ = \varphi_2(t_0, x_2^0; \xi_1(\cdot; x_1^0)) \leq z_0. \end{aligned}$$

Справедливы следующие неравенства:

$$\varphi_2(t, \xi_2(t); \xi_1(\cdot; x_1^0)) \leq z_0 - \int_{t_0}^t g_2(\tau, \xi(\tau; t_0, x_0), v^*(\tau)) d\tau = \zeta(t).$$

Заметим, что $(\dot{\xi}, \dot{\zeta}) \in E(t, \xi, q)$. Действительно, $\dot{\xi} \in E(t, x, q)$ по построению и

$$\langle \dot{\xi}, q \rangle - \dot{\zeta}(t) = \langle \dot{\xi}, q \rangle + g_2(t, \xi(t; t_0, x_0), v^*(t)) \in [H_*(t, \xi(t), q), H^*(t, \xi(t), q)].$$

Следовательно, решение $(\xi_1(\cdot), \xi_2(\cdot), \zeta(\cdot))$ дифференциального включения (6.4) лежит в надграфике φ_2 и $(\xi_1(\cdot), \xi_2(\cdot), \zeta(\cdot))$ лежит в надграфике Φ_* . Так как функция Φ_* полунепрерывна снизу, мы видим, что $\text{epi } \Phi_*$ – замкнутое множество и $\text{epi } \Phi_*$ слабо инвариантно относительно дифференциального включения (6.4). Отсюда следует, что $\text{epi } \Phi_*$ – М-решение уравнения (6.3).

2b. Не существует траектории $\xi_1(\cdot) \in X_1(t_0, x_0)$ такой, что $z_0 \geq \varphi_2(t_0, x_2^0; \xi_1(\cdot; x_1^0))$, где φ_2 – функция цены второго игрока. Так как $z_0 \in \text{epi } \Phi_*(t_0, x_0)$, построим последовательность $\{(\xi_1^k(\cdot), z_0^k)\}_{k=1}^\infty$, сходящуюся к $(\xi_1(\cdot), z_0)$ и такую, что $z_0^k \geq \varphi_2(t_0, x_2^0; \xi_1^k(\cdot, x_1^0))$. Применяя

случай 2а к $(\xi_1^k(\cdot), z_0^k)$, получаем следующие неравенства:

$$\varphi_2^k(t, \xi_2^k(t); \xi_1^k(\cdot; x_1^0)) \leq z_0^k - \int_{t_0}^t g_2(\tau, \xi^k(\tau; t_0, x_0), v^k(\tau)) d\tau,$$

где $\varphi_2^k(\cdot, \cdot; \xi_1^k(\cdot; x_1^0))$ – функция цены второго игрока при фиксированной траектории $\xi_1^k(\cdot; x_1^0)$, ξ^k – оптимальная траектория задач (2.1), (2.2) с функционалами платы I_1 , I_2 , и управление v^k порождает ξ_2^k . Рассмотрим

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_2^k(t, \xi_2^k(t); \xi_1^k(\cdot; x_1^0)) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} z_0^k - \int_{t_0}^t g_2(\tau, \xi^k(\tau; t_0, x_0), v^k(\tau)) d\tau.$$

Отсюда

$$\Phi_*(t, \xi(t)) \leq z_0 - \int_{t_0}^t g_2(\tau, \xi(\tau; t_0, x_0), v(\tau)) d\tau.$$

Здесь $\xi_k \rightarrow \xi$ при $k \rightarrow \infty$. По теореме 6.1 получаем, что Φ – М-решение уравнения (6.3). $\square$

Отметим, что $\text{epi } \Phi_*(T, x) \cap \text{hypo } \Phi^*(T, x) = \{\sigma_2(x)\} = \Phi(T, x)$, $x \in \mathbb{R}^2$.

Напомним, что многозначное отображение $\Phi : [0, T] \times \mathbb{R}^2 \rightrightarrows \mathbb{R}$ называется максимальным по включению М-решением задачи Коши, если для произвольного многозначного отображения $Y : [0, T] \times \mathbb{R}^2 \rightrightarrows \mathbb{R}$ слабо инвариантного относительно дифференциального включения (6.4) выполнено включение $Y(T, \cdot) \subset \Phi(T, \cdot)$.

Замечание 6.1. Множество $\text{gr } \Phi$, где Φ определено формулой (6.5), является максимальным М-решением задачи Коши (6.3) с краевым условием $\Phi(T, x) = \{\sigma_2(x)\} \forall x \in \mathbb{R}^2$.

По построению $\Phi(T, x) = \{\sigma_2(x)\}$, $x \in \mathbb{R}^2$ и $\text{gr } \Phi$ слабо инвариантен относительно дифференциального включения (6.4). Следовательно, по определению Φ – максимальное М-решение задачи Коши. Нетрудно показать, что максимальное М-решение задачи Коши единственно.

Опираясь на полученные результаты, введем понятие обобщенного решения системы уравнений Гамильтона–Якоби.

Определение 6.3. *Отображение (φ_1, Φ) , $\varphi_1 : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\Phi : [0, T] \times \mathbb{R}^2 \Rightarrow \mathbb{R}$ называется обобщенным решением системы уравнений Гамильтона–Якоби (3.3), (6.3), если φ – минимаксное решение уравнения (3.3) и Φ М-решение уравнения (6.3).*

Теорема 6.3. *Пусть (φ_1, Φ) – решение системы уравнений Гамильтона–Якоби (3.3), (6.3) с краевым условием $\varphi_1(T, x) = \sigma_1(x)$, $\Phi(T, x) = \sigma_2(x)$, $\beta \in \Phi(t_0, x_0)$; тогда существует равновесие по Нэшу в позиционных стратегиях (u^0, v^0) , где u^0 определяется формулой (3.4), v^0 определяется формулой (4.5). Выигрыши игроков равны $(\varphi_1(t_0, x_1^0), \beta)$.*

Доказательство. Позиционное управление u^0 , определенное (3.4), максимизирует функционал I_1 . Следовательно выигрыш первого игрока равен

$$\max_{u(\cdot) \in \tilde{U}} I_1(t_0, x_1^0; u) = I_1(t_0, x_1^0; u^0) = \varphi_1(t_0, x_1^0).$$

Пусть $\beta \in \Phi(t_0, x_0)$. То есть $\beta \in \bigcup_{x_1(\cdot; x_1^0) \in X_1(t_0, x_1^0)} \varphi_2(t_0, x_2^0; x_1(\cdot; x_1^0))$.

Существует траектория $x_1(\cdot; x_1^0) \in X_1(t_0, x_1^0)$ первого игрока такая, что $\beta = \varphi_2(t_0, x_2^0; x_1(\cdot; x_1^0))$. Из определения v^0 , определенного формулой (4.5), получим что

$$\beta = \max_{v(\cdot) \in \tilde{V}} I_2(t_0, x_0; u^0, v) = I_2(t_0, x_0; u^0, v^0) = \varphi_2(t_0, x_2^0; x_1(\cdot; x_1^0)).$$

Напомним, что для задачи оптимального управления выигрыш в программных управлениях совпадает с выигрышем в позиционных управлениях [6].

Если $\beta \in \bigcup_{x_1(\cdot; x_1^0) \in X_1(t_0, x_1^0)} \varphi_2(t_0, x_2^0; x_1(\cdot; x_1^0))$, тогда существует последовательность $\{\beta_k\}_{k=1}^\infty$ такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k = \beta, \quad \beta_k = \varphi_2^k(t_0, x_2^0; x_1^k(\cdot; x_1^0)).$$

Мы покажем, что существует равновесие по Нэшу в позиционных стратегиях (u^0, v^0) такое, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} I_2(t_0, x_0, u_k^0, v_k^0) = I_2(t_0, x_0, u^0, v^0),$$

где u_k^0, v_k^0 – позиционные стратегии, удовлетворяющие (3.4), (4.5).

Рассмотрим

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_2^k(t_0, x_2^0; x_1^k(\cdot; x_1^0)) = \lim_{k \rightarrow \infty} I_2(t_0, x_0; u_k^0, v_k^0) =$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_2(x_k(T)) + \int_{t_0}^T g_2(t, x_k(t), v_k^0(t, x_2(t); x_1^k(\cdot; x_1^0))) dt.$$

По теореме Арцела–Асколи получим, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k(t) = x(t).$$

Рассмотрим оптимальные программные управления $\tilde{u}_k(\cdot)$ и $\tilde{v}_k(\cdot)$ со свойством

$$I_2(t_0, x_0; u_k^0, v_k^0) = I_2(t_0, x_0; \tilde{u}_k, \tilde{v}_k).$$

Обозначим символом $V^0(t_0, x_0)$ множество оптимальных программных управлений $v(\cdot) \in \tilde{V}$ задачи (2.2) с начальным условием $x(t_0) = x_0$ и функционалом платы I_2 . Определим множество обобщенных управлений

$$\Lambda_u = \{\mu^u : [t_0, T] \times U \rightarrow [0, +\infty) \text{ измерима, } \forall [\tau_1, \tau_2] \subset [0, T]$$

$$\mu^u([\tau_1, \tau_2] \times U) = \tau_2 - \tau_1\},$$

$$\Lambda_v = \{\mu^v : [t_0, T] \times V \rightarrow [0, +\infty) \text{ измерима, } \forall [\tau_1, \tau_2] \subset [0, T]$$

$\mu^v([\tau_1, \tau_2] \times V) = \tau_2 - \tau_1\}$. Тогда траектории $x_1(\cdot)$, $x_2(\cdot)$, порожденные управлениями μ^u , μ^v , имеют вид

$$x_1(t) = x_1^0 + \int_{[t_0, t] \times U} f_1(\tau, x_1(\tau), u) \mu^u(d(\tau, u)),$$

$$x_2(t) = x_2^0 + \int_{[t_0, t] \times V} f_2(\tau, x_1(\tau), x_2(\tau), v) \mu^v(d(\tau, v)).$$

Функционал платы для второго игрока:

$$I_2(t_0, x_0; \mu^u, \mu^v) = \sigma_2(x(T)) + \int_{[t_0, T] \times V} g_2(\tau, x(\tau), v) \mu^v(d(\tau, v)).$$

Рассмотрим множество обобщенных управлений

$$M_{t_0}^u = \{\mu^u \in \Lambda_u : \mu^u \text{ максимизирует } I_1(t_0, x_1^0; \mu^u)\},$$

$$M_{t_0}^v = \{\mu^v \in \Lambda_v : \mu^v \text{ максимизирует } I_2(t_0, x_0; \mu^u, \mu^v)\}.$$

Из работы [1] известно, что множества $M_{t_0}^u$, $M_{t_0}^v$ являются компактными метрическими пространствами. Покажем связь между $U^0(t_0, x_1^0)$ и $M_{t_0}^u$. Если $u(\cdot) \in U^0(t_0, x_1^0)$, тогда существует $\mu_{u(\cdot)}^u \in M_{t_0}^u$ такое, что

$$\forall \varphi \in C([0, T] \times U) \quad \int_{[0, T] \times U} \varphi(t, u) \mu_{u(\cdot)}^u(d(t, u)) = \int_0^T \varphi(t, u(t)) dt.$$

Для любого $\tilde{u}_k \in U^0(t_0, x_1^0)$, построим $\mu_k^u = \mu_{\tilde{u}_k(\cdot)}^u \in M_{t_0}^u$. Рассмотрим $\mu_k^u \rightarrow \mu_*^u$ при $k \rightarrow \infty$ в слабой-* топологии. Так как $M_{t_0}^u$ – замкнутое множество, то $\mu_*^u \in M_{t_0}^u$. Мы построим $\tilde{u}^* \in U^0(t_0, x_1^0)$ такое, что $\mu_*^u = \mu_{\tilde{u}^*(\cdot)}^u$. Действительно,

$$I_1(t_0, x_1^0; \mu_k^u) = I_1(t_0, x_1^0; \tilde{u}_k) \geq I_1(t_0, x_1^0; u(\cdot)) \quad \forall u(\cdot) \in \tilde{U}.$$

Переходя к пределу, получим

$$\lim_{k \rightarrow \infty} I_1(t_0, x_1^0; \mu_k^u) = I_1(t_0, x_1^0; \mu_*^u) = I_1(t_0, x_1^0; \tilde{u}^*) \geq I_1(t_0, x_1^0; u(\cdot)) \quad \forall u(\cdot) \in \tilde{U}.$$

Следовательно $\tilde{u}^* \in U^0(t_0, x_1^0)$.

