Математическая Теория Игр и её Приложения, т.12, в.1, с. 19–32

УДК 519.833.2
ББК 22.18

РЕШЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ИГР: КЛАССИЧЕСКИЙ И НЕТРАДИЦИОННЫЙ ПОДХОДЫ

Анна Н. Реттиева*
Институт прикладных математических исследований
Карельского научного центра РАН
185910, Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11
Школа математики и статистики
Университет Циндао
266071, Циндао, Китай
Институт прикладной математики Шаньдун
266071, Циндао, Китай
e-mail: annaret@krc.karelia.ru

В работе исследованы подходы построения решений в динамических многокритериальных играх. Приведены классические способы построения некооперативного и кооперативного равновесий с использованием свертки критериев и новые концепции определения оптимального поведения. Исследована динамическая многокритериальная модель управления возобновляемыми ресурсами. Найдены параметры задачи, при которых равновесия, полученные с использованием традиционного и нового подходов, совпадают.

* Исследование проведено при финансовой поддержке провинции Шаньдун «План двухсот талантов» (№ WST2017009).

Ключевые слова: динамические игры, многокритериальные игры, равновесие, арбитражная схема Нэша, свертка.

Поступила в редакцию: 04.11.19 *После доработки*: 23.12.19 *Принята к публикации*: 25.12.19

1. Введение

Математические модели, учитывающие наличие нескольких целевых функций у участников конфликтно-управляемых процессов, более приближены к реальности. Зачастую игроки хотят достичь одновременно нескольких целей, которые могут быть несравнимы. Такие ситуации типичны для теоретико-игровых моделей в экономике и экологии. Например, в задачах управления возобновляемыми ресурсами участники хотят одновременно и увеличить свою прибыль от продажи эксплуатируемого ресурса, и уменьшить издержки. Такая постановка задачи влечет введение вектор-функций выигрышей участников и исследование многокритериальных игр.

Ллойд Шепли [11] в 1959 г. ввел понятие многокритериальной игры, т.е. игры с векторными функциями выигрышей участников, и оптимальные по Парето решения таких игр. Традиционным способом решения статических векторных игр является их скаляризация путем оптимизации взвешенной суммы критериев.

Мало исследованной проблемой является построение равновесий в динамических многокритериальных играх. В работе [8], на основе подхода построения равновесий в задачах с асимметричными игроками [1], [5], было формализовано понятие многокритериального некооперативного равновесия. В работах [9], [10] был предложен способ построения кооперативного поведения в таких играх с использованием арбитражных схем ([1], [7], [12]), а в [2], [3] исследован процесс формирования коалиций.

Целью представленной работы является сравнение классического и разработанных подходов построения равновесий в динамических многокритериальных играх. Для определения оптимального поведения в классическом варианте используются свертки критериев ([4], [6]). В предложенных подходах для построения некооперативного равновесия использована конструкция арбитражной схемы (произведения Нэша), а для определения кооперативного – арбитражная схема Нэша для всего периода продолжения игры ([1], [5], [7], [8], [9]).

Исследована динамическая бикритериальная модель управления возобновляемыми ресурсами с бесконечным горизонтом планирования. Построены некооперативное и кооперативное равновесия с использованием обоих подходов. Найдены параметры задачи, при которых эти решения совпадают. Проведено сравнение стратегий игроков и размера эксплуатируемого ресурса для различных концепций построения равновесных решений.

2. Динамические многокритериальные игры

Рассмотрим бикритериальную динамическую игру с двумя игроками в дискретном времени. Игроки эксплуатируют некоторый общий возобновляемый ресурс и стремятся достигнуть двух различных целей. Динамика развития возобновляемого ресурса имеет вид

$$x_{t+1} = f(x_t, u_{1t}, u_{2t}), \quad x_0 = x, \tag{2.1}$$

где $x_t \geq 0$ – размер ресурса в момент времени $t \geq 0$, $f(x_t, u_{1t}, u_{2t})$ – функция развития возобновляемого ресурса, $u_{it} \in U_i$ – стратегия (интенсивность эксплуатации) игрока i в момент времени $t \geq 0$, $i = 1, 2$.

