Математическая Теория Игр и её Приложения, т.11, в.4, с. 87–115

УДК 519.866.2.
ББК 22.18

ГАРАНТИРОВАННЫЙ ДЕТЕРМИНИСТСКИЙ ПОДХОД К СУПЕРХЕДЖИРОВАНИЮ: СВОЙСТВА ПОЛУНЕПРЕРЫВНОСТИ И НЕПРЕРЫВНОСТИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ БЕЛЛМАНА-АЙЗЕКСА

Сергей Н. Смирнов
Кафедра системного анализа
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова
119992, Москва, ГСП-1, Воробьевы горы, МГУ
e-mail: s.n.smirnov@gmail.com

Для задачи суперрепликации с дискретным временем рассматривается гарантированная детерминистская постановка – задача состоит в гарантированном покрытии обусловленного обязательства по опциону при всех допустимых сценариях. Эти сценарии задаются при помощи априорно заданных компактов, зависящих от предыстории цен: приращения цены в каждый момент времени должны лежать в соответствующих компактах. Рассматривается рынок с торговыми ограничениями, предполагается отсутствие транзакционных издержек. Постановка задачи носит теоретико-игровой характер и приводит к уравнениям Беллмана–Айзекса. В настоящей статье найдены условия полунепрерывности, непрерывности решений этих уравнений.

Ключевые слова: гарантированные оценки, детерминистская динамика цен, суперрепликация, опцион, уравнения Беллмана–Айзекса, многозначное отображение, полунепрерывность, непрерывность, грубое условие безарбитражности.

Поступила в редакцию: 04.06.19 *После доработки*: 23.09.19 *Принята к публикации*: 15.10.19

1. Введение

Настоящая статья продолжает серию публикаций автора [3] и [4]. Эти работы развивают модель финансового рынка и неопределенной детерминистской эволюцией цен с дискретным временем: цены активов эволюционируют детерминистским образом в условиях неопределенности, описываемой при помощи априорной информации о возможных приращениях цен, а именно, предполагается, что они лежат в заданных компактах, зависящих от предыстории цен (такая модель является альтернативной к традиционной вероятностной модели рынка[1]).

В рамках вышеописанной модели рынка изучается задача ценообразования опционов, под которыми мы понимаем беспоставочные[2] внебиржевые контракты, выплаты по которым зависят от эволюции цен базовых активов вплоть до момента экспирации. Продавец опциона берет на себя обусловленное[3] обязательство, которое, в отличие от обусловленных обязательств по страховым полисам, можно защищать от рыночного риска посредством хеджирующих операций на рынках[4]. Одним из наиболее важных способов хеджирования обусловленных обязательств по проданному опциону заключается в суперрепликации[5], другими словами, в суперхеджировании (мы предпочитаем использовать второй из двух эквивалентных терминов).

---

[1] В предлагаемом нами детерминистском походе изначально не задается референтная вероятностная мера, как это предполагается при вероятностном подходе, см., например, [8].

[2] Для целей риск-менеджмента используются производные финансовые инструменты, как правило, являющиеся беспоставочными контрактами.

[3] Англ. contingent liability.

[4] Подразумеваются операции с базовыми активами и безрисковым активом.

[5] Этот термин возник в связи с тем, что на неполных рынках невозможна репликация обусловленных обязательств (что возможно только на полных рынках).

В вышеупомянутой серии публикаций мы концентрируем внимание на проблеме суперхеджирования опционов при наличии торговых ограничений (в рамках модели финансового рынка с неопределенной детерминистской эволюцией цен). Задача ценообразования опциона при суперхеджировании состоит в определении минимального уровня средств в начальный момент[6], необходимых продавцу, при выборе надлежащей стратегии хеджирования, для гарантированного покрытия обусловленного обязательства по проданному опциону (выплаты по которому, напомним, зависят от предыстории цен).

Мы рассматриваем опционы американского типа (американские опционы) - когда контрагент продавца (владелец опциона) может исполнить опцион (т.е. потребовать выплаты в соответствии с правилами устанавливаемыми данным контрактом) в любой момент, вплоть до экспирации опциона. Опционы европейского и бермудского типов могут быть рассмотрены как частый случай американских опционов, при определенных условиях регулярности, включая «безарбитражность» рынка в определенном смысле.

Формализуем описанную выше конструкцию для задачи суперхеджирования. Основной посылкой в предлагаемом подходе является задание «неопределенной» динамики цен посредством предположения об априорной информации о движении цен[7] в момент времени t, а именно, что приращения ΔX_t дисконтированных цен[8] лежат в априорно заданных компактах[9] $K_t(\cdot) \subseteq \mathbb{R}^n$, где точкой обозначена предыстория цен до момента $t-1$ включительно, $t = 1, \ldots, N$. Обозначим через $v_t^*(\cdot)$ точную нижнюю грань для стоимости портфеля в момент времени t, при известной предыстории, гарантирующей, при определенном выборе допустимой хеджирующей стратегии, исполнение текущих и будущих обязательств, возникающих в отношении возможных выплат по американскому опциону. Соответ-

[6] Иными словами, это премия, взымаемая с покупателя опциона, если продавец использует ценообразование, отвечающее суперхеджированию.

[7] Приращения берутся «назад», т.е. $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$, где X_t вектор дисконтированных цен в момент времени t; i-ая компонента этого вектора представляет собой цену единицы i-го актива.

[8] Считаем, что безрисковый актив имеет постоянную цену равную единице.

[9] Точкой обозначены переменные, описывающие эволюцию цен. Более точно, это предыстория $\bar{x}_{t-1} = (x_0, \ldots, x_{t-1}) \in (\mathbb{R}^n)^t$ для K_t, в то время как для функций v_t^* и g_t, введенных ниже, это история $\bar{x}_t = (x_0, \ldots, x_t) \in (\mathbb{R}^n)^{t+1}$.

ствующие уравнения Беллмана-Айзекса в дисконтированных ценах возникают непосредственно из экономического смысла посредством выбора на шаге t «наилучшей» допустимой стратегии[10] хеджирования $h \in D_t(\cdot) \subseteq \mathbb{R}^n$ для «наихудшего» сценария $y \in K_t(\cdot)$ приращения (дисконтированных) цен для заданных функций $g_t(\cdot)$, описывающих потенциальные выплаты по опциону. Таким образом, получаем рекуррентные соотношения:[11]

$$
\begin{gathered}
v_N^*(\bar{x}_N) = g_N(\bar{x}_N), \\
v_{t-1}^*(\bar{x}_{t-1}) = g_{t-1}(\bar{x}_{t-1}) \bigvee \inf_{h \in D_t(\bar{x}_{t-1})} \sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} \left[v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y) - hy \right], \\
t = N, \ldots, 1,
\end{gathered} \tag{BA}
$$

где $\bar{x}_{t-1} = (x_0, \ldots, x_{t-1})$ описывает предысторию по отношению к настоящему моменту t. Условия для справедливости (BA) сформулированы в Теореме 3.1 из [3].

При этом удобно (формально) считать, что $g_0 = -\infty$ (отсутствие обязательств по выплатам в начальный момент времени); $g_t \geq 0$ для $t = 1, \ldots, N$ в случае американского опциона. Множество $D_t(\cdot)$ предполагается выпуклым и $0 \in D_t(\cdot)$.

Многозначные отображения $x \mapsto K_t(x)$ и $x \mapsto D_t(x)$, а также функции $x \mapsto g_t(x)$, предполагаются заданными для всех $x \in (\mathbb{R}^n)^t$, $t = 1, \ldots, N$. Поэтому функции $x \mapsto v_t^*(x)$ задаются уравнениями (BA) для всех $x \in (\mathbb{R}^n)^t$.

В уравнениях (BA) функции v_t^*, а также соответствующие точные верхние и нижние грани, принимают значения в расширенном множестве вещественных чисел $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = [-\infty, +\infty]$ – двухточечной компактификации[12] $\mathbb{R}$.

Вывод уравнений Беллмана-Айзекса (BA) легко получается рассуждениями «инженерного» характера. Неформальным экономиче-

---

[10] Вектор h описывает размеры занимаемых в активах позиций, т.е. i-ая компонента этого вектора представляет собой количество покупаемых или продаваемых единиц i-го актива.

[11] Знак $\bigvee$ обозначает максимум, $hy = \langle h, y \rangle$ – скалярное произведение вектора h на вектор y.

[12] Окрестности точек $-\infty$ и $+\infty$ имеют вид $[-\infty, a)$, $a \in \mathbb{R}$ и $(b, +\infty]$, $b \in \mathbb{R}$ соответственно.

