Математическая Теория Игр и её Приложения, т.11, в.4, с. 44–66

УДК 519.865+519.95
ББК 22.18

ДЕЛЕГИРОВАНИЕ ПОЛНОМОЧИЙ В ИЕРАРХИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Михаил А. Горелов
Вычислительный центр им. А.А. Дородницына
ФИЦ ИУ РАН
119333, Москва, ул. Вавилова, д. 44, кор.2
e-mail: griefer@ccas.ru

Рассматривается иерархическая игра двух лиц с неопределенным фактором. Считается, что агент более информирован о значении этого фактора, чем Центр. В этих предположениях изучается целесообразность для Центра передачи агенту части полномочий по выбору своих управлений.

Ключевые слова: принятие решений в условиях неопределенности, иерархические игры, децентрализация управления.

Поступила в редакцию: 28.02.19 *После доработки*: 16.05.19 *Принята к публикации*: 14.10.19

1. Введение

Будем рассматривать модель иерархической системы, в которой элемент верхнего уровня (Центр) задает некоторое множество. Из этого множества его подчиненный имеет право выбрать «физическое» управление, от которого зависят выигрыши обоих игроков. При этом учитывается наличие внешнего неопределенного фактора, значение которого в момент принятия решения известно подчиненному, но не известно Центру.

Подобные модели, в которых стратегиями одного из игроков являлись множества (точнее, точечно-множественные отображения) уже встречались. Видимо, впервые они появились в работах [6] и [8].

Но в этих и нескольких более поздних работах подобные конструкции играли вспомогательную роль. С одной стороны использование точечно-множественных отображений вместо функций улучшало аналитические свойства решаемой задачи. С другой стороны таким способом «легализовывались» добровольные обмены информацией.

Но на ситуацию можно взглянуть по-другому. Если Центр, вместо того, чтобы выбирать управление самостоятельно, передоверяет это право агенту, то можно говорить о некой децентрализации управления. А задача выбора оптимальной степени децентрализации или, более обще, оптимальной структуры системы управления является весьма актуальной (см. [2,5,9]). Поэтому имеет смысл изучить подобные конструкции более детально. Сразу же отметим, что общих методов решения подобных задач пока нет.

В данной статье строится и исследуется самая простая и самая общая модель такого рода. Поэтому удается получить лишь самые простые результаты. Конечно же, они недостаточно конструктивны, чтобы считать поставленную задачу решенной. Но некоторые важные качественные выводы получить удалось.

В частности, стало ясно, что задачу выбора оптимальной степени децентрализации можно поставить математически корректно и в то же время достаточно осмысленно в содержательном плане. Правда, задачи о максимальной и о минимальной степени децентрализации ставятся в разных терминах. В задаче о минимальной степени децентрализации в качестве меры децентрализации можно использовать мощность выбранного множества–стратегии. А в задаче о максимальной степени децентрализации разумно использовать частичную упорядоченность множеств отношением включения.

2. Базовая модель

В дальнейшем будут удобны следующие обозначения. Обозначим через $\Phi(X,Y)$ класс всех функций, отображающих множество X в множество Y, $\Sigma(X)$ – семейство всех непустых подмножеств множества X, а $\Psi(X,Y)$ – семейство всех точечно-множественных отображений, ставящих в соответствие каждой точке $x \in X$ непустое подмножество множества Y (разумеется, $\Psi(X,Y) = \Phi(X,\Sigma(Y))$). Буква $\mathbb{R}$, как обычно, обозначает множество действительных чисел.

Как отмечалось во введении, в данной статье основной интерес будут представлять модели, в которых агент выбирает управления из множества, выбранного Центром, т. е., модели, в которых возможности агента зависят от выбора Центра. Кроме того, существенно наличие неопределенных факторов. Таким образом, адекватная логическая схема – это игра с запрещенными ситуациями и неопределенными факторами.

На протяжении данной статьи игрой будем называть набор $\Gamma = \langle U, V, \Omega, A, g, h \rangle$. Здесь U, V, A – множества, $\Omega \in \Psi(U, V)$, $g : \mathrm{graph}(\Omega) \to \mathbb{R}$ и $h : \mathrm{graph}(\Omega) \times A \to \mathbb{R}$ – функции, а

$$\mathrm{graph}(\Omega) = \{(u, v) \in U \times V : v \in \Omega(u)\} \ -$$

график точечно-множественного отображения Ω.

Содержательно эти конструкции интерпретируются следующим образом. Первый игрок (Центр) выбирает свое управление u из множества U. Множество $\Omega(u)$ задает ограничения, накладываемые на выбор управления v второго игрока. Именно он отвечает за выполнение этих ограничений. При выбранных управлениях u и v первый игрок получает выигрыш $g(u, v)$. При тех же условиях выигрыш $h(u, v, \alpha)$ второго игрока зависит не только от выбранных управлений, но еще и от реализовавшегося значения $\alpha \in A$ неопределенного фактора.

Приведем два определения максимального гарантированного результата.

Определение 2.1. *Множество рациональных ответов второго игрока на стратегию u определяется условием*

$$BR(u, \alpha) = \left\{ v \in \Omega(u) : h(u, v, \alpha) = \max_{w \in \Omega(u)} h(u, w, \alpha) \right\},$$

если максимум в этой формуле достигается, и

$$BR(u, \alpha) = \left\{ v \in \Omega(u) : h(u, v, \alpha) > \max_{w \in \Omega(u)} h(u, w, \alpha) - \kappa \right\}$$

в противном случае (здесь κ – некоторое фиксированное положительное число). Максимальный гарантированный результат $R_\kappa(\Gamma)$ первого игрока в игре Γ равен

$$R_\kappa(\Gamma) = \sup_{u \in U} \inf_{\alpha \in A} \inf_{v \in BR(u, \alpha)} g(u, v).$$

Это определение традиционно и смысл введенных конструкций понятен. Пусть первый игрок выбрал управление u, и реализовалось значение неопределенного фактора α. Если это станет известно второму игроку, то для него естественно выбрать одно из управлений из множества $BR\,(u, \alpha)$. Это множество может заранее оценить первый игрок, но он не знает окончательного выбора партнера, так же как и реализовавшееся значение неопределенного фактора. В этих условиях он может гарантированно получить выигрыш

$$\inf_{\alpha \in A} \inf_{v \in BR(u)} g\,(u, v)\,.$$

Естественно выбирать управление u так, чтобы этот гарантированный выигрыш был побольше.

В работе удобнее альтернативное определение максимального гарантированного результата.

Определение 2.2. *Число γ называется гарантированным результатом первого игрока в игре Γ, если существует стратегия $u \in U$ и для любого значения $\alpha \in A$ найдется такое число λ, что выполняются условия:*

1. существует стратегия $w \in \Omega\,(u)$, для которой $h\,(u, w, \alpha) \geqslant \lambda$;

2. для любого управления $v \in \Omega\,(u)$ справедливо одно из неравенств $g\,(u, v) \geqslant \gamma$ или $h\,(u, v, \alpha) < \lambda$.

Точная верхняя грань $R\,(\Gamma)$ гарантированных результатов первого игрока в игре Γ называется его максимальным гарантированным результатом в игре Γ.