Вектор-функции выигрышей игроков на бесконечном промежутке планирования имеют вид

$$J_1 = \begin{pmatrix} J_1^1 = \sum\limits_{t=0}^{\infty} \delta^t g_1^1(u_{1t}, u_{2t}) \\ J_1^2 = \sum\limits_{t=0}^{\infty} \delta^t g_1^2(u_{1t}, u_{2t}) \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} J_2^1 = \sum\limits_{t=0}^{\infty} \delta^t g_2^1(u_{1t}, u_{2t}) \\ J_2^2 = \sum\limits_{t=0}^{\infty} \delta^t g_2^2(u_{1t}, u_{2t}) \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

где $g_i^j(u_{1t}, u_{2t}) \geq 0$ – функции «мгновенного» выигрыша, $i, j = 1, 2$, $\delta \in (0, 1)$ – общий коэффициент дисконтирования.

2.1. Многокритериальное равновесие по Нэшу

Традиционный подход

Классическим способом определения некооперативного поведения в статических многокритериальных играх является их скаляризация путем оптимизации взвешенной суммы критериев ([4], [6]). Распространим данный подход на динамический случай. Функционалы выигрышей игроков представляют из себя свертки критериев:

$$\bar{H}_1(u_{1t}, u_{2t}) = \lambda_1 J_1^1(u_{1t}(x), u_{2t}(x)) + (1-\lambda_1) J_1^2(u_{1t}(x), u_{2t}(x)) =$$
$$= \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t [\lambda_1 g_1^1(u_{1t}(x), u_{2t}(x)) + (1-\lambda_1) g_1^2(u_{1t}(x), u_{2t}(x))] ,$$
$$\bar{H}_2(u_{1t}, u_{2t}) = \lambda_2 J_2^1(u_{1t}(x), u_{2t}(x)) + (1-\lambda_2) J_2^2(u_{1t}(x), u_{2t}(x)) =$$
$$= \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t [\lambda_2 g_2^1(u_{1t}(x), u_{2t}(x)) + (1-\lambda_2) g_2^2(u_{1t}(x), u_{2t}(x))] ,$$

где $\lambda_i \in [0,1]$, $i = 1,2$, а $x(t)$ удовлетворяет динамике (2.1).

Определение 2.1. *Профиль стратегий $u_t^{kN} = (u_{1t}^{kN}(x), u_{2t}^{kN}(x))$ является классическим многокритериальным равновесием по Нэшу в игре (2.1), (2.2), если*

$$\bar{H}_1(u_{1t}^{kN}, u_{2t}^{kN}) \geq \bar{H}_1(u_{1t}, u_{2t}^{kN}) \ \ \forall u_{1t} \in U_1 ,$$
$$\bar{H}_2(u_{1t}^{kN}, u_{2t}^{kN}) \geq \bar{H}_2(u_{1t}^{kN}, u_{2t}) \ \ \forall u_{2t} \in U_2 .$$

Нетрадиционный подход

Для построения некооперативного равновесия в многокритериальной динамической игре применяется конструкция арбитражной схемы ([1], [5]). Поэтому, сначала определяются гарантированные выигрыши, которые играют роль точек статус-кво.

В работе [8] были предложены три варианта построения гарантированных выигрышей. В первом из них все гарантированные выигрыши определяются из решений антагонистических игр. А именно, первый гарантированный выигрыш – это решение антагонистической игры, в которой первый игрок стремится максимизировать свой первый критерий, а второй – минимизировать его. Остальные гарантированные точки строятся аналогично. Во втором способе гарантированные точки определяются из решений антагонистических игр с суммами критериев обоих игроков. В третьем варианте гарантированные выигрыши строятся как равновесия по Нэшу в играх с первыми и вторыми критериями игроков.

Для построения выигрышей игроков в динамической многокритериальной игре используются произведения Нэша, при этом гарантированные выигрыши играют роль точек статус-кво:

$$H_1(u_{1t}, u_{2t}) = (J_1^1(u_{1t}(x), u_{2t}(x)) - G_1^1)(J_1^2(u_{1t}(x), u_{2t}(x)) - G_1^2)\,,$$
$$H_2(u_{1t}, u_{2t}) = (J_2^1(u_{1t}(x), u_{2t}(x)) - G_2^1)(J_2^2(u_{1t}(x), u_{2t}(x)) - G_2^2)\,,$$

где $x(t)$ удовлетворяет динамике (2.1), G_i^j – гарантированные выигрыши, $i, j = 1, 2$.

Следующее определение содержит предложенную ранее концепцию некооперативного решения динамической многокритериальной игры [8].

