Математическая Теория Игр и её Приложения, т.11, в.4, с. 67–86

УДК 517.977
ББК 22.18

ПОЗИЦИОННЫЕ СТРАТЕГИИ В НЕАНТАГОНИСТИЧЕСКОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Екатерина А. Колпакова*
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН
620108, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
e-mail: eakolpakova@gmail.com

Для неантагонистической дифференциальной игры двух лиц специального вида построены универсальные позиционные стратегии. Динамика первого игрока определяется его собственной позицией и управлением, в то время как динамика второго игрока зависит от позиций обоих игроков и собственного управления. Позиционные стратегии строятся с помощью решения системы уравнений Гамильтона–Якоби, которая имеет иерархический тип. В статье показано, что решение системы уравнений Гамильтона–Якоби лежит в классе многозначных отображений. Получена связь выигрышей игроков с обобщенным решением системы уравнений Гамильтона–Якоби.

Ключевые слова: система уравнений Гамильтона–Якоби, неантагонистическая дифференциальная игра, равновесие по Нэшу, многозначное решение.

Поступила в редакцию: 03.06.19 *После доработки*: 29.10.19 *Принята к публикации*: 30.11.19

---

* Работа поддержана Российским научным фондом (грант № 17-11-01093)

1. Введение

Статья посвящена построению позиционных равновесных стратегий для неантагонистической дифференциальной игры двух лиц, основанному на решение системы уравнений Гамильтона–Якоби. Известно два подхода к построению позиционных стратегий в неантагонистической дифференциальной игре. Первый подход связан с наказанием игроков, которые отклоняются от оптимальной стратегии, согласно которой действуют остальные игроки. Второй подход основан на решении сильно связанной системы уравнений Гамильтона–Якоби. Интерес ко второму подходу связан с построением устойчивых стратегий в дифференциальной игре. Этот подход рассматривался в работах [12,13,15], где решение системы уравнений Гамильтона–Якоби предполагалось гладким. Однако решение системы уравнений Гамильтона–Якоби даже в случае антагонистической дифференциальной игры может быть негладким [6]. В работе [2] приведен пример, когда решение системы уравнений Гамильтона–Якоби разрывно при достаточно гладких начальных данных. В теории сильно связанных систем уравнений Гамильтона–Якоби нет общих результатов о существовании решения. Исследованы частные случаи систем уравнений Гамильтона–Якоби, в которых удалось построить непрерывное решение [10,11]. В этих случаях предполагалось, что динамика игроков описывается простыми движениями в $\mathbb{R}$.

В статье построено многозначное решение системы уравнений Гамильтона–Якоби. Рассмотрен случай, когда динамика и функционал платы первого игрока не зависят от действий второго игрока. Таким образом, рассматриваемая система уравнений Гамильтона – Якоби имеет иерархический вид. Мы рассмотрим дифференциальную игру в $\mathbb{R}^2$. Используя решение системы уравнений Гамильтона–Якоби, мы строим позиционные стратегии для неантагонистической дифференциальной игры двух лиц. В статье показано, что выигрыши игроков совпадают с многозначным решением системы уравнений Гамильтона–Якоби. Данные результаты обобщают результаты работы [3], в которой построено равновесие по Нэшу в классе программных стратегий на основе сильно связанной системы уравнений Гамильтона–Якоби и динамикой, зависящей только от управления лидера. Отметим, что в настоящей работе рассматривается динамика более общего вида, которая зависит от управлений лидера и ведомого игрока.

2. Постановка задачи

Рассмотрим неантагонистическую дифференциальную игру двух лиц с динамикой вида

$$\dot{x}_1 = f_1(t, x_1, u),\ x_1(t_0) = x_1^0,\ u \in U, \tag{2.1}$$
$$\dot{x}_2 = f_2(t, x, v),\ x_2(t_0) = x_2^0,\ v \in V. \tag{2.2}$$

Здесь $t \in [0, T]$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, U, V – компакты в $\mathbb{R}$. Обозначим множество допустимых управлений первого игрока символом $\tilde{U}$:

$$\tilde{U} = \{u : [t_0, T] \to U :\ u \text{ – измеримые функции}\}, \tag{2.3}$$

а множество допустимых управлений второго игрока символом $\tilde{V}$:

$$\tilde{V} = \{v : [t_0, T] \to V :\ v \text{ – измеримые функции}\}, \tag{2.4}$$

Первый игрок максимизирует следующий функционал платы

$$I_1(t_0, x_1^0; u(\cdot)) = \sigma_1(x_1(T)) + \int_{t_0}^{T} g_1(t, x_1(t), u(t))dt \to \max_{u(\cdot)\in\tilde{U}},$$

функционал платы второго игрока имеет вид

$$I_2(t_0, x_0; u(\cdot), v(\cdot)) = \sigma_2(x(T)) + \int_{t_0}^{T} g_2(t, x_1(t), x_2(t), v(t))dt \to \max_{v(\cdot)\in\tilde{V}}.$$

Отметим, что динамика и функционал платы первого игрока не зависят от действий второго игрока. Отсюда следует, что первый игрок решает задачу оптимального управления. Динамика и функционал платы второго игрока зависят от позиции первого игрока. Подставляя известную траекторию первого игрока $x_1(\cdot; x_1^0)$ в динамику и функционал платы второго игрока, получим задачу оптимального управления для второго игрока.

Предполагаем, что

A1 фунция $f_1 : [0,T] \times \mathbb{R} \times U \to \mathbb{R}$ липшицева по переменным t, x_1 и удовлетворяет условию подлинейного роста по x_1.

A2 функция $\sigma_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ липшицева, g_1 непрерывна, удовлетворяет условию подлинейного роста по x_1, и при любых (t, x_1) вектограмма $(f_1(t, x_1, U), g_1(t, x_1, U))$ выпукла.

A3 функция $f_2 : [0,T] \times \mathbb{R}^2 \times V \to \mathbb{R}$ липшицева по t, x и удовлетворяет условию подлинейного роста по x.

A4 функция $\sigma_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ липшицева, g_2 непрерывна, удовлетворяет условию подлинейного роста по x, и при любых (t, x) вектограмма $(f_2(t, x, V), g_2(t, x, V))$ выпукла.

Из предположений $A2$, $A4$ (выпуклость вектограмм) и непрерывности функций g_1, g_2 следует, что максимум в функционалах I_1, I_2 достигается [1].

