Математическая Теория Игр и её Приложения, т.12, в.1, с. 3–18

УДК 517.9
ББК 22.1

О ДИСКРЕТНЫХ РЕЖИМАХ ПОЛУЧЕНИЯ ИНФОРМАЦИИ В НЕАНТАГОНИСТИЧЕСКОЙ ПОВТОРЯЮЩЕЙСЯ ИГРЕ

Елена З. Мохонько
Вычислительный центр им. А.А.Дородницына
ФИЦ ИУ РАН
119333, Москва, ул. Вавилова, 40
e-mail: mohon@ccas.ru

Подынтегральные функции выигрыша в повторяющейся игре зависят от выборов игроков и от времени. Множество выборов второго игрока меняется со временем по одному из вариантов, который уточняется по ходу игры. Текущая информация о множестве выборов и о выборах партнера поступает дискретно. Найден оптимальный дискретный режим получения информации, позволяющий сохранить ситуацию равновесия.

Ключевые слова: динамические неантагонистические игры, оптимальный режим получения информации, равновесие по Нэшу.

Поступила в редакцию: 08.07.19 *После доработки*: 28.11.19 *Принята к публикации*: 23.12.19

1. Введение

Игра, рассмотренная в этой работе, продолжает исследования автора, опубликованные в работах [8,9] и др. Исследовались неантагонистические повторяющиеся игры [4], в которых множество выборов второго игрока могло измениться один раз за всю игру. Рассматривались игры с различной информированностью игроков о моменте изменения.

В работе [10] до начала игры игроки знают, что на протяжении игры множество выборов второго игрока изменяется. Варианты возможного изменения известны. Подынтегральные функции выигрыша игроков зависят от выборов игроков и не зависят от времени.

В данной работе подынтегральные функции выигрыша игроков зависят не только от их выборов, но и от времени. Так же, как и в [10], до начала игры игроки знают варианты возможного изменения множества выборов второго игрока. А какой именно вариант осуществится – не известно заранее. Это выясняется в процессе игры. Содержательно это означает, что в ходе игры могут возникать какие – то обстоятельства, “возмущения”, которые изменяют множество выборов второго игрока. Возможные изменения в каком-то смысле предсказуемы.

В отличие от [10] в данной игре есть ограничения на вид изменения множества выборов второго игрока. Оно изменяется в отдельные моменты времени, а между этими моментами остается постоянным. И так для каждого варианта.

Процедура получения информации о множестве выборов такова, что в каждый момент времени игроки знают текущее множество выборов второго игрока и помнят, каким оно было в предыдущие моменты времени.

Найден оптимальный дискретный режим получения информации о выборах партнера, позволяющий сохранить ситуацию равновесия, существующую при непрерывном получении информации о них.

2. Повторяющаяся игра с уточняемым множеством выбора

Рассмотрим неантагонистическую повторяющуюся игру двух лиц с непрерывным временем, протекающую на отрезке $[0,1]$.

Функции выигрыша игроков определяются равенствами

$$F_1 = \int_0^1 M_1(x(t),t)\,dt, \qquad F_2 = \int_0^1 M_2(x(t),t)\,dt.$$

Здесь функции M_i, $i = 1,2$ непрерывны по x на $X(t)$ $\forall\, t$ и по t на $[0,1]$.

Множество выборов X_i^t, $i = 1,2$ игроков описываются измеримыми функциями $x_i(t)$: $[0,1] \to X_i(t)$, $X_i(t)$ – замкнутое ограниченное множество $\forall\, t \in [0,1]$,

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t)) \in X(t) = X_1(t) \times X_2(t),\ x_i(\cdot, t) = \{x_i(\tau), 0 \le \tau \le t\}.$$

В общем случае рассматриваются только такие изменения $X(t)$, при которых существуют все интегралы, необходимые для исследования игры.

В данной работе рассматривается частный случай изменения множеств выборов игроков. А именно, игроки в начале игры знают, что $X_1(t) \equiv X_1\ \forall\, t \in [0,1]$ и что $X_2(0) \equiv X_2^0$, но в процессе игры $X_2(t)$, $t \in (0,1]$ может изменяться. Вариантов изменения конечное число N.

Обозначим $I(0) = \{j \mid j \in \{1, \dots, N\}\}$,

$$X_2^j(\cdot) = \{X_2^j(\vartheta) \mid 0 \le \vartheta \le 1\}, \qquad X_2^j(t) = X_2^0, \qquad j \in I(0).$$

Варианты изменения известны игрокам. А именно, для каждого варианта известно множество моментов времени $\{\vartheta_i^j\}_{i=1}^{m_j}$, когда множество выборов второго игрока изменялось бы, если бы его изменения происходили бы по этому варианту. Известно также каким было бы множество выборов второго игрока на интервалах между моментами изменений $\vartheta_i^j \le t < \vartheta_{i+1}^j$, $i = 1, \dots, m_{j-1}$, $\vartheta_{m_j}^j \le t \le 1$. При этом для обоих вариантов $X_2^j(t) = X_2^0$, $t \in [0, \vartheta_1^j)$, $j \in I(0)$.