Определение 2.2. *Профиль стратегий* $u_t^N = (u_{1t}^N(x), u_{2t}^N(x))$ *называется многокритериальным равновесием по Нэшу в игре (2.1), (2.2), если*

$$H_1(u_{1t}^N, u_{2t}^N) \geq H_1(u_{1t}, u_{2t}^N) \ \ \forall u_{1t} \in U_1\,,$$
$$H_2(u_{1t}^N, u_{2t}^N) \geq H_2(u_{1t}^N, u_{2t}) \ \ \forall u_{2t} \in U_2\,.$$

2.2. Многокритериальное кооперативное равновесие

Традиционный подход

Теперь предположим, что игроки хотят действовать кооперативно (формируется гранд коалиция). Используем классический подход определения общего кооперативного выигрыша, т.е. предполагается что игроки максимизируют сумму своих критериев ([4], [6]).

Определение 2.3. *Профиль стратегий* $u_t^{kc} = (u_{1t}^{kc}(x), u_{2t}^{kc}(x))$ *является классическим многокритериальным кооперативным равновесием в игре (2.1), (2.2), если он является решением задачи:*

$$\bar{H}_1(u_{1t}^{kc}, u_{2t}^{kc}) + \bar{H}_2(u_{1t}^{kc}, u_{2t}^{kc}) =$$
$$= \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t [\lambda_1 g_1^1(u_{1t}^{kc}(x), u_{2t}^{kc}(x)) + (1-\lambda_1) g_1^2(u_{1t}^{kc}(x), u_{2t}^{kc}(x)) +$$
$$+\lambda_2 g_2^1(u_{1t}^{kc}(x), u_{2t}^{kc}(x)) + (1-\lambda_2) g_2^2(u_{1t}^{kc}(x), u_{2t}^{kc}(x))] \to \max_{u_{1t}^{kc}, u_{2t}^{kc}}\,, \qquad (2.3)$$

где $x(t)$ *удовлетворяет динамике (2.1).*

Нетрадиционный подход

Для определения кооперативного поведения используется разработанный ранее подход построения кооперативного равновесия в теоретико-игровых моделях с несимметричными участниками ([1], [5]). А именно, кооперативные стратегии и выигрыши участников определяются из решения арбитражной схемы Нэша для всего периода продолжения игры. При этом точками статус-кво выступают некооперативные выигрыши, полученные при использовании игроками многокритериальных равновесных по Нэшу стратегий.

Некооперативные выигрыши в соответствии с определением 2.2 примут вид

$$J_1^N = \begin{pmatrix} J_1^{1N} = \sum\limits_{t=0}^{\infty} \delta^t g_1^1(u_{1t}^N, u_{2t}^N) \\ J_1^{2N} = \sum\limits_{t=0}^{\infty} \delta^t g_1^2(u_{1t}^N, u_{2t}^N) \end{pmatrix}, \; J_2^N = \begin{pmatrix} J_2^{1N} = \sum\limits_{t=0}^{\infty} \delta^t g_2^1(u_{1t}^N, u_{2t}^N) \\ J_2^{2N} = \sum\limits_{t=0}^{\infty} \delta^t g_2^2(u_{1t}^N, u_{2t}^N) \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

Для определения кооперативного поведения используется арбитражная схема Нэша ([1], [9]), следовательно, необходимо решить следующую задачу:

$$\begin{aligned} &(V_1^{1c} + V_2^{1c} - J_1^{1N} - J_2^{1N})(V_1^{2c} + V_2^{2c} - J_1^{2N} - J_2^{2N}) = \\ &\quad = \Big(\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \sum_{i=1}^{2} g_i^1(u_{1t}^c(x), u_{2t}^c(x)) - J_1^{1N} - J_2^{1N}\Big) \cdot \\ &\cdot \Big(\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \sum_{i=1}^{2} g_i^2(u_{1t}^c(x), u_{2t}^c(x)) - J_1^{2N} - J_2^{2N}\Big) \to \max_{u_{1t}^c, u_{2t}^c}, \end{aligned} \tag{2.5}$$

где $x(t)$ удовлетворяет динамике (2.1), J_i^{jN} – некооперативные выигрыши, определенные в (2.4), $i, j = 1, 2$, $i \neq j$.