3. Задача оптимального управления первого игрока

Мы построим позиционное управление первого игрока, опираясь на решение соответствующего уравнения Гамильтона–Якоби. Рассмотрим отображение

$$\varphi_1 : [t_0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

определенное следующим образом:

$$\varphi_1(t_0, x_1^0) = \max_{u(\cdot) \in \tilde{U}} I_1(t_0, x_1^0; u(\cdot)),$$

где $\tilde{U}$ задано (2.3). Отображение φ_1 называется функцией цены первого игрока. Построим гамильтониан для задачи (2.1), (2.3) с функционалом платы I_1:

$$H_1(t, x_1, p) = \max_{u \in U}[f_1(t, x_1, u)p + g_1(t, x_1, u)] = \tag{3.1}$$
$$f_1(t, x_1, u^*(t, x_1, p))p + g_1(t, x_1, u^*(t, x_1, p)),$$

где p – сопряженная переменная, $u^* : [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to U$ – измеримая функция, удовлетворяющая условию

$$u^*(t, x_1, p) \in \operatorname{Arg} \max_{u \in U}\{f_1(t, x_1, u)p + g_1(t, x_1, u)\}. \tag{3.2}$$

Покажем, что такая измеримая функция существует. Функция вида $F_1(t, x_1, p, u) = f_1(t, x_1, u)p + g_1(t, x_1, u)$ является функцией Каратеодори. Проверим определение функции Каратеодори:

1. для каждого $u \in U$, функция $F_1(\cdot, \cdot, \cdot, u) : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ измерима;

2. для каждого $(t, x_1, p) \in [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, функция $F_1(t, x_1, p, \cdot) : U \to \mathbb{R}$ непрерывна.

Из теоремы об измеримом максимуме следует, что измеримый селектор $u^* : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to U$, удовлетворяющий условию (3.2), существует [8].

Известно из работы [6], что функция цены φ_1 является единственным минимаксным/вязкостным решением задачи Коши

$$\frac{\partial \varphi_1(t, x_1)}{\partial t} + H_1(t, x_1, D_{x_1}\varphi_1(t, x_1)) = 0, \quad \varphi_1(T, x_1) = \sigma_1(x_1), \tag{3.3}$$

где H_1 задано (3.1). Напомним некоторые свойства минимаксного/вязкостного решения [7]:

1. минимаксное/вязкостное решение φ_1 является липшицевой функцией;

2. минимаксное/вязкостное решение φ_1 дифференцируемо по любому направлению в произвольной точке $(t, x_1) \in [0, T] \times \mathbb{R}$.

Чтобы определить движение системы (2.1) под действием позиционного управления, мы используем формализацию пошаговых движений, предложенную Н.Н. Красовским и А.И. Субботиным [4]. В работе [7] доказано, что универсальное позиционное управление принадлежит классу разрывных функций и имеет вид

$$u^0(t, x_1) \in \operatorname{Arg}\max_{u \in U}\Big[\frac{d\varphi_1(t, x_1)}{d(1, f_1(t, x_1, u))} + g_1(t, x_1, u)\Big]. \tag{3.4}$$

Здесь $\frac{d\varphi_1(t,x_1)}{d(1,f_1(t,x_1,u))}$ обозначает производную функции φ_1 по направлению $(1, f_1(t, x_1, u))$.

Обозначим символом $U^0(t_0, x_1^0)$ множество оптимальных программных управлений $u(\cdot) \in \tilde{U}$ задачи (2.1) с начальным условием $x_1(t_0) = x_1^0$ и функционалом I_1. Обозначим через $X_1(t_0, x_1^0)$ множество траекторий $x_1(\cdot; x_1^0) : [t_0, T] \to \mathbb{R}$ таких, что

$$\dot{x_1}(t) = f_1(t, x_1(t), u(t)), \quad x_1(t_0) = x_1^0, \ u(\cdot) \in U^0(t_0, x_1^0).$$

Из предположений $A1$, $A2$ следует, что для любого компакта $D_0 \subset [0,T] \times \mathbb{R}$ и $(t_0, x_1^0) \in D_0$ существуют константы M_0, $M_1 > 0$ такие, что

$$|x_1(t)| \leq M_0, \quad |\dot{x}_1(t)| \leq M_1, \ t \in [t_0, T].$$

Из теоремы Арцела–Асколи [1] следует, что для любой (t_0, x_1^0) множество $X_1(t_0, x_1^0)$ является компактом в $C[t_0, T]$.

4. Задача оптимального управления для второго игрока

Ранее мы построили оптимальное управление и оптимальную траекторию первого игрока. Подставим оптимальную траекторию $x_1(\cdot; x_1^0)$ первого игрока в динамику второго игрока и рассмотрим вспомогательную задачу оптимального управления.

$$\dot{x}_2 = f_2(t, x_1(t; x_1^0), x_2, v), \quad x_1(t_0) = x_1^0, \ x_2(t_0) = x_2^0. \tag{4.1}$$

Гамильтониан для задачи (4.1) с функционалом I_2 при фиксированной траектории $x_1(\cdot; x_1^0) \in X_1(t_0, x_1^0)$ имеет вид

$$H_2(t, x_2, q_2; x_1(\cdot; x_1^0)) = \tag{4.2}$$
$$\max_{v \in V}[f_2(t, x_1(t; x_1^0), x_2, v)q_2 + g_2(t, x_1(t; x_1^0), x_2, v)] =$$
$$f_2(t, x_1(t; x_1^0), x_2, v^*(t, x_2, q_2; x_1^0))q_2 + g_2(t, x_1(t; x_1^0), x_2, v^*(t, x_2, q_2; x_1^0)),$$

где

$$v^*(t, x_2, q_2; x_1^0) \in \tag{4.3}$$
$$\operatorname{Arg}\max_{v \in V}\{f_2(t, x_1(t; x_1^0), x_2, v)q_2 + g_2(t, x_1(t; x_1^0), x_2, v)\}.$$

Напомним, что функция

$$F_2(t, x_2, q_2, v; x_1(t; x_1^0)) = f_2(t, x_1(t; x_1^0), x_2, v)q_2 + g_2(t, x_1(t; x_1^0), x_2, v)$$

является функцией Каратеодори. Действительно, из определения функции Каратеодори имеем:

1. для любого $v \in V$ функция $F_2(\cdot, \cdot, \cdot, v; x_1(t; x_1^0)) : [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ измерима;

2. для любого $(t, x_2, q_2) \in [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ функция $F_2(t, x_2, q_2, \cdot; x_1(t; x_1^0)) : V \to \mathbb{R}$ непрерывна.