ским языком можно это пояснить следующим образом, считая для упрощения, что точные верхние и нижние грани в (BA) достигаются. Пусть $t \leq N$; к текущему (настоящему) моменту времени $t-1$ известна предыстория (дисконтированных) цен $x_1, \ldots, x_{t-1}$. Стоимость V_{t-1} портфеля, хеджирующего обусловленное обязательство по проданному американскому опциону, для гарантированного исполнения обязательств должна быть, во-первых, не менее текущих обязательств, равных потенциальным выплатам $g_t(x_1, \ldots, x_{t-1})$. Во-вторых, стоимость портфеля в следующий момент $V_t = V_{t-1} + H_t \Delta X_t$ (здесь стратегия H_t формируется в момент $t-1$ и может зависеть только от предыстории цен $x_1, \ldots, x_{t-1}$) должна быть гарантированно, при любом сценарии $\Delta X_t = y \in K_t(x_1, \ldots, x_{t-1})$ движения цен на шаге t, не меньше, чем $v_t^*(x_1, \ldots, x_{t-1}, x_{t-1} + y)$. Тем самым, для покрытия будущих обязательств стоимость V_{t-1}портфеля при выборе стратегии $H_t = h \in D_t(x_1, ..., x_{t-1})$ должна быть не менее величины $v_t^*(x_1, \ldots, x_{t-1}, x_{t-1} + y) - hy$ при наиболее неблагоприятном сценарии $y \in K_t(x_1, ..., x_{t-1})$ движения цен на шаге t, т.е. при $y \in K_t(x_1, ..., x_{t-1})$, максимизирующем выражение $v_t^*(x_1, \ldots, x_{t-1}, x_{t-1} + y) - hy$. Полученное значение минимизируется посредством выбора стратегии $h \in D_t(x_1, ..., x_{t-1})$, чтобы оценить требуемые резервы на покрытие будущих потенциальных выплат. Осталось положить $v_t^*(x_1, \ldots, x_{t-1})$ равным максимуму из величины текущих обязательств и величины резервов на покрытие будущих потенциальных выплат.

Траекторию на временном интервале $[0, t] = \{0, \ldots, t\}$ цен активов $(x_0, \ldots, x_t) = \bar{x}_t$ мы назовем возможной, если $x_0 \in K_0$, $\Delta x_1 \in K_1(x_0)$, $\ldots$, $\Delta x_t \in K_t(x_0, \ldots, x_{t-1})$; $t = 0, 1, \ldots, N$. Обозначим B_t – множество возможных траекторий цен активов на временном интервале $[0, t]$; тем самым

$$B_t = \{(x_0, \ldots, x_t) : x_0 \in K_0, \Delta x_1 \in K_1(x_0), \ldots, \Delta x_t \in K_t(x_0, \ldots, x_{t-1})\}. \tag{1.1}$$

Заметим, что (1.1) равносильно рекуррентным соотношениям[13]

$$\begin{aligned} B_t &= \{(\bar{x}_{t-1}, x_t) : \ \bar{x}_{t-1} \in B_{t-1}, \Delta x_t \in K_t(\bar{x}_{t-1})\} = \\ &= \{(\bar{x}_{t-1}, x_t) : \bar{x}_{t-1} \in B_{t-1}, x_t \in x_{t-1} + K_t(\bar{x}_{t-1})\}, \ t = 1, \ldots, N. \end{aligned} \tag{1.2}$$

[13] Здесь $x + A = \{z : \ z - x \in A\}$.

Одним из условий справедливости уравнений (BA) является сформулированное в Теореме 3.1 из [3] предположение об ограниченности функций выплат g_t, благодаря которому функции v_t^* являются ограниченными сверху. Предположение заключается в следующем.

Найдутся константы $C_t \geq 0$ такие, что для каждого $t = 1, \ldots, N$ и всех возможных траекторий $\bar{x}_t = (x_0, \ldots, x_t) \in B_t$ выполнено $g_t(x_0, \ldots, x_t) \leq C_t$. (B)

Будем считать, что константы C_t выбраны минимальными, т.е.

$$C_t = \sup_{x \ \in B_t} g_t(x),$$

и будем обозначать

$$C = \bigvee_{t=1}^{N} C_t. \tag{1.3}$$

Для удобства обозначений мы сделаем «аддитивную» замену в последней переменной функций v_t^*, полагая

$$w_t(\bar{x}_{t-1}, y) = w_t(x_1, \ldots, x_{t-1}, y) = v_t^*(x_1, \ldots, x_{t-1}, x_{t-1} + y), \tag{T}$$

и далее будем использовать w_t в правых частях уравнений Беллмана–Айзекса, $t = N, \ldots, 0$, т.е в виде:

$$v_{t-1}^*(\cdot) = g_{t-1}(\cdot) \bigvee \inf_{h \in D_t(\cdot)} \sup_{y \in K_t(\cdot)} \big[w_t(\cdot, y) - hy \big], \quad t = N, \ldots, 1.$$

Напомним, что здесь и далее точкой обозначены «текущие» переменные; в последней формуле, например, аргументом является $\bar{x}_{t-1}$.

Везде далее будем считать, что выполнены предположения, перечисленные в Теореме 3.1 из [3], а также предположения, перечисленные в пункте 1) Замечания 3.1 из [3].

Предлагаемый подход позволяет в определенной степени упростить математическую технику и сделать формулировки утверждений более доступными для понимания экономистов; к преимуществам подхода относится теоретико-игровая интерпретация[14]. Бла-

---

[14] В случае отсутствия торговых ограничений эта интерпретация позволяет дать важное с экономической точки зрения объяснение возникновения риск-нейтральных вероятностей, как одно из свойств наиболее неблагоприятных смешанных стратегий рынка.

годаря конструктивности подхода вопрос о «гладкости» решений напрашивается сразу, непосредственно из вида уравнений (BA), что и составляет основную тему данной статьи. Эти свойства «гладкости», как мы увидим из последующих публикаций, потребуются для установления одного из условий игрового равновесия (полунепрерывность сверху решений (BA)), а также для установления условий совпадения решений задачи суперхеджирования при вероятностном и детерминистском подходах (непрерывность решений уравнений (BA)). Особый интерес представляет установленное в данной работе обстоятельство, что именно грубое[15] (робастное) условие отсутствия гарантированного арбитража с неограниченной прибылью $NDSAUP$, введенное в [4], требуется в общем случае для получения непрерывности решений уравнений (BA).

2. Общие условия полунепрерывности и непрерывности решений уравнений Беллмана-Айзекса

Свойства «гладкости» решений уравнений Беллмана-Айзекса (BA) определяются соответствующими свойствами «гладкости» функций выплат $g_t(\cdot)$, а также многозначных отображений $K_t(\cdot)$ и $D_t(\cdot)$, задающих соответственно априорную информацию о приращениях цен и торговые ограничения. Собственно, именно гарантированный детерминистский подход создает стимул для изучения этой «гладкости».

Отметим, что требования к определенным свойствам «гладкости» описания динамики рынка получаются из соображений реалистичности модели финансового рынка с неопределенной детерминистской эволюцией цен, что уже отмечалось нами в [3].

Реалистичными стохастическими сценариями поведения рынка мы считаем (вероятностные) распределения стохастического процесса с дискретным временем, описывающего эволюцию цен, для которых условные распределения текущей цены непрерывно (в слабой то-

---

[15] Одно из наших принципиальных соображений состоит в том, что поскольку описание неопределенности на рынке не может быть точным на практике, то фундаментальные свойства, такие как «безарбитражность» рынка (в том или ином смысле), не должны меняться при малых возмущениях модели рынка. В этой связи мы ввели в [4] новое понятие - грубости (структурной устойчивости) для «безарбитажности» рынка и установили для этого свойства критерии геометрического характера.

пологии) зависит от предыстории цен. Другими словами, для стохастической модели динамики цен — переходные ядра Q_t, отвечающие условным вероятностям цены $X_t \in \mathbb{R}^n$ в момент времени t при известной предыстории $\bar{X}_{t-1} = \bar{x}_{t-1} \in (\mathbb{R}^n)^t$, обладают феллеровским свойством. Если для распределения вектора $\bar{X}_t = (\bar{X}_{t-1}, X_t)$ существует (регулярный) вариант условного распределения $P(X \in \cdot | \bar{X}_{t-1} = x) = Q_t(x, \cdot)$, обладающий феллеровским свойством, то такой вариант единственный для $x \in \operatorname{supp}(P_{\bar{X}_{t-1}})$, где $P_{\bar{X}_{t-1}}$ — распределение случайного вектора $\bar{X}_{t-1}$, а $\operatorname{supp}(\pi)$ обозначает (топологический) носитель меры π. В этом случае естественно выбирать именно феллеровский вариант регулярного условного распределения, а детерминистский и стохастический подходы приводят к одинаковым понятиям «безарбитражности», когда референтная вероятностная мера задается при помощи феллеровских переходных ядер (посредством теоремы Ионеску Тулча).

Нами предложена следующая формализация реалистичности модели[16] в контексте рассматриваемого нами подхода.

Определение 2.1. *Будем называть модель финансового рынка с неопределенной эволюцией цен реалистичной, если существуют смешанные стратегии рынка, для которых имеются феллеровские переходные ядра $Q_t(x, \cdot)$ — условные распределения X_t при известной предыстории $\bar{X}_{t-1} = x$, такие что*[17] $\operatorname{supp} Q_t(x, \cdot) = x + K_t(x)$ *для* $t = 1, \ldots, N$.

Из полученных в работе [5] результатов[18] вытекает следующий критерий реалистичности модели.

---

[16] Вряд ли можно привести экономические основания, чтобы стохастическая динамика цен задавалась бы переходными ядрами (условными вероятностями при заданной предыстории цен), не удовлетворяющими феллеровскому свойству.

[17] Последнее условие отражает реалистичность детерминистских сценариев приращений цен.

[18] В этой работе рассматривается общий случай топологических пространств, причем необходимые условия существования феллеровского ядра с заданными носителями слабее достаточных условий его существования, но в случае конечномерного евклидова пространства необходимые и достаточные условия совпадают.

Теорема 2.1. *Для реалистичности модели финансового рынка с неопределенной детерминистской эволюцией цен*[19] *необходимо и достаточно, чтобы многозначные отображения $K_t(\cdot)$, $t = 1, \dots, N$ были бы полунепрерывны снизу.*

Очевидно, свойство полунепрерывности (сверху или снизу) для многозначных отображений $\bar{x}_{t-1} \mapsto K_t(\bar{x}_{t-1})$ и $\bar{x}_{t-1} \mapsto x_{t-1} + K_t(\bar{x}_{t-1})$, $t = 1, \dots, N$ равносильны, также как и для функций v_t^* и w_t, $t = 0, \dots, N$.