Можно провести аналогичные построения для $v_k \in V^0(t_0, x_0)$:

$$\mu_k^v = \mu_{v_k(\cdot)}^v \in M_{t_0}^v, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k^v \rightarrow \mu_*^v \in M_{t_0}^v.$$

Далее мы построим $\tilde{v}^* \in V^0(t_0, x_0)$ такое, что $\mu_*^v = \mu_{\tilde{v}^*(\cdot)}^v$.

Переходя к пределу, получим

$$\lim_{k \rightarrow \infty} I_2(t_0, x_0, u_k^0, v_k^0) = \lim_{k \rightarrow \infty} I_2(t_0, x_0, \tilde{u}_k, \tilde{v}_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} I_2(t_0, x_0, \mu_k^u, \mu_k^v) =$$

$$I_2(t_0, x_0, \mu_*^u, \mu_*^v) = I_2(t_0, x_0, \tilde{u}^*, \tilde{v}^*) = I_2(t_0, x_0; u^0, v^0).$$

Справедливо следующее неравенство:

$$I_2(t_0, x_0; u_k^0, v_k^0) \geq I_2(t_0, x_0; u_k^0, v) \quad \forall \text{ позиционного управления } v,$$

тогда

$$\lim_{k \rightarrow \infty} I_2(t_0, x_0; u_k^0, v_k^0) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} I_2(t_0, x_0; u_k^0, v) \quad \forall \text{ позиционного управления } v.$$

В результате получаем, что

$$I_2(t_0, x_0; u^0, v^0) \geq I_2(t_0, x_0; u^0, v) \quad \forall \text{ позиционного управления } v.$$

□

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Варга Дж. *Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями*. М.:Наука, 1977.
2. Колпакова Е.А. *О решении системы уравнений Гамильтона–Якоби специального вида* // Тр. ИММ УрО РАН. 2017. Т. 23. N.1. С. 158–170.
3. Колпакова Е.А. *Нэшевское равновесие на основе системы уравнений Гамильтона–Якоби специального вида* // МТИП. 2017. Т.9. вып. 4. С. 39 – 53.
4. Красовский Н.Н., Субботин А.И. *Позиционные дифференциальные игры*. М.: ФИЗМАТЛИТ, 1974.
5. Лахтин А.С., Субботин А.И. *Минимаксные и вязкостные решения разрывных уравнений с частными производными первого порядка* // Доклады РАН. 1998. Т. 359. N.4. С. 452–455.
6. Субботин А.И. *Обобщенные решения уравнений с частными производными первого порядка: перспективы динамической оптимизации* // М.–Ижевск:Институт компьютерных исследований, 2003.
7. Субботина Н.Н. *Метод характеристик для уравнений Гамильтона–Якоби и его приложения в динамической оптимизации* // Современная математика и ее приложения. 2004. Т. 20. С. 1–129.
8. Aliprantis C.D., Border K.C. *Infinite Dimensional Analysis: A Hitchhiker's Guide*. Springer–Verlag Berlin Heidelberg, 2006.

9. Basar T., Olsder G.J. *Dynamic Noncooperative Game Theory*. Philadelphia: SIAM, 1999.
10. Bressan A., Shen W. *Semi-cooperative strategies for differential games* // Int. J. of Game Theory. 2004. V. 32. P. 1–33.
11. Cardaliaguet P., Plaskacz S. *Existence and uniqueness of a Nash equilibrium feedback for a simple nonzero-sum differential game* // Int. J. of Game Theory. 2003. V. 32. P. 33–71.
12. Case J.H. *Toward a theory of many player differential games* // SIAM J. Control. 1969. V. 7. N. 2. P. 179–197.
13. Friedman A. *Differential Games*. Wiley-Interscience, 1971.
14. Rockafellar R.T., Wets R. J-B *Variational Analysis*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1998.
15. Starr A.W., Ho Y.C. *Non-zero Sum Differential Games* // J. Optim. Theory Appl. 1969. V. 3. N. 3. P. 184–206.

FEEDBACK STRATEGIES IN NONZERO-SUM DIFFERENTIAL GAME OF SPECIAL TYPE

Ekaterina A. Kolpakova, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of UrB RAS, Cand.Sc. (eakolpakova@gmail.com).

Abstract: The paper deals with the construction of universal closed-loop strategies for two-person nonzero-sum differential game of a special type. The dynamics of the first player is defined by its own position and control. The dynamics of the second player is defined by its own control and position of both players. The strategies are constructed on the base of solution for a system of Hamilton–Jacobi equations. The system of Hamilton–Jacobi equations has a hierarchical type. A generalized solution for the system of Hamilton–Jacobi equations belongs to the class of multivalued maps. We show the link between values of the players and the generalized solution of the system of Hamilton–Jacobi equations.

Keywords: system of Hamilton–Jacobi equations, nonzero-sum differential game, Nash equilibrium, multivalued solutions.

УДК 519.866.2.

ББК 22.18

ГАРАНТИРОВАННЫЙ ДЕТЕРМИНИСТСКИЙ ПОДХОД К СУПЕРХЕДЖИРОВАНИЮ: СВОЙСТВА ПОЛУНЕПРЕРЫВНОСТИ И НЕПРЕРЫВНОСТИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ БЕЛЛМАНА-АЙЗЕКСА

СЕРГЕЙ Н. СМИРНОВ

Кафедра системного анализа

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Московский государственный университет

им. М.В. Ломоносова

119992, Москва, ГСП-1, Воробьевы горы, МГУ

e-mail: s.n.smirnov@gmail.com

Для задачи суперрепликации с дискретным временем рассматривается гарантированная детерминистская постановка – задача состоит в гарантированном покрытии обусловленного обязательства по опциону при всех допустимых сценариях. Эти сценарии задаются при помощи априорно заданных компактов, зависящих от предыстории цен: приращения цены в каждый момент времени должны лежать в соответствующих компактах. Рассматривается рынок с торговыми ограничениями, предполагается отсутствие транзакционных издержек. Постановка задачи носит теоретико-игровой характер и приводит к уравнениям Беллмана–Айзекса. В настоящей статье найдены условия полунепрерывности, непрерывности решений этих уравнений.

Ключевые слова: гарантированные оценки, детерминистская динамика цен, суперрепликация, опцион, уравнения Беллмана–Айзекса, многозначное отображение, полунепрерывность, непрерывность, грубое условие безарбитражности.

Поступила в редакцию: 04.06.19 *После доработки:* 23.09.19 *Принята к публикации:* 15.10.19

1. Введение

Настоящая статья продолжает серию публикаций автора [3] и [4]. Эти работы развивают модель финансового рынка и неопределенной детерминистской эволюцией цен с дискретным временем: цены активов эволюционируют детерминистским образом в условиях неопределенности, описываемой при помощи априорной информации о возможных приращениях цен, а именно, предполагается, что они лежат в заданных компактах, зависящих от предыстории цен (такая модель является альтернативной к традиционной вероятностной модели рынка¹).

В рамках вышеописанной модели рынка изучается задача ценообразования опционов, под которыми мы понимаем беспоставочные² внебиржевые контракты, выплаты по которым зависят от эволюции цен базовых активов вплоть до момента экспирации. Продавец опциона берет на себя обусловленное³ обязательство, которое, в отличие от обусловленных обязательств по страховым полисам, можно защищать от рыночного риска посредством хеджирующих операций на рынках⁴. Одним из наиболее важных способов хеджирования обусловленных обязательств по проданному опциону заключается в суперрепликации⁵, другими словами, в суперхеджировании (мы предпочитаем использовать второй из двух эквивалентных терминов).

¹ В предлагаемом нами детерминистском походе изначально не задается референтная вероятностная мера, как это предполагается при вероятностном подходе, см., например, [8].

² Для целей риск-менеджмента используются производные финансовые инструменты, как правило, являющиеся беспоставочными контрактами.

³ Англ. contingent liability.

⁴ Подразумеваются операции с базовыми активами и безрисковым активом.

⁵ Этот термин возник в связи с тем, что на неполных рынках невозможна репликация обусловленных обязательств (что возможно только на полных рынках).

В вышеупомянутой серии публикаций мы концентрируем внимание на проблеме суперхеджирования опционов при наличии торговых ограничений (в рамках модели финансового рынка с неопределенной детерминистской эволюцией цен). Задача ценообразования опциона при суперхеджировании состоит в определении минимального уровня средств в начальный момент⁶, необходимых продавцу, при выборе надлежащей стратегии хеджирования, для гарантированного покрытия обусловленного обязательства по проданному опциону (выплаты по которому, напомним, зависят от предыстории цен).

Мы рассматриваем опционы американского типа (американские опционы) - когда контрагент продавца (владелец опциона) может исполнить опцион (т.е. потребовать выплаты в соответствии с правилами устанавливаемыми данным контрактом) в любой момент, вплоть до экспирации опциона. Опционы европейского и бермудского типов могут быть рассмотрены как частый случай американских опционов, при определенных условиях регулярности, включая «безарбитражность» рынка в определенном смысле.

Формализуем описанную выше конструкцию для задачи суперхеджирования. Основной посылкой в предлагаемом подходе является задание «неопределенной» динамики цен посредством предположения об априорной информации о движении цен⁷ в момент времени t , а именно, что приращения ΔX_t дисконтированных цен⁸ лежат в априорно заданных компактах⁹ $K_t(\cdot) \subseteq \mathbb{R}^n$, где точкой обозначена предыстория цен до момента $t - 1$ включительно, $t = 1, \dots, N$. Обозначим через $v_t^*(\cdot)$ точную нижнюю грань для стоимости портфеля в момент времени t , при известной предыстории, гарантирующей, при определенном выборе допустимой хеджирующей стратегии, исполнение текущих и будущих обязательств, возникающих в отношении возможных выплат по американскому опциону. Соответ-

⁶ Иными словами, это премия, взимаемая с покупателя опциона, если продавец использует ценообразование, отвечающее суперхеджированию.

⁷ Приращения берутся «назад», т.е. $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$, где X_t вектор дисконтированных цен в момент времени t ; i -ая компонента этого вектора представляет собой цену единицы i -го актива.

⁸ Считаем, что безрисковый актив имеет постоянную цену равную единице.

⁹ Точкой обозначены переменные, описывающие эволюцию цен. Более точно, это предыстория $\bar{x}_{t-1} = (x_0, \dots, x_{t-1}) \in (\mathbb{R}^n)^t$ для K_t , в то время как для функций v_t^* и g_t , введенных ниже, это история $\bar{x}_t = (x_0, \dots, x_t) \in (\mathbb{R}^n)^{t+1}$.

ствующие уравнения Беллмана-Айзека в дисконтированных ценах возникают непосредственно из экономического смысла посредством выбора на шаге t «наилучшей» допустимой стратегии¹⁰ хеджирования $h \in D_t(\cdot) \subseteq \mathbb{R}^n$ для «наихудшего» сценария $y \in K_t(\cdot)$ приращения (дисконтированных) цен для заданных функций $g_t(\cdot)$, описывающих потенциальные выплаты по опциону. Таким образом, получаем рекуррентные соотношения:¹¹

$$\begin{aligned} v_N^*(\bar{x}_N) &= g_N(\bar{x}_N), \\ v_{t-1}^*(\bar{x}_{t-1}) &= g_{t-1}(\bar{x}_{t-1}) \bigvee \inf_{h \in D_t(\bar{x}_{t-1})} \sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} [v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y) - hy], \\ t &= N, \dots, 1, \end{aligned} \tag{BA}$$

где $\bar{x}_{t-1} = (x_0, \dots, x_{t-1})$ описывает предысторию по отношению к настоящему моменту t . Условия для справедливости (BA) сформулированы в Теореме 3.1 из [3].