Определение 2.4. *Профиль стратегий* $u_t = (u_{1t}^c(x), u_{2t}^c(x))$ *называется многокритериальным кооперативным равновесием в игре (2.1), (2.2), если он является решением задачи (2.5).*

Теперь перейдем к рассмотрению динамической многокритериальной модели, связанной с задачей управлением биоресурсами (эксплуатацией рыбной популяции) для сравнения представленных концепций решений.

3. Многокритериальная задача управления возобновляемыми ресурсами

Исследуется динамическая многокритериальная модель управления биоресурсами. Два игрока (фирмы или рыболовецкие артели) эксплуатируют ресурс на протяжении бесконечного промежутка времени. Динамика развития популяции имеет вид

$$x_{t+1} = \varepsilon x_t - u_{1t} - u_{2t}\,, \;\; x_0 = x\,, \tag{3.1}$$

где $x_t \geq 0$ – размер популяции в момент времени $t \geq 0$, $\varepsilon \geq 1$ – коэффициент естественного роста, $u_{it} \geq 0$ – стратегия (вылов) игрока i в момент времени $t \geq 0$, $i = 1, 2$.

Игроки стремятся достичь двух целей – максимизировать доход от продажи ресурса и минимизировать затраты на эксплуатацию. Предполагается, что цена на рынке для участников различна, а затраты равны и зависят от интенсивности эксплуатации обоих игроков. Тогда вектор-функции выигрышей на бесконечном промежутке планирования примут вид

$$J_1 = \begin{pmatrix} J_1^1 = \sum\limits_{t=0}^{\infty} \delta^t p_1 u_{1t} \\ J_1^2 = -\sum\limits_{t=0}^{\infty} \delta^t c u_{1t} u_{2t} \end{pmatrix}, \;\; J_2 = \begin{pmatrix} J_2^1 = \sum\limits_{t=0}^{\infty} \delta^t p_2 u_{2t} \\ J_2^2 = -\sum\limits_{t=0}^{\infty} \delta^t c u_{1t} u_{2t} \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

где $p_i \geq 0$ – рыночная цена за единицу ресурса для игрока i, $i = 1, 2$ $c \geq 0$ – затраты на эксплуатацию и $\delta \in (0, 1)$ – общий коэффициент дисконтирования. Предполагается, что $\delta\varepsilon \geq 1$.

3.1. Многокритериальное равновесие по Нэшу

Традиционный подход

Для нахождения некооперативного равновесия решается задача нахождения равновесия по Нэшу в игре со свертками критериев обоих участников, т.е. функционалы выигрышей игроков имеют вид

$$\bar{H}_i(u_{1t}, u_{2t}) = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t [\lambda_i p_i u_{it}(x) - (1 - \lambda_i) c u_{1t}(x) u_{2t}(x)]\,, \;\; i = 1, 2\,,$$

где $\lambda_i \in [0, 1]$, $i = 1, 2$, а $x(t)$ удовлетворяет динамике (3.1).

Используя принцип Беллмана в предположении линейного вида стратегий игроков, получим равновесные по Нэшу стратегии

$$u_{1t}^{kN} = \frac{\delta\varepsilon^2 - 1}{2\varepsilon\delta} x_t + \\ + \frac{(1 - 2\varepsilon + \delta\varepsilon^2)(p_2\lambda_2(1-\lambda_1)(1+\delta\varepsilon^2) + p_1\lambda_1(1-\lambda_2)(1-\delta\varepsilon^2))}{4c\delta\varepsilon^2(\varepsilon-1)(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)},$$

$$u_{2t}^{kN} = \frac{\delta\varepsilon^2 - 1}{2\varepsilon\delta} x_t + \\ + \frac{(1 - 2\varepsilon + \delta\varepsilon^2)(p_1\lambda_1(1-\lambda_2)(1+\delta\varepsilon^2) + p_2\lambda_2(1-\lambda_1)(1-\delta\varepsilon^2))}{4c\delta\varepsilon^2(\varepsilon-1)(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)}, \quad (3.3)$$

и размер ресурса при некооперативном поведении примет вид

$$x_t = \frac{1}{(\delta\varepsilon)^t} x_0 + \frac{\delta\varepsilon - \frac{1}{(\delta\varepsilon)^t}}{\delta\varepsilon - 1} \frac{(1 - 2\varepsilon + \delta\varepsilon^2)(p_2\lambda_2(1-\lambda_1) + p_1\lambda_1(1-\lambda_2))}{4c\delta\varepsilon^2(\varepsilon-1)(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)}.$$

Нетрадиционный подход

Используем результаты [8] и запишем вид многокритериального равновесия по Нэшу для трех вариантов построения гарантированных выигрышей.