Из теоремы об измеримом максимуме [8] следует, что функция $v^* : [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to V$, удовлетворяющая условию (4.3), измерима.

Отметим, что для заданной траектории $x_1(\cdot; x_1^0) \in X_1(t_0, x_1^0)$ гамильтониан $H_2(\cdot,\cdot,\cdot; x_1(\cdot; x_1^0))$ липшицев по переменным x_2, q_2 согласно предположениям $A3$, $A4$.

Рассмотрим отображение

$$\varphi_2(\cdot,\cdot; x_1(\cdot; x_1^0)) : [t_0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

определенное следующим образом:

$$\varphi_2(t_0, x_2^0; x_1(\cdot; x_1^0)) = \max_{v(\cdot)\in\tilde{V}} I_2(t_0, x_0; u^*(\cdot), v(\cdot)),$$

где $\tilde{V}$ задано формулой (2.4), $u^*(\cdot) \in U^0(t_0, x_1^0)$. Отображение φ_2 называется функцией цены второго игрока при фиксированной траектории $x_1(\cdot; x_1^0)$, порожденной оптимальным управлением $u^*(\cdot)$ первого игрока. Из работы [6] известно, что функция цены φ_2 – единственное минимаксное/вязкостное решение задачи Коши

$$\begin{gathered}\frac{\partial\varphi_2}{\partial t} + H_2(t, x_2, D_{x_2}\varphi_2; x_1(\cdot; x_1^0)) = 0, \\ \varphi_2(T, x_2) = \sigma_2(x_1(T; x_1^0), x_2).\end{gathered} \tag{4.4}$$

Используя формализацию пошаговых движений, предложенную Н.Н. Красовским и А.И. Субботиным [4], получаем, что универсальное позиционное управление лежит в классе разрывных функций и, согласно работе [7], имеет вид

$$\begin{aligned}&v^0(t, x_2; x_1(\cdot; x_1^0)) \in \\ &\operatorname{Arg}\max_{v\in V}\Big[\frac{d\varphi_2(t, x_2; x_1(\cdot; x_1^0))}{d(1, f_2(t, x_1(t; x_1^0), x_2, v))} + g_2(t, x_1(t; x_1^0), x_2, v)\Big].\end{aligned} \tag{4.5}$$

5. Построение равновесия по Нэшу

Далее в статье мы докажем, что пара (u^0, v^0), определенная формулами (3.4), (4.5), обеспечивает равновесие по Нэшу. Рассмотрим начальную точку $(t_0, x_0) \in [0,T] \times \mathbb{R}^2$ и позиционные управления u и v. Построим траектории $\hat{x}_1(\cdot, t_0, x_1^0, u)$ и $\hat{x}_2(\cdot, t_0, x_0, u, v)$ системы (2.1), (2.2), порожденные позиционными управлениями u, v согласно формализации пошаговых движений, предложенной Н.Н. Красовским и А.И. Субботиным [4]. Рассмотрим следующие функционалы:

$$I_1(t_0, x_1^0, u) = \sigma_1(x_1(T)) + \int_{t_0}^{T} g_1(t, x_1(t), u(t, x_1(t)))dt,$$

$$I_2(t_0, x_0; u, v) = \sigma_2(x(T)) + \int_{t_0}^{T} g_2(t, x(t), v(t, x(t)))dt,$$

где $x_1(t) = \hat{x}_1(t, t_0, x_1^0, u)$, $x_2(t) = \hat{x}_2(t, t_0, x_0, u, v)$, $x = (x_1, x_2)$.

Определение 5.1. *[9] Будем говорить, что пара позиционных стратегий* (u^0, v^0), *где* $u^0 : [0, T] \times \mathbb{R} \to U$ *и* $v^0 : [0, T] \times \mathbb{R}^2 \to V$, *является позиционным равновесием по Нэшу в точке* (t_0, x_0), *если для любых позиционных стратегий* $u : [0, T] \times \mathbb{R} \to U$ *и* $v : [0, T] \times \mathbb{R}^2 \to V$

$$I_1(t_0, x_1^0, u) \leq I_1(t_0, x_1^0, u^0), \quad I_2(t_0, x_0; u^0, v) \leq I_2(t_0, x_0; u^0, v^0).$$

Так как u^0 – оптимальное управление задачи (2.1) с функционалом I_1, первое неравенство справедливо. Для второго неравенства имеем

$$\sigma_2(x_1^*(T), x_2(T)) + \int_{t_0}^{T} g_2(t, x_1^*(t), x_2(t), v(t, x_2(t); x_1^*(\cdot)))dt \leq$$

$$\sigma_2(x_1^*(T), x_2^*(T)) + \int_{t_0}^{T} g_2(t, x_1^*(t), x_2^*(t), v^0(t, x_2^*(t); x_1^*(\cdot)))dt =$$

$\varphi_2(t_0, x_2^*(t_0); x_1^*(\cdot))$, где $(x_1^*(\cdot), x_2^*(\cdot))$ – оптимальная траектория системы (2.1), (2.2), порожденная позиционными стратегиями u^0, v^0, определенными (3.4), (4.5).

6. Выигрыши игроков

В этом разделе мы покажем связь между выигрышами игроков и обобщенным решением системы уравнений Гамильтона–Якоби. Рассмотрим функцию

$$H(t, x, p, q) = \max_{v \in V}[f_1(t, x_1, u^*(t, x_1, p))q_1 + f_2(t, x, v)q_2 + g_2(t, x, v)].$$

Здесь u^* определено формулой (3.2). Из свойств минимаксного решения φ_1 следует, что субдифференциал $D^-_{x_1}\varphi_1(t,x_1) \neq \emptyset$ для любой точки $(t,x_1) \in [0,T] \times \mathbb{R}$ [7]. Кроме того, субдифференциал $D^-_{x_1}\varphi_1(t,x_1)$ является выпуклым компактным множеством. Подставим в функцию H вместо p произвольный измеримый селектор $\partial_{x_1}\varphi_1 : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ многозначного отображения $D^-_{x_1}\varphi_1 : [0,T] \times \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$. Далее будем рассматривать разрывную по x_1 функцию

$$H(t,x,q) = \qquad (6.1)$$
$$\max_{v\in V}[f_1(t,x_1,u^*(t,x_1,\partial_{x_1}\varphi_1(t,x_1)))q_1 + f_2(t,x,v)q_2 + g_2(t,x,v)].$$