Интерпретация этих конструкций тоже понятна. При фиксированных $u \in U$ и $\alpha \in A$ все доступные второму игроку стратегии разбиваются на два класса: рациональные и нерациональные. Естественно считать, что при некотором значении λ для рациональных стратегий выполняется условие $h\,(u, w, \alpha) \geqslant \lambda$, а для нерациональных – противоположное неравенство. Число γ является гарантированным результатом первого игрока, если при всяком рациональном выборе партнера он получает выигрыш, не меньший γ. За это отвечает второй пункт определения. Поскольку какой-то выбор второй игрок сделать должен, хотя бы одна стратегия должна считаться рациональной. Это содержание первого пункта определения.

Разумеется, использование двух определений для одного термина оправдано только в том случае, когда эти определения эквивалентны. В общем случае эквивалентности определений 2.1 и 2.2 нет. Это видно хотя бы из того, что величина $R_\kappa(\Gamma)$, вообще говоря, зависит от κ, а величина $R(\Gamma)$ – нет. Но в данной статье будут исследоваться два более узких класса игр, для которых эти определения эквивалентны. Для каждого из этих классов игр Γ доказательства равенств $R(\Gamma) = R_\kappa(\Gamma)$ разбиваются на две части: одну стандартную, а другую – специфичную для каждого из классов. В этом разделе будут сформулированы и доказаны два утверждения, относящиеся к стандартной части.

В множестве U можно выделить подмножество U^r таких стратегий u, что максимум $\max\limits_{v\in\Omega(u)} h(u,v,\alpha)$ достигается для всех $\alpha \in A$. Наряду с игрой $\Gamma = \langle U, V, \Omega, A, g, h\rangle$ можно рассмотреть другую игру $\Gamma^r = \langle U^r, V, \Omega, A, g, h\rangle$ (здесь сужение точечно множественного отображения Ω на множество U^r обозначено той же буквой Ω; то же относится к функциям g и h). Малоинтересный случай, когда $U^r = \emptyset$ оставим без внимания.

Очевидно, $R(\Gamma^r) \leqslant R(\Gamma)$ и $R_\kappa(\Gamma^r) \leqslant R_\kappa(\Gamma)$.

Лемма 2.1. *Справедливо неравенство* $R(\Gamma^r) \leqslant R_\kappa(\Gamma)$.

Доказательство. Пусть γ – любой гарантированный результат первого игрока в игре Γ^r в смысле определения 2.2. Фиксируем стратегию $u \in U^r$, существование которой предусмотрено определением 2.2, произвольное $\alpha \in A$ и число λ, для которого выполняются пункты 1 и 2 этого определения (для выбранных u и α).

В силу первого пункта определения для некоторого $w \in \Omega(u)$ выполняется неравенство $h(u,w,\alpha) \geqslant \lambda$, поэтому $\lambda \leqslant \max\limits_{v\in\Omega(u)} h(u,v,\alpha)$. Тогда для любого $v \in BR(u,\alpha)$ имеем $h(u,v,\alpha) \geqslant \lambda$ и в силу второго пункта определения будет верно неравенство $g(u,v) \geqslant \gamma$. В силу произвольности $v \in BR(u,\alpha)$ отсюда следует условие $\inf\limits_{v\in BR(u)} g(u,v) \geqslant \gamma$, а так как $\alpha \in A$ выбрано произвольно, то $\inf\limits_{\alpha\in A} \inf\limits_{v\in BR(u)} g(u,v) \geqslant \gamma$ и тем более $R_\kappa(\Gamma) = \sup\limits_{u\in U} \inf\limits_{\alpha\in A} \inf\limits_{v\in BR(u)} g(u,v) \geqslant \gamma$.

Так как γ – произвольный гарантированный результат в игре Γ^r, отсюда следует неравенство $R(\Gamma^r) \leqslant R_\kappa(\Gamma)$. $\square$

Справедливо аналогичное утверждение.

Лемма 2.2. *Имеет место неравенство* $R_\kappa(\Gamma^r) \leqslant R(\Gamma)$.

Доказательство. Фиксируем произвольное число $\gamma < R_\kappa(\Gamma^r)$. Выберем стратегию $u \in U^r$ так, что

$$\inf_{\alpha \in A} \inf_{v \in BR(u)} g(u, v) \geqslant \gamma. \tag{2.1}$$

Пусть α – любой параметр из множества A. Положим

$$\lambda = \max_{v \in \Omega(u)} h(u, v, \alpha).$$

Тогда для любого $w \in BR(u, \alpha)$ будет выполняться неравенство $h(u, w, \alpha) \geqslant \lambda$ (конечно же, на самом деле имеет место равенство). Следовательно, пункт 1 определения 2.2 выполнен. В силу условия (2.1) для всех $v \in BR(u, \alpha)$ выполнено неравенство $g(u, v) \geqslant \gamma$. А в силу определения числа λ для $v \notin BR(u, \alpha)$ выполняется неравенство $h(u, v, \alpha) < \lambda$. Таким образом, выполнен и второй пункт определения 2.2. Значит, γ – гарантированный результат первого игрока в игре Γ.

Поэтому $\gamma < R(\Gamma)$. В силу произвольности γ отсюда следует неравенство $R_\kappa(\Gamma^r) \leqslant R(\Gamma)$. □

Таким образом, для того, чтобы доказать равенство $R(\Gamma) = R_\kappa(\Gamma)$ достаточно установить одно из двух равенств $R(\Gamma^r) = R(\Gamma)$ или $R_\kappa(\Gamma^r) = R_\kappa(\Gamma)$.

Опишем первый класс игр, который будет рассматриваться в данной статье. В него входят игры вида $\Gamma_0 = \langle U, V, \Omega_0, A, g, h \rangle$ в которых Ω_0 – тождественное отображение, которое каждому $u \in U$ ставит в соответствие множество V. Множества U, V и A будем считать наделенными топологиями и компактными, а функции g и h – непрерывными в топологиях декартовых произведений $U \times V$ и $U \times V \times A$ соответственно.

Тогда в силу стандартных теорем анализа для любой стратегии $u \in U$ и любого $\alpha \in A$ максимум $\max\limits_{v \in \Omega(u)} h(u, v, \alpha)$ достигается, т.е. $U^r = U$. Значит, по определению $R(\Gamma^r) = R(\Gamma)$ и, следовательно, $R(\Gamma) = R_\kappa(\Gamma)$.

3. Делегирование полномочий

На основе игры Γ_0 построим другую модель. Пусть $U_\# = \Sigma(U)$, $V_\# = U \times V$. Определим точечно-множественное отображение $\Omega_\# : U_\# \to V_\#$ условием $\Omega_\#(u_\#) = u_\# \times V$, а функции выигрыша $g_\# : U_\# \times V_\# \to R$ и $h_\# : U_\# \times V_\# \times A \to R$ равенствами $g_\#(u_\#, v_\#) = g(v_\#)$ и $h_\#(u_\#, v_\#, \alpha) = h(v_\#, \alpha)$. Получим новую игру $\Gamma_\# = \langle U_\#, V_\#, \Omega_\#, A, g_\#, h_\# \rangle$ (с тем же множеством неопределенных факторов).