Первый вариант: гарантированные выигрыши строятся как решения антагонистических игр, а именно G_i^j – выигрыш i-го игрока в антагонистической игре $\langle I, II, U_1, U_2, J_i^j \rangle$, $i, j = 1, 2$.

Используя принцип Беллмана, получим, что гарантированные выигрыши примут вид

$$G_1^1 = G_2^1 = 0\,, \; G_1^2 = G_2^2 = G = -c\frac{\delta\varepsilon^2 - 1}{4\delta} x_0^2\,.$$

Решая задачу

$$\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t p_1 u_{1t} \Big(- \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t c u_{1t} u_{2t} - G \Big) \to \max_{u_{1t}}\,,$$

$$\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t p_2 u_{2t} \Big(- \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t c u_{1t} u_{2t} - G \Big) \to \max_{u_{2t}}\,,$$

получим, что многокритериальные равновесные по Нэшу стратегии имеют вид

$$u_{1t}^N = u_{2t}^N = \frac{(\delta\varepsilon^2 - 1)(\varepsilon - 1)}{\varepsilon\delta^2 - 1 + \delta\varepsilon(\varepsilon - 1)} x_t\,, \quad (3.4)$$

и размер ресурса при некооперативном поведении примет вид

$$x_t = \Big[\frac{\varepsilon^2\delta + \varepsilon - 2}{\varepsilon\delta^2 - 1 + \delta\varepsilon(\varepsilon - 1)}\Big]^t x_0\,.$$

Второй вариант: гарантированные выигрыши строятся как решения антагонистических игр со свертками критериев, а именно G_i^1 и G_i^2 – выигрыши i-го игрока в антагонистической игре $\langle I, II, U_1, U_2, J_i^1 + J_i^2\rangle$, $i = 1, 2$.

Используя принцип Беллмана, получим, что гарантированные выигрыши примут вид

$$G_i^1 = \frac{p_i(\delta\varepsilon^2 - 1)}{2\delta(\varepsilon - 1)}x_0 - \frac{p_i^2(\delta\varepsilon^2 - 1)}{2c\delta(\varepsilon - 1)^2}\,, \tag{3.5}$$

$$G_i^2 = -\frac{c(\delta\varepsilon^2 - 1)}{4\delta}x_0^2 + \frac{p_i^2(\delta\varepsilon^2 - 1)}{4c\delta(\varepsilon - 1)^2}\,,\ \ i = 1, 2.$$

Решая задачу

$$\Big(\sum_{t=0}^{\infty}\delta^t p_1 u_{1t} - G_1^1\Big)\Big(-\sum_{t=0}^{\infty}\delta^t u_{1t}u_{2t} - G_1^2\Big) \to \max_{u_{1t}}\,,$$
$$\Big(\sum_{t=0}^{\infty}\delta^t p_2 u_{2t} - G_2^1\Big)\Big(-\sum_{t=0}^{\infty}\delta^t u_{1t}u_{2t} - G_2^2\Big) \to \max_{u_{2t}}\,,$$

получим, что многокритериальные равновесные по Нэшу стратегии имеют вид

$$\begin{aligned} u_{1t}^N &= \frac{(\delta\varepsilon^2 - 1)(\varepsilon - 1)}{\delta\varepsilon^2 - 1 + \delta\varepsilon(\varepsilon - 1)}x_t + \frac{\delta\varepsilon p_2 G_1^1(\varepsilon - 1) - G_2^1 p_1(\delta\varepsilon^2 - 1)}{2p_1p_2(\delta\varepsilon^2 - 1 + \delta\varepsilon(\varepsilon - 1))}, \\ u_{2t}^N &= \frac{(\delta\varepsilon^2 - 1)(\varepsilon - 1)}{\delta\varepsilon^2 - 1 + \delta\varepsilon(\varepsilon - 1)}x_t + \frac{\delta\varepsilon p_1 G_2^1(\varepsilon - 1) - G_1^1 p_2(\delta\varepsilon^2 - 1)}{2p_1p_2(\delta\varepsilon^2 - 1 + \delta\varepsilon(\varepsilon - 1))}, \end{aligned} \tag{3.6}$$

а размер ресурса при некооперативном поведении принимает вид

$$x_t = \Big[\frac{\delta\varepsilon^2 + \varepsilon - 2}{\delta\varepsilon^2 - 1 + \delta\varepsilon(\varepsilon - 1)}\Big]^t x_0 + \frac{p_2G_1^1 + p_1G_2^1}{2p_1p_2(\varepsilon - 1)}\,,$$

где G_i^1, $i = 1, 2$, определены в (3.5).