При этом удобно (формально) считать, что $g_0 = -\infty$ (отсутствие обязательств по выплатам в начальный момент времени); $g_t \geq 0$ для $t = 1, \dots, N$ в случае американского опциона. Множество $D_t(\cdot)$ предполагается выпуклым и $0 \in D_t(\cdot)$.

Многозначные отображения $x \mapsto K_t(x)$ и $x \mapsto D_t(x)$, а также функции $x \mapsto g_t(x)$, предполагаются заданными для всех $x \in (\mathbb{R}^n)^t$, $t = 1, \dots, N$. Поэтому функции $x \mapsto v_t^*(x)$ задаются уравнениями (BA) для всех $x \in (\mathbb{R}^n)^t$.

В уравнениях (BA) функции v_t^* , а также соответствующие точные верхние и нижние грани, принимают значения в расширенном множестве вещественных чисел $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = [-\infty, +\infty]$ – двухточечной компактификации¹² $\mathbb{R}$.

Вывод уравнений Беллмана-Айзека (BA) легко получается рассуждениями «инженерного» характера. Неформальным экономиче-

¹⁰ Вектор h описывает размеры занимаемых в активах позиций, т.е. i -ая компонента этого вектора представляет собой количество покупаемых или продаваемых единиц i -го актива.

¹¹ Знак $\bigvee$ обозначает максимум, $hy = \langle h, y \rangle$ – скалярное произведение вектора h на вектор y .

¹² Окрестности точек $-\infty$ и $+\infty$ имеют вид $[-\infty, a)$, $a \in \mathbb{R}$ и $(b, +\infty]$, $b \in \mathbb{R}$ соответственно.

ским языком можно это пояснить следующим образом, считая для упрощения, что точные верхние и нижние грани в (BA) достигаются. Пусть $t \leq N$; к текущему (настоящему) моменту времени $t-1$ известна предыстория (дисконтированных) цен $x_1, \dots, x_{t-1}$. Стоимость V_{t-1} портфеля, хеджирующего обусловленное обязательство по проданному американскому опциону, для гарантированного исполнения обязательств должна быть, во-первых, не менее текущих обязательств, равных потенциальным выплатам $g_t(x_1, \dots, x_{t-1})$. Во-вторых, стоимость портфеля в следующий момент $V_t = V_{t-1} + H_t \Delta X_t$ (здесь стратегия H_t формируется в момент $t-1$ и может зависеть только от предыстории цен $x_1, \dots, x_{t-1}$) должна быть гарантированно, при любом сценарии $\Delta X_t = y \in K_t(x_1, \dots, x_{t-1})$ движения цен на шаге t , не меньше, чем $v_t^*(x_1, \dots, x_{t-1}, x_{t-1} + y)$. Тем самым, для покрытия будущих обязательств стоимость V_{t-1} портфеля при выборе стратегии $H_t = h \in D_t(x_1, \dots, x_{t-1})$ должна быть не менее величины $v_t^*(x_1, \dots, x_{t-1}, x_{t-1} + y) - hy$ при наиболее неблагоприятном сценарии $y \in K_t(x_1, \dots, x_{t-1})$ движения цен на шаге t , т.е. при $y \in K_t(x_1, \dots, x_{t-1})$, максимизирующем выражение $v_t^*(x_1, \dots, x_{t-1}, x_{t-1} + y) - hy$. Полученное значение минимизируется посредством выбора стратегии $h \in D_t(x_1, \dots, x_{t-1})$, чтобы оценить требуемые резервы на покрытие будущих потенциальных выплат. Осталось положить $v_t^*(x_1, \dots, x_{t-1})$ равным максимуму из величины текущих обязательств и величины резервов на покрытие будущих потенциальных выплат.

Траекторию на временном интервале $[0, t] = \{0, \dots, t\}$ цен активов $(x_0, \dots, x_t) = \bar{x}_t$ мы назовем возможной, если $x_0 \in K_0$, $\Delta x_1 \in K_1(x_0)$, $\dots$, $\Delta x_t \in K_t(x_0, \dots, x_{t-1})$; $t = 0, 1, \dots, N$. Обозначим B_t – множество возможных траекторий цен активов на временном интервале $[0, t]$; тем самым

$$B_t = \{(x_0, \dots, x_t) : x_0 \in K_0, \Delta x_1 \in K_1(x_0), \dots, \Delta x_t \in K_t(x_0, \dots, x_{t-1})\}. \quad (1.1)$$

Заметим, что (1.1) равносильно рекуррентным соотношениям¹³

$$\begin{aligned} B_t &= \{(\bar{x}_{t-1}, x_t) : \bar{x}_{t-1} \in B_{t-1}, \Delta x_t \in K_t(\bar{x}_{t-1})\} = \\ &= \{(\bar{x}_{t-1}, x_t) : \bar{x}_{t-1} \in B_{t-1}, x_t \in x_{t-1} + K_t(\bar{x}_{t-1})\}, \quad t = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (1.2)$$

¹³ Здесь $x + A = \{z : z - x \in A\}$.

Одним из условий справедливости уравнений (БА) является сформулированное в Теореме 3.1 из [3] предположение об ограниченности функций выплат g_t , благодаря которому функции v_t^* являются ограниченными сверху. Предположение заключается в следующем.

Найдутся константы $C_t \geq 0$ такие, что для каждого $t = 1, \dots, N$ и всех возможных траекторий $\bar{x}_t = (x_0, \dots, x_t) \in B_t$ выполнено

$$g_t(x_0, \dots, x_t) \leq C_t. \quad (\text{В})$$

Будем считать, что константы C_t выбраны минимальными, т.е.

$$C_t = \sup_{x \in B_t} g_t(x),$$

и будем обозначать

$$C = \bigvee_{t=1}^N C_t. \quad (1.3)$$

Для удобства обозначений мы сделаем «аддитивную» замену в последней переменной функций v_t^* , полагая

$$w_t(\bar{x}_{t-1}, y) = w_t(x_1, \dots, x_{t-1}, y) = v_t^*(x_1, \dots, x_{t-1}, x_{t-1} + y), \quad (\text{Т})$$

и далее будем использовать w_t в правых частях уравнений Беллмана–Айзекса, $t = N, \dots, 0$, т.е. в виде:

$$v_{t-1}^*(\cdot) = g_{t-1}(\cdot) \bigvee \inf_{h \in D_t(\cdot)} \sup_{y \in K_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy], \quad t = N, \dots, 1.$$

Напомним, что здесь и далее точкой обозначены «текущие» переменные; в последней формуле, например, аргументом является $\bar{x}_{t-1}$.

Везде далее будем считать, что выполнены предположения, перечисленные в Теореме 3.1 из [3], а также предположения, перечисленные в пункте 1) Замечания 3.1 из [3].

Предлагаемый подход позволяет в определенной степени упростить математическую технику и сделать формулировки утверждений более доступными для понимания экономистов; к преимуществам подхода относится теоретико-игровая интерпретация¹⁴. Бла-

¹⁴ В случае отсутствия торговых ограничений эта интерпретация позволяет дать важное с экономической точки зрения объяснение возникновения риск-нейтральных вероятностей, как одно из свойств наиболее неблагоприятных смешанных стратегий рынка.

годаря конструктивности подхода вопрос о «гладкости» решений напрашивается сразу, непосредственно из вида уравнений (BA), что и составляет основную тему данной статьи. Эти свойства «гладкости», как мы увидим из последующих публикаций, потребуются для установления одного из условий игрового равновесия (полунепрерывность сверху решений (BA)), а также для установления условий совпадения решений задачи суперхеджирования при вероятностном и детерминистском подходах (непрерывность решений уравнений (BA)). Особый интерес представляет установленное в данной работе обстоятельство, что именно грубое¹⁵ (робастное) условие отсутствия гарантированного арбитража с неограниченной прибылью *NDSAUP*, введенное в [4], требуется в общем случае для получения непрерывности решений уравнений (BA).

2. Общие условия полунепрерывности и непрерывности решений уравнений Беллмана-Айзекса

Свойства «гладкости» решений уравнений Беллмана-Айзекса (BA) определяются соответствующими свойствами «гладкости» функций выплат $g_t(\cdot)$, а также многозначных отображений $K_t(\cdot)$ и $D_t(\cdot)$, задающих соответственно априорную информацию о приращениях цен и торговые ограничения. Собственно, именно гарантированный детерминистский подход создает стимул для изучения этой «гладкости».

Отметим, что требования к определенным свойствам «гладкости» описания динамики рынка получаются из соображений реалистичности модели финансового рынка с неопределенной детерминистской эволюцией цен, что уже отмечалось нами в [3].

Реалистичными стохастическими сценариями поведения рынка мы считаем (вероятностные) распределения стохастического процесса с дискретным временем, описывающего эволюцию цен, для которых условные распределения текущей цены непрерывно (в слабой то-

¹⁵ Одно из наших принципиальных соображений состоит в том, что поскольку описание неопределенности на рынке не может быть точным на практике, то фундаментальные свойства, такие как «безарбитражность» рынка (в том или ином смысле), не должны меняться при малых возмущениях модели рынка. В этой связи мы ввели в [4] новое понятие - грубости (структурной устойчивости) для «безарбитражности» рынка и установили для этого свойства критерии геометрического характера.

пологии) зависит от предыстории цен. Другими словами, для стохастической модели динамики цен — переходные ядра Q_t , отвечающие условным вероятностям цены $X_t \in \mathbb{R}^n$ в момент времени t при известной предыстории $\bar{X}_{t-1} = \bar{x}_{t-1} \in (\mathbb{R}^n)^t$, обладают феллеровским свойством. Если для распределения вектора $\bar{X}_t = (\bar{X}_{t-1}, X_t)$ существует (регулярный) вариант условного распределения $P(X \in \cdot | \bar{X}_{t-1} = x) = Q_t(x, \cdot)$, обладающий феллеровским свойством, то такой вариант единственный для $x \in \text{supp}(P_{\bar{X}_{t-1}})$, где $P_{\bar{X}_{t-1}}$ — распределение случайного вектора $\bar{X}_{t-1}$, а $\text{supp}(\pi)$ обозначает (топологический) носитель меры π . В этом случае естественно выбирать именно феллеровский вариант регулярного условного распределения, а детерминистский и стохастический подходы приводят к одинаковым понятиям «безарбитражности», когда референтная вероятностная мера задается при помощи феллеровских переходных ядер (посредством теоремы Ионеску Тулча).

Нами предложена следующая формализация реалистичности модели¹⁶ в контексте рассматриваемого нами подхода.

Определение 2.1. Будем называть модель финансового рынка с неопределенной эволюцией цен реалистичной, если существуют смешанные стратегии рынка, для которых имеются феллеровские переходные ядра $Q_t(x, \cdot)$ — условные распределения X_t при известной предыстории $\bar{X}_{t-1} = x$, такие что¹⁷ $\text{supp } Q_t(x, \cdot) = x + K_t(x)$ для $t = 1, \dots, N$.

Из полученных в работе [5] результатов¹⁸ вытекает следующий критерий реалистичности модели.

¹⁶ Вряд ли можно привести экономические основания, чтобы стохастическая динамика цен задавалась бы переходными ядрами (условными вероятностями при заданной предыстории цен), не удовлетворяющими феллеровскому свойству.

¹⁷ Последнее условие отражает реалистичность детерминистских сценариев приращений цен.

¹⁸ В этой работе рассматривается общий случай топологических пространств, причем необходимые условия существования феллеровского ядра с заданными носителями слабее достаточных условий его существования, но в случае конечномерного евклидова пространства необходимые и достаточные условия совпадают.

Теорема 2.1. *Для реалистичности модели финансового рынка с неопределенной детерминистской эволюцией цен¹⁹ необходимо и достаточно, чтобы многозначные отображения $K_t(\cdot)$, $t = 1, \dots, N$ были бы полунепрерывны снизу.*

Очевидно, свойство полунепрерывности (сверху или снизу) для многозначных отображений $\bar{x}_{t-1} \mapsto K_t(\bar{x}_{t-1})$ и $\bar{x}_{t-1} \mapsto x_{t-1} + K_t(\bar{x}_{t-1})$, $t = 1, \dots, N$ равносильны, также как и для функций v_t^* и w_t , $t = 0, \dots, N$.