Здесь и далее будем обозначать $\mathcal{N}(Y)$ класс всех непустых подмножеств Y, а $\mathcal{K}(Y)$ – класс всех непустых компактных подмножеств топологического пространства Y.

Установим теперь достаточные условия «регулярного поведения» множества возможных траекторий для динамики цен, задаваемых посредством компактного множества K_0 начальных состояний цен и компактнозначными[20] отображениями $\bar{x}_{t-1} \mapsto K_t(\bar{x}_{t_1})$, $t = 1, \dots, N$. С этой целью сделаем следующее дополнительное предположение.

$$\text{Многозначное отображение } (x_0, \dots, x_{t-1}) \mapsto K_t(x_0, \dots, x_{t-1}) \text{ из } (\mathbb{R}^n)^t \text{ в } \mathcal{K}(\mathbb{R}^n) \text{ является } h\text{-полунепрерывным сверху.}^{21} \tag{USC-PH}$$

Замечание 2.1.

1) В общем случае многозначного отображения полунепрерывность сверху для метрического пространства Y влечет h-полунепре-

[19] В данном случае компактность $K_t(\cdot)$, $t = 1, \dots, N$ не требуется, предполагается лишь замкнутость (как у потенциальных топологических носителей вероятностных мер). Отметим, что в случае компактозначных отображений из полунепрерывности снизу следует h-полунепрерывность снизу.

[20] В соответствии с предположением (C) из [3].

[21] Полунепрерывность сверху (снизу) в смысле Помпею-Хаусдорфа, иными словами, h-полунепрерывность сверху (снизу) многозначного отображения $F : X \mapsto \mathcal{N}(Y)$ в точке $x_0 \in X$, определяется для топологического пространства X и метрического пространства Y с метрикой ρ, как непрерывность в точке x_0 числовой функции $x \mapsto e_\rho(F(x), F(x_0))$ (соответственно $x \mapsto e_\rho(F(x_0), F(x))$), где $e_\rho(A, B)$ – отклонение Помпею множества A от множества B, $e_\rho(A, B) = \sup\{\rho(x, B), x \in A\}$, $\rho(x, B) = \inf\{\rho(x, x'),\ x' \in B\}$. Отметим, что расстояние Помпею-Хаусдорфа $h_\rho(A, B) = e_\rho(A, B) \bigvee e_\rho(B, A)$. Многозначное отображение h-полунепрерывно сверху (снизу), если оно полунепрерывно сверху (снизу) во всех точках из области определения.

рывность сверху[22], см. Предложение 2.61 в [9].

2) Для компактнозначных отображений полунепрерывность снизу и полунепрерывность сверху равносильны (Теорема 2.68 в [9]).

3) Если отображения $F : X \mapsto \mathcal{N}(Y)$ h-непрерывное многозначное отображение, принимающее замкнутые значения, то график $\{(x, y) \in X \times Y : y \in F(x)\}$ замкнут (в топологии произведения пространств), см. Предложение 2.63 в [9].

4) Образ[23] $F(x) = \bigcup\limits_{x \in K} F(x)$ компакта $K \subseteq X$ для компактнозначного полунепрерывного отображения $F : X \mapsto \mathcal{K}(Y)$ является компактным (Следствие 2.20 в [9]).

Предложение 2.1. *Пусть выполнено условие* (USC-PH)*. Тогда*

1) *множества B_t, описываемые соотношениями* (1.2)*, компактны, $t = 0, \dots, N$;*

2) *если, кроме того, функции потенциальных выплат g_t, фигурирующие в уравнении* (BA)*, полунепрерывны сверху, то выполнено условие равномерной ограниченности* (B)*.*

Доказательство. Утверждение 1) легко проверяется по индукции. Действительно, это верно для $t = 0$, т.к. $B_0 = K_0$ компактно. Если это выполнено для $t = 0, \dots, s - 1$, где $s \in \{1, \dots, N - 1\}$, то с использованием (1.2) множество

$$B_s = \{(\bar{x}_{s-1}, x_s) : \bar{x}_{s-1} \in B_{s-1}, x_s = x_{s-1} + K_s(\bar{x}_{s-1})\}$$

является графиком многозначного отображения $F : B_{s-1} \mapsto \mathcal{K}(\mathbb{R})$, где $F_s(\bar{x}_{s-1}) = x_{s-1} + K_s(\bar{x}_{s-1})$, которое полунепрерывно сверху в смысле Помпею – Хаусдорфа, а множество B_{s-1} компактно.

В соответствии с пунктом 3) Замечания 2.1 множество B_s замкнуто. По пункту 2) Замечания 2.1 отображение F полунепрерывно сверху, а по пункту 4) Замечания 2.1 образ $F(B_s)$ компактен. Поскольку замкнутое множество B_s содержится в компакте $B_{s-1} \times F(B_s)$, множество B_s компактно.

---

[22] Полунепрерывность сверху (снизу) определяется как открытость множества $\{x \in X : F(x) \subseteq G\}$, для любого открытого $G \subseteq Y$ (соответственно, как открытость множеств $\{x \in X : F(x) \cap G \neq \emptyset\}$ для любого открытого $G \subseteq Y$).

[23] Здесь образ понимается в смысле многозначного отображения.

Утверждение 2) непосредственно вытекает из утверждения 1), поскольку полунепрерывные функции g_t ограничены сверху (и достигает максимума) на компактных множествах B_t для $t = 1, \ldots, N$. $\square$

Нам потребуются классические результаты – три теоремы Бержа [6, 7], см. также [9]. Для удобства читателя приводим их формулировки. Предположим, что X и Y – хаусдорфовы топологические пространства.

Теорема 2.2 (**Берж**). *Если числовая функция $g : X \times T \mapsto [-\infty, +\infty]$ полунепрерывна сверху, многозначное отображение $F : X \mapsto \mathcal{N}(Y)$ полунепрерывно снизу, тогда функция $g_* : X \mapsto [-\infty, +\infty]$, задаваемая посредством*

$$g_*(x) = \inf_{y \in F(x)} g(x, y), \tag{2.1}$$

полунепрерывна сверху.

Теорема 2.3 (**Берж**). *Если числовая функция $g : X \times T \mapsto [-\infty, +\infty]$ полунепрерывна сверху, компактозначное отображение $F : X \mapsto \mathcal{K}(Y)$ полунепрерывно сверху*[24]*, тогда функция $g^* : X \mapsto [-\infty, +\infty]$, задаваемая посредством*

$$g^*(x) = \sup_{y \in F(x)} g(x, y), \tag{2.2}$$

полунепрерывна сверху.

Замечание 2.2. Поскольку

$$-\inf_{y \in F(x)} [-g(x, y)] = \sup_{y \in F(x)} g(x, y), \tag{2.3}$$

то теорема 2.2 может быть сформулирован эквивалентным образом.[25]

Теорема 2.2′. *Для полунепрерывной снизу функции $g : X \times Y \mapsto [-\infty, +\infty]$ и полунепрерывного снизу многозначного отображения $F(x)$, функция $g^* : X \mapsto [-\infty, +\infty]$, задаваемая посредством (2.2), полунепрерывна снизу.*

---

[24] Отметим, что в книге [6] компактнозначность F входит в определение полунепрерывности сверху, в дополнение к тому, что множество $\{x \in X : F(x) \subseteq G\}$ открыто для любого открытого $G \subseteq Y$.

[25] Теорема 2.2′ — это Предложение 3.1 из [9], а Теорема 2.3 — это Предложение 3.3. из [9].

Соответственно, эквивалентным образом может быть сформулирована и Теорема 2.3.

Теорема 2.3′. *Для полунепрерывной снизу функции* $g : X \times Y \mapsto [-\infty, +\infty]$ *и полунепрерывного сверху компактозначного отображения* $F : X \mapsto \mathcal{K}(Y)$, *функция* $g_* : X \mapsto [-\infty, +\infty]$, *задаваемая посредством* (2.1), *полунепрерывна снизу.*

Утверждение, аналогичное теореме 2.2, можно также получить, ослабляя требования к функции g, но усиливая требования к многозначной функции F.

Предложение 2.2. *Если для любого* $y \in Y$ *функции* $x \mapsto g_y(x) = g(x, y) \in [-\infty, +\infty]$, $x \in X$, *полунепрерывны сверху, для любого* $y \in Y$ *множества* $\{x \in X : \ y \in F(x)\}$ *открыты, тогда функция* $g_* : X \mapsto [-\infty, +\infty]$, *определяемая* (2.1), *полунепрерывна сверху.*

Доказательство. Положим

$$\varphi_y(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } y \in F(x), \\ +\infty, & \text{если } y \notin F(x). \end{cases}$$

Тогда

$$g_*(x) = \inf_{y \in Y} [g_y(x) + \varphi_y(x)],$$

при этом функция $\varphi_y(\cdot)$ – полунепрерывна сверху, а потому и функция $g_y(\cdot) + \varphi_y(\cdot)$ полунепрерывна сверху. Поскольку точная нижняя грань полунепрерывных сверху функций полунепрерывна сверху, то функция $g_*(\cdot)$ полунепрерывна сверху. □

С использованием тождества (2.3) Предложение 2.2 может быть сформулировано эквивалентным образом.