Третий вариант: гарантированные выигрыши строятся как равновесные по Нэшу решения игр с соответствующими критериями игроков, а именно

G_1^i и G_2^i – выигрыши игроков в равновесии по Нэшу в игре $\langle I, II, U_1, U_2, J_1^i, J_2^i \rangle$, $i = 1, 2$.

Используя принцип Беллмана, получим, что гарантированные выигрыши примут вид

$$G_i^1 = \frac{p_i}{\delta} x_0 \,, \; i = 1, 2 \,, \; G_1^2 = G_2^2 = -c\frac{\delta\varepsilon^2 - 1}{4\delta} x_0^2 \,. \tag{3.7}$$

В этом способе построения гарантированных выигрышей многокритериальное равновесие по Нэшу имеет такой же вид, как и во втором (3.6), но с соответствующими гарантированными выигрышами (3.7).

В [8] было проведено сравнение стратегий игроков и размера популяции для различных вариантов построения гарантированных выигрышей. Было показано, что наилучшим для состояния эксплуатируемой системы и выгодным для участников является третий из них (равновесные по Нэшу решения).

Совпадение решений

Найдем значения коэффициентов свертки при которых многокритериальные равновесные по Нэшу стратегии, найденные классическим и нетрадиционным способами, совпадают. Поскольку могут быть использованы только постоянные значения $\lambda_i \in [0, 1]$, $i = 1, 2$, то рассмотрим асимптотическое поведение.

При $t \to \infty$ классичесие некооперативные стратегии принимают вид

$$\bar{u}_1^{kN} = \frac{(1 - 2\varepsilon + \delta\varepsilon)(p_1\lambda_1(1 - \lambda_2)(\delta\varepsilon^2 - 1) - p_2\lambda_2(1 - \lambda_1)(1 - 2\varepsilon + \delta\varepsilon))}{4c\varepsilon(\varepsilon - 1)(\varepsilon\delta - 1)(1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2)} \,,$$

$$\bar{u}_2^{kN} = \frac{(1 - 2\varepsilon + \delta\varepsilon)(p_2\lambda_2(1 - \lambda_1)(\delta\varepsilon^2 - 1) - p_1\lambda_1(1 - \lambda_2)(1 - 2\varepsilon + \delta\varepsilon))}{4c\varepsilon(\varepsilon - 1)(\varepsilon\delta - 1)(1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2)} \,.$$

В первом варианте построения гарантированных выигрышей $u_{it}^N \to 0$ при $t \to \infty$, следовательно, решения совпадают при $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Во втором и третьем вариантах при $t \to \infty$ $u_{1t}^N \to \frac{G_1^1}{2p_1}$, $u_{2t}^N \to \frac{G_2^1}{2p_2}$ с соответствующими гарантированными выигрышами (3.5) и (3.7), следовательно, решения совпадают при

$$\lambda_1 = \frac{c(p_1(\delta\varepsilon^2 - 2\varepsilon + 1)G_2^1 + p_2(\delta\varepsilon^2 - 1)G_1^1)}{c(p_1(\delta\varepsilon^2 - 2\varepsilon + 1)G_2^1 + p_2(\delta\varepsilon^2 - 1)G_1^1 - 2p_1^2 p_2(\delta\varepsilon^2 - 2\varepsilon + 1))} \,,$$

$$\lambda_2 = \frac{c(p_2(\delta\varepsilon^2 - 2\varepsilon + 1)G_1^1 + p_1(\delta\varepsilon^2 - 1)G_2^1)}{c(p_2(\delta\varepsilon^2 - 2\varepsilon + 1)G_1^1 + p_1(\delta\varepsilon^2 - 1)G_2^1 - 2p_1 p_2^2(\delta\varepsilon^2 - 2\varepsilon + 1))} \,. \tag{3.8}$$

Условием существования такого решения являются условия $0 \leq \lambda_i \leq 1$, $i = 1, 2$, откуда получаем

$$\delta\varepsilon^2 - 2\varepsilon + 1 \geq 0 \ \text{ или } \varepsilon \geq \frac{1 + \sqrt{1-\delta}}{\delta}\,. \tag{3.9}$$

Приведем результаты моделирования для следующих параметров:

$$\varepsilon = 2,\ p_1 = 100,\ p_2 = 150,\ c = 50,\ \delta = 0.8.$$

Заметим, что условие (3.9) выполнено.