Здесь и далее будем обозначать $\mathcal{N}(Y)$ класс всех непустых подмножеств Y , а $\mathcal{K}(Y)$ – класс всех непустых компактных подмножеств топологического пространства Y .

Установим теперь достаточные условия «регулярного поведения» множества возможных траекторий для динамики цен, задаваемых посредством компактного множества K_0 начальных состояний цен и компактнозначными²⁰ отображениями $\bar{x}_{t-1} \mapsto K_t(\bar{x}_{t-1})$, $t = 1, \dots, N$. С этой целью сделаем следующее дополнительное предположение.

Многозначное отображение $(x_0, \dots, x_{t-1}) \mapsto K_t(x_0, \dots, x_{t-1})$

из $(\mathbb{R}^n)^t$ в $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ является h -полунепрерывным сверху.²¹

(USC-PH)

Замечание 2.1.

1) В общем случае многозначного отображения полунепрерывность сверху для метрического пространства Y влечет h -полунепре-

¹⁹ В данном случае компактность $K_t(\cdot)$, $t = 1, \dots, N$ не требуется, предполагается лишь замкнутость (как у потенциальных топологических носителей вероятностных мер). Отметим, что в случае компактозначных отображений из полунепрерывности снизу следует h -полунепрерывность снизу.

²⁰ В соответствии с предположением (C) из [3].

²¹ Полунепрерывность сверху (снизу) в смысле Помпею-Хаусдорфа, иными словами, h -полунепрерывность сверху (снизу) многозначного отображения $F : X \mapsto \mathcal{N}(Y)$ в точке $x_0 \in X$, определяется для топологического пространства X и метрического пространства Y с метрикой ρ , как непрерывность в точке x_0 числовой функции $x \mapsto e_\rho(F(x), F(x_0))$ (соответственно $x \mapsto e_\rho(F(x_0), F(x))$), где $e_\rho(A, B)$ – отклонение Помпею множества A от множества B , $e_\rho(A, B) = \sup\{\rho(x, B), x \in A\}$, $\rho(x, B) = \inf\{\rho(x, x'), x' \in B\}$. Отметим, что расстояние Помпею-Хаусдорфа $h_\rho(A, B) = e_\rho(A, B) \vee e_\rho(B, A)$. Многозначное отображение h -полунепрерывно сверху (снизу), если оно полунепрерывно сверху (снизу) во всех точках из области определения.

рывность сверху²², см. Предложение 2.61 в [9].

2) Для компактнозначных отображений полунепрерывность снизу и полунепрерывность сверху равносильны (Теорема 2.68 в [9]).

3) Если отображения $F : X \mapsto \mathcal{N}(Y)$ h -непрерывное многозначное отображение, принимающее замкнутые значения, то график $\{(x, y) \in X \times Y : y \in F(x)\}$ замкнут (в топологии произведения пространств), см. Предложение 2.63 в [9].

4) Образ²³ $F(x) = \bigcup_{x \in K} F(x)$ компакта $K \subseteq X$ для компактнозначного полунепрерывного отображения $F : X \mapsto \mathcal{K}(Y)$ является компактным (Следствие 2.20 в [9]).

Предложение 2.1. Пусть выполнено условие (USC-PH). Тогда

- 1) множества B_t , описываемые соотношениями (1.2), компактны, $t = 0, \dots, N$;
- 2) если, кроме того, функции потенциальных выплат g_t , фигурирующие в уравнении (BA), полунепрерывны сверху, то выполнено условие равномерной ограниченности (B).

Доказательство. Утверждение 1) легко проверяется по индукции. Действительно, это верно для $t = 0$, т.к. $B_0 = K_0$ компактно. Если это выполнено для $t = 0, \dots, s-1$, где $s \in \{1, \dots, N-1\}$, то с использованием (1.2) множество

$$B_s = \{(\bar{x}_{s-1}, x_s) : \bar{x}_{s-1} \in B_{s-1}, x_s = x_{s-1} + K_s(\bar{x}_{s-1})\}$$

является графиком многозначного отображения $F : B_{s-1} \mapsto \mathcal{K}(\mathbb{R})$, где $F_s(\bar{x}_{s-1}) = x_{s-1} + K_s(\bar{x}_{s-1})$, которое полунепрерывно сверху в смысле Помпею – Хаусдорфа, а множество B_{s-1} компактно.

В соответствии с пунктом 3) Замечания 2.1 множество B_s замкнуто. По пункту 2) Замечания 2.1 отображение F полунепрерывно сверху, а по пункту 4) Замечания 2.1 образ $F(B_s)$ компактен. Поскольку замкнутое множество B_s содержится в компакте $B_{s-1} \times F(B_s)$, множество B_s компактно.

²² Полунепрерывность сверху (снизу) определяется как открытость множества $\{x \in X : F(x) \subseteq G\}$, для любого открытого $G \subseteq Y$ (соответственно, как открытость множеств $\{x \in X : F(x) \cap G \neq \emptyset\}$ для любого открытого $G \subseteq Y$).

²³ Здесь образ понимается в смысле многозначного отображения.

Утверждение 2) непосредственно вытекает из утверждения 1), поскольку полунепрерывные функции g_t ограничены сверху (и достигает максимума) на компактных множествах B_t для $t = 1, \dots, N$. $\square$

Нам потребуются классические результаты – три теоремы Бержа [6, 7], см. также [9]. Для удобства читателя приводим их формулировки. Предположим, что X и Y – хаусдорфовы топологические пространства.

Теорема 2.2 (Берж). *Если числовая функция $g : X \times T \mapsto [-\infty, +\infty]$ полунепрерывна сверху, многозначное отображение $F : X \mapsto \mathcal{N}(Y)$ полунепрерывно снизу, тогда функция $g_* : X \mapsto [-\infty, +\infty]$, задаваемая посредством*

$$g_*(x) = \inf_{y \in F(x)} g(x, y), \quad (2.1)$$

полунепрерывна сверху.

Теорема 2.3 (Берж). *Если числовая функция $g : X \times T \mapsto [-\infty, +\infty]$ полунепрерывна сверху, компактнозначное отображение $F : X \mapsto \mathcal{K}(Y)$ полунепрерывно сверху²⁴, тогда функция $g^* : X \mapsto [-\infty, +\infty]$, задаваемая посредством*

$$g^*(x) = \sup_{y \in F(x)} g(x, y), \quad (2.2)$$

полунепрерывна сверху.

Замечание 2.2. Поскольку

$$-\inf_{y \in F(x)} [-g(x, y)] = \sup_{y \in F(x)} g(x, y), \quad (2.3)$$

то теорема 2.2 может быть сформулирован эквивалентным образом.²⁵

Теорема 2.2'. *Для полунепрерывной снизу функции $g : X \times Y \mapsto [-\infty, +\infty]$ и полунепрерывного снизу многозначного отображения $F(x)$, функция $g^* : X \mapsto [-\infty, +\infty]$, задаваемая посредством (2.2), полунепрерывна снизу.*

²⁴ Отметим, что в книге [6] компактнозначность F входит в определение полунепрерывности сверху, в дополнение к тому, что множество $\{x \in X : F(x) \subseteq G\}$ открыто для любого открытого $G \subseteq Y$.

²⁵ Теорема 2.2' – это Предложение 3.1 из [9], а Теорема 2.3 – это Предложение 3.3. из [9].

Соответственно, эквивалентным образом может быть сформулирована и Теорема 2.3.

Теорема 2.3'. Для полунепрерывной снизу функции $g : X \times Y \mapsto [-\infty, +\infty]$ и полунепрерывного сверху компактозначного отображения $F : X \mapsto \mathcal{K}(Y)$, функция $g_* : X \mapsto [-\infty, +\infty]$, задаваемая посредством (2.1), полунепрерывна снизу.

Утверждение, аналогичное теореме 2.2, можно также получить, ослабляя требования к функции g , но усиливая требования к многозначной функции F .

Предложение 2.2. Если для любого $y \in Y$ функции $x \mapsto g_y(x) = g(x, y) \in [-\infty, +\infty]$, $x \in X$, полунепрерывны сверху, для любого $y \in Y$ множества $\{x \in X : y \in F(x)\}$ открыты, тогда функция $g_* : X \mapsto [-\infty, +\infty]$, определяемая (2.1), полунепрерывна сверху.

Доказательство. Положим

$$\varphi_y(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } y \in F(x), \\ +\infty, & \text{если } y \notin F(x). \end{cases}$$

Тогда

$$g_*(x) = \inf_{y \in Y} [g_y(x) + \varphi_y(x)],$$

при этом функция $\varphi_y(\cdot)$ – полунепрерывна сверху, а потому и функция $g_y(\cdot) + \varphi_y(\cdot)$ полунепрерывна сверху. Поскольку точная нижняя грань полунепрерывных сверху функций полунепрерывна сверху, то функция $g_*(\cdot)$ полунепрерывна сверху. $\square$

С использованием тождества (2.3) Предложение 2.2 может быть сформулировано эквивалентным образом.

Предложение 2.2'. Если для любого $y \in Y$ функции $x \mapsto g_y(x) = g(x, y) \in [-\infty, +\infty]$ полунепрерывны снизу, а множества $\{x \in X : y \in F(x)\}$ открыты, тогда функция g^* , определяемая (2.2), полунепрерывна снизу.

Замечание 2.3.

1) Если для любого $y \in Y$ множества $\{x \in X : y \in F(x)\}$ открыты, то многозначная функция F полунепрерывна снизу, поскольку

для открытого $G \subseteq Y$ множества $\{x \in X : F(x) \cap G \neq \emptyset\} = \bigcup_{y \in G} \{x : y \in F(x)\}$ будут открыты, как объединение открытых множеств.

2) Открытость множеств $\{x \in X : y \in F(x)\}$, вообще говоря, не следует из полунепрерывности снизу (или же сверху) отображения F . В случае, когда Y -метрическое пространство с метрикой ρ , известно (см. [9], предложения 2.26, 2.61 и 2.64), что для любого $y \in Y$ функции $x \mapsto \rho(y, F(x))$ полунепрерывны сверху (или же, соответственно, снизу). Если F принимает замкнутые значения, т.е. множество $F(x)$ – замкнутое для любого $x \in X$, то про множество $\{x \in X : y \in F(x)\} = \{x \in X : \rho(y, F(x)) = 0\}$ можно лишь утверждать, что оно замкнуто (или же, соответственно, является множеством типа²⁶ G_δ).

3) Из полунепрерывности сверху (снизу) числовой функции $g(x, y)$ по совокупности аргументов вытекает полунепрерывность сверху (снизу) функций одной переменной $x \mapsto g_y(x) = g(x, y)$: если g полунепрерывна сверху, то рассматривая направленность (x_α, y_α) , где $x_\alpha \equiv x$, $y_\alpha \rightarrow y^*$, замечаем, что $(x_\alpha, y_\alpha) \rightarrow (x, y^*)$ и, значит, $\limsup_\alpha g_x(y_\alpha) = \limsup_\alpha g(x_\alpha, y_\alpha) \leq g(x, y^*) = g_x(y^*)$. Аналогично доказывается утверждение и для полунепрерывности снизу; впрочем, это также следует из уже доказанного, выбирая $g = -f$, где f полунепрерывна снизу.

4) В Теоремах 2.3 и 2.3' достигается максимум и минимум соответственно для каждого $x \in X$ и некоторого значения $y^*(x) \in F(x)$.

Достаточные условия для непрерывности функции g^* , определяемой посредством (2.2), дает следующая теорема.²⁷

Теорема 2.4 (Берж). Пусть функция $g : X \times Y \mapsto \mathbb{R}$ непрерывна, $F : X \mapsto \mathcal{K}(Y)$ – непрерывное²⁸ многозначное отображение. Тогда функция $g^* : Y \mapsto \mathbb{R}$, определяемая посредством (2.2), непрерывна, а многозначное отображение $M : X \mapsto \mathcal{K}(Y)$, где²⁹ $M(x) = \{y \in F(x) : g(x, y) = g^*(x)\}$ является полунепрерывным сверху.