Содержательно эти конструкции интерпретируются следующим образом. Право выбора «физического» управления $u \in U$ принадлежит первому игроку. Но он считает выгодным делегировать часть этого права своему партнеру. А именно, он выбирает некоторое подмножество $u_\# \subset U$ и позволяет второму игроку выбрать произвольное управление $u \in u_\#$. Кроме того, у второго игрока остается естественное право выбора «своего» управления $v \in V$. После того, как эти выборы сделаны и реализовалось какое-то значение неопределенного фактора, игроки получают свои выигрыши, которые, разумеется, зависят только от «физических» управлений и не зависят от процедуры принятия решений.

При сделанных в конце предыдущего раздела топологических предположениях выполняется равенство $R(\Gamma_\#) = R_\kappa(\Gamma_\#)$. Как установлено выше, для доказательства этого равенства достаточно установить справедливость равенства $R_\kappa\left(\Gamma_\#^r\right) = R_\kappa(\Gamma_\#)$. Сделаем это.

Пусть γ – произвольное число, удовлетворяющее неравенству $\gamma < R_\kappa(\Gamma_\#)$. Фиксируем положительное число ε так, что выполнено условие $\varepsilon < R_\kappa(\Gamma_\#) - \gamma$. Покажем, что существует стратегия $w_\# \in U_\#^r$, для которой выполняется неравенство

$$\gamma < \inf_{\alpha \in A} \inf_{v_\# \in BR\left(w_\#, \alpha\right)} g_\#\left(w_\#, v_\#\right) = \inf_{\alpha \in A} \inf_{v_\# \in BR\left(w_\#, \alpha\right)} g\left(v_\#\right). \qquad (3.1)$$

В силу выбора числа γ существует стратегия $u_\#$ для которой

$$\gamma < \inf_{\alpha \in A} \inf_{v_\# \in BR\left(u_\#, \alpha\right)} g_\#\left(u_\#, v_\#\right) = \inf_{\alpha \in A} \inf_{v_\# \in BR\left(u_\#, \alpha\right)} g\left(v_\#\right).$$

Если стратегия $u_\# \in U_\#^r$, то можно положить $w_\# = u_\#$, и все доказано. В противном случае пусть множество $w_\#$ есть замыкание множества $u_\#$ в топологии пространства U.

Так как функция h непрерывна, а множества U и V компактны стратегия $w_\# \in U_\#^r$.

Фиксируем произвольное $\alpha \in A$. Пусть $v_\#^0 = (u^0, v^0)$ – произвольная точка множества $BR(w_\#, \alpha)$. В силу непрерывности функций g и h можно выбрать такую окрестность O точки $v_\#^0 = (u^0, v^0)$, что для всех $(u, v) \in O$ будут выполнены неравенства $|g(u^0, v^0) - g(u, v)| < \varepsilon$ и $|h(u^0, v^0, \alpha) - h(u, v, \alpha)| < \kappa$. Так как $v_\#^0$ принадлежит замыканию множества $u_\# \times V$ в окрестности O существует точка $(u, v) \in u_\# \times V$. Поскольку $u_\# \subset w_\#$ имеем $\sup\limits_{(u,v)\in u_\#} h(u, v, \alpha) \leqslant \max\limits_{(u,v)\in w_\#} h(u, v, \alpha)$. Тогда в силу неравенства $|h(u^0, v^0, \alpha) - h(u, v, \alpha)| < \kappa$ и предположения $u_\# \notin U_\#^r$ выполнятся включение $(u, v) \in BR(u_\#, \alpha)$ а, значит, и неравенство $\inf\limits_{\alpha\in A} \inf\limits_{v_\#\in BR\left(u_\#,\alpha\right)} g_\#(u_\#, v_\#) \leqslant g(u, v)$. Следовательно, в силу выбора числа ε и неравенства $|g(u^0, v^0) - g(u, v)| < \varepsilon$ будем иметь $\gamma < g(u^0, v^0)$. А поскольку $v_\#^0 = (u^0, v^0)$ и α произвольны, отсюда следует неравенство (3.1).

Так как число γ выбрано произвольно, выполняется неравенство $R_\kappa\left(\Gamma_\#^r\right) \geqslant R_\kappa(\Gamma_\#)$, а так как обратное неравенство очевидно, то и равенство $R_\kappa\left(\Gamma_\#^r\right) = R_\kappa(\Gamma_\#)$.

Таким образом, для рассматриваемой модели определения 2.1 и 2.2 эквивалентны.

Сравним максимальные гарантированные результаты в играх Γ_0 и $\Gamma_\#$.

Пусть $u \in U$ – произвольная стратегия первого игрока в игре Γ_0. Положим $u_\# = \{u\}$ ($u_\#$ – множество, состоящее из одной точки). Фиксируем произвольное $\alpha \in A$. Непосредственно проверяется, что если $v \in BR(u, \alpha)$, то $(u, v) \in BR(u_\#, \alpha)$, и обратно, если $v_\# \in BR(u_\#, \alpha)$, то $v_\#$ имеет вид $v_\# = (u, v)$ при некотором $v \in V$ и это управление v принадлежит множеству $BR(u, \alpha)$. Поэтому

$$\inf_{\alpha\in A} \inf_{v_\#\in BR\left(u_\#,\alpha\right)} g_\#(u_\#, v_\#) = \inf_{\alpha\in A} \inf_{v\in BR(u,\alpha)} g(u, v).$$

Обозначим через U^1 класс одноэлементных подмножеств множества U. Тогда из последнего равенства следует, что

$$\sup_{u_\#\in U^1} \inf_{\alpha\in A} \inf_{v_\#\in BR\left(u_\#,\alpha\right)} g_\#(u_\#, v_\#) = \sup_{u\in U} \inf_{\alpha\in A} \inf_{v\in BR(u,\alpha)} g(u, v). \tag{3.2}$$

А поскольку $U^1 \subset U_{\#}$, отсюда следует неравенство $R(\Gamma_{\#}) \geqslant R(\Gamma_0)$.

Обратное, вообще говоря, не верно, что демонстрирует следующий пример.

Пример 3.1. Пусть $U = V = [-1, 1]$, $A = \{-1, 1\}$, $g(u, v) = (uv)^2$, $h(u, v, \alpha) = \alpha uv^2$.

Если $u > 0$, то при $\alpha = -1$ имеем $h(u, v, \alpha) \leqslant 0$, поэтому имеем $BR(u, -1) = \{0\}$. Аналогично, при $u < 0$ выполняется равенство $BR(u, 1) = \{0\}$. При $u = 0$ для второго игрока все выборы равноценны, поэтому $0 \in BR(0, \alpha)$. Таким образом, $R(\Gamma_0) = 0$.

Рассмотрим теперь стратегию $u_{\#} = \{-1, 1\}$ в игре $\Gamma_{\#}$. Очевидно, при $\alpha = 1$ имеем $BR(u_{\#}, \alpha) = \{(1, 1), (1, -1)\}$, а при $\alpha = -1$ выполняется равенство $BR(u_{\#}, \alpha) = \{(-1, 1), (-1, -1)\}$. Таким образом, выбор стратегии $u_{\#} = \{-1, 1\}$ гарантирует первому игроку получение выигрыша, равного 1.