Процедура получения информации о множестве выборов второго игрока такова. Для всех игроков первым моментом получения информации о состоянии множества выборов второго игрока является момент времени $\vartheta_1^r = \min\limits_{j \in I(0)} \vartheta_1^j$. В момент ϑ_1^r все игроки получают информацию о том, каким в реальности является множество выборов второго игрока $X_2^r(\vartheta_1^r)$. Игроки запоминают эту информацию. Она изменяет представления игроков о том, как может в дальнейшем изменяться множество выборов второго игрока, к какому подмножеству $S(\vartheta_1^r)$ множества $S(0) = \{X_2^j(\cdot)\}_1^N$ принадлежит реальный сценарий $X_2^r(\cdot)$ изменения множества выборов второго игрока. Множество индексов вариантов, входящих в $S(\vartheta_1^r)$ обозначим $I(\vartheta_1^r)$. В общем случае, если $\vartheta_k^r = \max\limits_{\vartheta_j^r \le t} \vartheta_j^r$, то $I(t)$ – множество индексов вариантов из $S(\vartheta_k^r)$. В момент t все игроки знают $I(t)$.

То есть в начале игры игроки знают $S(0) = \{X_2^j(\cdot)\}_1^N$, но не знают, какой именно $X_2^j(\cdot)$ осуществится в реальности. После получения сообщения об $X_2^r(\vartheta_1^r)$ они знают, что изменение множества выборов второго игрока осуществляется по одному из вариантов из множества $S(\vartheta_1^r) = \{X_2^j(\cdot) \mid j \in I(0), X_2^j(\vartheta_1^r) = X_2^r(\vartheta_1^r)\}$. Количество индексов $j \in I(\vartheta_1^r)$ может быть меньше N. Если это количество равно единице, то это значит, что игроки знают, как будет меняться множество выборов второго игрока. Если это количество больше единицы, то процедура выяснения множества выборов второго игрока $X_2^r(\cdot)$ продолжается.

Выбирается $\vartheta_2^r = \min\limits_{j\in I(\vartheta_1^r), \vartheta_l^j > \vartheta_1^r, l\in\{1,\ldots,m_j\}} \vartheta_l^j$.

Игроки знают, что при t, $t \in [\vartheta_1^r, \vartheta_2^r)$ множество выборов второго игрока будет $X_2^r(\vartheta_1^r)$. Далее процедура повторяется. После получения информации об $X_2^r(\vartheta_2^r)$ определяется $I(\vartheta_2^r)$, подмножество индексов вариантов, входящих в $S(\vartheta_1^r)$. По количеству элементов в этом множестве определяется необходимость продолжения выяснения реального варианта $X_2^r(\cdot)$.

Если количество элементов в $I(\vartheta_2^r)$ больше единицы, то ищется ϑ_3^r и т. д.

Пусть определено ϑ_k^r, $k > 1$, и в момент ϑ_k^r получена информация $X_2^r(\vartheta_k^r)$. Определяется $S(\vartheta_k^r) = \{X_2^j(\cdot) \mid j \in I(\vartheta_{k-1}^r), X_2^j(\vartheta_k^r) = X_2^r(\vartheta_k^r)\}$. По нему определяется состав и количество элементов во множестве $I(\vartheta_k^r) = \{j \mid j \in I(\vartheta_{k-1}^r), X_2^j(\vartheta_k^r) = X_2^r(\vartheta_k^r)\}$. Если количество элементов в нем равно единице, то это значит, что игроки знают, как изменяется со временем множество выборов второго игрока. Если количество элементов в нем больше единицы, то определяем $\vartheta_{k+1}^r = \min\limits_{j\in I(\vartheta_k^r),\, \vartheta_l^j > \vartheta_k^r,\, l\in\{1,\ldots,m_j\}} \vartheta_l^j$. И процесс продолжается.

В результате в каждый момент времени t игроки знают, какое множество выборов $X_2^r(t)$ у второго игрока.

Если t – момент получения информации о множестве выборов второго игрока, то они знают это множество, потому что в этот момент получили информацию о нем.

Если t – не момент получения информации о множестве выборов второго игрока, то они знают какое это множество в момент t, так как оно совпадает с тем множеством, о котором была получена информация в последний перед t момент получения информации.

Конкретные моменты получения информации о множестве выборов второго игрока вычисляются по ходу игры. Их, как правило, нельзя вычислить до начала игры.

Рассматривается класс стратегий с памятью

$$(\phi_1(x_2(\cdot,t_k),t)),\quad \phi_2(x_1(\cdot,t_k),t),\quad t_k\le t<t_{k+1},\quad t_0=0,\quad k=0,1,\dots\ .$$

По определению, при $t=0$ $\phi_i=x_i$.

Содержательно эти стратегии означают, что в любой момент времени t, $t_k\le t<t_{k+1}$, игрок знает о поведении партнера на $[0,t_k]$.