Отметим, что функция H, определенная (6.1), липшицева по q с константой липшица $\lambda(t,x)$. Доказательство этого утверждения приведено в работе [6]. Выберем непрерывную функцию $\lambda : [0,T] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, удовлетворяющую условию:

$$|H(t,x,q) - H(t,x,0)| \leq \lambda(t,x)||q|| \quad \forall q \in \mathbb{R}^2. \qquad (6.2)$$

Рассмотрим разрывную по x_1 функцию:

$$H_*(t,x_1,x_2,q) = \lim_{\varepsilon\to 0} \inf_{(\tau,\xi)\in B(t,x;\varepsilon)} \min_{p\in D^-_{x_1}\varphi_1(\tau,\xi_1)} H(\tau,\xi,p,q),$$

$$H^*(t,x_1,x_2,q) = \lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{(\tau,\xi)\in B(t,x;\varepsilon)} \max_{p\in D^-_{x_1}\varphi_1(\tau,\xi_1)} H(\tau,\xi,p,q).$$

Здесь символ $B(t,x;\varepsilon) \subset [0,T] \times \mathbb{R}^2$ обозначает шар с центром в точке (t,x) радиусом ε.

Лемма 6.1. *Функции H_*, H^* являются липшицевыми по переменной q.*

Доказательство. Покажем, что функция H^* является липшицевой по q. Рассмотрим максимизирующие последовательности $\{(t'_n, x'_n)\}_{n=1}^\infty$ и $\{(t''_n, x''_n)\}_{n=1}^\infty$ такие что

$$\lim_{n\to\infty} H(t'_n, x'_n, q') = H^*(t,x,q'), \ \lim_{n\to\infty} H(t''_n, x''_n, q'') = H^*(t,x,q'').$$

Оценим разность $|H^*(t,x,q') - H^*(t,x,q'')| \leq$

$$|H^*(t,x,q') - H(t'_n,x'_n,q')| + |H(t'_n,x'_n,q') - H(t''_n,x''_n,q'')| +$$

$$|H^*(t,x,q'') - H(t''_n,x''_n,q'')|.$$

В силу сходимости $H(t'_n,x'_n,q') \to H^*(t,x,q')$ и $H(t''_n,x''_n,q'') \to H^*(t,x,q'')$ при $n \to \infty$ получаем, что, начиная с некоторого номера N, справедливы неравенства

$$|H^*(t,x,q') - H(t'_n,x'_n,q')| < \varepsilon,\ |H^*(t,x,q'') - H(t''_n,x''_n,q'')| < \varepsilon\ \forall\varepsilon > 0.$$

Тогда

$$|H^*(t,x,q_1) - H^*(t,x,q_2)| \leq 2\varepsilon + |H(t'_n,x'_n,q_1) - H(t''_n,x''_n,q_2)|.$$

Если $H(t'_n,x'_n,q') - H(t''_n,x''_n,q'') > 0$, то

$$H(t'_n,x'_n,q') - H(t''_n,x''_n,q'') < H(t'_n,x'_n,q') - H(t'_n,x'_n,q''),$$

так как $\{(t''_n,x''_n)\}_{n=1}^{\infty}$ – максимизирующая последовательность для $H^*(t,x,q'')$. Отсюда следует, что

$$H(t'_n,x'_n,q') - H(t''_n,x''_n,q'') < H(t'_n,x'_n,q') - H(t'_n,x'_n,q'') \leq \\ \leq \lambda(t'_n,x'_n)||q'-q''||.$$

Если $H(t''_n,x''_n,q'') - H(t'_n,x'_n,q') > 0$, то

$$H(t''_n,x''_n,q'') - H(t'_n,x'_n,q') < H(t'_n,x'_n,q'') - H(t''_n,x''_n,q') \leq \\ \leq \lambda(t''_n,x''_n)||q'-q''||.$$

В результате имеем

$$|H^*(t,x,q') - H^*(t,x,q'')| \leq 2\varepsilon + \max\{\lambda(t'_n,x'_n),\lambda(t''_n,x''_n)\}||q'-q''||\ \forall\varepsilon > 0.$$

Липшицевость по q функции H_* доказывается аналогично.

$\square$

Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + H^*(t,x,D_x\Phi) = 0 \tag{6.3}$$

с краевым условием $\Phi(T,x) = \sigma_2(x)$. Согласно лемме 6.1 гамильтониан H^* липшицев по q, а значит для определения решения задачи

(6.3) можно применить понятие М-решения, предложенное А.И. Субботиным для уравнения Гамильтона–Якоби с разрывным по фазовой переменной гамильтонианом [5]. Рассмотрим дифференциальное включение

$$(\dot{x}(t), \dot{z}(t)) \in E(t, x, q) = \{(\psi, g) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} : ||\psi|| \leq \lambda(t, x), \\ \langle \psi, q \rangle - g \in [H_*(t, x, q), H^*(t, x, q)]\} \forall\ q \in \mathbb{R}^2. \tag{6.4}$$

Здесь λ определено (6.2). Многозначное отображение $(t, x, q) \rightrightarrows E(t, x, q) \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ является допустимым (см. [5]).

Определение 6.1. *Пусть $W \subset [0, T] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ – замкнутое множество. Множество W слабо инвариантно относительно дифференциального включения* (6.4)*, если для любой точки $(t_0, x_0, z_0) \in W$ существует момент $\tau > 0$ и решение $(x(\cdot), z(\cdot))$ дифференциального включения* (6.4) *такое, что $(x(t_0), z(t_0)) = (x_0, z_0)$, $(t, x(t), z(t)) \in W$, когда $t \in [0, \tau]$.*

Определение 6.2. *Многозначное отображение $W : [0, T] \times \mathbb{R}^2 \rightrightarrows \mathbb{R}$ называется М-решением уравнения Гамильтона–Якоби* (6.3)*, если график W слабо инвариантен относительно дифференциального включения* (6.4)*.*

М-решением задачи Коши называется М-решение уравнения Гамильтона–Якоби, удовлетворяющее краевому условию $W(T, x) = \sigma_2(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}^2$.

А.И. Субботин и А.С. Лахтин доказали следующую теорему [5].