²⁶ Т.е. представимы в виде счетного пересечения открытых множеств.

²⁷ Этот результат часто называют "Berge's maximum theorem"; в [9] это Теорема 3.4.

²⁸ Одновременно полунепрерывное сверху и снизу многозначное отображение.

²⁹ Т.е. $M(x)$ – множество максимизаторов, тех $y \in Y$, для которых достигается максимум в (2.2) для заданного $x \in X$.

Из приведенных выше результатов легко получаются условия полунепрерывности для решения v_t^* основных уравнений (BA). Используя обозначения (T), введем функцию

$$\bar{x}_{t-1} \mapsto \rho_t(\bar{x}_{t-1}) = \inf_{h \in D_t(\bar{x}_{t-1})} \sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} [w_t(\bar{x}_{t-1}, y) - hy]. \quad (2.4)$$

Теорема 2.5. Пусть выполняется условие (USC-PH) h -полунепрерывности сверху многозначных отображений $\bar{x}_{t-1} \mapsto K_t(\bar{x}_{t-1})$, $t = 1, \dots, N$. Если для $t = 1, \dots, N$ также выполняются условия:

- 1) многозначные отображения $\bar{x}_{t-1} \mapsto D_t(\bar{x}_{t-1})$ полунепрерывны снизу;
 - 2) числовые функции $\bar{x}_t \mapsto g_t(\bar{x}_t)$ полунепрерывны сверху;
- то функции $\bar{x}_t \mapsto v_t^*(\bar{x}_t)$, определяемые соотношениями (BA), полунепрерывны сверху, $t = 1, \dots, N$.

Доказательство.

Пусть выполнены условия 1) и 2). Проведем доказательство полунепрерывности сверху функций v_s по индукции. Для $s = N$ утверждения теоремы, очевидно, выполнены, т.к. $v_N^* = g_N$. Пусть теперь это верно для $s = N, \dots, t$, покажем, что это верно и для $s = t-1$, где $N \geq t > 1$. По индуктивному предположению функция $(\bar{x}_{t-1}, y) \mapsto w_t(\bar{x}_{t-1}, y)$ полунепрерывна сверху. С использованием (USC-PH) и Теоремы 2.3 получаем, что функция

$$(\bar{x}_{t-1}, h) \mapsto \varphi(x, h) = \sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} [w_t(\bar{x}_{t-1}, y) - hy], \quad (2.5)$$

полунепрерывна сверху, поскольку функция $((\bar{x}_{t-1}, h), y) \mapsto w_t(\bar{x}_{t-1}, y) - hy$ полунепрерывна сверху (по совокупности переменных). Применяя к функции, определяемой посредством (2.5), Теорему 2.2, получим, что функция ρ_t , задаваемая (2.4), полунепрерывна сверху, а, следовательно, полунепрерывна сверху функция

$$\bar{x}_{t-1} \mapsto v_{t-1}^*(\bar{x}_{t-1}) = g_{t-1}(\bar{x}_{t-1}) \vee \rho_t(\bar{x}_{t-1}). \quad (2.6)$$

□

Обозначим

$\text{cl}(A)$ – замыкание A ;

$\text{int}(A)$ – внутренность A ;

$\text{ri}(A)$ – относительная внутренность выпуклого множества A .

Лемма 2.1. Пусть X — хаусдорфово топологическое пространство, $F : X \mapsto 2^{\mathbb{R}^n} \setminus \{\emptyset\}$ — многозначное отображение, принимающее выпуклые значения. Тогда

- 1) полунепрерывность снизу $F(\cdot)$ равносильна полунепрерывности снизу многозначного отображения $x \mapsto \text{ri}(F(x))$;
- 2) если, кроме того, $\text{int}(F(x)) \neq \emptyset$ для всех $x \in X$, то полунепрерывность снизу $F(\cdot)$ равносильна полунепрерывности снизу $x \mapsto \text{int}(F(x))$

Доказательство. 1) Поскольку

$$\text{ri}(F(x)) \subseteq F(x) \subseteq \text{cl}(F(x)) \quad (2.7)$$

и, в силу выпуклости $F(x)$, по Теореме 6.3 из [11]

$$\text{cl}(\text{ri}(F(x))) = \text{cl}(F(x)). \quad (2.8)$$

По Предложению 2.38 из [9], многозначное отображение $x \mapsto F(x)$ полунепрерывно снизу тогда и только тогда, когда полунепрерывно снизу отображение $x \mapsto \text{cl}(F(x))$, так что из (2.7) и (2.8) вытекает требуемое утверждение.

- 2) В случае $\text{int}(F(x)) \neq \emptyset$ выполняется

$$\text{ri}(F(x)) = \text{int}(F(x)). \quad (2.9)$$

□

Замечание 2.4.

1) Невырожденность торговых ограничений, под которыми мы понимаем телесность выпуклого множества $D_t(\cdot)$, т.е. $\text{int}(D_t(\cdot)) \neq \emptyset$, является вполне естественным предположением для финансовых моделей; в этом случае, в силу выпуклости $D_t(\cdot)$, применима Лемма 2.1, так что $D_t(\cdot)$ можно считать, не ограничивая общности, открытыми, когда речь идет о сохранении полунепрерывности снизу $D_t(\cdot)$, при отсутствии иных требований.

2) С другой стороны, свойство полунепрерывности снизу многозначного отображения $F : X \mapsto \mathcal{N}(Y)$ равносильно полунепрерывности снизу многозначного отображения $\bar{F} : X \mapsto \mathcal{N}(Y)$, где $\bar{F}(x) = \text{cl}(F(x))$, см. Предложение 2.38 из [9]. В ряде случаев удобно

для полунепрерывных снизу $D_t(\cdot)$ считать, не ограничивая общности, что множества $D_t(\cdot)$ замкнуты (невырожденность при этом не требуется), при отсутствии других требований.

3) В Теореме 2.5 можно считать, не ограничивая общности, что множества $D_t(\cdot)$ замкнуты, поскольку значения $v_t^*(\cdot)$ не изменяются при замыкании $D_t(\cdot)$. Действительно, обозначая $\bar{D}_t(\cdot) = \text{cl}(D_t(\cdot))$, имеем неравенство

$$\inf_{h \in D_t(x)} \varphi(x, h) \leq \inf_{h \in \bar{D}_t(x)} \varphi(x, h), \quad (2.10)$$

где функция φ задается формулой (2.5). Для любого $h \in \bar{D}_t(x)$ найдется последовательность $h^n \in D_t(x)$, такая что $h^n \rightarrow h$. В силу полунепрерывности сверху функции φ (установленной в ходе доказательства Теоремы 2.5)

$$\varphi(x, h) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \varphi(x, h^n) \geq \inf_{h \in \bar{D}_t(x)} \varphi(x, h),$$

так что в (2.10) имеет место равенство.

С другой стороны, применяя к $F(\cdot) = D_t(\cdot)$ соотношения (2.7) и (2.8), получаем, что значение v_t^* не изменится, если $D_t(\cdot)$ заменить на $D'_t(\cdot) = \text{ri}(D_t(\cdot))$, а в случае невырожденности, с учетом (2.9), можно, не ограничивая общности, считать $D_t(\cdot)$ открытыми.

4) Для ряда моделей торговые ограничения постоянны во времени и не зависят от предыстории, т.е. $D_t(\cdot) \equiv D$ (например, при запрете коротких позиций по рисковому активу, т.е. когда $D = [0, \infty)^n$). В этом случае множество $\{x \in (\mathbb{R}^n)^{t-1} : h \in D_t(\cdot)\}$ либо пусто (если $h \notin D$), либо совпадает со всем пространством $(\mathbb{R}^n)^{t-1}$ (если $h \in D$), так что множество одновременно открыто (а значит, применимы Предложения 2.2 и 2.2') и замкнуто, а многозначные отображения $x \mapsto D_t(\cdot)$ непрерывны.

5) Обозначим $\tilde{K}_t = K_t(B_{t-1})$ – образ B_{t-1} для многозначного отображения K_t , где B_t задается посредством (1.1). Отметим, что при условии (USC-PH) функция, задаваемая (2.5), ограничена благодаря компактности $\tilde{K}_t$, по Предложению 2.1, равномерно по $\bar{x}_{t-1} \in \tilde{K}_t$ для любого h , поскольку $C \geq w_t \geq 0$: для любого $y \in K_t(\bar{x}_{t-1}) \subseteq \tilde{K}_t$

$$\begin{aligned} C - hy &\geq w_t(\bar{x}_{t-1}, y) - hy \geq -hy, \\ \max_{y \in -\tilde{K}_t} hy &\geq -hy \geq \min_{y \in -\tilde{K}_t} hy = -\max_{y \in \tilde{K}_t} hy, \end{aligned}$$

откуда³⁰

$$C + \sigma_{-\tilde{K}_t}(h) \geq \sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} [w_t(\bar{x}_{t-1}, y) - hy] \geq -\sigma_{\tilde{K}_t}(h), \quad (2.11)$$

где $\sigma_A(h)$ – опорная функция множества A .

6) В силу полунепрерывности сверху функции $y \mapsto w_t(\cdot, y) - hy$ в условиях Теоремы 2.5 (т.е. при условиях 1) и 2)) точная верхняя грань по y достигается для некоторого значения $y \in K_t(\bar{x}_{t-1})$.

7) Отметим, что для $\bar{x}_{t-1} \in B_{t-1}$ функция (2.5) является выпуклой по переменной h , принимает конечные значения с оценкой (2.11) и, в частности, непрерывна по h (Следствие 10.1.1 из [11]).

8) Определяемая посредством (2.4) функция $\rho_t(\cdot)$ может принимать значения $-\infty$. В то же время, поскольку $0 \in D_t(x)$, функция $\rho_t(\cdot)$ ограничена сверху: $\rho_t(\cdot) \leq C$.

Для того, чтобы обеспечить свойство полунепрерывности снизу функций Беллмана-Айзекаса, определяемых (BA), потребуется сделать дополнительное предположение, касающиеся торговых ограничений:

множество $D_t(\bar{x}_{t-1})$ компактно для любого $\bar{x}_{t-1}$, $t = 1, \dots, N$.
(C-T)

Теорема 2.6. Пусть выполнено условие (C-T), компактнозначные отображения $\bar{x}_{t-1} \mapsto D_t(\bar{x}_{t-1})$ полунепрерывны сверху, $\bar{x}_{t-1} \mapsto K_t(\bar{x}_{t-1})$ полунепрерывны снизу, числовые функции $\bar{x}_{t-1} \mapsto g_t(\bar{x}_{t-1})$ полунепрерывны снизу для $t = 1, \dots, N$. Тогда функции $\bar{x}_t \mapsto v_t^*(\bar{x}_t)$, определяемые соотношениями (BA), полунепрерывны снизу, $t = 1, \dots, N$.

Доказательство. Проведем доказательство по индукции; для $s = N$ утверждение справедливо, поскольку $v_N^* = g_N$. Пусть это выполнено для $s = N, \dots, t$, покажем, что выполняется и для $s = t-1$ (для $t > 1$). К функции φ , задаваемой посредством (2.5), применима Теорема 2.2', поскольку функция $((\bar{x}_{t-1}, h), y) \mapsto w_t(\bar{x}_{t-1}, y) - hy$ полунепрерывна снизу (по совокупности переменных), так что φ полунепрерывна снизу. Далее, к функции $\rho_t(\cdot)$, задаваемой (2.4), применима теорема 2.3', так что эта функция также полунепрерывна снизу, а из (2.6) следует полунепрерывность снизу функции $v_{t-1}^*(\cdot)$. $\square$

³⁰ Опорная функция компакта принимает конечные значения.