Обозначения:

$$L_1^j(t)=\min_{x_2(t)\in X_2^j(t)}\max_{x_1(t)\in X_1} M_1(x_1(t),x_2(t),t),$$

$$L_2^j(t)=\min_{x_1(t)\in X_1}\max_{x_2(t)\in X_2^j(t)} M_2(x_1(t),x_2(t),t).$$

Предполагаем, что существует $x^0\in X_1\times X_2(0)$ такое, что для любого $j=1,\dots,N$, $x_2^0\in X_2^j(\cdot)$ и

$$M_1(x^0,t)>L_1^j(t),\qquad M_2(x^0,t)>L_2^j(t),\qquad j=1,\dots,N,\qquad t\in[0,1].$$

При этом предположении существует ситуация равновесия ϕ_1^0,ϕ_2^0,

$$\phi_1^0(x_2(\cdot,t_k^1),t)=\begin{cases}x_1^0,x_2(\cdot,t_k^1)\equiv x_2^0,\ t_k^1\le t<t_{k+1}^1,\\ x_1^n(t)\in \operatorname{Arg}\min\limits_{x_1(t)\in X_1}\max\limits_{x_2(t)\in X_2(t)} M_2(x_1,x_2,t),\ x_2(\cdot,t_k^1)\ne x_2^0,\end{cases}$$

$$\phi_2^0(x_1(\cdot,t_k^2),t)=\begin{cases}x_2^0,x_1(\cdot,t_k^2)\equiv x_1^0,\ t_k^2\le t<t_{k+1}^2,\\ x_2^n(t)\in \operatorname{Arg}\min\limits_{x_2(t)\in X_2(t)}\max\limits_{x_1(t)\in X_1} M_1(x_1,x_2,t),\ x_1(\cdot,t_k^2)\ne x_1^0.\end{cases}$$

Здесь $t_0=0$ для обоих игроков, а способ нахождения моментов t_k^i, $k=1,2,\dots$, $i=1,2$ описан ниже.

Они тоже, как правило, вычисляются по ходу игры, а не до начала игры.

Игроки находятся на одном уровне иерархии. Они выбирают стратегии одновременно. Это ситуация равновесия по Нэшу в стратегиях с памятью.

Обозначения:

$$M_1^{*j}(\vartheta)=\max_{x_1(\vartheta)\in X_1} M_1(x_1(\vartheta),x_2^0,\vartheta),$$

$$M_2^{*j}(\vartheta)=\max_{x_2(\vartheta)\in X_2^j(\vartheta)} M_2(x_1^0,x_2(\vartheta),\vartheta).$$

Для варианта множества выборов второго игрока, который осуществился в реальности X_2^r обозначим

$$
\begin{aligned}
M_1^{*r}(\vartheta) &= M_1^{*j}(\vartheta) = \max_{x_1(\vartheta)\in X_1} M_1(x_1(\vartheta), x_2^0, \vartheta),\\
M_2^{*r}(\vartheta) &= \max_{x_2(\vartheta)\in X_2^r(\vartheta)} M_2(x_1^0, x_2(\vartheta), \vartheta),\\
L_1^r(\vartheta) &= \min_{x_2(\vartheta)\in X_2^r} \max_{x_1(\vartheta)\in X_1} M_1(x_1(\vartheta), x_2(\vartheta), \vartheta),\\
L_2^r(\vartheta) &= \min_{x_1(\vartheta)\in X_1} \max_{x_2(\vartheta)\in X_2^r(\vartheta)} M_2(x_1(\vartheta), x_2(\vartheta), \vartheta), \qquad \vartheta \in [0,1].
\end{aligned}
$$

Моменты получения информации t_k^1 игроком 1 находятся следующим образом.

Из $S(0)$ выбирается один из способов $X_2^j(\cdot)$ возможного изменения множества выборов второго игрока от $t = 0$до конца игры.

Для этого способа для каждого $\vartheta \in [0,1]$ подсчитываются $M_2^{*j}(\vartheta)$ и $L_2^j(\vartheta)$ и находится такое $\tau_1^1(j)$, при котором выполняется равенство

$$\int_0^{\tau_1^1(j)} \max_{x_2(\vartheta)\in X_2^j(\vartheta)} M_2(x_1^0, x_2(\vartheta), \vartheta)\, d\vartheta + \int_{\tau_1^1(j)}^1 L_2^j(\vartheta)\, d\vartheta = \int_0^1 M_2(x^0, \vartheta)\, d\vartheta.$$

Далее из $S(0)$ берется следующий вариант $X_2^s(\cdot)$ изменения множества выборов второго игрока и для него находится тем же способом $\tau_1^1(s)$. Получив τ_1^1 для каждого способа изменения множества выборов второго игрока из $S(0)$, получим множество $\{\tau_1^1(j)\}_{j\in I(0)}$. В этом множестве найдем τ_1^1 наименьшее. Это τ_1^1 и будет равно $t_1^1(0)$.

То есть $t_1^1(0)$ определяется по формуле $t_1^1(0) = \min\limits_{j\in I(0)} \tau_1^1(j)$.

Если первый момент получения информации о множестве выборов второго игрока $\vartheta_1^r \in [0, t_1^1(0)]$, то, получив информацию о $X_2^r(\vartheta_1^r)$, найдем $S(\vartheta_1^r)$ и $I(\vartheta_1^r)$. Если $I(\vartheta_1^r)$ содержит только один индекс, то это значит, что игрокам известно, как будет меняться множество выборов второго игрока в реальности $X_2^r(\cdot)$. Тогда $t_1^1 = \tau_1^1$, где τ_1^1 подсчитано для варианта $X_2^r(\cdot)$. Остальные моменты получения информации о выборах второго игрока подсчитываются по формуле

$$
\begin{aligned}
&\int_{t_k^1}^{t_{k+1}^1} \max_{x_2(\vartheta)\in X_2^r(\vartheta)} M_2(x_1^0, x_2(\vartheta), \vartheta)\, d\vartheta + \int_{t_{k+1}^1}^1 L_2^r(\vartheta)\, d\vartheta =\\
&\qquad = \int_0^1 M_2(x^0, \vartheta) d\vartheta, \qquad k = 1, 2, \ldots. \qquad (2.1)
\end{aligned}
$$