Теорема 6.1. *Пусть W – замкнутое множество в $[0, T] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$. Предположим, что $W(t, x) = \{z \in \mathbb{R} :\ (t, x, z) \in W\} \neq \emptyset$ и*

$$W_*(t, x) = \inf_{z \in W(t,x)} z, \quad W^*(t, x) = \sup_{z \in W(t,x)} z.$$

Отображение W является М-решением уравнения (6.3) *тогда и только тогда, когда epi W_* и hypo W^* – М-решения уравнения* (6.3)*.*

Рассмотрим многозначное отображение

$$\Phi(t_0, x_0) = \mathrm{cl} \bigcup_{x_1(\cdot; x_1^0) \in X_1(t_0, x_1^0)} \{\varphi_2(t_0, x_2^0; x_1(\cdot, x_1^0))\}. \tag{6.5}$$

Здесь символ cl A обозначает замыкание множества A, epi W_* – надграфик отображения W_*, hypo W^* – подграфик отображения W^*. Отметим, что отображение Φ компактнозначно по определению.

Теорема 6.2. *Отображение* Φ*, определенное формулой* (6.5)*, является М-решением уравнения* (6.3)*.*

Доказательство. Зафиксируем начальную точку $(t_0, x_0) \in [0, T] \times \mathbb{R}^2$ и обозначим $\Phi^*(t,x) = \max\limits_{y \in \Phi(t,x)} y$. Мы покажем, что подграфик Φ^* слабо инвариантен относительно дифференциального включения (6.4). Выберем $\psi_1 = f_1(t, x_1, u^*(t, x_1^0))$, $u^*(\cdot, x_1^0) \in U^0(t_0, x_1^0)$, $\psi_2 = f_2(t, x_1, x_2, v^*(t))$. Здесь $v^*(\cdot)$ – оптимальное программное управление второго игрока при условии, что первый игрок выбрал управление $u^*(\cdot, x_1^0)$. Из формулы (6.2) следует, что $||\psi|| \le \lambda(t,x)$. Тогда решение $\xi(\cdot; t_0, x_0)$ дифференциального включения (6.4), где $\dot{\xi} = \psi$, совпадает с оптимальными траекториями задач оптимального управления (2.1), (2.2) с функционалами платы I_1, I_2. Пусть $(t_0, x_0, z_0) \in \text{hypo } \Phi^*$.

1a. Рассмотрим случай, когда для траектории $\xi_1(\cdot) \in X_1(t_0, x_0)$ справедливо неравенство: $z_0 \le \varphi_2(t_0, x_2^0; \xi_1(\cdot; x_1^0))$, где φ_2 – функция цены второго игрока. Из выбора точки z_0 и принципа динамического программирования имеем следующие неравенства:

$$z_0 \le \varphi_2(t_0, x_2^0; \xi_1(\cdot, x_1^0)) =$$
$$= \varphi_2(t, \xi_2(t); \xi_1(\cdot, x_1^0)) + \int\limits_{t_0}^{t} g_2(\tau, \xi(\tau; t_0, x_0), v^*(\tau)) d\tau,$$

где $v^*(\cdot)$ порождает оптимальную траекторию $\xi_2(\cdot)$ системы (2.2) с функционалом I_2. Для любого $t \in [t_0, T]$ справедливо неравенство

$$z_0 - \int\limits_{t_0}^{t} g_2(\tau, \xi(\tau; t_0, x_0), v^*(\tau)) d\tau \le \varphi_2(t, \xi_2(t); \xi_1(\cdot, x_1^0)).$$

Следовательно,

$$z(t) = z_0 - \int\limits_{t_0}^{t} g_2(\tau, \xi(\tau; t_0, x_0), v^*(\tau)) d\tau \le \varphi_2(t, \xi_2(t); \xi_1(\cdot, x_1^0)),$$

то есть $(t, \xi(t), z(t)) \in \mathrm{hypo}\ \varphi_2$. Решение ξ удовлетворяет дифференциальному включению (6.4) по построению. Отметим, что

$$\dot{z}(t) = -g_2(t, \xi(t; t_0, x_0), v^*(t)),$$

$$\langle \dot{\xi}(t), q \rangle - \dot{z} = \langle \dot{\xi}(t), q \rangle + g_2(t, \xi(t; t_0, x_0), v^*(t)) \in [H_*(t, \xi(t), q), H^*(t, \xi(t), q)].$$

Таким образом, пара $(\xi(\cdot), z(\cdot))$ удовлетворяет дифференциальному включению (6.4). Значит $(t, \xi(t), z(t)) \in \mathrm{hypo}\ \Phi^*$. Так как Φ^* – полунепрерывная сверху функция, то $\mathrm{hypo}\ \Phi^*$ – замкнутое множество. Следовательно, $\mathrm{hypo}\ \Phi^*$ является М-решением уравнения (6.3).

2a. Не существует траектории $\xi_1(\cdot) \in X_1(t_0, x_0)$ такой, что $z_0 \leq \varphi_2(t_0, x_2^0; \xi_1(\cdot; x_1^0))$, где φ_2 – функция цены второго игрока. Так как $(t_0, x_0, z_0) \in \mathrm{hypo}\ \Phi^*(t_0, x_0)$, найдется последовательность $\{(\xi_1^k(\cdot), z_0^k)\}_{k=1}^{\infty}$, сходящуюся к $(\xi_1(\cdot), z_0)$ и такая, что $z_0^k < \varphi_2(t_0, x_2^0; \xi_1^k(\cdot, x_1^0))$. Применим рассуждения случая 1a к $(\xi_1^k(\cdot), z_0^k)$ и получим следующие неравенства:

$$z_0^k - \int\limits_{t_0}^{t} g_2(\tau, \xi^k(\tau; t_0, x_0), v_k^*(\tau)) d\tau \leq \varphi_2^k(t, \xi_2^k(t); \xi_1^k(\cdot, x_1^0)).$$

Здесь $\varphi_2^k(\cdot, \cdot; \xi_1^k(\cdot, x_1^0))$ – функция цены второго игрока, когда первый игрок выбирает траекторию $\xi_1^k(\cdot, x_1^0) \in X_1(t_0, x_1^0)$, $\xi^k = (\xi_1^k, \xi_2^k)$ и $v_k^*(\cdot)$ – оптимальное управление второго игрока, порождающее траекторию ξ_2^k.