Предложение 2.2′. *Если для любого* $y \in Y$ *функции* $x \mapsto g_y(x) = g(x, y) \in [-\infty, +\infty]$ *полунепрерывны снизу, а множества* $\{x \in X : y \in F(x)\}$ *открыты, тогда функция* g^*, *определяемая* (2.2), *полунепрерывна снизу.*

Замечание 2.3.

1) Если для любого $y \in Y$ множества $\{x \in X : \ y \in F(x)\}$ открыты, то многозначная функция F полунепрерывна снизу, поскольку

для открытого $G \subseteq Y$ множества $\{x \in X: \ F(x) \cap G \neq \emptyset\} = \bigcup_{y \in G} \{x : y \in F(x)\}$ будут открыты, как объединение открытых множеств.

2) Открытость множеств $\{x \in X : \ y \in F(x)\}$, вообще говоря, не следует из полунепрерывности снизу (или же сверху) отображения F. В случае, когда Y-метрическое пространство с метрикой ρ, известно (см. [9], предложения 2.26, 2.61 и 2.64), что для любого $y \in Y$ функции $x \mapsto \rho(y, F(x))$ полунепрерывны сверху (или же, соответственно, снизу). Если F принимает замкнутые значения, т.е. множество $F(x)$ – замкнутое для любого $x \in X$, то про множество $\{x \in X : \ y \in F(x)\} = \{x \in X : \rho(y, F(x)) = 0\}$ можно лишь утверждать, что оно замкнуто (или же, соответственно, является множеством типа[26] G_δ).

3) Из полунепрерывности сверху (снизу) числовой функции $g(x, y)$ по совокупности аргументов вытекает полунепрерывность сверху (снизу) функций одной переменной $x \mapsto g_y(x) = g(x, y)$: если g полунепрерывна сверху, то рассматривая направленность (x_α, y_α), где $x_\alpha \equiv x$, $y_\alpha \to y^*$, замечаем, что $(x_\alpha, y_\alpha) \to (x, y^*)$ и, значит, $\limsup_\alpha g_x(y_\alpha) = \limsup_\alpha g(x_\alpha, y_\alpha) \leq g(x, y^*) = g_x(y^*)$. Аналогично доказывается утверждение и для полунепрерывности снизу; впрочем, это также следует из уже доказанного, выбирая $g = -f$, где f полунепрерывна снизу.

4) В Теоремах 2.3 и 2.3$'$ достигается максимум и минимум соответственно для каждого $x \in X$ и некоторого значения $y^*(x) \in F(x)$.

Достаточные условия для непрерывности функции g^*, определяемой посредством (2.2), дает следующая теорема.[27]

Теорема 2.4 (Берж). *Пусть функция $g : X \times Y \mapsto \mathbb{R}$ непрерывна, $F : X \mapsto \mathcal{K}(y)$ – непрерывное[28] многозначное отображение. Тогда функция $g^* : Y \mapsto \mathbb{R}$, определяемая посредством (2.2), непрерывна, а многозначное отображение $M : X \mapsto \mathcal{K}(Y)$, где[29] $M(x) = \{y \in F(x) : \ g(x, y) = g^*(x)\}$ является полунепрерывным сверху.*

---

[26] Т.е. представимы в виде счетного пересечения открытых множеств.

[27] Этот результат часто называют "Berge's maximum theorem"; в [9] это Теорема 3.4.

[28] Одновременно полунепрерывное сверху и снизу многозначное отображение.

[29] Т.е. $M(x)$ – множество максимизаторов, тех $y \in Y$, для которых достигается максимум в (2.2) для заданного $x \in X$.

Из приведенных выше результатов легко получаются условия полунепрерывности для решения v_t^* основных уравнений (BA). Используя обозначения (T), введем функцию

$$\bar{x}_{t-1} \mapsto \rho_t(\bar{x}_{t-1}) = \inf_{h \in D_t(\bar{x}_{t-1})} \sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} [w_t(\bar{x}_{t-1}, y) - hy]. \tag{2.4}$$

Теорема 2.5. *Пусть выполняется условие* (USC-PH) *h-полунепрерывности сверху многозначных отображений $\bar{x}_{t-1} \mapsto K_t(\bar{x}_{t-1})$, $t = 1, \ldots, N$. Если для $t = 1, \ldots, N$ также выполняются условия:*

1) многозначные отображения $\bar{x}_{t-1} \mapsto D_t(\bar{x}_{t-1})$ полунепрерывны снизу;

2) числовые функции $\bar{x}_t \mapsto g_t(\bar{x}_t)$ полунепрерывны сверху;
то функции $\bar{x}_t \mapsto v_t^*(\bar{x}_t)$, определяемые соотношениями (BA)*, полунепрерывны сверху, $t = 1, \ldots, N$.*

Доказательство.

Пусть выполнены условия 1) и 2). Проведем доказательство полунепрерывности сверху функций v_s по индукции. Для $s = N$ утверждения теоремы, очевидно, выполнены, т.к. $v_N^* = g_N$. Пусть теперь это верно для $s = N, \ldots, t$, покажем, что это верно и для $s = t-1$, где $N \geq t > 1$. По индуктивному предположению функция $(\bar{x}_{t-1}, y) \mapsto w_t(\bar{x}_{t-1}, y)$ полунепрерывна сверху. С использованием (USC-PH) и Теоремы 2.3 получаем, что функция

$$(\bar{x}_{t-1}, h) \mapsto \varphi(x, h) = \sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} [w_t(\bar{x}_{t-1}, y) - hy], \tag{2.5}$$

полунепрерывна сверху, поскольку функция $((\bar{x}_{t-1}, h), y) \mapsto w_t(\bar{x}_{t-1}, y) - hy$ полунепрерывна сверху (по совокупности переменных). Применяя к функции, определяемой посредством (2.5), Теорему 2.2, получим, что функция ρ_t, задаваемая (2.4), полунепрерывна сверху, а, следовательно, полунепрерывна сверху функция

$$\bar{x}_{t-1} \mapsto v_{t-1}^*(\bar{x}_{t-1}) = g_{t-1}(\bar{x}_{t-1}) \bigvee \rho_t(\bar{x}_{t-1}). \tag{2.6}$$

$\square$

Обозначим
cl(A) – замыкание A;
int(A) – внутренность A;
ri(A) – относительная внутренность выпуклого множества A.

Лемма 2.1. *Пусть X — хаусдорфово топологическое пространство, $F : X \mapsto 2^{\mathbb{R}^n} \setminus \{\emptyset\}$ — многозначное отображение, принимающее выпуклые значения. Тогда*

1) *полунепрерывность снизу $F(\cdot)$ равносильна полунепрерывности снизу многозначного отображения $x \mapsto \mathrm{ri}(F(x))$;*

2) *если, кроме того, $\mathrm{int}(F(x)) \neq \emptyset$ для всех $x \in X$, то полунепрерывность снизу $F(\cdot)$ равносильна полунепрерывности снизу $x \mapsto \mathrm{int}(F(x))$*

Доказательство. 1) Поскольку

$$\mathrm{ri}(F(x)) \subseteq F(x) \subseteq \mathrm{cl}(F(x)) \tag{2.7}$$

и, в силу выпуклости $F(x)$, по Теореме 6.3 из [11]

$$\mathrm{cl}(\mathrm{ri}(F(x))) = \mathrm{cl}(F(x)). \tag{2.8}$$

По Предложению 2.38 из [9], многозначное отображение $x \mapsto F(x)$ полунепрерывно снизу тогда и только тогда, когда полунепрерывно снизу отображение $x \mapsto \mathrm{cl}(F(x))$, так что из (2.7) и (2.8) вытекает требуемое утверждение.

2) В случае $\mathrm{int}(F(x)) \neq \emptyset$ выполняется

$$\mathrm{ri}(F(x)) = \mathrm{int}(F(x)). \tag{2.9}$$

□

Замечание 2.4.

1) Невырожденность торговых ограничений, под которыми мы понимаем телесность выпуклого множества $D_t(\cdot)$, т.е. $\mathrm{int}(D_t(\cdot)) \neq \emptyset$, является вполне естественным предположением для финансовых моделей; в этом случае, в силу выпуклости $D_t(\cdot)$, применима Лемма 2.1, так что $D_t(\cdot)$ можно считать, не ограничивая общности, открытыми, когда речь идет сохранении полунепрерывности снизу $D_t(\cdot)$, при отсутствии иных требований.

2) С другой стороны, свойство полунепрерывности снизу многозначного отображения $F : X \mapsto \mathcal{N}(Y)$ равносильно полунепрерывности снизу многозначного отображения $\bar{F} : X \mapsto \mathcal{N}(Y)$, где $\bar{F}(x) = \mathrm{cl}(F(x))$, см. Предложение 2.38 из [9]. В ряде случаев удобно

для полунепрерывных снизу $D_t(\cdot)$ считать, не ограничивая общности, что множества $D_t(\cdot)$ замкнуты (невырожденность при этом не требуется), при отсутствии других требований.

3) В Теореме 2.5 можно считать, не ограничивая общности, что множества $D_t(\cdot)$ замкнуты, поскольку значения $v_t^*(\cdot)$ не изменяются при замыкании $D_t(\cdot)$. Действительно, обозначая $\bar{D}_t(\cdot) = \mathrm{cl}(D_t(\cdot))$, имеем неравенство

$$\inf_{h \in \bar{D}_t(x)} \varphi(x,h) \leq \inf_{h \in D_t(x)} \varphi(x,h), \tag{2.10}$$

где функция φ задается формулой (2.5). Для любого $h \in \bar{D}_t(x)$ найдется последовательность $h^n \in D_t(x)$, такая что $h^n \to h$. В силу полунепрерывности сверху функции φ (установленной в ходе доказательства Теоремы 2.5)

$$\varphi(x,h) \geq \limsup_{n\to\infty} \varphi(x,h^n) \geq \inf_{h \in \bar{D}_t(x)} \varphi(x,h),$$

так что в (2.10) имеет место равенство.