Теорема 2.7. Пусть выполнено условие (C-T), компактнозначные отображения $\bar{x}_{t-1} \mapsto D_t(\bar{x}_{t-1})$ и $\bar{x}_{t-1} \mapsto K_t(\bar{x}_{t-1})$ непрерывны³¹, числовые функции $\bar{x}_{t-1} \mapsto g_t(\bar{x}_{t-1})$ непрерывны. Тогда

- 1) функции $\bar{x}_t \mapsto v_t^*(\bar{x}_t)$, задаваемые соотношениями (BA), непрерывны,
- 2) многозначные отображения $(\bar{x}_{t-1}, h) \mapsto M_t(\bar{x}_{t-1}, h)$, где $M_t(\bar{x}_{t-1}, h)$ – множество максимизаторов $y \in K_t(\bar{x}_{t-1})$, для которых достигается максимум функции (2.5), а также многозначные отображения $\bar{x}_{t-1} \mapsto N_t(\bar{x}_{t-1})$, где $N_t(\bar{x}_{t-1})$ множество минимизаторов $h \in D_t(\bar{x}_{t-1})$, для которых достигается минимум в (2.4), являются полунепрерывными сверху, $t = 1, \dots, N$.

Доказательство. Утверждение вытекает непосредственно из Теорем 2.5 и 2.6, а также из теоремы Бержа 2.4. $\square$

Замечание 2.5.

- 1) Если Y — метрическое пространство³², то при замыкании сохраняется свойство полунепрерывности сверху многозначного отображения, см. Предложение 2.40 из [9]. Поэтому, если $D_t(\cdot)$ заменить на $\bar{D}_t(\cdot) = \text{cl}(D_t(\cdot))$, то Теорема 2.7 сохраняет силу, с учетом пункта 2)
- 2) Замечания 2.4 о сохранении значения функции $v_t^*(\cdot)$.

2) На самом деле, приведенные выше результаты дают также условия полунепрерывности или же непрерывности в более общем случае, а именно, для описанной в [3] модели, формулы (3.6) и (3.7), если одновременно с торговыми ограничениями, свойственными маржинальной торговле³³, наложить ограничения на заимствования без-

³¹ Непрерывность многозначного отображения означает одновременно полунепрерывность сверху и снизу. Для компактнозначных отображений это равносильно непрерывности в метрике Помпею-Хаусдорфа.

³² В действительности, достаточно нормальности топологического пространства Y .

³³ Маржинальная торговля на финансовом рынке подразумевает наличие посредников (брокеров), позволяющих (при заключении с ними участником рынка генерального соглашения) заимствование в ценных бумагах. При этом обычно регулятор устанавливает требования, чтобы доля собственных средств в портфеле участника маржинальной торговли была бы не ниже установленного уровня, что и приводит к торговым ограничениям.

рискового актива посредством задания выпуклой по h функции³⁴ $\alpha_t(h, \bar{x}_{t-1}) \leq 0$, с дополнительными ограничениями $h \in D_t(\cdot)$, соответствующие уравнения Беллмана-Айзека имеют вид:

$$v_N^*(\bar{x}_N) = g_N(\bar{x}_N),$$

$$v_{t-1}^*(\bar{x}_{t-1}) = g_{t-1}(\bar{x}_{t-1}) \bigvee \inf_{h \in D_t(\bar{x}_{t-1})} \left[\sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} (w_t(\bar{x}_{t-1}, y) - hy) \bigvee \mu h^\oplus \bar{x}_{t-1} \right. \\ \left. \bigvee (h\bar{x}_{t-1} + \alpha_t(h, \bar{x}_{t-1})) \right],$$

где $h^\oplus = ((h^1)^+, \dots, (h^n)^+)$, $(a)^+ = 0 \bigvee a$, $a \in \mathbb{R}$.

Для применимости Теоремы 2.5 необходимо потребовать полунепрерывности сверху функции $x \mapsto \alpha_t(h, x)$, $x \in B_{t-1}$, для применимости теоремы 2.6 – полунепрерывность снизу α_t по совокупности переменных, а для теоремы 2.7 – нужна непрерывность α_t по совокупности переменных.

3) Отметим, что все приведенные выше результаты имеют общий характер и никак не связаны с предположениями типа безарбитражности. Чтобы обеспечить свойства полунепрерывности снизу и непрерывности функций Беллмана-Айзека w_t в случае, когда (С-Т) не выполняется, т.е. когда D_t неограничены, требуются дополнительные условия, связывающие поведение многозначных отображений $K_t(\cdot)$ и $D_t(\cdot)$. Ниже будут приведены соответствующие условия и доказательства, которые носят более технический характер, чем представленные выше.

3. Условия гладкости решений уравнений Беллмана-Айзека, связывающие неопределенность движения цен и торговые ограничения

Будем использовать обозначения:

$K_t^*(\cdot) = \text{conv}(K_t(\cdot))$ — выпуклая оболочка $K_t(\cdot)$;

σ_A — опорная функция множества A , т.е. $\sigma_A(y) = \sup_{h \in A} hy$;

$\text{bar}(A) = \{y \in \mathbb{R}^n : \sigma_A(y) < +\infty\}$ — барьерный конус³⁵ множества A .

³⁴ α_t — максимально допустимый долг (например, лимит банковского кредита), взятый с отрицательным знаком.

³⁵ Этот конус является выпуклым и содержит точку 0.

В [4] было введено понятие грубости «безарбитражности» и доказано (Теорема 2), что грубое условие отсутствия гарантированного арбитража $RNDSAUP$ равносильно выполнению условия

$$0 \in \text{int}\{z : z + K_t^*(\cdot) \cap \text{bar}(D_t(\cdot)) \neq \emptyset\}. \quad (\text{SR})$$

Это условие и его усиление играют важную роль в доказательстве результатов этого раздела, сформулированных ниже; отметим также, что в доказательстве этих результатов существенно будет использоваться условие ограниченности (B) для функций выплат g_t , $t = 1, \dots, N$.

Предложение 3.1. Пусть для $t \in \{1, \dots, N\}$, многозначные отображения $D_t(\cdot)$ принимают замкнутые значения и выполнено условие (B). Тогда

$$D_t^a(\cdot) = \{h \in D_t(\cdot) : \sup_{y \in K_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy] \leq a\}$$

компактно³⁶ для любого $a \in \mathbb{R}$, если и только если выполняется условие $RNDSAUP$.

Доказательство. Обозначим

$$T_t(\cdot) = \{z \in \mathbb{R}^n : (z + K_t^*(\cdot)) \cap \text{bar}(D_t(\cdot)) \neq \emptyset\}; \quad (3.1)$$

условие (SR), равносильное $RNDSAUP$, записывается

$$0 \in \text{int}(T_t(\cdot)). \quad (3.2)$$

Поскольку $w_t \geq 0$, а также, благодаря (2.1), $w_t \leq C$, то имеют место неравенства:

$$\begin{aligned} \sup_{y \in K_t^*(\cdot)} [-hy] &= \sup_{y \in K_t(\cdot)} [-hy] \leq \sup_{y \in K_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy] \leq \\ &\leq C + \sup_{y \in K_t(\cdot)} [-hy] = C + \sup_{y \in K_t^*(\cdot)} [-hy]. \end{aligned}$$

Обозначая

$$\hat{D}_t^b(\cdot) = \{h \in D_t(\cdot) : \sup_{y \in K_t^*(\cdot)} [-hy] \leq b\} = \{h \in D_t(\cdot) : \sigma_{K_t^*(\cdot)}(-h) \leq b\}, \quad (3.3)$$

³⁶ Пустое множество считаем компактным.

получаем $\hat{D}_t^{a-C}(\cdot) \subseteq D_t^a(\cdot) \subseteq \hat{D}_t^a$, так что $D_t^a(\cdot)$ компактно для всех $a \in \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда $\hat{D}_t^a(\cdot)$ компактны для всех $a \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим функцию

$$h \mapsto f_{t,\cdot}(h) = \chi_{D_t(\cdot)}(h) + \sup_{y \in K_t^*(\cdot)} (-hy), \quad (3.4)$$

где

$$\chi_D(h) = \begin{cases} 0, & \text{если } h \in D; \\ +\infty, & \text{если } h \notin D. \end{cases}$$

Функция, задаваемая посредством (3.4), является замкнутой³⁷ собственной³⁸ выпуклой функцией, поскольку это же относится к первому слагаемому в (3.4), а второе слагаемое в (3.4) представляет собой всюду конечную выпуклую функцию, а значит, непрерывную всюду (см. следствие 10.1.1 [11]). В соответствии со следствием 14.2.2 [11] для того, чтобы множество $\{h \in \mathbb{R}^n : f_{t,\cdot}(h) \leq a\} = \hat{D}_t^a(\cdot)$ было ограниченным (а значит, компактным в силу полунепрерывности функции, задаваемой посредством (3.4)) для любого $a \in \mathbb{R}$ необходимо и достаточно, чтобы 0 являлся внутренней точкой множества $T'_t(\cdot) = \{z \in \mathbb{R}^n : f_{t,\cdot}^*(z) < \infty\}$, где $z \mapsto f_{t,\cdot}^*(z)$ – сопряженная функция к функции $h \mapsto f_{t,\cdot}(h)$, т.е.

$$T'_t(\cdot) = \{z \in \mathbb{R}^n : \sup_{h \in \mathbb{R}^n} [hz - f_{t,\cdot}(h)] < \infty\}.$$

При этом, используя классическую теорему о минимаксе Кнезера [10], получаем

$$\begin{aligned} \sup_{h \in \mathbb{R}^n} \{hz - [\chi_{D_t(\cdot)}(h) + \sup_{y \in K_t^*(\cdot)} (-hy)]\} &= \sup_{h \in D_t(\cdot)} [hz + \inf_{y \in K_t^*(\cdot)} (hy)] = \\ &= \sup_{h \in D_t(\cdot)} \inf_{y \in z + K_t^*(\cdot)} (hy) = \inf_{y \in z + K_t^*(\cdot)} \sup_{h \in D_t(\cdot)} (hy) = \inf_{y \in z + K_t^*(\cdot)} \sigma_D(y). \end{aligned}$$

Если $(z + K_t^*(\cdot)) \cap \text{bar}(D_t(\cdot)) = \emptyset$, то $\sigma_D(y) = \infty$ для всех $y \in z + K_t^*(\cdot)$ и $\inf_{y \in z + K_t^*(\cdot)} \sigma_D(y) = +\infty$. Если же $(z + K_t^*(\cdot)) \cap \text{bar}(D_t(\cdot)) \neq \emptyset$, то $\inf_{y \in z + K_t^*(\cdot)} \sigma_D(y) < \infty$. Таким образом,

$$T'_t(\cdot) = \{z \in \mathbb{R}^n : z + K_t^*(\cdot) \cap \text{bar}(D_t(\cdot)) \neq \emptyset\},$$

³⁷ Полунепрерывной снизу (терминология из [11]).

³⁸ Если функция принимает конечные значения на непустом выпуклом множестве, а вне него равна $+\infty$.

т.е. $T'_t(\cdot) = T_t(\cdot)$, откуда и следует требуемое утверждение. $\square$

Замечание 3.1.

1) Отметим, что в ходе доказательства Предложения 3.1 установлено, что условие (SR) и замкнутость множеств $D_t(\cdot)$ достаточны для компактности множеств $\hat{D}_t^a(\cdot)$.

2) Нетрудно убедиться, что множество $T_t(\cdot)$, задаваемое посредством (3.1), является выпуклым.

3) Для случая отсутствия торговых ограничений, т.е. когда $D_t(\cdot) = \mathbb{R}^n$, барьерный конус $\text{bar}(D_t(\cdot)) = \{0\}$ и условие (3.2) равносильно робастному условию отсутствия арбитражных возможностей $RNDAO$, которое, в соответствии с Предложением 1 из [4], равносильно одновременному выполнению условия отсутствия арбитражных возможностей $NDAO$ и полноразмерности компактов $K_t(\cdot)$, $t = 1, \dots, N$, т.е. условию $0 \in \text{int}(K_t^*(\cdot))$, $t = 1, \dots, N$.

Далее будем предполагать, что $D_t(\cdot)$ – замкнутые множества (в силу пункта 3) Замечания 2.4 и пункта 1) Замечания 2.5 это не является ограничением для справедливости Теорем 2.5 и 2.7).