Итак, в общем случае делегирование партнеру прав по выбору управлений может быть выгодно первому игроку. Правда, при этом существенно наличие неопределенных факторов. Действительно, в случае, когда множество A состоит из одного элемента α имеет место равенство $R(\Gamma_{\#}) = R(\Gamma_0)$. Покажем это.

Пусть γ – любое число, удовлетворяющее условию $\gamma < R_{\kappa}(\Gamma_{\#})$. Выберем стратегию $u_{\#}$ так, чтобы выполнялось условие

$$\gamma < \inf_{v_{\#} \in BR\left(u_{\#}, \alpha\right)} g_{\#}(u_{\#}, v_{\#}).$$

Как установлено выше, можно считать, что множество $u_{\#}$ компактно.

Тогда максимум функции h на множестве $u_{\#} \times V$ достигается. Фиксируем произвольную точку (u^0, v^0) в которой это происходит. Положим $w_{\#} = \{u^0\}$. Тогда, очевидно,

$$\max_{v_{\#} \in \Omega_{\#}\left(u_{\#}\right)} h_{\#}(u_{\#}, v_{\#}, \alpha) = \max_{v_{\#} \in \Omega_{\#}\left(w_{\#}\right)} h_{\#}(w_{\#}, v_{\#}, \alpha)$$

и, следовательно, $BR(w_{\#}, \alpha) \subset BR(v_{\#}, \alpha)$. Значит,

$$\gamma < \inf_{v_{\#} \in BR\left(w_{\#}, \alpha\right)} g_{\#}(w_{\#}, v_{\#}) = \inf_{\alpha \in A} \inf_{v_{\#} \in BR\left(w_{\#}, \alpha\right)} g_{\#}(w_{\#}, v_{\#})$$

и тем более

$$\gamma < \sup_{w_\# \in U^1_\#} \inf_{\alpha \in A} \inf_{v_\# \in BR\left(w_\#, \alpha\right)} g_\# \left(w_\#, v_\#\right).$$

В силу произвольности γ отсюда следует, что

$$R\left(\Gamma_\#\right) \leqslant \sup_{w_\# \in U^1_\#} \inf_{\alpha \in A} \inf_{v_\# \in BR\left(w_\#, \alpha\right)} g_\# \left(w_\#, v_\#\right).$$

Но поскольку в общем случае справедливо равенство (3.2), имеем $R\left(\Gamma_\#\right) \leqslant R\left(\Gamma_0\right)$. Поскольку обратное неравенство выполняется при любых множествах A, равенство $R\left(\Gamma_\#\right) = R\left(\Gamma_0\right)$ доказано.

Замечание 3.1. Равенство $R\left(\Gamma_\#\right) = R\left(\Gamma_0\right)$ (при одноточечном множестве A) может быть доказано и без использования топологических предположений. Но рассуждения в этом случае оказываются более длинными, поэтому здесь не приводятся.

Замечание 3.2. Аналогичным образом можно показать, что при поиске оптимальных стратегий в игре $\Gamma_\#$ можно ограничиться рассмотрением лишь таких множеств $u_\#$, мощность которых не превосходит мощности множества A. Подробнее об этом – в статье [4].

4. Аппроксимация

Определение максимального гарантированного результата в игре $\Gamma_\#$ содержит одну «неэлементарную» операцию. Скажем, формула в определении 2.1, задающая величину $R_\kappa\left(\Gamma_\#\right)$, содержит верхнюю грань по классу $\Sigma\left(U\right)$ всех непустых подмножеств множества U. В общем случае множество $\Sigma\left(U\right)$ «очень велико» и стандартные методы оптимизации для вычисления этой верхней грани не работают. Цель данного раздела состоит в том, чтобы свести эту задачу к более простой и стандартной.

Во многих задачах теории иерархических игр присутствует некое функциональное пространство. При этом задача считается решенной, если ее удается свести к исследованию каких-то конструкций, в которых это пространство не упоминается, а фигурируют лишь множество–образ и множество–прообраз. В данной задаче функционального пространства нет, но есть «неэлементарное» множество $\Sigma\left(U\right)$. Будем стремиться его «элиминировать».

Лемма 4.1. *Максимальный гарантированный результат первого игрока в игре $\Gamma_\#$ равен точной верхней грани $R'(\Gamma_\#)$множества чисел γ, удовлетворяющих условию: существует стратегия $u_\# \in U_\#$ и для любого значения $\alpha \in A$ найдется такое число λ, что выполняются условия:*

1. существует стратегия $w_\# \in \Omega_\#(u_\#)$, для которой выполняется неравенство $h_\#(u_\#, w_\#, \alpha) > \lambda$;

2. для любого управления $v_\# \in \Omega_\#(u_\#)$справедливо одно из неравенств $g_\#(u_\#, v_\#) > \gamma$ или $h_\#(u_\#, v_\#, \alpha) < \lambda$.

Доказательство. Для сокращения текста перейдем на язык исчисления предикатов. Условие доказываемой леммы записывается в виде формулы

$$\begin{gathered}\exists u_\# \in U_\# \forall \alpha \in A \exists \lambda : [\exists w_\# \in \Omega_\#(u_\#) : h_\#(u_\#, w_\#, \alpha) > \lambda] \,\& \\ \& \,[\forall v_\# \in \Omega_\#(u_\#)\, g_\#(u_\#, v_\#) > \gamma \vee h_\#(u_\#, w_\#, \alpha) < \lambda].\end{gathered}$$

С учетом структуры игры $\Gamma_\#$ это условие переписывается в виде

$$\begin{gathered}\exists u_\# \in \Sigma(U) \forall \alpha \in A \exists \lambda \,[\exists \omega \in u_\# \exists w \in V : h(\omega, w, \alpha) > \lambda] \,\& \\ \& \,[\forall u \in u_\# \forall v \in V g(u, v) > \gamma \vee h(u, v, \alpha) < \lambda].\end{gathered} \tag{4.1}$$

Аналогично условие определения 2.2 записывается в виде

$$\begin{gathered}\exists u_\# \in \Sigma(U) \forall \alpha \in A \exists \lambda \,[\exists \omega \in u_\# \exists w \in V : h(\omega, w, \alpha) \geqslant \lambda] \,\& \\ \& \,[\forall u \in u_\# \forall v \in V g(u, v) \geqslant \gamma \vee h(u, v, \alpha) < \lambda].\end{gathered} \tag{4.2}$$

Разница формул (4.2) и (4.1) состоит лишь в замене двух нестрогих неравенств на строгие. Очевидно, условие (4.1) влечет условие (4.2), поэтому $R(\Gamma_\#) \geqslant R'(\Gamma_\#)$.

Докажем, что при сделанных топологических предположениях выполняется обратное неравенство $R(\Gamma_\#) \leqslant R'(\Gamma_\#)$. Фиксируем произвольное число $\gamma < R(\Gamma_\#)$.