С другой стороны, применяя к $F(\cdot) = D_t(\cdot)$ соотношения (2.7) и (2.8), получаем, что значение v_t^* не изменится, если $D_t(\cdot)$ заменить на $D_t'(\cdot) = \mathrm{ri}(D_t(\cdot))$, а в случае невырожденности, с учетом (2.9), можно, не ограничивая общности, считать $D_t(\cdot)$ открытыми.

4) Для ряда моделей торговые ограничения постоянны во времени и не зависят от предыстории, т.е. $D_t(\cdot) \equiv D$ (например, при запрете коротких позиций по рисковому активу, т.е. когда $D = [0,\infty)^n$). В этом случае множество $\{x \in (\mathbb{R}^n)^{t-1} : \ h \in D_t(\cdot)\}$ либо пусто (если $h \notin D$), либо совпадает со всем пространством $(\mathbb{R}^n)^{t-1}$ (если $h \in D$), так что множество одновременно открыто (а значит, применимы Предложения 2.2 и 2.2′) и замкнуто, а многозначные отображения $x \mapsto D_t(\cdot)$ непрерывны.

5) Обозначим $\tilde{K}_t = K_t(B_{t-1})$ – образ B_{t-1} для многозначного отображения K_t, где B_t задается посредством (1.1). Отметим, что при условии (USC-PH) функция, задаваемая (2.5), ограничена благодаря компактности $\tilde{K}_t$, по Предложению 2.1, равномерно по $\bar{x}_{t-1} \in \tilde{K}_t$ для любого h, поскольку $C \geq w_t \geq 0 :$ для любого $y \in K_t(\bar{x}_{t-1}) \subseteq \tilde{K}_t$

$$C - hy \geq w_t(\bar{x}_{t-1}, y) - hy \geq -hy,$$
$$\max_{y \in -\tilde{K}_t} hy \geq -hy \geq \min_{y \in -\tilde{K}_t} hy = -\max_{y \in \tilde{K}_t} hy,$$

откуда[30]

$$C + \sigma_{-\tilde{K}_t}(h) \geq \sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} [w_t(\bar{x}_{t-1}, y) - hy] \geq -\sigma_{\tilde{K}_t}(h), \tag{2.11}$$

где $\sigma_A(h)$ – опорная функция множества A.

6) В силу полунепрерывности сверху функции $y \mapsto w_t(\cdot, y) - hy$ в условиях Теоремы 2.5 (т.е. при условиях 1) и 2)) точная верхняя грань по y достигается для некоторого значения $y \in K_t(\bar{x}_{t-1})$.

7) Отметим, что для $\bar{x}_{t-1} \in B_{t-1}$ функция (2.5) является выпуклой по переменной h, принимает конечные значения с оценкой (2.11) и, в частности, непрерывна по h (Следствие 10.1.1 из [11]).

8) Определяемая посредством (2.4) функция $\rho_t(\cdot)$ может принимать значения $-\infty$. В то же время, поскольку $0 \in D_t(x)$, функция $\rho_t(\cdot)$ ограничена сверху: $\rho_t(\cdot) \leq C$.

Для того, чтобы обеспечить свойство полунепрерывности снизу функций Беллмана-Айзекса, определяемых (BA), потребуется сделать дополнительное предположение, касающиеся торговых ограничений:

$$\text{множество } D_t(\bar{x}_{t-1}) \text{ компактно для любого } \bar{x}_{t-1},\ t = 1, \ldots, N. \tag{C-T}$$

Теорема 2.6. *Пусть выполнено условие* (C-T)*, компактнозначные отображения $\bar{x}_{t-1} \mapsto D_t(\bar{x}_{t-1})$ полунепрерывны сверху, $\bar{x}_{t-1} \mapsto K_t(\bar{x}_{t-1})$ полунепрерывны снизу, числовые функции $\bar{x}_{t-1} \mapsto g_t(\bar{x}_{t-1})$ полунепрерывны снизу для $t = 1, \ldots, N$. Тогда функции $\bar{x}_t \mapsto v_t^*(\bar{x}_t)$, определяемые соотношениями* (BA)*, полунепрерывны снизу, $t = 1, \ldots, N$.*

Доказательство. Проведем доказательство по индукции; для $s = N$ утверждение справедливо, поскольку $v_N^* = g_N$. Пусть это выполнено для $s = N, \ldots, t$, покажем, что выполняется и для $s = t-1$ (для $t > 1$). К функции φ, задаваемой посредством (2.5), применима Теорема 2.2′, поскольку функция $((\bar{x}_{t-1}, h), y) \mapsto w_t(\bar{x}_{t-1}, y) - hy$ полунепрерывна снизу (по совокупности переменных), так что φ полунепрерывна снизу. Далее, к функции $\rho_t(\cdot)$, задаваемой (2.4), применима теорема 2.3′, так что эта функция также полунепрерывна снизу, а из (2.6) следует полунепрерывность снизу функции $v_{t-1}^*(\cdot)$. □

[30] Опорная функция компакта принимает конечные значения.

Теорема 2.7. *Пусть выполнено условие* (C-T), *компактнозначные отображения* $\bar{x}_{t-1} \mapsto D_t(\bar{x}_{t-1})$ *и* $\bar{x}_{t-1} \mapsto K_t(\bar{x}_{t-1})$ *непрерывны*[31], *числовые функции* $\bar{x}_{t-1} \mapsto g_t(\bar{x}_{t-1})$ *непрерывны. Тогда*

1) функции $\bar{x}_t \mapsto v_t^*(\bar{x}_t)$, *задаваемые соотношениями* (BA), *непрерывны,*

2) многозначные отображения $(\bar{x}_{t-1}, h) \mapsto M_t(\bar{x}_{t-1}, h)$, *где* $M_t(\bar{x}_{t-1}, h)$ *– множество максимизаторов* $y \in K_t(\bar{x}_{t-1})$, *для которых достигается максимум функции* (2.5), *а также многозначные отображения* $\bar{x}_{t-1} \mapsto N_t(\bar{x}_{t-1})$, *где* $N_t(\bar{x}_{t-1})$ *множество минимизаторов* $h \in D_t(\bar{x}_{t-1})$, *для которых достигается минимум в* (2.4), *являются полунепрерывными сверху,* $t = 1, \ldots, N$.

Доказательство. Утверждение вытекает непосредственно из Теорем 2.5 и 2.6, а также из теоремы Бержа 2.4. □

Замечание 2.5.

1) Если Y — метрическое пространство[32], то при замыкании сохраняется свойство полунепрерывности сверху многозначного отображения, см. Предложение 2.40 из [9]. Поэтому, если $D_t(\cdot)$ заменить на $\bar{D}_t(\cdot) = \mathrm{cl}(D_t(\cdot))$, то Теорема 2.7 сохраняет силу, с учетом пункта 2) Замечания 2.4 о сохранении значения функции $v_t^*(\cdot)$.

2) На самом деле, приведенные выше результаты дают также условия полунепрерывности или же непрерывности в более общем случае, а именно, для описанной в [3] модели, формулы (3.6) и (3.7), если одновременно с торговыми ограничениями, свойственными маржинальной торговле[33], наложить ограничения на заимствования без-

[31] Непрерывность многозначного отображения означает одновременно полунепрерывность сверху и снизу. Для компактнозначных отображений это равносильно непрерывности в метрике Помпею-Хаусдорфа.

[32] В действительности, достаточно нормальности топологического пространства Y.

[33] Маржинальная торговля на финансовом рынке подразумевает наличие посредников (брокеров), позволяющих (при заключении с ними участником рынка генерального соглашения) заимствование в ценных бумагах. При этом обычно регулятор устанавливает требования, чтобы доля собственных средств в портфеле участника маржинальной торговли была бы не ниже установленного уровня, что и приводит к торговым ограничениям.

рискового актива посредством задания выпуклой по h функции[34] $\alpha_t(h, \bar{x}_{t-1}) \leq 0$, с дополнительными ограничениями $h \in D_t(\cdot)$, соответствующие уравнения Беллмана-Айзекса имеют вид:

$$v_N^*(\bar{x}_N) = g_N(\bar{x}_N),$$

$$v_{t-1}^*(\bar{x}_{t-1}) = g_{t-1}(\bar{x}_{t-1}) \bigvee \inf_{h \in D_t(\bar{x}_{t-1})} \Big[\sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} (w_t(\bar{x}_{t-1}, y) - hy) \bigvee \mu h^{\oplus} \bar{x}_{t-1}$$

$$\bigvee (h\bar{x}_{t-1} + \alpha_t(h, \bar{x}_{t-1}))\Big],$$

где $h^{\oplus} = ((h^1)^+, \ldots, (h^n)^+)$, $(a)^+ = 0 \bigvee a$, $a \in \mathbb{R}$.

Для применимости Теоремы 2.5 необходимо потребовать полунепрерывности сверху функции $x \mapsto \alpha_t(h, x)$, $x \in B_{t-1}$, для применимости теоремы 2.6 – полунепрерывность снизу α_t по совокупности переменных, а для теоремы 2.7 – нужна непрерывность α_t по совокупности переменных.