Лемма 3.1. Пусть $D_t(\cdot)$ – замкнутые множества, выполнено условие $RNDSAUP$, тогда для $a \geq C$ функция $\rho_t(\cdot)$, задаваемая (2.4), может быть представлена в виде

$$\rho_t(\cdot) = \inf_{h \in \hat{D}_t^a(\cdot)} \sup_{y \in K_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy]; \quad (3.5)$$

таким образом, $D_t(\cdot)$ можно заменить на компактное выпуклое множество $\hat{D}_t^a(\cdot)$, причем $0 \in \hat{D}_t^a(\cdot)$. В частности, полунепрерывная снизу (и выпуклая) функция $h \mapsto \sup_{y \in K_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy]$ достигает

минимального значения $\rho_t(\cdot)$ в некоторой точке $h^*(\cdot) \in \hat{D}_t^C$.

Доказательство. Если $h_0 \notin \hat{D}_t^a(\cdot)$, где $a \geq C$, то для такого h_0 , поскольку $0 \in D_t(\cdot)$, имеем:

$$\begin{aligned} \sup_{y \in K_t^*(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - h_0 y] &\geq \sup_{y \in K_t^*(\cdot)} [-h_0 y] > a \geq C \geq \sup_{y \in K_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy]|_{h=0} \geq \\ &\geq \inf_{h \in D_t(\cdot)} \sup_{y \in K_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy], \end{aligned}$$

откуда и следует (3.5). $\square$

Будем говорить, что многозначное отображение $F : X \mapsto \mathcal{N}(Y)$ локально предкомпактно, если для любой точки $x_0 \in X$ найдется окрестность V_{x_0} этой точки, такая что ее образ $F(V_{x_0}) = \bigcup_{x \in V_{x_0}} F(x)$ предкомпактен³⁹. Если при этом X — компактно, то, очевидно, образ $F(x)$ предкомпактен (достаточно выделить конечное подпокрытие из покрытия V_x , $x \in X$, и заметить, что конечное объединение компактов является компактным).

Лемма 3.2. Пусть выполняется следующее условие: для каждой точки $x_0 \in B_{t-1}$ найдется окрестность $V(x_0)$ этой точки, такая что $\check{K}_t(x_0) = \bigcap_{x \in V(x_0)} K_t^*(x) \neq \emptyset$, и более того,⁴⁰

$$0 \in \text{int}(\{z : z + \check{K}_t(x_0) \cap \text{bar}(D_t(\cdot)) \neq \emptyset\}). \quad (\text{SSR})$$

Тогда многозначное отображение $x \mapsto \hat{D}_t^b(x)$, $x \in B_{t-1}$, локально предкомпактно.

Доказательство. Для $x \in V(x_0)$ с учетом (3.3) имеем

$$\hat{D}_t^b(x) \subseteq \check{D}_t^b(x_0) = \{h \in D_t(x_0) : \sigma_{\check{K}_t(x_0)}(-h) \leq b\},$$

повторяя рассуждения из предложения 3.1 с заменой $K_t^*(x)$ на $\check{K}_t(x)$, получаем, что множества $\check{D}_t^b(x_0)$, $x_0 \in B_{t-1}$, компактны для всех $b \in \mathbb{R}$, если и только если выполняется (SSR); тем самым получаем локальную предкомпактность для многозначного отображения $x \mapsto \hat{D}_t^b(x)$, $x \in B_{t-1}$ при выполнении (SSR). $\square$

Лемма 3.3. Пусть многозначные отображения $x \mapsto D_t(x)$ замкнуты⁴¹, многозначные отображения $x \mapsto K_t(x)$ полунепрерывны снизу, B_t предкомпакты, $t = 1, \dots, N$. Тогда многозначные отображения $x \mapsto \hat{D}_t^a(x)$ замкнуты.

³⁹ Иными словами, в терминологии [2], это отображение компактно ограничено во всех точках из X ; в [9] также отображение называется "locally compact" (что, на наш взгляд, неудачно, поскольку этот термин уже относится к топологическим пространствам).

⁴⁰ Разумеется, из (SSR) следует $\check{K}_t(x_0) \neq \emptyset$. Можно интерпретировать $\check{K}_t(\cdot)$ как новую динамику рынка с сокращенной неопределенностью по сравнению с $K_t^*(\cdot)$; при этом $\check{K}_t(\cdot)$ — вышуклые компакты.

⁴¹ Многозначное отображение $F : X \mapsto \mathcal{N}(Y)$ называется замкнутым, если для направленностей x_α и y_α , таких что $x_\alpha \rightarrow x$, $y_\alpha \in F(x_\alpha)$ и $y_\alpha \rightarrow y$, имеет место $y \in F(x)$. Иными словами, график отображения F замкнут.

Доказательство. Поскольку $B_t = K_t(B_{t-1}) = \bigcup_{x \in B_{t-1}} K_t(x)$ по условию предкомпактно, то многозначное отображение $x \mapsto K_t(x)$ равномерно ограничено на B_{t-1} , а поэтому и выпуклые оболочки $K_t^*(x) = \text{conv}(K_t(x))$ равномерно ограничены на B_{t-1} :

$$\sup_{x \in B_{t-1}} \sup_{y \in K_t^*(x)} \|y\| = A < \infty. \quad (3.6)$$

Из полунепрерывности снизу $K_t(\cdot)$ следует полунепрерывность снизу $K_t^*(\cdot)$ по Предложению 2.24 (а) из [9]. Рассмотрим последовательности x^n и h^n , $n = 1, 2, \dots$, такие что $x^n \in B_{t-1}$, $x^n \rightarrow x^0$ и $h^n \in \hat{D}_t^b(x^n)$, $h^n \rightarrow h^0$. Из предложения⁴² 9.10 [2], с учетом (3.6), получаем:

$$b \geq \sigma_{K_t^*(x^n)}(-h^n) \geq \sigma_{K_t^*(x^0)}(-h^0) - A\|h^n - h^0\|.$$

Отсюда

$$b \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sigma_{K_t^*(x^n)}(-h^n) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sigma_{K_t^*(x^n)}(-h^0) \geq \sigma_{K_t^*(x^0)}(-h^0),$$

поскольку функция $x \mapsto \sigma_{K_t^*(x)}(h)$ полунепрерывна снизу для любого h , см., например, предложение 2.35 из [9]. Кроме того, поскольку по условию многозначное отображение $x \mapsto D_t(x)$ замкнуто, то $h^0 \in D_t(x^0)$. Таким образом, $h^0 \in \{h \in D_t(x^0) : \sigma_{K_t^*(x^0)}(-h) \leq b\} = \hat{D}_t^b(x^0)$. $\square$

Теорема 3.1. Пусть $t = 1, \dots, N$, числовые функции $\bar{x}_t \mapsto g_t(\bar{x}_t)$ полунепрерывны снизу, многозначные отображения $\bar{x}_{t-1} \mapsto D_t(\bar{x}_{t-1})$ замкнуты, многозначные отображения $\bar{x}_{t-1} \mapsto K_t(\bar{x}_{t-1})$ полунепрерывны снизу, выполняется условие (SSR) и множества B_t предкомпактны. Тогда функции $(\bar{x}_{t-1}, y) \mapsto w_t(\bar{x}_{t-1}, y)$, определяемые соотношениями (BA), полунепрерывны снизу.

Доказательство. Используя лемму 3.2 и 3.3, по предложению 2.23 из [9] локально предкомпактное и замкнутое отображение⁴³ $x \mapsto \hat{D}_t^b(x)$ полунепрерывно сверху. Применяя теперь лемму 3.1 и теорему 2.6, где $D_t(\cdot)$ заменяется на $\hat{D}_t^a(\cdot)$ для некоторого $a \geq C$, получаем требуемое утверждение. $\square$

⁴² Это результат из [2], касающийся свойства Липшица (с константой A) для опорных функций.

⁴³ Замкнутое отображение принимает замкнутые значения, см., например, Замечание 2.12 из [9].

Замечание 3.2. Отметим, что при доказательстве Теоремы 3.1 попутно установлена полунепрерывность сверху компактнозначного отображения $x \mapsto \hat{D}_t^b(x)$, при выполнении условий Теоремы 3.1, касающихся $K_t(\cdot)$, $D_t(\cdot)$ и B_t .

Предложение 3.2. Пусть многозначные отображения $x \mapsto K_t(x)$, $t = 1, \dots, N$ полунепрерывны снизу, и для всех x выполняется условие (SGNSAUP)⁴⁴

$$\text{int}(K_t^*(\cdot)) \cap \text{bar}(D_t(\cdot)) \neq \emptyset. \quad (3.7)$$

1) Тогда найдутся окрестности $V(x)$ точек x , такие что для $\check{K}_t(x) = \bigcap_{x' \in V(x)} K_t^*(x')$ выполняется условие⁴⁵

$$\text{int}(\check{K}_t(x)) \cap \text{bar}(D_t(x)) \neq \emptyset. \quad (3.8)$$

2) Выполняется условие (SSR).

Доказательство. 1) Фиксируем t и x . В соответствии с (3.7) найдутся такие $r > 0$ и $y \in \text{bar}(D_t(x))$, что $B_r(y) \subseteq K_t^*(x)$. В соответствии с Предложением 2.42, пункт (а) из [9] полунепрерывность снизу $K_t(\cdot)$ влечет аналогичное свойство для $K_t^*(\cdot) = \text{con}v(K_t(\cdot))$. По Лемме 2.51 из [9] для любого заданного $\varepsilon \in (0, r)$ найдется окрестность $V(x)$ точки x , такая что для любого $x' \in V(x)$ выполняется $B_\varepsilon(y) \subseteq K_t^*(x')$. Следовательно, полагая $\check{K}_t(x) = \bigcap_{x' \in V(x)} K_t^*(x')$, получаем $\check{K}_t(x) \supseteq B_\varepsilon(y)$. Поэтому $\text{int}(\check{K}_t(x)) \cap \text{bar}(D_t(x)) \neq \emptyset$.

2) Рассмотрим «новую» динамику рынка с неопределенностью движения цен, описываемой компактами $\check{K}_t(\cdot)$, являющимися выпуклыми, как пересечение выпуклых компактов. Для такого рынка выполнено условие (SGNSAUP) из Теоремы 4.1 из [4]. Это в точности (3.8), поэтому выполняется условие RNDSAUP и применим пункт 1) Теоремы 4.1 из [4], в соответствии с которым выполняется условие (SR), которое для «новой» динамики рынка представляет собой условие (SSR) для «старой» динамики рынка, т.е. описываемой $K_t(\cdot)$. $\square$

⁴⁴ Это условие фигурирует в Теореме 4.1 из [4] и влечет полноразмерность компактов $K_t(\cdot)$, т.е. $\text{int}(K_t^*(\cdot)) \neq \emptyset$.

⁴⁵ Компакты $\check{K}_t(\cdot)$, таким образом, в условиях Предложения 3.2 тоже будут полноразмерными.

Зафиксируем $a \geq C \geq 0$, где константа C задается соотношением (1.3). Можно, не ограничивая общности, считать⁴⁶, что $C > 0$, т.к. в противном случае $g_t(\cdot) \equiv 0$, что не представляет интереса с точки зрения экономической интерпретации.

Предложение 3.3. Пусть компактнозначные отображения $K_t(\cdot)$ непрерывны, $D_t(\cdot)$ полунепрерывны снизу и замкнуты⁴⁷ на B_{t-1} , и выполняется условие (SR). Тогда многозначное отображение

$$x \mapsto \hat{D}_t^a(x) = D_t(x) \cap E_t^a(x), \quad x \in B_{t-1},$$

где

$$E_t^a(x) = \{h \in \mathbb{R}^n : \sigma_{K_t^*(x)}(h) \leq a\},$$

является непрерывным.