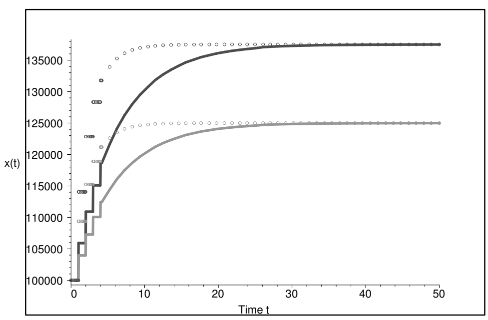

Рисунок 1. Размер популяции: нетрадиционный и классический (пунктир) подходы

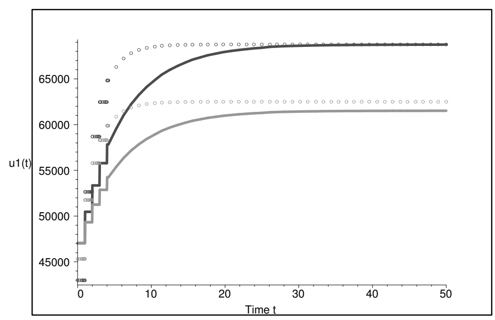

Рисунок 2. Стратегия первого игрока: нетрадиционный и классический (пунктир) подходы

На рис. 1 и 2 приведены равновесные по Нэшу размеры популяции и оптимальные стратегии первого игрока для второго (темная линия) и третьего (светлая линия) вариантов определения гарантированных выигрышей. Заметим, что построенное предложенным способом многокритериальное равновесие по Нэшу достаточно быстро сходится к решению, полученному традиционным методом.

3.2. Многокритериальное кооперативное равновесие

Традиционный подход

Для нахождения кооперативного равновесия решается задача максимизации суммы сверток критериев обоих игроков:

$$\bar{H}_1(u_{1t},u_{2t})+\bar{H}_2(u_{1t},u_{2t})=\sum_{t=0}^{\infty}\delta^t[\lambda_1 p_1 u_{1t}(x)-(1-\lambda_1)cu_{1t}(x)u_{2t}(x)+$$
$$+\lambda_2 p_2 u_{2t}(x)-(1-\lambda_2)cu_{1t}(x)u_{2t}(x)]\,,$$

где $\lambda_i\in[0,1]$, $i=1,2$, а $x(t)$ удовлетворяет динамике (3.1).

Используя принцип Беллмана в предположении линейного вида стратегий игроков, получим кооперативные стратегии

$$u_{1t}^{kc}=\frac{\delta\varepsilon^2-1}{2\varepsilon\delta}x_t-\frac{p_1\lambda_1(\delta\varepsilon^2-1)-p_2\lambda_2(\delta\varepsilon^2-2\delta\varepsilon+1)}{4c\delta\varepsilon(\varepsilon-1)(2-\lambda_1-\lambda_2)}\,,$$
$$u_{2t}^{kc}=\frac{\delta\varepsilon^2-1}{2\varepsilon\delta}x_t-\frac{p_2\lambda_2(\delta\varepsilon^2-1)-p_1\lambda_1(\delta\varepsilon^2-2\delta\varepsilon+1)}{4c\delta\varepsilon(\varepsilon-1)(2-\lambda_1-\lambda_2)}\,, \qquad (3.10)$$

и размер ресурса при кооперативном поведении принимает вид

$$x_t^{kc}=\frac{1}{(\delta\varepsilon)^t}x_0+(\delta\varepsilon-\frac{1}{(\delta\varepsilon)^t})\frac{p_2\lambda_2+p_1\lambda_1}{c\delta\varepsilon(\varepsilon-1)(2-\lambda_1-\lambda_2)}\,.$$

При $t\to\infty$ классические кооперативные стратегии примут вид

$$\bar{u}_1^{kc}=\frac{p_2\lambda_2}{c(2-\lambda_1-\lambda_2)}\,,\ \bar{u}_2^{kc}=\frac{p_1\lambda_1}{c(2-\lambda_1-\lambda_2)}\,. \qquad (3.11)$$