3) Отметим, что все приведенные выше результаты имеют общий характер и никак не связаны с предположениями типа безарбитражности. Чтобы обеспечить свойства полунепрерывности снизу и непрерывности функций Беллмана-Айзекса w_t в случае, когда (C-T) не выполняется, т.е. когда D_t неограничены, требуются дополнительные условия, связывающие поведение многозначных отображений $K_t(\cdot)$ и $D_t(\cdot)$. Ниже будут приведены соответствующие условия и доказательства, которые носят более технический характер, чем представленные выше.

3. Условия гладкости решений уравнений Беллмана-Айзекса, связывающие неопределенность движения цен и торговые ограничения

Будем использовать обозначения:
$K_t^*(\cdot) = \operatorname{conv}(K_t(\cdot))$ — выпуклая оболочка $K_t(\cdot)$;
σ_A — опорная функция множества A, т.е. $\sigma_A(y) = \sup\limits_{h \in A} hy$;
$\operatorname{bar}(A) = \{y \in \mathbb{R}^n : \ \sigma_A(y) < +\infty\}$ — барьерный конус[35] множества A.

---

[34] α_t – максимально допустимый долг (например, лимит банковского кредита), взятый с отрицательным знаком.

[35] Этот конус является выпуклым и содержит точку 0.

В [4] было введено понятие грубости «безарбитражности» и доказано (Теорема 2), что грубое условие отсутствия гарантированного арбитража $RNDSAUP$ равносильно выполнению условия

$$0 \in \operatorname{int}\{z : \ z + K_t^*(\cdot) \bigcap \operatorname{bar}(D_t(\cdot)) \neq \emptyset\}. \tag{SR}$$

Это условие и его усиление играют важную роль в доказательстве результатов этого раздела, сформулированных ниже; отметим также, что в доказательстве этих результатов существенно будет использоваться условие ограниченности (B) для функций выплат g_t, $t = 1, \dots, N$.

Предложение 3.1. *Пусть для $t \in \{1, \dots, N\}$, многозначные отображения $D_t(\cdot)$ принимают замкнутые значения и выполнено условие* (B). *Тогда*

$$D_t^a(\cdot) = \{h \in D_t(\cdot) : \sup_{y \in K_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy] \leq a\}$$

компактно[36] *для любого $a \in \mathbb{R}$, если и только если выполняется условие $RNDSAUP$.*

Доказательство. Обозначим

$$T_t(\cdot) = \{z \in \mathbb{R}^n : \ \big(z + K_t^*(\cdot)\big) \cap \operatorname{bar}\big(D_t(\cdot)\big) \neq \emptyset\}; \tag{3.1}$$

условие (SR), равносильное $RNDSAUP$, записывается

$$0 \in \operatorname{int}(T_t(\cdot)). \tag{3.2}$$

Поскольку $w_t \geq 0$, а также, благодаря (2.1), $w_t \leq C$, то имеют место неравенства:

$$\sup_{y \in K_t^*(\cdot)} [-hy] = \sup_{y \in K_t(\cdot)} [-hy] \leq \sup_{y \in K_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy] \leq$$
$$\leq C + \sup_{y \in K_t(\cdot)} [-hy] = C + \sup_{y \in K_t^*(\cdot)} [-hy].$$

Обозначая

$$\hat{D}_t^b(\cdot) = \{h \in D_t(\cdot) : \sup_{y \in K_t^*(\cdot)} [-hy] \leq b\} = \{h \in D_t(\cdot) : \ \sigma_{K_t^*(\cdot)}(-h) \leq b\}, \tag{3.3}$$

[36] Пустое множество считаем компактным.

получаем $\hat{D}_t^{a-C}(\cdot) \subseteq D_t^a(\cdot) \subseteq \hat{D}_t^a$, так что $D_t^a(\cdot)$ компактно для всех $a \in \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда $\hat{D}_t^a(\cdot)$ компактны для всех $a \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим функцию

$$h \mapsto f_{t,\cdot}(h) = \chi_{D_t(\cdot)}(h) + \sup_{y \in K_t^*(\cdot)} (-hy), \tag{3.4}$$

где

$$\chi_D(h) = \begin{cases} 0, & \text{если } h \in D; \\ +\infty, & \text{если } h \notin D. \end{cases}$$

Функция, задаваемая посредством (3.4), является замкнутой[37] собственной[38] выпуклой функцией, поскольку это же относится к первому слагаемому в (3.4), а второе слагаемое в (3.4) представляет собой всюду конечную выпуклую функцию, а значит, непрерывную всюду (см. следствие 10.1.1 [11]). В соответствии со следствием 14.2.2 [11] для того, чтобы множество $\{h \in \mathbb{R}^n : \ f_{t,\cdot}(h) \leq a\} = \hat{D}_t^a(\cdot)$ было ограниченным (а значит, компактным в силу полунепрерывности функции, задаваемой посредством (3.4)) для любого $a \in \mathbb{R}$ необходимо и достаточно, чтобы 0 являлся внутренней точкой множества $T_t'(\cdot) = \{z \in \mathbb{R}^n : \ f_{t,\cdot}^*(z) < \infty\}$, где $z \mapsto f_{t,\cdot}^*(z)$ – сопряженная функция к функции $h \mapsto f_{t,\cdot}(h)$, т.е.

$$T_t'(\cdot) = \{z \in \mathbb{R}^n : \ \sup_{h \in \mathbb{R}^n} [hz - f_{t,\cdot}(h)] < \infty\}.$$

При этом, используя классическую теорему о минимаксе Кнезера [10], получаем

$$\sup_{h \in \mathbb{R}^n} \Big\{hz - [\chi_{D_t(\cdot)}(h) + \sup_{y \in K_t^*(\cdot)} (-hy)]\Big\} = \sup_{h \in D_t(\cdot)} [hz + \inf_{y \in K_t^*(\cdot)} (hy)] =$$
$$= \sup_{h \in D_t(\cdot)} \inf_{y \in z + K_t^*(\cdot)} (hy) = \inf_{y \in z + K_t^*(\cdot)} \sup_{h \in D_t(\cdot)} (hy) = \inf_{y \in z + K_t^*(\cdot)} \sigma_D(y).$$

Если $\big(z + K_t^*(\cdot)\big) \cap \mathrm{bar}\,\big(D_t(\cdot)\big) = \emptyset$, то $\sigma_D(y) = \infty$ для всех $y \in z + K_t^*(\cdot)$ и $\inf_{y \in z + K_t^*(\cdot)} \sigma_D(y) = +\infty$. Если же $\big(z + K_t^*(\cdot)\big) \cap \mathrm{bar}\,\big(D_t(\cdot)\big) \neq \emptyset$, то $\inf_{y \in z + K_t^*(\cdot)} \sigma_D(y) < \infty$. Таким образом,

$$T_t'(\cdot) = \{z \in \mathbb{R}^n : \ z + K_t^*(\cdot) \cap \mathrm{bar}(D_t(\cdot)) \neq \emptyset\},$$

---

[37] Полунепрерывной снизу (терминология из [11]).

[38] Если функция принимает конечные значения на непустом выпуклом множестве, а вне него равна $+\infty$.

т.е. $T'_t(\cdot) = T_t(\cdot)$, откуда и следует требуемое утверждение. □

Замечание 3.1.

1) Отметим, что в ходе доказательства Предложения 3.1 установлено, что условие (SR) и замкнутость множеств $D_t(\cdot)$ достаточны для компактности множеств $\hat{D}^a_t(\cdot)$.

2) Нетрудно убедиться, что множество $T_t(\cdot)$, задаваемое посредством (3.1), является выпуклым.

3) Для случая отсутствия торговых ограничений, т.е. когда $D_t(\cdot) = \mathbb{R}^n$, барьерный конус $\operatorname{bar}\big(D_t(\cdot)\big) = \{0\}$ и условие (3.2) равносильно робастному условию отсутствия арбитражных возможностей $RNDAO$, которое, в соответствии с Предложением 1 из [4], равносильно одновременному выполнению условия отсутствия арбитражных возможностей $NDAO$ и полноразмерности компактов $K_t(\cdot)$, $t = 1, \ldots, N$, т.е. условию $0 \in \operatorname{int}(K^*_t(\cdot))$, $t = 1, \ldots, N$.

Далее будем предполагать, что $D_t(\cdot)$ – замкнутые множества (в силу пункта 3) Замечания 2.4 и пункта 1) Замечания 2.5 это не является ограничением для справедливости Теорем 2.5 и 2.7).

Лемма 3.1. *Пусть $D_t(\cdot)$ — замкнутые множества, выполнено условие $RNDSAUP$, тогда для $a \geq C$ функция $\rho_t(\cdot)$, задаваемая* (2.4), *может быть представлена в виде*

$$\rho_t(\cdot) = \inf_{h \in \hat{D}^a_t(\cdot)} \sup_{y \in K_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy]; \tag{3.5}$$

таким образом, $D_t(\cdot)$ можно заменить на компактное выпуклое множество $\hat{D}^a_t(\cdot)$, причем $0 \in \hat{D}^a_t(\cdot)$. В частности, полунепрерывная снизу (и выпуклая) функция $h \mapsto \sup\limits_{y \in K_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy]$ достигает минимального значения $\rho_t(\cdot)$ в некоторой точке $h^*(\cdot) \in \hat{D}^C_t$.