Тогда любое число $\gamma' \in (\gamma, R(\Gamma_\#))$ является гарантированным результатом в игре $\Gamma_\#$, а потому выполняется условие

$$\begin{gathered}\exists u_\# \in \Sigma(U) \forall \alpha \in A \exists \lambda \,[\exists \omega \in u_\# \exists w \in V : h(\omega, w, \alpha) \geqslant \lambda] \,\& \\ \& \,[\forall u \in u_\# \forall v \in V g(u, v) \geqslant \gamma' \vee h(u, v, \alpha) < \lambda],\end{gathered}$$

а, значит,

$$\exists u_{\#} \in \Sigma (U) \, \forall \alpha \in A \exists \lambda \left[\exists \omega \in u_{\#} \exists w \in V : h(\omega, w, \alpha) \geqslant \lambda \right] \& \\ \& \left[\forall u \in u_{\#} \forall v \in V g(u,v) > \gamma \vee h(u,v,\alpha) < \lambda \right].$$

В силу результатов предыдущего раздела можно, не ограничивая общности, считать, что множество $u_{\#}$ в этой формуле замкнуто, а потому компактно. Фиксируем произвольное $\alpha \in A$ и выберем число λ так, чтобы выполнялось условие

$$\left[\exists \omega \in u_{\#} \exists w \in V : h(\omega, w, \alpha) \geq \lambda \right] \ \& \\ \& \ \left[\forall u \in u_{\#} \forall v \in V g(u,v) > \gamma \vee h(u,v,\alpha) < \lambda \right]. \tag{4.3}$$

Множество $G(u_{\#}, \gamma) = \{(u,v) \in u_{\#} \times V : g(u,v) \leqslant \gamma\}$ компактно. Следовательно, максимум

$$m(u_{\#}, \gamma, \alpha) = \max_{(u,v) \in G\left(u_{\#}, \gamma\right)} h(u,v,\alpha)$$

достигается в некоторой точке (u^0, v^0). Так как $g(u^0, v^0) \leqslant \gamma$, в силу второй части условия (4.3) выполняется неравенство

$$m(u_{\#}, \gamma, \alpha) = h\left(u^0, v^0, \alpha\right) < \lambda.$$

Фиксируем $\lambda'' \in (m(u_{\#}, \gamma, \alpha), \lambda)$. Тогда в силу формулы (4.3) выполняется условие

$$\left[\exists \omega \in u_{\#} \exists w \in V : h(\omega, w, \alpha) > \lambda'' \right] \ \& \\ \& \ \left[\forall u \in u_{\#} \forall v \in V g(u,v) > \gamma \vee h(u,v,\alpha) < \lambda'' \right].$$

Тем более

$$\exists \lambda \left[\exists \omega \in u_{\#} \exists w \in V : h(\omega, w, \alpha) \geq \lambda \right] \ \& \\ \& \ \left[\forall u \in u_{\#} \forall v \in V g(u,v) > \gamma \vee h(u,v,\alpha) < \lambda \right],$$

и в силу произвольности $\alpha \in A$

$$\forall \alpha \in A \exists \lambda \left[\exists \omega \in u_{\#} \exists w \in V : h(\omega, w, \alpha) \geq \lambda \right] \ \& \\ \& \ \left[\forall u \in u_{\#} \forall v \in V g(u,v) > \gamma \vee h(u,v,\alpha) < \lambda \right],$$

Отсюда немедленно вытекает условие (4.1), что в силу произвольности γ доказывает неравенство $R(\Gamma_{\#}) \leqslant R'(\Gamma_{\#})$.

Итак, $R(\Gamma_{\#}) = R'(\Gamma_{\#})$, откуда и следует утверждение леммы. $\square$

Полученный результат позволяет применить аппроксимационную технику для поиска рациональных стратегий первого игрока в игре $\Gamma_{\#}$. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 4.2. *Максимальный гарантированный результат первого игрока в игре* $\Gamma_{\#}$ *равен точной верхней грани* $R''(\Gamma_{\#})$ *множества чисел* γ, *удовлетворяющих условию: существует конечное множество* $u_{\#} \subset U$ *и для любого значения* $\alpha \in A$ *найдется такое число* λ, *что выполняются условия:*

1. существует стратегия $w_{\#} \in \Omega_{\#}(u_{\#})$, *для которой выполняется неравенство* $h_{\#}(u_{\#}, w_{\#}, \alpha) \geqslant \lambda$;

2. для любого управления $v_{\#} \in \Omega_{\#}(u_{\#})$ *справедливо одно из неравенств* $g_{\#}(u_{\#}, v_{\#}) \geqslant \gamma$ *или* $h_{\#}(u_{\#}, v_{\#}, \alpha) < \lambda$.

Доказательство. Поскольку семейство конечных подмножеств множества U содержится в множестве $U_{\#}$, неравенство $R(\Gamma_{\#}) \geqslant R''(\Gamma_{\#})$ очевидно. Докажем обратное неравенство $R(\Gamma_{\#}) \leqslant R''(\Gamma_{\#})$.

Пусть γ – произвольное число, меньшее $R(\Gamma_{\#})$. Тогда выполняется условие (4.1). Выберем множество $\varpi_{\#} \in \Sigma(U)$ так, что

$$\begin{gathered}\forall \alpha \in A \exists \lambda \left[\exists \omega \in \varpi_{\#} \exists w \in V : h(\omega, w, \alpha) > \lambda\right] \ \& \\ \& \ \left[\forall u \in \varpi_{\#} \forall v \in V g(u, v) > \gamma \vee h(u, v, \alpha) < \lambda\right].\end{gathered}$$

Вновь можно считать, что множество $\varpi_{\#}$ замкнуто. Для каждого $\alpha \in A$ фиксируем такое значение $\lambda(\alpha)$, что

$$\begin{gathered}\left[\exists \omega \in \varpi_{\#} \exists w \in V : h(\omega, w, \alpha) > \lambda(\alpha)\right] \ \& \\ \& \ \left[\forall u \in \varpi_{\#} \forall v \in V g(u, v) > \gamma \vee h(u, v, \alpha) < \lambda(\alpha)\right].\end{gathered}$$

Это равносильно условию

$$\left[\exists \omega \in \varpi_{\#} \exists w \in V : h(\omega, w, \alpha) > \lambda(\alpha)\right] \& \left[m(\varpi_{\#}, \gamma, \alpha) < \lambda(\alpha)\right]. \quad (4.4)$$

Для каждого $\beta \in A$ зафиксируем $\omega(\beta) \in \varpi_{\#}, w(\beta) \in V$ так, что

$$h(\omega(\beta), w(\beta), \beta) > \lambda(\beta).$$

Определим множества

$$\begin{gathered}O_1(\beta) = \{\alpha \in A : h(\omega(\beta), w(\beta), \alpha) > \lambda(\beta)\}, \\ O_2(\beta) = \{\alpha \in A : m(\varpi_{\#}, \gamma, \alpha) < \lambda(\beta)\}.\end{gathered}$$

Функция h непрерывна, поэтому множество $O_1(\beta)$ открыто. Стандартными аналитическими рассуждениями доказывается, что величина $m(\varpi_\#, \gamma, \alpha)$ также непрерывно зависит от α. Следовательно, и множество $O_2(\beta)$ открыто. Значит, открыто и пересечение множеств $O_1(\beta) \cap O_2(\beta)$.