Если $I(\vartheta_1^r)$ содержит несколько индексов, то далее определим $t_1^1(\vartheta_1^r) = \min\limits_{j\in I(\vartheta_1^r)} \tau_1^1(j)$. $t_1^1(\vartheta_1^r)$ может быть больше, чем $t_1^1(0)$. Если $\vartheta_2^r \in [0, t_1^1(\vartheta_1^r)]$, то находим $S(\vartheta_2^r)$ и $I(\vartheta_2^r)$. Если $I(\vartheta_2^r)$ содержит только один индекс, то подсчитываем моменты получения информации о действиях второго игрока так, как это делалось в аналогичной ситуации, описанной выше. В противном случае подсчитываем $t_1^1(\vartheta_2^r) = \min\limits_{j\in I(\vartheta_2^r)} \tau_1^1(j)$. Повторяем процесс, если $\vartheta_3^r \in [0, t_1^1(\vartheta_2^r)]$ и так далее. Поскольку вариантов изменения множества выборов второго игрока конечное число, то в конце концов придем к числу p такому, что $\vartheta_p^r \in [0, t_1^1(\vartheta_{(p-1)}^r)], \vartheta_{p+1}^r \notin [0, t_1^1(\vartheta_p^r)]$ и к значению $t_1^1(\vartheta_p^r) = \min\limits_{j\in I(\vartheta_p^r)} \tau_1^1(j)$. Оно не может измениться информацией о множестве выборов второго игрока. Это и будет момент t_1^1, то есть $t_1^1 = t_1^1(\vartheta_p^r)$.

Для нахождения t_2^1 повторим процедуру. Пусть $S(t_1^1)$ – уточненное представление игроков в момент $t_1^1 = t_1^1(\vartheta_p^r)$ к какому подмножеству вариантов множества $S(0)$ принадлежит реальный вариант, $S(t_1^1) = S(\vartheta_p^r)$, $I(t_1^1) = I(\vartheta_p^r)$. Если количество индексов в $I(t_1^1)$ равно 1, то по t_1^1 находится t_2^1 и т. д., как это было сделано выше в аналогичной ситуации.

Если количество индексов не равно единице, определим $t_2^1(t_1^1)$ по формуле $t_2^1(t_1^1) = \min\limits_{j\in I(t_1^1)} \tau_2^1(j)$. Здесь $\tau_2^1(j)$ для каждого варианта из $S(t_1^1)$ находится из равенства

$$\int_{t_1^1}^{\tau_2^1(j)} \max_{x_2(\vartheta)\in X_2^j(\vartheta)} M_2(x_1^0, x_2(\vartheta), \vartheta)\, d\vartheta + \int_{\tau_2^1(j)}^{1} L_2^j(\vartheta)\, d\vartheta = \int_{t_1^1}^{1} M_2(x^0, \vartheta)\, d\vartheta.$$

Для того чтобы применить эту формулу для каждого варианта, надо для каждого варианта подсчитать $M_2^{*j}(\vartheta)$ и $L_2^j(\vartheta)$.

Если $\vartheta_m^r \in [t_1^1, t_2^1(t_1^1))$, то по поступающей информации в момент ϑ_m^r подсчитываем $I(\vartheta_m^r)$ и $S(\vartheta_m^r)$, $S(\vartheta_m^r) \subset S(t_1^1)$. Если количество индексов в $I(\vartheta_m^r)$ равно единице, то t_2^1 и последующие моменты t_k^1 находим по формуле (2.1).

Если количество индексов во множестве $I(\vartheta_m^r)$ больше единицы, то пересчитываем, как раньше $t_2^1(\vartheta_m^r) = \min\limits_{j\in I(\vartheta_m^r)} \tau_2^1(j)$. Если на $[t_1^1, t_2^1(\vartheta_m^r))$ есть момент получения информации о множестве выборов второго игрока, который больше ϑ_m^r, то повторяем процедуру.

В результате приходим к значению $t_2^1(\vartheta_s^r)$, которое не может измениться из-за поступления информации о множестве выборов второго игрока, $\vartheta_s^r \in [0, t_2^1(\vartheta_{(s-1)}^r)], \vartheta_{s+1}^r \notin [0, t_2^1(\vartheta_s^r)]$. Примем $t_2^1 = t_2^1(\vartheta_s^r)$. t_{k+1}^1, $k = 2, 3, \ldots$ находятся аналогично.

В ходе игры получим последовательность $\{t_k^1\}_{k=0}^{\infty}$, $t_0^1 = 0$.

Моменты получения информации вторым игроком t_k^2 о выборах первого игрока находятся аналогичным образом. Для примера, найдем $t_1^2(0)$ по формуле $t_1^2(0) = \min\limits_{j \in I(0)} \tau_1^2(j)$. А $\tau_1^2(j)$ находится из равенства

$$\int_0^{\tau_1^2(j)} \max_{x_1 \in X_1} M_1(x_1, x_2^0, \vartheta)\, d\vartheta + \int_{\tau_1^2(j)}^1 L_1^j(\vartheta)\, d\vartheta = \int_0^1 M_1(x^0, \vartheta)\, d\vartheta.$$

И так далее. В результате будет найдена последовательность $\{t_k^2\}_{k=0}^{\infty}$, $t_0^2 = 0$.