Множество оптимальных траекторий второго игрока, выпущенных из начальной точки (t_0, x_0), обозначим $X_2(t_0, x_0)$. Согласно теореме Арцела – Асколи $X_2(t_0, x_0)$ – компакт. Действительно, существуют константы M_2, M_3:

$$|\xi_2(t)| < M_2, \quad |\dot{\xi}_2(t)| \leq M_3, \ \forall\ t \in [t_0, T].$$

Так как $X_1(t_0, x_1^0)$, $X_2(t_0, x_0)$ – компакты, то $\xi^k(t) \to \xi(t)$ при $k \to \infty$. Следовательно,

$$\lim_{k\to\infty} z_0^k - \int\limits_{t_0}^{t} g_2(\tau, \xi^k(\tau; t_0, x_0), v_k^*(\tau)) d\tau \leq \lim_{k\to\infty} \varphi_2^k(t, \xi_2^k(t); \xi_1^k(\cdot, x_1^0)),$$

$$z_0 - \int\limits_{t_0}^{t} g_2(\tau, \xi(\tau; t_0, x_0), v^*(\tau))d\tau \le \lim_{k\to\infty} \varphi_2^k(t, \xi_2^k(t); \xi_1^k(\cdot, x_1^0)) \le \Phi^*(t_0, x_0).$$

Это означает, что $(t, \xi(t), z(t)) \in \text{hypo } \Phi^*$.

Пусть $\Phi_*(t,x) = \min\limits_{y\in\Phi(t,x)} y$. Рассмотрим 2 случая. Пусть $(t_0, x_0, z_0) \in$ epi $\Phi_*(t,x)$.

1b. Рассмотрим случай, когда существует траектория $\xi_1(\cdot) \in X_1(t_0, x_1^0)$ первого игрока такая, что $z_0 \ge \varphi_2(t_0, x_2^0; \xi_1(\cdot; x_1^0))$, где φ_2 – функция цены второго игрока. Для оптимальной траектории $\xi(\cdot) = (\xi_1(\cdot), \xi_2(\cdot))$ и оптимального управления $v^*(\cdot)$, порождающего $\xi_2(\cdot)$, имеем

$$\varphi_2(t, \xi_2(t); \xi_1(\cdot; x_1^0)) + \int\limits_{t_0}^{t} g_2(\tau, \xi(\tau; t_0, x_0), v^*(\tau))d\tau =$$
$$= \varphi_2(t_0, x_2^0; \xi_1(\cdot; x_1^0)) \le z_0.$$

Справедливы следующие неравенства:

$$\varphi_2(t, \xi_2(t); \xi_1(\cdot; x_1^0)) \le z_0 - \int\limits_{t_0}^{t} g_2(\tau, \xi(\tau; t_0, x_0), v^*(\tau))d\tau = \zeta(t).$$

Заметим, что $(\dot\xi, \dot\zeta) \in E(t, \xi, q)$. Действительно, $\dot\xi \in E(t, x, q)$ по построению и

$$\langle\dot\xi, q\rangle - \dot\zeta(t) = \langle\dot\xi, q\rangle + g_2(t, \xi(t; t_0, x_0), v^*(t)) \in [H_*(t, \xi(t), q), H^*(t, \xi(t), q)].$$

Следовательно, решение $(\xi_1(\cdot), \xi_2(\cdot), \zeta(\cdot))$ дифференциального включения (6.4) лежит в надграфике φ_2 и $(\xi_1(\cdot), \xi_2(\cdot), \zeta(\cdot))$ лежит в надграфике Φ_*. Так как функция Φ_* полунепрерывна снизу, мы видим, что epi Φ_* – замкнутое множество и epi Φ_* слабо инвариантно относительно дифференциального включения (6.4). Отсюда следует, что epi Φ_* – М-решение уравнения (6.3).

2b. Не существует траектории $\xi_1(\cdot) \in X_1(t_0, x_0)$ такой, что $z_0 \ge \varphi_2(t_0, x_2^0; \xi_1(\cdot; x_1^0))$, где φ_2 – функция цены второго игрока. Так как $z_0 \in$ epi $\Phi_*(t_0, x_0)$, построим последовательность $\{(\xi_1^k(\cdot), z_0^k)\}_{k=1}^{\infty}$, сходящуюся к $(\xi_1(\cdot), z_0)$ и такую, что $z_0^k \ge \varphi_2(t_0, x_2^0; \xi_1^k(\cdot, x_1^0))$. Применяя случай 2а к $(\xi_1^k(\cdot), z_0^k)$, получаем следующие неравенства:

$$\varphi_2^k(t, \xi_2^k(t); \xi_1^k(\cdot; x_1^0)) \leq z_0^k - \int_{t_0}^{t} g_2(\tau, \xi^k(\tau; t_0, x_0), v^k(\tau))d\tau,$$

где $\varphi_2^k(\cdot, \cdot; \xi_1^k(\cdot; x_1^0))$ – функция цены второго игрока при фиксированной траектории $\xi_1^k(\cdot; x_1^0))$, ξ^k – оптимальная траектория задач (2.1), (2.2) с функционалами платы I_1, I_2, и управление v^k порождает ξ_2^k. Рассмотрим

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_2^k(t, \xi_2^k(t); \xi_1^k(\cdot; x_1^0)) \leq \lim_{k\to\infty} z_0^k - \int_{t_0}^{t} g_2(\tau, \xi^k(\tau; t_0, x_0), v^k(\tau))d\tau.$$

Отсюда

$$\Phi_*(t, \xi(t)) \leq z_0 - \int_{t_0}^{t} g_2(\tau, \xi(\tau; t_0, x_0), v(\tau))d\tau.$$

Здесь $\xi_k \to \xi$ при $k \to \infty$. По теореме 6.1 получаем, что Φ – M-решение уравнения (6.3). □

Отметим, что $\text{epi } \Phi_*(T, x) \bigcap \text{hypo } \Phi^*(T, x) = \{\sigma_2(x)\} = \Phi(T, x)$, $x \in \mathbb{R}^2$.

Напомним, что многозначное отображение $\Phi : [0, T] \times \mathbb{R}^2 \rightrightarrows \mathbb{R}$ называется максимальным по включению M-решением задачи Коши, если для произвольного многозначного отображения $Y : [0, T] \times \mathbb{R}^2 \rightrightarrows \mathbb{R}$ слабо инвариантного относительно дифференциального включения (6.4) выполнено включение $Y(T, \cdot) \subset \Phi(T, \cdot)$.

Замечание 6.1. Множество $\text{gr } \Phi$, где Φ определено формулой (6.5), является максимальным M решением задачи Коши (6.3) с краевым условием $\Phi(T, x) = \{\sigma_2(x)\}\ \forall x \in \mathbb{R}^2$.

По построению $\Phi(T, x) = \{\sigma_2(x)\}$, $x \in \mathbb{R}^2$ и $\text{gr } \Phi$ слабо инвариантен относительно дифференциального включения (6.4). Следовательно, по определению Φ – максимальное M-решение задачи Коши. Нетрудно показать, что максимальное M-решение задачи Коши единственно.