Доказательство. Если $h_0 \notin \hat{D}^a_t(\cdot)$, где $a \geq C$, то для такого h_0, поскольку $0 \in D_t(\cdot)$, имеем:

$$\sup_{y \in K^*_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - h_0 y] \geq \sup_{y \in K^*_t(\cdot)} [-h_0 y] > a \geq C \geq \sup_{y \in K_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy]|_{h=0} \geq$$
$$\geq \inf_{h \in D_t(\cdot)} \sup_{y \in K_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy],$$

откуда и следует (3.5). □

Будем говорить, что многозначное отображение $F : X \mapsto \mathcal{N}(Y)$ локально предкомпактно, если для любой точки $x_0 \in X$ найдется окрестность V_x этой точки, такая что ее образ $F(V_x) = \bigcup_{x \in V_x} F(x)$ предкомпактен[39]. Если при этом X–компактно, то, очевидно, образ $F(x)$ предкомпактен (достаточно выделить конечное подпокрытие из покрытия V_x, $x \in X$, и заметить, что конечное объединение компактов является компактным).

Лемма 3.2. *Пусть выполняется следующее условие: для каждой точки $x_0 \in B_{t-1}$ найдется окрестность $V(x_0)$ этой точки, такая что $\check{K}_t(x_0) = \bigcap_{x \in V(x_0)} K_t^*(x) \neq \emptyset$, и более того,*[40]

$$0 \in \operatorname{int}\big(\{z : \ z + \check{K}_t(x_0) \cap \operatorname{bar}(D_t(\cdot)) \neq \emptyset\}\big). \tag{SSR}$$

Тогда многозначное отображение $x \mapsto \hat{D}_t^b(x)$, $x \in B_{t-1}$, локально предкомпактно.

Доказательство. Для $x \in V(x_0)$ с учетом (3.3) имеем

$$\hat{D}_t^b(x) \subseteq \check{D}_t^b(x_0) = \{h \in D_t(x_0) : \ \sigma_{\check{K}_t(x_0)}(-h) \leq b\},$$

повторяя рассуждения из предложения 3.1 с заменой $K_t^*(x)$ на $\check{K}_t(x)$, получаем, что множества $\check{D}_t^b(x_0)$, $x_0 \in B_{t-1}$, компактны для всех $b \in \mathbb{R}$, если и только если выполняется (SSR); тем самым получаем локальную предкомпактность для многозначного отображения $x \mapsto \hat{D}_t^b(x)$, $x \in B_{t-1}$ при выполнении (SSR). □

Лемма 3.3. *Пусть многозначные отображения $x \mapsto D_t(x)$ замкнуты*[41]*, многозначные отображения $x \mapsto K_t(x)$ полунепрерывны снизу, B_t предкомпакты, $t = 1, \dots, N$. Тогда многозначные отображения $x \mapsto \hat{D}_t^a(x)$ замкнуты.*

---

[39] Иными словами, в терминологии [2], это отображение компактно ограничено во всех точках из X; в [9] также отображение назвается ”locally compact” (что, на наш взгляд, неудачно, поскольку этот термин уже относится к топологическим пространствам).

[40] Разумеется, из (SSR) следует $\check{K}_t(x_0) \neq \emptyset$. Можно интерпретировать $\check{K}_t(\cdot)$ как новую динамику рынка с сокращенной неопределенностью по сравнению с $K_t^*(\cdot)$; при этом $\check{K}_t(\cdot)$ — выпуклые компакты.

[41] Многозначное отображение $F : X \mapsto \mathcal{N}(Y)$ называется замкнутым, если для направленностей x_α и y_α, таких что $x_\alpha \to x$, $y_\alpha \in F(x_\alpha)$ и $y_\alpha \to y$, имеет место $y \in F(x)$. Иными словами, график отображения F замкнут.

Доказательство. Поскольку $B_t = K_t(B_{t-1}) = \bigcup_{x \in B_{t-1}} K_t(x)$ по условию предкомпактно, то многозначное отображение $x \mapsto K_t(x)$ равномерно ограничено на B_{t-1}, а поэтому и выпуклые оболочки $K_t^*(x) = \operatorname{conv}(K_t(x))$ равномерно ограничены на B_{t-1}:

$$\sup_{x \in B_{t-1}} \sup_{y \in K_t^*(x)} \|y\| = A < \infty. \tag{3.6}$$

Из полунепрерывности снизу $K_t(\cdot)$ следует полунепрерывность снизу $K_t^*(\cdot)$ по Предложению 2.24 (a) из [9]. Рассмотрим последовательности x^n и h^n, $n = 1, 2, \ldots$, такие что $x^n \in B_{t-1}$, $x^n \to x^0$ и $h^n \in \hat{D}_t^b(x^n)$, $h^n \to h^0$. Из предложения[42] 9.10 [2], с учетом (3.6), получаем:

$$b \geq \sigma_{K_t^*(x^n)}(-h^n) \geq \sigma_{K_t^*(x^0)}(-h^0) - A\|h^n - h^0\|.$$

Отсюда

$$b \geq \liminf_{n \to \infty} \sigma_{K_t^*(x^n)}(-h^n) \geq \liminf_{n \to \infty} \sigma_{K_t^*(x^n)}(-h^0) \geq \sigma_{K_t^*(x^0)}(-h^0),$$

поскольку функция $x \mapsto \sigma_{K_t^*(x)}(h)$ полунепрерывна снизу для любого h, см., например, предложение 2.35 из [9]. Кроме того, поскольку по условию многозначное отображение $x \mapsto D_t(x)$ замкнуто, то $h^0 \in D_t(x^0)$. Таким образом, $h^0 \in \{h \in D_t(x^0) : \ \sigma_{K_t^*(x^0)}(-h) \leq b\} = \hat{D}_t^b(x^0)$. □

Теорема 3.1. *Пусть $t = 1, \ldots, N$, числовые функции $\bar{x}_t \mapsto g_t(\bar{x}_t)$ полунепрерывны снизу, многозначные отображения $\bar{x}_{t-1} \mapsto D_t(\bar{x}_{t-1})$ замкнуты, многозначные отображения $\bar{x}_{t-1} \mapsto K_t(\bar{x}_{t-1})$ полунепрерывны снизу, выполняется условие* (SSR) *и множества B_t предкомпактны. Тогда функции $(\bar{x}_{t-1}, y) \mapsto w_t(\bar{x}_{t-1}, y)$, определяемые соотношениями* (BA)*, полунепрерывны снизу.*

Доказательство. Используя лемму 3.2 и 3.3, по предложению 2.23 из [9] локально предкомпактное и замкнутое отображение[43] $x \mapsto \hat{D}_t^b(x)$ полунепрерывно сверху. Применяя теперь лемму 3.1 и теорему 2.6, где $D_t(\cdot)$ заменяется на $\hat{D}_t^a(\cdot)$ для некоторого $a \geq C$, получаем требуемое утверждение. □

---

[42] Это результат из [2], касающийся свойства Липшица (с константой A) для опорных функций.

[43] Замкнутое отображение принимает замкнутые значения, см., например, Замечание 2.12 из [9].

Замечание 3.2. Отметим, что при доказательстве Теоремы 3.1 попутно установлена полунепрерывность сверху компактнозначного отображения $x \mapsto \hat{D}_t^b(x)$, при выполнении условий Теоремы 3.1, касающихся $K_t(\cdot)$, $D_t(\cdot)$ и B_t.

Предложение 3.2. *Пусть многозначные отображения* $x \mapsto K_t(x)$, $t = 1, \ldots, N$ *полунепрерывны снизу, и для всех* x *выполняется условие* $(SGNSAUP)$[44]

$$\operatorname{int}(K_t^*(\cdot)) \bigcap \operatorname{bar}(D_t(\cdot)) \neq \emptyset. \tag{3.7}$$

1) Тогда найдутся окрестности $V(x)$ *точек* x, *такие что для* $\check{K}_t(x) = \bigcap\limits_{x' \in V(x)} K_t^*(x')$ *выполняется условие*[45]

$$\operatorname{int}(\check{K}_t(x)) \bigcap \operatorname{bar}(D_t(x)) \neq \emptyset. \tag{3.8}$$

2) Выполняется условие (SSR).

Доказательство. 1) Фиксируем t и x. В соответствии с (3.7) найдутся такие $r > 0$ и $y \in \operatorname{bar}(D_t(x))$, что $B_r(y) \subseteq K_t^*(x)$. В соответствии с Предложением 2.42, пункт (a) из [9] полунепрерывность снизу $K_t(\cdot)$ влечет аналогичное свойство для $K_t^*(\cdot) = \operatorname{conv}(K_t(\cdot))$. По Лемме 2.51 из [9] для любого заданного $\varepsilon \in (0, r)$ найдется окрестность $V(x)$ точки x, такая что для любого $x' \in V(x)$ выполняется $B_\varepsilon(y) \subseteq K_t^*(x')$. Следовательно, полагая $\check{K}_t(x) = \bigcap\limits_{x' \in V(x)} K_t^*(x')$, получаем $\check{K}_t(x) \supseteq B_\varepsilon(y)$. Поэтому $\operatorname{int}(\check{K}_t(x)) \bigcap \operatorname{bar}(D_t(x)) \neq \emptyset$.

2) Рассмотрим «новую» динамику рынка с неопределенностью движения цен, описываемой компактами $\check{K}_t(\cdot)$, являющимися выпуклыми, как пересечение выпуклых компактов. Для такого рынка выполнено условие $(SGNSAUP)$ из Теоремы 4.1 из [4]. Это в точности (3.8), поэтому выполняется условие $RNDSAUP$ и применим пункт 1) Теоремы 4.1 из [4], в соответствии с которым выполняется условие (SR), которое для «новой» динамики рынка представляет собой условие (SSR) для «старой» динамики рынка, т.е. описываемой $K_t(\cdot)$. $\square$

---

[44] Это условие фигурирует в Теореме 4.1 из [4] и влечет полноразмерность компактов $K_t(\cdot)$, т.е. $\operatorname{int}(K_t^*(\cdot)) \neq \emptyset$.