Теорема 2.1. *Найденные моменты получения информации о поведении партнера обеспечивают равновесие*

$$\phi_1^0, \phi_2^0.$$

Доказательство. Покажем, что отклонение от договорной траектории не выгодно второму игроку.

Пусть t_1 – время начала отступления игрока 2 от выбора x_2^0, т. е.

$$x_2(\cdot, t) = x_2^0, \qquad t \in [0, t_1], \qquad x_2(\cdot, t) \neq x_2^0, \qquad t > t_1,$$

$$t_{k-1}^1 \leq t_1 < t_k^1, \qquad t_k^1 = \min_{j \in I(\vartheta)} \tau_k^1(j),$$

ϑ – момент последнего в процедуре подсчета t_k^1 изменения представления о том, к какому множеству вариантов $S(\vartheta)$ принадлежит реальный вариант изменения множества $X_2^r(\cdot)$. Количество индексов $I(\vartheta)$ содержит более одного элемента.

$\tau_k^1(j)$ подсчитывается для каждого из вариантов из $I(\vartheta)$ по формуле

$$\int_{t_{k-1}^1}^{\tau_k^1(j)} \max_{x_2(\vartheta) \in X_2^j(\vartheta)} M_2(x_1^0, x_2(\vartheta), \vartheta)\, d\vartheta + \int_{\tau_k^1(j)}^1 L_2^j(\vartheta)\, d\vartheta = \int_{t_{k-1}^1}^1 M_2(x^0, \vartheta)\, d\vartheta.$$

Обозначим через τ_k^{1r} момент $\tau_k^1(j)$, подсчитанный для варианта $X_2^r(\cdot)$, который в реальности осуществится, $t_k^1 \leq \tau_k^{1r}$.

При учете $\phi_1 = \phi_1^0$ выигрыш игрока 2 оценивается следующим неравенством

$$F_2(\phi_1^0, \phi_2) \leq \int_0^{t_1} M_2(x^0, \vartheta)\, d\vartheta + \int_{t_1}^{t_k^1} \max_{x_2(\vartheta)\in X_2^r(\vartheta)} M_2(x_1^0, x_2(\vartheta), \vartheta)\, d\vartheta +$$
$$+ \int_{t_k^1}^{1} \min_{x_1(\vartheta)\in X_1} \max_{x_2(\vartheta)\in X_2^r(\vartheta)} M_2(x_1, x_2, \vartheta)\, d\vartheta \leq$$
$$\leq \int_0^{t_{k-1}^1} M_2(x^0, \vartheta)\, d\vartheta + \int_{t_{k-1}^1}^{t_k^1} \max_{x_2(\vartheta)\in X_2^r(\vartheta)} M_2(x_1^0, x_2(\vartheta), \vartheta)\, d\vartheta +$$
$$+ \int_{t_k^1}^{\tau_k^{1r}} \min_{x_1(\vartheta)\in X_1} \max_{x_2(\vartheta)\in X_2^r(\vartheta)} M_2(x_1(\vartheta), x_2(\vartheta), \vartheta)\, d\vartheta +$$
$$+ \int_{\tau_k^{1r}}^{1} \min_{x_1(\vartheta)\in X_1} \max_{x_2(\vartheta)\in X_2^r(\vartheta)} M_2(x_1(\vartheta), x_2(\vartheta), \vartheta)\, d\vartheta \leq \int_0^{t_{k-1}^1} M_2(x^0, \vartheta)\, d\vartheta +$$
$$+ \int_{t_{k-1}^1}^{\tau_k^{1r}} \max_{x_2(\vartheta)\in X_2^r(\vartheta)} M_2(x_1^0, x_2, \vartheta)\, d\vartheta +$$
$$+ \int_{\tau_k^{1r}}^{1} \min_{x_1(\vartheta)\in X_1} \max_{x_2(\vartheta)\in X_2^r(\vartheta)} M_2(x_1(\vartheta), x_2(\vartheta), \vartheta)\, d\vartheta = \int_0^1 M_2(x^0, \vartheta)\, d\vartheta.$$

Если $I(\vartheta)$ содержит один индекс, то утверждение теоремы следует из способа подсчета t_k^1.

То есть в итоге $F_2(\phi_1^0, \phi_2) \leq \int_0^1 M_2(x^0, \vartheta)\, d\vartheta$. Отклонение от договорной траектории не выгодно второму игроку.

Аналогично доказывается, что отклонение от договорной траектории не выгодно и первому игроку. Доказательство окончено. □

Так вычисленные моменты получения информации о выборах партнера обладают свойством оптимальности.

Определение 2.1. *Моменты расположены оптимальным образом, если увеличение расстояния между моментами может привести к тому, что исчезнет ситуация равновесия, существовавшая при первоначальном расположении моментов получения информации о выборах партнера.*

Теорема 2.2. *Полученная последовательность моментов* $\{t_k^1\}_{k=0}^{\infty}$ *оптимальна.*

Доказательство. Выберем два момента t^1_{k-1}, t^1_k, $k \geq 1$, из этой последовательности. Покажем, что они расположены оптимально. Пусть ϑ – последний перед t^1_k момент получения информации о множестве выборов второго игрока.