В силу формулы (4.4) множества $O_1(\beta) \cap O_2(\beta)$ покрывают компактное множество A. Следовательно, существует такое множество $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, что множества $O_1(\beta_i) \cap O_2(\beta_i), i = 1, 2, \ldots, n$ тоже покрывают множество A. Положим $u_\# = \{\omega(\beta_1), \omega(\beta_2), \ldots, \omega(\beta_n)\}$.

Если $\alpha \in O_1(\beta_i) \cap O_2(\beta_i)$, то

$$h(\omega(\beta_i), w(\beta_i), \alpha) > \lambda(\beta_i) \& m(\varpi_\#, \gamma, \alpha) < \lambda(\beta_i),$$

а поскольку $u_\# \subset \varpi_\#$ и $\omega(\beta_i) \in u_\#$, то тем более

$$[\exists \omega \in u_\# \exists w \in V h(\omega, w, \alpha) > \lambda(\beta_i)] \& m(u_\#, \gamma, \alpha) < \lambda(\beta_i),$$

значит,

$$\begin{gathered}[\exists \omega \in \varpi_\# \exists w \in V : h(\omega, w, \alpha) > \lambda(\beta_i)] \ \& \\ \& \ [\forall u \in u_\# \forall v \in V g(u, v) > \gamma \vee h(u, v, \alpha) < \lambda(\beta_i)].\end{gathered}$$

Следовательно, для такого α выполнено условие

$$\begin{gathered}\exists \lambda [\exists \omega \in u_\# \exists w \in V : h(\omega, w, \alpha) > \lambda] \ \& \\ \& \ [\forall u \in u_\# \forall v \in V g(u, v) > \gamma \vee h(u, v, \alpha) < \lambda],\end{gathered}$$

а так как множества $O_1(\beta_i) \cap O_2(\beta_i), i = 1, 2, \ldots, n$ покрывают множество A, то

$$\begin{gathered}\forall \alpha \in A \exists \lambda [\exists \omega \in u_\# \exists w \in V : h(\omega, w, \alpha) > \lambda] \ \& \\ \& \ [\forall u \in u_\# \forall v \in V g(u, v) > \gamma \vee h(u, v, \alpha) < \lambda].\end{gathered}$$

Отсюда непосредственно следует, что число γ удовлетворяет условию доказываемой леммы, и, значит, $R(\Gamma_\#) \leqslant R''(\Gamma_\#)$.

Вместе с неравенством $R(\Gamma_\#) \geqslant R''(\Gamma_\#)$ это доказывает лемму. $\square$

5. Вычисление максимального гарантированного результата в игре $\Gamma_\#$

Доказанная лемма позволяет в известном смысле упростить вычисление величины $R\left(\Gamma_\#\right)$. Если руководствоваться идеологией определения 2.1 то соответствующий результат выглядит следующим образом.

Теорема 5.1. *Справедливо равенство*

$$R\left(\Gamma_\#\right) = \lim_{n\to\infty} \max_{(u_1,\ldots,u_n)\in U^n} \min_{(i,v)\in E(u_1,\ldots,u_n)} g\left(u_i, v\right),$$

где

$$E\left(u_1,\ldots,u_n\right) = \\ = \left\{(i,v)\in\{1,\ldots,n\}\times V : h\left(u_i,v\right) = \max_{(j,w)\in\{1,\ldots,n\}\times V} h\left(u_j,w\right)\right\}.$$

Величина

$$\max_{(u_1,\ldots,u_n)\in U^n} \min_{(i,v)\in E(u_1,\ldots,u_n)} g\left(u_i, v\right),$$

очевидно, не убывает с ростом n, поэтому формулу из утверждения теоремы можно переписать в виде

$$R\left(\Gamma_\#\right) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \max_{(u_1,\ldots,u_n)\in U^n} \min_{(i,v)\in E(u_1,\ldots,u_n)} g\left(u_i, v\right).$$

Таким образом, формально поставленная задача решена: в последнем выражении нет никаких «бесконечномерных» пространств. Разумеется, поскольку с ростом n «размерность» задачи растет, конструктивность теоремы 5.2 меньше, чем у ее аналогов. Но в данном случае можно показать, что это связано с природой исходной задачи и добиться существенно лучших результатов без дополнительных предположений о структуре игры $\Gamma_\#$ нельзя. Одно из возможных предположений – использование обратной связи. На первый взгляд это может показаться парадоксальным, но при этом получается более простая задача. Однако изложение соответствующих результатов выходит за рамки данной статьи.

Можно вычислять величину $R\left(\Gamma_\#\right)$ и отталкиваясь от определения 2.2.

Положим

$$H(\gamma, n, u_1, \ldots, u_n) = \{(u, v) \in \{u_1, \ldots, u_n\} \times V : g(u, v) \geqslant \gamma\},$$

$$l(\alpha, \gamma, n, u_1, \ldots, u_n) = \max_{(u,v) \in H(\gamma, n, u_1, \ldots, u_n)} h(u, v, \alpha).$$

В силу леммы 4.2 формула (4.2) может быть переписана в виде

$$\begin{gathered} \exists n \in N \exists (u_1, \ldots, u_n) \in U^n \forall \alpha \in A \exists \lambda : \\ [\exists j \in \{1, \ldots, n\} \exists w \in V : h(u_j, w, \alpha) \geq \lambda] \;\; \& \\ \& \;\; [\forall i \in \{1, \ldots, n\} \forall v \in V g(u_i, v) \geq \gamma \vee h(u_i, v, \alpha) < \lambda]. \end{gathered}$$

Можно показать, что в данной формуле, не ограничивая общности, можно считать $\lambda = l(\alpha, \gamma, n, u_1, \ldots, u_n)$. Тогда первая часть условия будет заведомо выполнена, о оставшаяся часть может быть записана в виде

$$\begin{gathered} \exists n \in \mathbb{N} \exists (u_1, \ldots, u_n) \in U^n \forall \alpha \in A \\ \forall (i, v) \in \Xi(\gamma, n, u_1, \ldots, u_n) \, h(u_i, v, \alpha) < l(\alpha, \gamma, n, u_1, \ldots, u_n), \end{gathered}$$

где

$$\Xi(\gamma, n, u_1, \ldots, u_n) = \{(i, v) \in \{1, \ldots, n\} \times V : g(u_i, v) < \gamma\}.$$

Теперь, используя стандартную процедуру замены кванторов операторами максимума и минимума придем к следующему утверждению.