Нетрадиционный подход

Используем результаты [9] и запишем вид многокритериального кооперативного равновесия сразу для асимптотического случая:

$$\bar{u}_{1t}^{c}=\frac{p_2(\varepsilon-1)}{p_1+p_2}\,,\ \bar{u}_{2t}^{c}=\frac{p_1(\varepsilon-1)}{p_1+p_2}\,. \qquad (3.12)$$

Совпадение кооперативных решений

Найдем значения коэффициентов свертки при которых кооперативные стратегии, найденные классическим и нетрадиционным способами, совпадают. Используя (3.11) и (3.12), получим что решения совпадают при

$$\lambda_1=\lambda_2=\frac{2c(\varepsilon-1)}{p_2+p_1+2c(\varepsilon-1)}\,. \qquad (3.13)$$

Условием существования такого решения являются условия $0 \leq \lambda_i \leq 1$, $i = 1, 2$, которые в данном случае выполняются всегда.

4. Заключение

В работе проведено сравнение классического ([4], [6]) и разработанного ранее ([1], [5]) подходов построения равновесий в динамических многокритериальных играх. Для определения оптимального поведения в классическом варианте используются свертки критериев, а в предложенных подходах [8], [9] – арбитражные схемы Нэша.

Проведено сравнение концепций построения равновесий в динамической бикритериальной модели управления возобновляемыми ресурсами с бесконечным горизонтом планирования. Найдены параметры задачи, при которых решения совпадают.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мазалов В.В., Реттиева А.Н. *Асимметрия в кооперативной задаче управления биоресурсами* // Управление большими системами. 2015. Вып. 55. С. 280–325.

2. Реттиева А.Н. *Формирование коалиций в динамических многокритериальных играх* // Математическая теория игр и ее приложения. 2018. Т. 10, вып. 2. С. 40–61.

3. Реттиева А.Н. *Условия коалиционной устойчивости в динамических многокритериальных играх* // Тр. ИММ УрО РАН. 2019. Т. 25, вып. 3. С. 200–216.

4. Breton M., Keoula M.Y. *A great fish war model with asymmetric players* // Ecological Economics. 2014. V. 97. P. 209–223.

5. Mazalov V.V., Rettieva A.N. *Asymmetry in a cooperative bioresource management problem* // In: Game-Theoretic Models in Mathematical Ecology. Nova Science Publishers. 2015. P. 113–152.

6. de-Paz A., Marin-Solano J., Navas J. *Time-Consistent Equilibria in Common Access Resource Games with Asymmetric Players Under Partial Cooperation* // Environmental Modeling & Assessment. 2013. V. 18. P. 171–184.

7. Marin-Solano J. *Group inefficiency in a common property resource game with asymmetric players* // Economics Letters. 2015. V. 136. P. 214–217.

8. Rettieva A.N. *Multicriteria dynamic games* // International Game Theory Review. 2017. Vol. 1(19). P. 1750002.

9. Rettieva A.N. *Dynamic multicriteria games with finite horizon* // Mathematics. 2018. Vol. 6(9). P. 156.

10. Rettieva A.N. *Cooperation in dynamic multicriteria games with random horizons* // J. of Global Optimization. 2018. P. 1–16.

11. Shapley L.S. *Equilibrium points in games with vector payoffs* // Naval Research Logistic Quarterly. 1959. Vol. 6. P. 57–61.

12. Sorger G. *Recursive Nash bargaining over a productive assert* // J. of Economic Dynamics & Control. 2006. V. 30. P. 2637–2659.

DYNAMIC MULTICRITERIA GAMES' SOLUTIONS: CLASSICAL AND UNTRADITIONAL APPROACHES

Anna N. Rettieva, School of Mathematics and Statistics, Qingdao University, Institute of Applied Mathematics of Shandong, Institute of Applied Mathematical Research Karelian Research Center of RAS, Dr.Sc., docent (annaret@krc.karelia.ru).

Abstract: In this paper the approaches to obtain an optimal behavior in dynamic multicriteria games are constructed. Classical scheme with weighted sum of the criteria and new conceptions of optimal solutions' construction are presented. Dynamic multicriteria bioresorce management problem is considered. Parameters of the model where the equilibria obtained applying traditional or dynamic approaches coincide are obtained.

Keywords: dynamic games, multicriteria games, equilibrium, Nash bargainig sheme, convolution.