Существует вариант $X^*_2(\cdot)$ из $S(\vartheta)$ такой, что

$$\int_0^{t^1_{k-1}} M_2(x^0,\vartheta)\,d\vartheta + \int_{t^1_{k-1}}^{t^1_k} \max_{x_2(\vartheta)\in X^*_2(\vartheta)} M_2(x^0_1, x_2(\vartheta),\vartheta)\,d\vartheta +$$
$$+ \int_{t^1_k}^1 \min_{x_1(\vartheta)\in X_1} \max_{x_2(\vartheta)\in X^*_2(\vartheta)} M_2(x_1(\vartheta), x_2(\vartheta),\vartheta)\,d\vartheta =$$
$$= \int_0^1 M_2(x^0,\vartheta)\,d\vartheta.$$

И для любого $T > t^1_k$

$$\int_0^{t^1_{k-1}} M_2(x^0,\vartheta)\,d\vartheta + \int_{t^1_{k-1}}^{t^1_k} \max_{x_2(\vartheta)\in X^*_2(\vartheta)} M_2(x^0_1, x_2(\vartheta),\vartheta)\,d\vartheta +$$
$$+ \int_{t^1_k}^{T} \max_{x_2(\vartheta)\in X^*_2(\cdot,0)} M_2(x^0_1, x_2(\vartheta),\vartheta)\,d\vartheta + \int_T^1 L_2(\vartheta)\,d\vartheta >$$
$$> \int_0^1 M_2(x^0,\vartheta)\,d\vartheta,$$

Если в реальности осуществится вариант $X^*_2(\cdot)$, то последнее неравенство означает, что ситуация равновесия, существующая при k-том моменте получения информации t^1_k исчезнет, если k-м моментом получения информации будет момент T.

Аналогично проводится доказательство для моментов t^2_{k-1}, t^2_k, $k \geq 1$.

Доказательство окончено. □

Замечание 2.1. Пусть $M_2(x_1, x_2, t) = M_2(x_1, x_2) + \phi(t)$, $\phi(t)$ – непрерывная на $[0, 1]$ функция. В этом случае моменты получения информации о выборах второго игрока будут те же, что и тогда, когда функция выигрыша второго игрока не зависит от времени, то есть имеет вид $M_2(x_1, x_2)$.

Подсчитаем $\tau_2^1(t_1^1)$ для множества выборов $X_2(\vartheta)$:

$$\int_{t_1^1}^{\tau_2^1} \max_{x_2(\vartheta)\in X_2(\vartheta)} M_2(x_1^0, x_2(\vartheta), \vartheta)\, d\vartheta +$$

$$+ \int_{\tau_2^1}^{1} \min_{x_1(\vartheta)\in X_1} \max_{x_2(\vartheta)\in X_2(\vartheta)} M_2(x_1(\vartheta), x_2(\vartheta), \vartheta)\, d\vartheta = \int_{t_1^1}^{1} M_2(x^0, \vartheta)\, d\vartheta,$$

$$\int_{t_1^1}^{\tau_2^1} \max_{x_2(\vartheta)\in X_2(\vartheta)} M_2(x_1^0, x_2(\vartheta))\, d\vartheta +$$

$$+ \int_{t_1^1}^{\tau_2^1} \phi(\vartheta)\, d\vartheta + \int_{\tau_2^1}^{1} \min_{x_1(\vartheta)\in X_1} \max_{x_2(\vartheta)\in X_2(\vartheta)} M_2(x_1(\vartheta), x_2(\vartheta))\, d\vartheta +$$

$$+ \int_{\tau_2^1}^{1} \phi(\vartheta)\, d\vartheta = \int_{t_1^1}^{1} M_2(x^0)\, d\vartheta + \int_{t_1^1}^{1} \phi(\vartheta)\, d\vartheta,$$

$$\int_{t_1^1}^{\tau_2^1} \max_{x_2(\vartheta)\in X_2(\vartheta)} M_2(x_1^0, x_2(\vartheta))\, d\vartheta +$$

$$+ \int_{\tau_2^1}^{1} \min_{x_1(\vartheta)\in X_1} \max_{x_2(\vartheta)\in X_2(\vartheta)} M_2(x_1(\vartheta), x_2(\vartheta))\, d\vartheta = \int_{t_1^1}^{1} M_2(x^0)\, d\vartheta.$$

И это верно для любого $\tau_2^1(j)$, подсчитанного для любого варианта $X_2^j(\vartheta)$. t_2^1 совпадает с одним из $\tau_2^1(j)$. Значит, утверждение верно и для t_2^1.

Пример 2.1.

$$M_1(x_1, x_2, t) = x_2 - \frac{1}{2}x_1 + t, \quad M_2(x_1, x_2, t) = x_1 - \frac{1}{2}x_2 + t, \quad t \in [0,1],$$
$$X_1(t) = [0,1], \quad t \in [0,1], x_1^0(t) \equiv 1, \quad t \in [0,1], \quad x_2^0(t) \equiv 1, \quad t \in [0,1],$$
$$M_1^0(t) = \frac{1}{2} + t, \qquad M_2^0(t) = \frac{1}{2} + t.$$

Первый вариант возможного изменения множества выборов второго игрока:

$$X_2(t) = \begin{cases} [0,1], & t \in \left[0, \frac{3}{4}\right), \\ \left[\frac{1}{4}, 1\right], & t \in \left[\frac{3}{4}, 1\right]. \end{cases}$$