Теорема 5.2. *Для того, чтобы число* γ *было гарантированным результатом в игре* $\Gamma_\#$ *необходимо, чтобы*

$$\begin{gathered} \inf_{n \in \mathbb{N}} \min_{(u_1, \ldots, u_n) \in U^n} \max_{\alpha \in A} \max_{(i,v) \in \Xi(\gamma, n, u_1, \ldots, u_n)} [h(u_i, v, \alpha) - \\ - l(\alpha, \gamma, n, u_1, \ldots, u_n)] \leq 0, \end{gathered}$$

и достаточно, чтобы

$$\begin{gathered} \inf_{n \in \mathbb{N}} \min_{(u_1, \ldots, u_n) \in U^n} \max_{\alpha \in A} \max_{(i,v) \in \Xi(\gamma, n, u_1, \ldots, u_n)} [h(u_i, v, \alpha) - \\ - l(\alpha, \gamma, n, u_1, \ldots, u_n)] < 0, \end{gathered}$$

Как и в случае теоремы 5.1 инфимум по $n \in \mathbb{N}$ может быть заменен пределом.

Вычисление величины $R(\Gamma_{\#})$ предложенными методами связано с поиском оптимальных множеств из n элементов с возрастающим числом n. Велик соблазн поступать следующим образом: берем оптимальное множество из n элементов, дополняем его правильно подобранным управлением и получаем оптимальное множество из $n+1$ элемента. Следующий пример показывает, что в общем случае так поступать нельзя. Подобный эффект появляется не первый раз, поэтому можно предположить, что он определяется природой вещей.

Пример 5.1. Рассмотри игру, с множествами $U = \{1,2,3\}$, $V = \{1,2\}$, $A = \{0,1\}$ и функциями выигрыша, заданными матрицей

$$\begin{pmatrix} (0,0,0) & (2,1,0) \\ (1,2,2) & (1,2,2) \\ (2,1,0) & (0,0,0) \end{pmatrix}$$

(здесь выбранное первым игроком управление – это номер строки, управление второго игрока – номер столбца, первое число в каждой тройке – выигрыш первого игрока, а два другие числа – выигрыши второго игрока при $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ соответственно).

Непосредственно проверяется, что единственное одноэлементное множество, гарантирующее первому игроку выигрыш равный 1 – это множество $\{2\}$. Аналогично, единственное двухэлементное множество, гарантирующее первому игроку выигрыш равный 2 – это множество $\{1,3\}$.

6. Структура множества оптимальных стратегий

Даже при сделанных топологических предположениях максимальный гарантированный результат $R(\Gamma_{\#})$ в игре $\Gamma_{\#}$ может не быть гарантированным результатом. Соответствующий пример построить несложно. Рассмотрим игру с одноточечным множеством A. Тогда как показано в разделе 3, оптимальную стратегию в игре можно искать среди одноточечных множеств $u_{\#}$. Таким образом, приходим к стандартной задаче, для которой нужные контрпримеры известны (годится игра из приводимого ниже примера 6.1).

Таким образом, «настоящей» оптимальной стратегии в игре $\Gamma_{\#}$ может и не быть. Но всегда есть «почти оптимальные» стратегии.

Именно их мы и будем обсуждать в данном разделе, опуская для краткости слово «почти».

Как установлено в разделе 4 среди оптимальных стратегий всегда есть конечные множества. Это определенный аргумент в пользу рассматриваемой постановки. В самом деле, было бы нехорошо, если бы в качестве решения «простой» игры выступало какое-то множество типа ковра Серпинского. Нетрудно понять, что такие решения в «простых» играх могут существовать, но всегда существуют и «простые» решения.

Идеи разделов 4 и 5 нацелены на поиск «самых маленьких» оптимальных стратегий (в качестве характеристики «размера» стратегии в данном случае можно использовать, например, мощность соответствующего множества). Таких решений может быть много, и отличаться они могут существенно. Чтобы это понять, можно снова рассмотреть игру с одноточечным множеством A. Построить пример такой игры с несколькими разными решениями совсем нетрудно.

Определенный интерес представляет в известном смысле противоположная задача поиска «самой большой» оптимальной стратегии. Вот здесь появляется довольно интересный качественный эффект, который проще всего понять с помощью следующего, пусть и не самого общего результата.

Теорема 6.1. *Допустим, что в игре* $\Gamma_\# = \langle U_\#, V_\#, \Omega_\#, A, g_\#, h_\# \rangle$ *множество* $U_\#$ *конечно. Пусть* γ *– гарантированный результат в игре* $\Gamma_\#$*. Тогда существует такая стратегия* $u^0_\#$*, гарантирующая получение результата* γ*, что для любой стратегии* $u_\#$*, гарантирующей получение того же результата, выполнено включение* $u_\# \subset u^0_\#$*.*

Доказательство. Пусть γ – гарантированный результат в игре $\Gamma_\#$ и $u^1_\#, \ldots, u^n_\#$ – все стратегии в игре $\Gamma_\#$, гарантирующие первому игроку получение результата γ. Тогда в силу определения 2.2 для любого $i = 1, \ldots, n$ и любого $\alpha \in A$ существует число $\lambda(i, \alpha)$, для которого выполняется условие

$$\begin{gathered}\left[\exists \omega \in u^i_\# \exists w \in V : h(\omega, w, \alpha) \geqslant \lambda(i, \alpha)\right] \& \\ \& \left[\forall u \in u^i_\# \forall v \in V g(u, v) \geqslant \gamma \vee h(u, v, \alpha) < \lambda(i, \alpha)\right].\end{gathered} \tag{6.1}$$

Покажем, что множество $u^0_{\#} = \bigcup\limits_{k=1}^{n} u^k_{\#}$ является искомым. Фиксируем произвольное $\alpha \in A$. Положим $\lambda(0,\alpha) = \max\limits_{i=1,\dots,n} \lambda(i,\alpha)$ и выберем $m \in \{1,\dots,n\}$ так, что $\lambda(m,\alpha) = \lambda(0,\alpha)$. Достаточно доказать, что выполняется условие

$$\begin{gathered}\left[\exists \omega \in u^0_{\#} \exists w \in V : h(\omega, w, \alpha) \geqslant \lambda(0,\alpha)\right] \& \\ \& \left[\forall u \in u^0_{\#} \forall v \in V g(u,v) \geqslant \gamma \vee h(u,v,\alpha) < \lambda(0,\alpha)\right].\end{gathered} \tag{6.2}$$

Первая часть этого условия немедленно следует из условия (6.1) для $i = m$. Вторая часть условия (6.2) для $u \in u^k_{\#}$ следует из второй части условия (6.1) для $i = k$ и неравенства $\lambda(k,\alpha) \leqslant \lambda(0,\alpha)$. А поскольку $u^0_{\#} = \bigcup\limits_{k=1}^{n} u^k_{\#}$, вторая часть условия (6.2) выполняется для всех $u \in u^0_{\#}$. □

Итак, если множество U конечно и выполняются обычные топологические предположения относительно множеств V и A и функций g и h, то существует наибольшая по включению оптимальная стратегия в игре $\Gamma_{\#}$. К сожалению, в общем случае это не так, о чем свидетельствует следующий пример.

Пример 6.1. Пусть $U = V = [0,1]$, $A = \{0\}$, $g(u,v) = u - v$ и $h(u,v,\alpha) = v(u + v - 2)$.