[45] Компакты $\check{K}_t(\cdot)$, таким образом, в условиях Предложения 3.2 тоже будут полноразмерными.

Зафиксируем $a \geq C \geq 0$, где константа C задается соотношением (1.3). Можно, не ограничивая общности, считать[46], что $C > 0$, т.к. в противном случае $g_t(\cdot) \equiv 0$, что не представляет интереса с точки зрения экономической интерпретации.

Предложение 3.3. *Пусть компактнозначные отображения $K_t(\cdot)$ непрерывны, $D_t(\cdot)$ полунепрерывны снизу и замкнуты[47] на B_{t-1}, и выполняется условие (SR). Тогда многозначное отображение*

$$x \mapsto \hat{D}_t^a(x) = D_t(x) \bigcap E_t^a(x), \; x \in B_{t-1},$$

где

$$E_t^a(x) = \{h \in \mathbb{R}^n : \; \sigma_{K_t^*(x)}(h) \leq a\},$$

является непрерывным.

Доказательство. Покажем полунепрерывность снизу для $x \mapsto \hat{D}_t^a(x)$. Фиксируем $t \in \{1, \ldots, N\}$ и начнем с того, что установим полунепрерывность снизу для $E_t^a(\cdot)$. По Предложению 2.6, пункт e) из [9], достаточно проверить, что для сходящейся последовательности $x_n \to x_0$ из B_{t-1} нижний предел по Куратовскому $\liminf\limits_{n\to\infty} E_t^a(x_n)$ содержит $E_t^a(x_0)$. Поскольку $\liminf\limits_{n\to\infty} E_t^a(x_n) = \{x : \; \rho(x, E_t^a(x_n)) \to 0\}$ (см. Замечание 1.43 из [9]), то для произвольного $h_0 \in E_t^a(x_0)$ нужно показать существование последовательности $h_n \in E_t^a(x_n)$, такой что $h_n \to h_0$. Обозначим,

$$r_n = h_\rho(K_t^*(x_n), K_t^*(x_0)) \leq h_\rho(K_t(x_n), K_t(x_0)) \to 0,$$

см. Неравенство 5.12 [2]. Здесь мы воспользуемся тем, что для компактнозначных отображений (а $K_t^*(\cdot)$ — компактнозначно) непрерывность совпадает с h-непрерывностью, по Теореме 2.68 из [9]. Положим $h_n = \alpha_n h_0$, где $\alpha_n = \frac{a}{a + r_n\|h_0\|} \to 1$ при $n \to \infty$. С использованием

---

[46] Впрочем, для того что бы обеспечить $a > 0$ (что требуется в доказательстве Предложения 3.3), можно просто потребовать $a > C$.

[47] В терминологии книги [2], слабо непрерывное отображение $x \mapsto D_t(\cdot)$ одновременно слабо полунепрерывно сверху и снизу; при этом слабая полунепрерывность сверху равносильна замкнутости (см. [2, Теорема 14.7]), а слабая полунепрерывность снизу совпадает с (обычной) полунепрерывностью снизу (см. [2, Замечание 14.1]).

Предложения 9.11 из [2] получаем:

$$\sigma_{K_t^*(x_n)}(h_n) \le \sigma_{K_t^*(x_0)}(h_n) + r_n\|h_n\| = \alpha_n \sigma_{K_t^*(x_0)}(h_0) + r_n \alpha_n \|h_0\| \le \\ \le \alpha_n a + \alpha_n r_n \|h_0\| = a,$$

т.е. $h_n \in E_t^a(x_n)$, $h_n \to h_0 \in E_t^a(x_0)$ и полунепрерывность снизу $E_t^a(\cdot)$ установлена.

Заметим, что $a > 0$ по сделанному выше предположению и что множество $\frac{1}{a}E_t^a(x) = \{h : \sigma_{K_t^*(x)}(h) \le 1\}$ является полярным (по Минковскому) для $K_t^*(\cdot)$, см. [1, Формула (70) и Теорема 12.2]. По Теореме 6.6 из [1], пункт a) точка 0 является внутренней точкой полярного к $K_t^*(x)$ множества, поскольку оно ограничено (в силу компактности, по Теореме 2.6 [1]). Поэтому $0 \in \mathrm{int}(E_t^a(x))$ для всех $x \in B_{t-1}$. Далее, $0 \in D_t(\cdot) \bigcap \mathrm{int}(E_t^a(\cdot)) \ne \emptyset$, множества $D_t(\cdot)$ и $E_t^a(\cdot)$ выпуклые; следовательно, применимо Предложение 2.54 из [9], в соответствии с которым многозначное отображение $\hat{D}_t^a(\cdot) = D_t(\cdot) \bigcap E_t^a(\cdot)$ полунепрерывно снизу.

В соответствии с Леммой 3.3 многозначное отображение $x \mapsto \hat{D}_t^a(x)$ является замкнутым. По пункту 1) Замечания 3.1, с учетом того, что замкнутые многозначные отображения принимают замкнутые значения (Замечание 2.12 из [9]), множества $D_t(\cdot)$ замкнуты, а $\hat{D}_t^a(\cdot)$ компактны в соответствии с пунктом 1) Замечания 3.1. Поскольку множества $\hat{D}_t^a(\cdot)$ выпуклы, то применима Теорема 2.102 из [9], в соответствии с которой многозначное отображение с аргументом из метрического пространства и принимающее значения в виде линейно связных компактных подмножеств конечномерного евклидова пространства, полунепрерывное снизу и замкнутое, является непрерывным. □

Теорема 3.2. *Пусть для $t = 1, \dots, N$ числовые функции $\bar{x}_t \mapsto g_t(\bar{x}_t)$ непрерывны, многозначные отображения $\bar{x}_{t-1} \mapsto K_t(\bar{x}_{t-1})$ непрерывны, выполняется условие $RNDSAUP$, многозначные отображения $\bar{x}_{t-1} \mapsto D_t(\bar{x}_{t-1})$ полунепрерывны снизу и замкнуты. Тогда выполняются утверждения 1) и 2) Теоремы 2.7.*

Доказательство. Фиксируем $a > C$ и вместо $D_t(\cdot)$ в формулах (BA) выбираем $\hat{D}_t^a(\cdot)$, пользуясь Леммой 3.1. По Предложению 3.3 компактнозначное отображение $x \mapsto \hat{D}_t^a(x)$ непрерывно, так что непосредственно применима Теорема 2.7. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лейхтвейс К. *Выпуклые множества.* М.: Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы. 1985.
2. Половинкин Е.С. *Многозначный анализ и дифференциальные включения.* М.: Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы. 2015.
3. Смирнов С.Н. *Гарантированный детерминистский подход к суперхеджированию: модель рынка, торговые ограничения, безарбитражность и уравнения Беллмана-Айзекса* // Математическая Теория Игр и ее Приложения. 2018. Том 10. № 4. С. 59–99.
4. Смирнов С.Н. *Гарантированный детерминистский подход к суперхеджированию: свойства «безарбитражности» рынка* // Математическая Теория Игр и ее Приложения. 2019. Том 11. № 2. С. 68–95.
5. Смирнов С.Н. *Феллеровское переходное ядро с носителями мер, заданными многозначным отображением* // Труды института математики и механики УрО РАН. 2019. Том 25, № 1. С. 219–228.
6. Berge C. *Espaces topologiques: Fonctions multivoques.* Collection unive. Dunod, 1959.
7. Berge C. *Topological Spaces: including a treatment of multi-valued functions, vector spaces, and convexity.* London: Oliver & Boyd, 1963.
8. Föllmer H., Schied A. *Stochastic Finance. An Introduction in Discrete Time.* 4nd edition. New York: Walter de Gruyter, 2016.
9. Hu S., Papageorgiou N. *Handbook of Multivalued Analysis: Theory, vol. I. Mathematics and Its Applications.* Vol. 419. Berlin: Springer, 1997.

10. Kneser H. *Sur un théorème fondamental de la théorie des jeux* // CR Acad. Sci. Paris. 1952. Vol. 234. P. 2418–2420.

11. Rockafellar R.T. *Convex Analysis*. Princeton: Princeton University Press, 1970.

A GUARANTEED DETERMINISTIC APPROACH TO SUPERHEDGING: THE PROPRIETIES OF SEMICONTINUITY AND CONTINUITY OF THE BELLMAN-ISAACS EQUATIONS

Sergey N. Smirnov, Department of System Analysis, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University, Cand.Sc., associate professor (s.n.smirnov@gmail.com).

Abstract: A guaranteed deterministic problem setting of super-replication with discrete time is considered: the aim of hedging of a contingent claim is to ensure the coverage of possible payout under the option contract for all admissible scenarios. These scenarios are given by means of a priori given compacts, that depend on the prehistory of prices: the increments of the price at each moment of time must lie in the corresponding compacts. The absence of transaction costs is assumed; the market is considered with trading constraints. The game-theoretical interpretation implies that the corresponding Bellman-Isaacs equations holds. In the present paper we propose several conditions for the solutions of these equations to be semicontinuous or continuous.

Keywords: guaranteed estimates, deterministic price dynamics, super-replication, option, Bellman-Isaacs equations, multi-valued mapping, semi-continuity, continuity, robust condition of no arbitrage.