Второй вариант:

$$X_2(t) = \begin{cases} [0,1], & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right), \\ \left[\frac{1}{8}, 1\right], & t \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right), \\ \left[\frac{1}{4}, 1\right], & t \in \left[\frac{3}{4}, 1\right]. \end{cases}$$

Третий вариант:

$$X_2(t) = \begin{cases} [0,1], & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right), \\ \left[\frac{1}{8}, 1\right], & t \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right), \\ [0,1], & t \in \left[\frac{3}{4}, 1\right]. \end{cases}$$

При первом варианте

$$L_1 = \begin{cases} 0+t, & t \in \left[0, \frac{3}{4}\right), \\ \frac{1}{4}+t, & t \in \left[\frac{3}{4}, 1\right], \end{cases} \qquad L_2 = \begin{cases} 0+t, & t \in \left[0, \frac{3}{4}\right), \\ -\frac{1}{8}+t, & t \in \left[\frac{3}{4}, 1\right], \end{cases}$$

$$M_1^* = \begin{cases} 1+t, & t \in \left[0, \frac{3}{4}\right), \\ 1+t, & t \in \left[\frac{3}{4}, 1\right], \end{cases} \qquad M_2^* = \begin{cases} 1+t, & t \in \left[0, \frac{3}{4}\right), \\ \frac{7}{8}+t, & t \in \left[\frac{3}{4}, 1\right]. \end{cases}$$

При втором варианте

$$L_1 = \begin{cases} 0+t, & t \in [0, \frac{1}{2}), \\ \frac{1}{8}+t, & t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}), \\ \frac{1}{4}+t, & t \in [\frac{3}{4}, 1], \end{cases} \qquad L_2 = \begin{cases} 0+t, & t \in [0, \frac{1}{2}), \\ -\frac{1}{16}+t, & t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}), \\ -\frac{1}{8}+t, & t \in [\frac{3}{4}, 1], \end{cases}$$

$$M_1^* = \begin{cases} 1+t, & t \in [0, \frac{1}{2}), \\ 1+t, & t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}), \\ 1+t, & t \in [\frac{3}{4}, 1], \end{cases} \qquad M_2^* = \begin{cases} 1+t, t \in [0, \frac{1}{2}), \\ \frac{15}{16}+t, t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \\ \frac{7}{8}+t, t \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}$$

При третьем варианте

$$L_1 = \begin{cases} 0+t, & t \in [0, \frac{1}{2}), \\ \frac{1}{8}+t, & t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}), , \\ 0+t, & t \in [\frac{3}{4}, 1], \end{cases} \qquad L_2 = \begin{cases} 0+t, & t \in [0, \frac{1}{2}), \\ -\frac{1}{16}+t, & t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}), \\ 0+t, & t \in [\frac{3}{4}, 1], \end{cases}$$

$$M_1^* = \begin{cases} 1+t, & t \in [0, \frac{1}{2}), \\ 1+t, & t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}), \\ 1+t, & t \in [\frac{3}{4}, 1], \end{cases} \qquad M_2^* = \begin{cases} 1+t, & t \in [0, \frac{1}{2}), \\ \frac{15}{16}+t, & t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}), \\ 1+t, & t \in [\frac{3}{4}, 1]. \end{cases}$$

Реальное изменение множества идет по третьему варианту. Сначала игроки не знают об этом. И узнают только по информации о множестве выборов второго игрока, получаемой в моменты времени $\vartheta_1^r = \frac{1}{2}, \vartheta_2^r = \frac{3}{4}$.

Для первого варианта $\tau_1^1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{64}$. Для второго варианта $\tau_1^1 = \frac{1}{2} + \frac{3}{64}$. Для третьего варианта $\tau_1^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{64}$, $t_1^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{64}$. По информации о множестве $X_2\left(\frac{1}{2}\right)$ отбрасывается первый вариант. Остаются второй и третий варианты.

Для второго варианта $\tau_2^1 = \frac{823}{1024} > \frac{3}{4}$. Для третьего варианта $\tau_2^1 = \frac{791}{1024} > \frac{3}{4}$. Так что $t_2^1 = \frac{791}{1024}$. По информации $X_2\left(\frac{3}{4}\right)$ о множестве выборов игрока 2 в момент $t = \frac{3}{4}$ отбрасывается второй вариант. Остается третий вариант. Остальные моменты получения информации первым игроком о выборах второго игрока подсчитываются по третьему варианту.

$$t_n^1 = \frac{M_2^* - M_2^0}{M_2^* - L_2} t_{n-1}^1 + \frac{M_2^0 - L_2}{M_2^* - L_2}, \qquad t_n^1 = \frac{1}{2} t_{n-1}^1 + \frac{1}{2}.$$

Моменты получения информации о выборах второго игрока сходятся к 1.

$$\begin{gathered} t_{n-1}^1 < t_n^1 < 1. \\ t_n^1 - t_{n-1}^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} t_{n-1}^1, \\ \lim_{n\to\infty} (t_n^1 - t_{n-1}^1) = 0. \end{gathered}$$

По аналогии с этими вычислениями можно подсчитать моменты получения информации о выборах первого игрока.