Непосредственно проверяется, что в этом случае $R(\Gamma_{\#}) = 1$ (напомним, что поскольку множество A содержит одну точку, то тогда $R(\Gamma_{\#}) = R(\Gamma)$), но число $\gamma = 1$ не является гарантированным результатом. Поэтому гарантированными результатами являются числа $\gamma < 1$.

Если мы зафиксируем любое такое число, то оптимальной стратегией будет, например, одноточечное множество $u_{\#} = \{u\}$, где u – любое число из интервала $[\gamma, 1)$. Но объединение всех таких множеств есть стратегия $u^1_{\#} = [\gamma, 1)$, которая гарантирует первому лишь нулевой выигрыш.

В самом деле, если стратегия $u^1_{\#} = [\gamma, 1)$ гарантирует первому игроку получение выигрыша γ, то такой же выигрыш первый игрок может получить, используя в качестве стратегии замыкание $u^2_{\#} = [0, 1]$

множества $u^1_\#$. Но в ответ на стратегию $u^2_\#$ второй игрок может выбрать стратегию $v_\# = (1, 1)$, в результате чего первый игрок получит ноль.

Эффект, отмеченный в тереме 6.1, представляется достаточно важным, чтобы его обсудить дополнительно. В самом деле, эта теорема говорит о том, что вопрос о максимальной степени децентрализации может быть корректно поставлен, хотя бы в случае, когда множество U конечно. В общем случае это не совсем так, но уже сейчас можно утверждать следующее.

Если задано конечное число стратегий $u^1_\#, \dots, u^n_\#$ в игре $\Gamma_\#$, каждая из которых гарантирует первому игроку получение результата γ, то и их объединение позволяет гарантированно получить того же результат. Доказательство этого факта практически дословно повторяет доказательство теоремы 6.1. Поэтому можно доказать результат следующего типа.

Допустим, множество U не слишком «велико», например, содержится в конечномерном евклидовом пространстве. Пусть γ – гарантированный результат в соответствующей игре $\Gamma_\#$. Тогда существует такая стратегия $u^0_\#$, гарантирующая получение результата γ, что любая другая стратегия, позволяющая гарантированно получить такой же результат, содержится в малой окрестности стратегии $u^0_\#$.

Точная формулировка этого результата требует использования несколько иного языка (в чисто топологических терминах его сформулировать не удается). А потому и его доказательство требует привлечения новой техники. Поэтому данный вопрос отложим до другого раза. Здесь же остановимся на одном простом способе «расширения» оптимальной стратегии. Этот способ позволяет, в частности, превратить конечную оптимальную стратегию в достаточно «массивную».

Пусть стратегия $u^0_\#$ позволяет первому игроку гарантированно получить результат γ. Положим

$$L(\alpha) = \sup_{(u,v)\in u^0_\# \times V} h(u, v, \alpha).$$

Определим множество

$$B(u, \alpha) = \left\{ v \in V : h(u, v, \alpha) = \max_{w \in V} h(u, w, \alpha) \right\}$$

и функцию

$$M\,(u,\alpha) = \min_{v\in B(u,\alpha)} g(u,v).$$

Пусть

$$u^1_{\#} = \left\{ u \in U : \min_{\alpha\in A} \max \left[L\,(\alpha) - \max_{v\in V} h\,(u,v,\alpha)\,, M\,(\alpha) - \gamma \right] > 0 \right\}.$$

Тогда стратегия $u_{\#} = u^0_{\#} \cup u^1_{\#}$ позволит первому игроку с гарантией получить результат γ. Доказательство этого факта сводится к прямой проверке условий определения 2.2.

7. Заключение

В данной статье накладывались минимальные ограничения на структуру изучаемой модели. Использованная аппроксимационная техника тоже имеет весьма общий характер, но поэтому позволяет получить не слишком конструктивные результаты. Отметим здесь, что задача вычисления максимина со связанными переменными весьма неустойчива по отношению к изменениям параметров модели, поэтому поиск «правильной» аппроксимации сам по себе нетривиален.

Дальнейшее продвижение в исследовании данной модели, вероятно, должно быть связано с наложением каких-то дополнительных ограничений на ее структуру. Одно из самых естественных ограничений такого рода – включение в модель обратной связи.

Игры с неопределенным фактором и обратной связью гораздо более изучены [1,3,7,10–12]. По-видимому, это не в последнюю очередь связано с тем, что соответствующие задачи оказываются более простыми. На первый взгляд это звучит парадоксально, но объясняется весьма просто. Предполагая, что Центр в момент принятия решения знает выбор агента, мы, по сути, наделяем множество стратегий Центра некоторой дополнительной структурой – структурой функционального пространства. Таким образом, мы получаем более частную модель. Вряд ли стоит удивляться, что исследовать ее проще.

Есть и другие направления исследования. Например, уже предположение наличия метрики на множестве стратегий Центра дает возможность получить кое-что новое. Объем статьи не позволяет остановиться на этом более подробно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бурков В.Н., Новиков Д.А. *Теория активных систем: состояние и перспективы.* – М.: Синтег, 1999.

2. Воронин А.А., Мишин С.П. *Оптимальные иерархические структуры.* М.: ИПУ РАН, 2003.

3. Горелик В.А., Горелов М.А., Кононенко А.Ф. *Анализ конфликтных ситуаций в системах управления.* М.: Радио и связь, 1991.

4. Горелов М.А. *Модель институционального управления* // Управление большими системами, Вып. 35. М.: ИПУ РАН, 2011. С. 68–93.

5. Горелов М.А., Ерешко Ф.И. *О моделях централизации и децентрализации управления в цифровом обществе* // Контуры цифровой реальности: Гуманитарно-технологическая революция и выбор будущего / Под ред. В.В.Иванова, Г.Г. Малинецкого, С.Н. Сиренко. М.: Ленанд, 2018. С. 187–202

6. Кононенко А.Ф. *Роль информации о функции цели противника в играх двух лиц с фиксированной последовательностью ходов* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1973. Т. 13, №2. С. 311–317.

7. Кононенко А.Ф., Халезов А.Д., Чумаков В.В. *Принятие решений в условиях неопределенности.* М.: ВЦ АН СССР, 1991.

8. Кукушкин Н.С. *Об одной игре с неполной информацией* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1973. Т. 13, №1. С. 210–216.

9. Новиков Д.А. *Институциональное управление организационными системами.* М.: ИПУ РАН, 2004.

10. Новиков Д.А. *Теория управления организационными системами.* М.: МПСИ, 2005.

11. Bolton P., Dewatripont M. *Contract Theory.* Cambridge: The MIT Press, 2004.

12. Laffont J.-J., Martimort D. *The Theory of Incentives: The Principal-Agent Model.* Cambridge: The MIT Press, 2002.

TRANSFER OF RIGHTS IN HIERARCHICAL SYSTEMS

Mikhail A. Gorelov, Dorodnicyn Computing Centre, FRC CSC RAS, Moscow, Cand.Sc. (griefer@ccas.ru).

Abstract: Hierarchical game under uncertainty is considered. The agent is supposed to be more informed about the value of uncertain factor then Center. The reasonability for Center of partial transfer of rights to choose control from Center to agent is studied in such assumptions.

Keywords: decision making under uncertainty, hierarchical games, decentralization of control.