Доказательство. Покажем полунепрерывность снизу для $x \mapsto \hat{D}_t^a(x)$. Фиксируем $t \in \{1, \dots, N\}$ и начнем с того, что установим полунепрерывность снизу для $E_t^a(\cdot)$. По Предложению 2.6, пункт е) из [9], достаточно проверить, что для сходящейся последовательности $x_n \rightarrow x_0$ из B_{t-1} нижний предел по Куратовскому $\liminf_{n \rightarrow \infty} E_t^a(x_n)$ содержит $E_t^a(x_0)$. Поскольку $\liminf_{n \rightarrow \infty} E_t^a(x_n) = \{x : \rho(x, E_t^a(x_n)) \rightarrow 0\}$ (см. Замечание 1.43 из [9]), то для произвольного $h_0 \in E_t^a(x_0)$ нужно показать существование последовательности $h_n \in E_t^a(x_n)$, такой что $h_n \rightarrow h_0$. Обозначим,

$$r_n = h_\rho(K_t^*(x_n), K_t^*(x_0)) \leq h_\rho(K_t(x_n), K_t(x_0)) \rightarrow 0,$$

см. Неравенство 5.12 [2]. Здесь мы воспользуемся тем, что для компактнозначных отображений (а $K_t^*(\cdot)$ — компактнозначно) непрерывность совпадает с h -непрерывностью, по Теореме 2.68 из [9]. Положим $h_n = \alpha_n h_0$, где $\alpha_n = \frac{a}{a + r_n \|h_0\|} \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$. С использованием

⁴⁶ Впрочем, для того что бы обеспечить $a > 0$ (что требуется в доказательстве Предложения 3.3), можно просто потребовать $a > C$.

⁴⁷ В терминологии книги [2], слабо непрерывное отображение $x \mapsto D_t(\cdot)$ одновременно слабо полунепрерывно сверху и снизу; при этом слабая полунепрерывность сверху равносильна замкнутости (см. [2, Теорема 14.7]), а слабая полунепрерывность снизу совпадает с (обычной) полунепрерывностью снизу (см. [2, Замечание 14.1]).

Предложения 9.11 из [2] получаем:

$$\begin{aligned}\sigma_{K_t^*(x_n)}(h_n) &\leq \sigma_{K_t^*(x_0)}(h_n) + r_n \|h_n\| = \alpha_n \sigma_{K_t^*(x_0)}(h_0) + r_n \alpha_n \|h_0\| \leq \\ &\leq \alpha_n a + \alpha_n r_n \|h_0\| = a,\end{aligned}$$

т.е. $h_n \in E_t^a(x_n)$, $h_n \rightarrow h_0 \in E_t^a(x_0)$ и полунепрерывность снизу $E_t^a(\cdot)$ установлена.

Заметим, что $a > 0$ по сделанному выше предположению и что множество $\frac{1}{a}E_t^a(x) = \{h : \sigma_{K_t^*(x)}(h) \leq 1\}$ является полярным (по Минковскому) для $K_t^*(\cdot)$, см. [1, Формула (70) и Теорема 12.2]. По Теореме 6.6 из [1], пункт а) точка 0 является внутренней точкой полярного к $K_t^*(x)$ множества, поскольку оно ограничено (в силу компактности, по Теореме 2.6 [1]). Поэтому $0 \in \text{int}(E_t^a(x))$ для всех $x \in B_{t-1}$. Далее, $0 \in D_t(\cdot) \cap \text{int}(E_t^a(\cdot)) \neq \emptyset$, множества $D_t(\cdot)$ и $E_t^a(\cdot)$ выпуклые; следовательно, применимо Предложение 2.54 из [9], в соответствии с которым многозначное отображение $\hat{D}_t^a(\cdot) = D_t(\cdot) \cap E_t^a(\cdot)$ полунепрерывно снизу.

В соответствии с Леммой 3.3 многозначное отображение $x \mapsto \hat{D}_t^a(x)$ является замкнутым. По пункту 1) Замечания 3.1, с учетом того, что замкнутые многозначные отображения принимают замкнутые значения (Замечание 2.12 из [9]), множества $D_t(\cdot)$ замкнуты, а $\hat{D}_t^a(\cdot)$ компактны в соответствии с пунктом 1) Замечания 3.1. Поскольку множества $\hat{D}_t^a(\cdot)$ выпуклы, то применима Теорема 2.102 из [9], в соответствии с которой многозначное отображение с аргументом из метрического пространства и принимающее значения в виде линейно связных компактных подмножеств конечномерного евклидова пространства, полунепрерывное снизу и замкнутое, является непрерывным. $\square$

Теорема 3.2. Пусть для $t = 1, \dots, N$ числовые функции $\bar{x}_t \mapsto g_t(\bar{x}_t)$ непрерывны, многозначные отображения $\bar{x}_{t-1} \mapsto K_t(\bar{x}_{t-1})$ непрерывны, выполняется условие $RNDSAUP$, многозначные отображения $\bar{x}_{t-1} \mapsto D_t(\bar{x}_{t-1})$ полунепрерывны снизу и замкнуты. Тогда выполняются утверждения 1) и 2) Теоремы 2.7.

Доказательство. Фиксируем $a > C$ и вместо $D_t(\cdot)$ в формулах (BA) выбираем $\hat{D}_t^a(\cdot)$, пользуясь Леммой 3.1. По Предложению 3.3 ком-

пактнозначное отображение $x \mapsto \hat{D}_t^a(x)$ непрерывно, так что непосредственно применима Теорема 2.7. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лейхтвейс К. *Выпуклые множества*. М.: Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы. 1985.
2. Половинкин Е.С. *Многозначный анализ и дифференциальные включения*. М.: Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы. 2015.
3. Смирнов С.Н. *Гарантированный детерминистский подход к суперхеджированию: модель рынка, торговые ограничения, безарбитражность и уравнения Беллмана-Айзекса* // Математическая Теория Игр и ее Приложения. 2018. Том 10. № 4. С. 59–99.
4. Смирнов С.Н. *Гарантированный детерминистский подход к суперхеджированию: свойства «безарбитражности» рынка* // Математическая Теория Игр и ее Приложения. 2019. Том 11. № 2. С. 68–95.
5. Смирнов С.Н. *Феллеровское переходное ядро с носителями мер, заданными многозначным отображением* // Труды института математики и механики УрО РАН. 2019. Том 25, № 1. С. 219–228.
6. Berge C. *Espaces topologiques: Fonctions multivoques*. Collection unive. Dunod, 1959.
7. Berge C. *Topological Spaces: including a treatment of multi-valued functions, vector spaces, and convexity*. London: Oliver & Boyd, 1963.
8. Föllmer H., Schied A. *Stochastic Finance. An Introduction in Discrete Time*. 4nd edition. New York: Walter de Gruyter, 2016.
9. Hu S., Papageorgiou N. *Handbook of Multivalued Analysis: Theory, vol. I. Mathematics and Its Applications*. Vol. 419. Berlin: Springer, 1997.

10. Kneser H. *Sur un théorème fondamental de la théorie des jeux* // CR Acad. Sci. Paris. 1952. Vol. 234. P. 2418–2420.
11. Rockafellar R.T. *Convex Analysis*. Princeton: Princeton University Press, 1970.

A GUARANTEED DETERMINISTIC APPROACH TO SUPERHEDGING: THE PROPRIETIES OF SEMICONTINUITY AND CONTINUITY OF THE BELLMAN-ISAACS EQUATIONS

Sergey N. Smirnov, Department of System Analysis, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University, Cand.Sc., associate professor (s.n.smirnov@gmail.com).

Abstract: A guaranteed deterministic problem setting of super-replication with discrete time is considered: the aim of hedging of a contingent claim is to ensure the coverage of possible payout under the option contract for all admissible scenarios. These scenarios are given by means of a priori given compacts, that depend on the prehistory of prices: the increments of the price at each moment of time must lie in the corresponding compacts. The absence of transaction costs is assumed; the market is considered with trading constraints. The game-theoretical interpretation implies that the corresponding Bellman-Isaacs equations holds. In the present paper we propose several conditions for the solutions of these equations to be semicontinuous or continuous.

Keywords: guaranteed estimates, deterministic price dynamics, super-replication, option, Bellman-Isaacs equations, multi-valued mapping, semicontinuity, continuity, robust condition of no arbitrage.

Пример оформления статьи для публикации в журнале «Математическая теория игр и её приложения»

**Статьи принимаются в формате TEX. Правила
оформления и стилевой файл доступны на официальном
сайте журнала: <http://mgta.krc.karelia.ru>**

УДК (обязательно указывать)

ББК

НАЗВАНИЕ СТАТЬИ

Имя О. Фамилия*

Организация

Полный адрес организации

e-mail: author@noname.ru

Текст аннотации.

Ключевые слова: список ключевых слов, разделенных запятыми.

1. Введение

Основной текст должен быть напечатан 12 шрифтом.

Ссылки на литературу в тексте должны быть в виде [1] или [1,2 - 5]. Все сокращения в тексте должны быть расшифрованы при первом упоминании.

2. Модель

Нумеровать следует только те формулы, на которые есть ссылки в тексте. Формулы с номерами должны быть выделены в отдельную

строку. Нумерация двойная по разделам: (1.1) – в разделе 1; (2.1) – в разделе 2, и т.д.

$$\int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2}. \quad (2.1)$$

Нумерация теорем, определений, следствий и т.д. – двойная по разделам арабскими цифрами.

Теорема 2.1. *Формулировка теоремы.*

Доказательство. Формулировка доказательства.

$$a = b. \quad (2.2)$$

□

2.1. Основные определения

Подразделы должны быть выделены двойной нумерацией.

Определение 2.1. *Формулировка определения.*

Замечание 2.1. Формулировка замечания.

3. Таблицы

Числовой материал следует представлять в форме таблицы. Все таблицы должны быть пронумерованы сквозной нумерацией арабскими цифрами. После номера может быть указано название таблицы.¹

Таблица 1.

1	2	3
4	5	6

4. Рисунки

Рисунки должны быть выполнены в хорошем качестве, преимущественно в формате .eps. Нумерация рисунков сквозная. Каждый рисунок должен иметь подпись.

Список литературы оформляется как нумерованный список. Первыми приводятся источники на русском языке, затем на английском.

¹сноски из текста нумеруются по порядку следования



Рисунок 1. Журнал

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фамилия И.О. *Название книги*. Город: Издательство, 2008.
2. Фамилия1 И.О., Фамилия2 И.О. *Название статьи* // Название Журнала. 1993. № 1. С. 59–78.
3. Surname1 N., Surname2 N. *Title* // Journal. 2001. V. 1. N 2. P. 9–17.

НАЗВАНИЕ СТАТЬИ НА АНГЛИЙСКОМ ЯЗЫКЕ

ФИО на английском языке, название организации, научная степень, научное звание на английском языке (author@noname.ru).

Abstract: Аннотация на английском языке.

Keywords: ключевые слова на английском языке.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИГР И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ

Том 11
Выпуск 4

*Свидетельство о регистрации СМИ
ПИ № ФС77-73450 от 10.08.2018 г.
выдано Федеральной службой по надзору
в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций*

Учредитель журнала:
Федеральный исследовательский центр
«Карельский научный центр Российской академии наук»

Оригинал-макет *А. Н. Реттиева*

Дата выхода 30.12.2019.
Формат 70×100^{1/16}. Гарнитура Times. Печать офсетная.
Уч.-изд. л. 6,4. Усл. печ. л. 9,51 Тираж 300 экз. Заказ 594.
Свободная цена. 16+

Типография:
Федеральный исследовательский центр
«Карельский научный центр Российской академии наук»
Редакционно-издательский отдел
185003, Петрозаводск, пр. А. Невского, 50

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИГР
И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ
ТОМ 11, ВЫПУСК 4, 2019**

СОДЕРЖАНИЕ

Научная жизнь	3
Игра преследования-убегания на реберном остове правильных многогранников. III ..	5
<i>А.А. Азамов, <u>А.Ш. Кучкаров</u>, А.Г. Холбоев</i>	
Двухфакторное DEA моделирование и кластеризация множества однородных фирм	24
<i>В.М. Буре, Е.М. Парилина, К.Ю. Староверова</i>	
Делегирование полномочий в иерархических системах	44
<i>М.А. Горелов</i>	
Позиционные стратегии в неантагонистической дифференциальной игре специального вида	67
<i>Е.А. Колтакова</i>	
Гарантированный детерминистский подход к суперхеджированию: свойства полунепрерывности и непрерывности решений уравнений Беллмана-Айзекса	87
<i>С.Н. Смирнов</i>	