Опираясь на полученные результаты, введем понятие обобщенного решения системы уравнений Гамильтона–Якоби.

Определение 6.3. *Отображение* (φ_1, Φ), $\varphi_1 : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\Phi : [0,T] \times \mathbb{R}^2 \rightrightarrows \mathbb{R}$ *называется обобщенным решением системы уравнений Гамильтона–Якоби* (3.3), (6.3), *если* φ *– минимаксное решение уравнения* (3.3) *и* Φ *M-решение уравнения* (6.3).

Теорема 6.3. *Пусть* (φ_1, Φ) *– решение системы уравнений Гамильтона–Якоби* (3.3), (6.3) *с краевым условием* $\varphi_1(T,x) = \sigma_1(x)$, $\Phi(T,x) = \sigma_2(x)$, $\beta \in \Phi(t_0, x_0)$; *тогда существует равновесие по Нэшу в позиционных стратегиях* (u^0, v^0), *где* u^0 *определяется формулой* (3.4), v^0 *определяется формулой* (4.5). *Выигрыши игроков равны* $(\varphi_1(t_0, x_1^0), \beta)$.

Доказательство. Позиционное управление u^0, определенное (3.4), максимизирует функционал I_1. Следовательно выигрыш первого игрока равен

$$\max_{u(\cdot)\in\tilde{U}} I_1(t_0, x_1^0; u) = I_1(t_0, x_1^0; u^0) = \varphi_1(t_0, x_1^0).$$

Пусть $\beta \in \Phi(t_0, x_0)$. То есть $\beta \in \operatorname{cl} \bigcup\limits_{x_1(\cdot;x_1^0)\in X_1(t_0,x_1^0)} \varphi_2(t_0, x_2^0; x_1(\cdot; x_1^0))$. Существует траектория $x_1(\cdot; x_1^0) \in X_1(t_0, x_1^0)$ первого игрока такая, что $\beta = \varphi_2(t_0, x_2^0; x_1(\cdot; x_1^0))$. Из определения v^0, определенного формулой (4.5), получим что

$$\beta = \max_{v(\cdot)\in\tilde{V}} I_2(t_0, x_0; u^0, v) = I_2(t_0, x_0; u^0, v^0) = \varphi_2(t_0, x_2^0; x_1(\cdot; x_1^0)).$$

Напомним, что для задачи оптимального управления выигрыш в программных управлениях совпадает с выигрышем в позиционных управлениях [6].

Если $\beta \in \operatorname{cl} \bigcup\limits_{x_1(\cdot;x_1^0)\in X_1(t_0,x_1^0)} \varphi_2(t_0, x_2^0; x_1(\cdot; x_1^0))$, тогда существует последовательность $\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что

$$\lim_{k\to\infty} \beta_k = \beta,\ \ \beta_k = \varphi_2^k(t_0, x_2^0; x_1^k(\cdot; x_1^0)).$$

Мы покажем, что существует равновесие по Нэшу в позиционных стратегиях (u^0, v^0) такое, что

$$\lim_{k\to\infty} I_2(t_0, x_0, u_k^0, v_k^0) = I_2(t_0, x_0, u^0, v^0),$$

где u_k^0, v_k^0 – позиционные стратегии, удовлетворяющие (3.4), (4.5).

Рассмотрим

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_2^k(t_0, x_2^0; x_1^k(\cdot; x_1^0)) = \lim_{k\to\infty} I_2(t_0, x_0; u_k^0, v_k^0) =$$

$$\lim_{k\to\infty} \sigma_2(x_k(T)) + \int_{t_0}^{T} g_2(t, x_k(t), v_k^0(t, x_2(t); x_1^k(\cdot; x_1^0)))dt.$$

По теореме Арцела–Асколи получим, что

$$\lim_{k\to\infty} x_k(t) = x(t).$$

Рассмотрим оптимальные программные управления $\tilde{u}_k(\cdot)$ и $\tilde{v}_k(\cdot)$ со свойством

$$I_2(t_0, x_0; u_k^0, v_k^0) = I_2(t_0, x_0; \tilde{u}_k, \tilde{v}_k).$$

Обозначим символом $V^0(t_0, x_0)$ множество оптимальных программных управлений $v(\cdot) \in \tilde{V}$ задачи (2.2) с начальным условием $x(t_0) = x_0$ и функционалом платы I_2. Определим множество обобщенных управлений

$$\Lambda_u = \{\mu^u : [t_0, T] \times U \to [0, +\infty) \text{ измерима}, \, \forall \, [\tau_1, \tau_2] \subset [0, T]$$

$\mu^u([\tau_1, \tau_2] \times U) = \tau_2 - \tau_1\}$,

$$\Lambda_v = \{\mu^v : [t_0, T] \times V \to [0, +\infty) \text{ измерима}, \, \forall \, [\tau_1, \tau_2] \subset [0, T]$$

$\mu^v([\tau_1, \tau_2] \times V) = \tau_2 - \tau_1\}$. Тогда траектории $x_1(\cdot)$, $x_2(\cdot)$, порожденные управлениями μ^u, μ^v, имеют вид

$$x_1(t) = x_1^0 + \int\limits_{[t_0,t]\times U} f_1(\tau, x_1(\tau), u)\mu^u(d(\tau, u)),$$

$$x_2(t) = x_2^0 + \int\limits_{[t_0,t]\times V} f_2(\tau, x_1(\tau), x_2(\tau), v)\mu^v(d(\tau, v)).$$

Функционал платы для второго игрока:

$$I_2(t_0, x_0; \mu^u, \mu^v) = \sigma_2(x(T)) + \int\limits_{[t_0,t]\times V} g_2(\tau, x(\tau), v)\mu^v(d(\tau, v)).$$

Рассмотрим множество обобщенных управлений

$$M^u_{t_0} = \{\mu^u \in \Lambda_u : \mu^u \text{ максимизирует } I_1(t_0, x^0_1; \mu^u)\},$$

$$M^v_{t_0} = \{\mu^v \in \Lambda_v : \mu^v \text{ максимизирует } I_2(t_0, x_0; \mu^u, \mu^v)\}.$$

Из работы [1] известно, что множества $M^u_{t_0}$, $M^v_{t_0}$ являются компактными метрическими пространствами. Покажем связь между $U^0(t_0, x^0_1)$ и $M^u_{t_0}$. Если $u(\cdot) \in U^0(t_0, x^0_1)$, тогда существует $\mu^u_{u(\cdot)} \in M^u_{t_0}$ такое, что

$$\forall\ \varphi \in C([0,T] \times U) \qquad \int\limits_{[0,T]\times U} \varphi(t,u)\mu^u_{u(\cdot)}(d(t,u)) = \int\limits_0^T \varphi(t,u(t))dt.$$