Моменты получения информации о выборах второго игрока те же, что в игре, рассмотренной в примере из [10]. Там рассмотрена следующая игра:

$$\begin{aligned} &M_1(x_1, x_2) = x_2 - \frac{1}{2} x_1, \qquad M_2(x_1, x_2) = x_1 - \frac{1}{2} x_2, \qquad t \in [0,1], \\ &X_1(t) = [0,1], \quad t \in [0,1], \qquad x_1^0(t) \equiv 1, \quad t \in [0,1], \\ &x_2^0(t) \equiv 1, \qquad t \in [0,1], \qquad M_1^0 = \frac{1}{2}, \qquad M_2^0 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Варианты возможного изменения множества выборов второго игрока в примере из [10], те же, что и в рассматриваемом в данной работе примере.

3. Заключение

Есть много работ по повторяющимся и дифференциальным играм, в которых игроки используют информацию с какими-то особенностями. Например, игры с неполной информацией, с памятью, с запаздыванием информации, с помехами, с возможностью получать дискретную информацию в непрерывной игре. Назовем хотя бы монографии [6, 7, 11, 13], работу [5], главу 1 из [3] и др [1, 2, 12].

Данная статья относится к этому направлению развития теории игр. В ней определен оптимальный дискретный режим получения информации о выборах партнера в непрерывно повторяющейся игре при изменяющемся множестве выбора второго игрока. Подынтегральные функции выигрыша игроков зависят от выборов и от времени. До начала игры игроки знают варианты возможного изменения множества выборов второго игрока. Оно изменяется в отдельные моменты времени, а между этими моментами остается постоянным. И так для каждого варианта. А какой именно вариант осуществится – это выясняется в процессе игры.

Процедура получения информации о множестве выборов такова, что в каждый момент времени игроки знают текущее множество выборов второго игрока и помнят, каким оно было в предыдущие моменты времени. Моменты получения информации о выборах партнера и о множестве выборов второго игрока определяются по ходу игры. В общем случае их нельзя определить заранее, до начала игры.

Рассмотренная в данной работе игра может служить основой для исследования аналогичных, но более сложных игр. В этих играх игроки будут использовать неточную и запаздывающую информацию. Величина запаздывания и пределы неточности могут зависеть от времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горелов М.А. *Логика в исследовании иерархических игр с неопределенностью* // Автоматика и телемеханика. 2017. Вып. 11. С. 137–150.

2. Горелов М.А. *Иерархическая игра с ограничениями на содержание и объем передаваемой информации* // УБС. 2019. Вып. 77. С. 20–46.

3. Клейменов А.Ф. *Неантагонистические позиционные дифференциальные игры: Дис. ... докт. физ.-матем. наук.* Свердловск, ИММ УрО АН СССР, 1991. 320 с.

4. Кононенко А.Ф. *Модель с непрерывным временем* // Современное состояние теории исследования операций: Сб. науч. тр. М.: Наука, 1976. С. 173–179.

5. Кононенко А.Ф. *О задаче наблюдения в повторяющихся операциях* // Современное состояние теории исследования операций: Сб. науч. тр. М.: Наука, 1976. С. 179-172.

6. Красовский Н.Н., Субботин А.И. *Позиционные дифференциальные игры.* М.: Наука, 1974. 456 с.

7. Куржанский А.Б. *Управление и наблюдение в условиях неопределенности.* М.: Наука, 1977. 392 с.

8. Мохонько Е.З. *Повторяющаяся игра с изменяющимися возможностями игроков* // Материалы девятой международной конференции «Управление развитием крупномасштабных систем» (MLSD'2016, 3–5 октября 2016 г., Москва, Россия, ИПУ РАН). М.: ИПУ РАН, 2016. Т. 1. С. 393–396.

9. Мохонько Е.З. *Информационные процессы в повторяющихся играх с изменяющимися множествами выбора* // VII Всероссийская научная конференция с международным участием «Математическое моделирование развивающейся экономики, экологии и технологий», Москва, 21–24 октября 2014. Тезисы докладов. М.: ФГБУ ВЦ РАН, 2014. С. 80.

10. Мохонько Е.З. *Повторяющая игра с изменяющимся множеством выбора второго игрока* // Материалы десятой международной конференции «Управление развитием крупномасштабных систем» (MLSD'2017, 2–4 октября 2017 г., Москва, Россия, ИПУ РАН). М.: ИПУ РАН, 2017. Т. 1. С. 344–347.

11. Петросян Л.А. *Дифференциальные игры преследования.* Л.: ЛГУ, 1987. 222 с.

12. Родюков А.В., Тараканов А.Ф. *Гарантированное равновесие в иерархической игре с функциями риска игроков* // Труды V Московской международной конференции по исследованию операций (ORM2007, 10–14 апреля 2007 г., Москва, МГУ). М.: МАКС Пресс, 2007. С.287–289.

13. Черноусько Ф.Л., Меликян А.А. *Игровые задачи управления и поиска.* М: Наука, 1978. 270 с.

DISCRETE REGIMES OF INFORMATION RECEPTION IN NON –ANTAGONISTIC REPEATED GAME

Elena Z. Mokhonko, Dorodnicyn Computing Center FRC CSC RAS, Dr.Sc. (mohon@ccas.ru)

Abstract: The gain functions depend on the choices of players and time. The set of choices of the second player is changed in time according to one of some variants. The true variant is ascertained during the game. The current information about the set of choices and about partner's choices is received as sample data. An optimal discrete procedure of obtaining information is found that allows preserving the equilibrium.

Keywords: dynamic non-antagonistic game, optimum regime of the information receipt, Nash equilibrium.