Для любого $\tilde{u}_k \in U^0(t_0, x^0_1)$, построим $\mu^u_k = \mu^u_{\tilde{u}_k(\cdot)} \in M^u_{t_0}$. Рассмотрим $\mu^u_k \to \mu^u_*$ при $k \to \infty$ в слабой-* топологии. Так как $M^u_{t_0}$ – замкнутое множество, то $\mu^u_* \in M^u_{t_0}$. Мы построим $\tilde{u}^* \in U^0(t_0, x^0_1)$ такое, что $\mu^u_* = \mu^u_{\tilde{u}^*(\cdot)}$. Действительно,

$$I_1(t_0, x^0_1; \mu^u_k) = I_1(t_0, x^0_1; \tilde{u}_k) \geq I_1(t_0, x^0_1; u(\cdot))\ \forall\ u(\cdot) \in \tilde{U}.$$

Переходя к пределу, получим

$$\lim_{k\to\infty} I_1(t_0, x^0_1; \mu^u_k) = I_1(t_0, x^0_1; \mu^u_*) = I_1(t_0, x^0_1; \tilde{u}^*) \geq I_1(t_0, x^0_1; u(\cdot))\ \forall\, u(\cdot) \in \tilde{U}.$$

Следовательно $\tilde{u}^* \in U^0(t_0, x^0_1)$.

Можно провести аналогичные построения для $v_k \in V^0(t_0, x_0)$:

$$\mu^v_k = \mu^v_{v_k(\cdot)} \in M^v_{t_0},\ \lim_{k\to\infty} \mu^v_k \to \mu^v_* \in M^v_{t_0}.$$

Далее мы построим $\tilde{v}^* \in V^0(t_0, x_0)$ такое, что $\mu^v_* = \mu^v_{\tilde{v}^*(\cdot)}$.

Переходя к пределу, получим

$$\lim_{k\to\infty} I_2(t_0, x_0, u^0_k, v^0_k) = \lim_{k\to\infty} I_2(t_0, x_0, \tilde{u}_k, \tilde{v}_k) = \lim_{k\to\infty} I_2(t_0, x_0, \mu^u_k, \mu^v_k) =$$

$$I_2(t_0, x_0, \mu^u_*, \mu^v_*) = I_2(t_0, x_0, \tilde{u}^*, \tilde{v}^*) = I_2(t_0, x_0; u^0, v^0).$$

Справедливо следующее неравенство:

$$I_2(t_0, x_0; u^0_k, v^0_k) \geq I_2(t_0, x_0; u^0_k, v)\ \forall \text{ позиционного управления } v,$$

тогда

$$\lim_{k\to\infty} I_2(t_0, x_0; u_k^0, v_k^0) \geq \lim_{k\to\infty} I_2(t_0, x_0; u_k^0, v) \ \forall \text{ позиционного управления } v.$$

В результате получаем, что

$$I_2(t_0, x_0; u^0, v^0) \geq I_2(t_0, x_0; u^0, v) \ \forall \text{ позиционного управления } v.$$

□

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Варга Дж. *Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями.* М.:Наука, 1977.

2. Колпакова Е.А. *О решении системы уравнений Гамильтона–Якоби специального вида* // Тр. ИММ УрО РАН. 2017. Т. 23. N.1. С. 158–170.

3. Колпакова Е.А. *Нэшевское равновесие на основе системы уравнений Гамильтона–Якоби специального вида* //МТИП. 2017. Т.9. вып. 4. С. 39 – 53.

4. Красовский Н.Н., Субботин А.И. *Позиционные дифференциальные игры.* М.: ФИЗМАТЛИТ, 1974.

5. Лахтин А.С., Субботин А.И. *Минимаксные и вязкостные решения разрывных уравнений с частными производными первого порядка* // Доклады РАН. 1998. Т. 359. N.4. С. 452–455.

6. Субботин А.И. *Обобщенные решения уравнений с частными производными первого порядка: перспективы динамической оптимизации* // М.–Ижевск:Институт компьютерных исследований, 2003.

7. Субботина Н.Н. *Метод характеристик для уравнений Гамильтона–Якоби и его приложения в динамической оптимизации* // Современная математика и ее приложения. 2004. Т. 20. С. 1–129.

8. Aliprantis C.D., Border K.C. *Infinite Dimensional Analysis: A Hitchhiker's Guide.* Springer–Verlag Berlin Heidelberg, 2006.

9. Basar T., Olsder G.J. *Dynamic Noncooperative Game Theory.* Philadelphia: SIAM, 1999.

10. Bressan A., Shen W. *Semi-cooperative strategies for differential games* // Int. J. of Game Theory. 2004. V. 32. P. 1–33.

11. Cardaliaguet P., Plaskacz S. *Existence and uniqueness of a Nash equilibrium feedback for a simple nonzeo-sun differential game* // Int. J. of Game Theory. 2003. V. 32. P. 33–71.

12. Case J.H. *Toward a theory of many player differential games* // SIAM J. Control. 1969. V. 7. N. 2. P. 179–197.

13. Friedman A. *Differential Games.* Wiley-Interscience, 1971.

14. Rockafellar R.T., Wets R. J-B *Variational Analysis.* Springer–Verlag Berlin Heidelberg, 1998.

15. Starr A.W., Ho Y.C. *Non-zero Sum Differential Games* // J. Optim. Theory Appl. 1969. V. 3. N. 3. P. 184–206.

FEEDBACK STRATEGIES IN NONZERO-SUM DIFFERENTIAL GAME OF SPECIAL TYPE

Ekaterina A. Kolpakova, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of UrB RAS, Cand.Sc. (eakolpakova@gmail.com).

Abstract: The paper deals with the construction of universal closed-loop strategies for two-person nonzero-sum differential game of a special type. The dynamics of the first player is defined by its own position and control. The dynamics of the second player is defined by its own control and position of both players. The strategies are constructed on the base of solution for a system of Hamilton–Jacobi equations. The system of Hamilton–Jacobi equations has a hierarchical type. A generalized solution for the system of Hamilton–Jacobi equations belongs to the class of multivalued maps. We show the link between values of the players and the generalized solution of the system of Hamilton–Jacobi equations.

Keywords: system of Hamilton–Jacobi equations, nonzero-sum differential game, Nash equilibrium, multivalued solutions.