Математическая Теория Игр и её Приложения, т.12, в.1, с. 60–90

УДК 519.866.2.
ББК 22.18

ГАРАНТИРОВАННЫЙ ДЕТЕРМИНИСТСКИЙ ПОДХОД К СУПЕРХЕДЖИРОВАНИЮ: СМЕШАННЫЕ СТРАТЕГИИ И ИГРОВОЕ РАВНОВЕСИЕ

Сергей Н. Смирнов
Кафедра системного анализа
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова
119992, Москва, ГСП-1, Воробьевы горы, МГУ
e-mail: s.n.smirnov@gmail.com

Для задачи суперрепликации с дискретным временем рассматривается гарантированная детерминистская постановка: задача состоит в гарантированном покрытии обусловленного обязательства по опциону при всех допустимых сценариях. Эти сценарии задаются при помощи априорно заданных компактов, зависящих от предыстории цен: приращения цены в каждый момент времени должны лежать в соответствующих компактах. Предполагается отсутствие транзакционных издержек. Постановка задачи носит теоретико-игровой характер и приводит к уравнениям Беллмана–Айзекса (в чистых стратегиях). В настоящей статье вводится смешанное расширение чистых стратегий «рынка» и доказывается ряд результатов, связанных с игровым равновесием.

©2020 С.Н. Смирнов

Ключевые слова: гарантированные оценки, детерминистская динамика цен, суперрепликация, опцион, арбитраж, отсутствие арбитражных возможностей, уравнения Беллмана–Айзекса, многозначное отображение, смешанные стратегии, игровое равновесие.

Поступила в редакцию: 03.06.19 *После доработки*: 10.11.19 *Принята к публикации*: 23.12.19

1. Введение

В работе [4] подробно изложен гарантированный детерминистский подход, описаны модель финансового рынка, торговые ограничения и условия безарбитражности, а также поставлена задача суперхеджирования обусловленных обязательств по опционам, приведена соответствующая библиография. Здесь мы ограничимся минимальным описанием необходимых сведений, касающихся постановки задачи, приведенных в [4].

Основной посылкой в предлагаемом подходе является задание «неопределенной» динамики цен посредством предположения об априорной информации о движении цен[1] в момент времени t, а именно, что приращения ΔX_t дисконтированных цен[2] лежат в априорно заданных компактах[3] $K_t(\cdot)$, где точкой обозначена предыстория цен до момента $t-1$ включительно, $t = 1, \dots, N$. Обозначим через $v_t^*(\cdot)$ точную нижнюю грань для стоимости портфеля в момент времени t, при известной предыстории, гарантирующей, при определенном выборе допустимой хеджирующей стратегии, исполнение текущих и будущих обязательств, возникающих в отношении возможных выплат по американскому опциону. Соответствующие уравнения Беллмана-Айзекса в дисконтированных ценах возникают непосредственно из экономического смысла посредством выбора на шаге t «наилучшей» допустимой стратегии хеджирования $h \in D_t(\cdot)$ для «наихудшего» сценария $y \in K_t(\cdot)$ приращения (дисконтированных) цен для заданных функций $g_t(\cdot)$, описывающих потенциальные выплаты по опци-

---

[1] Приращения берутся «назад», т.е. $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$, где X_t вектор дисконтированных цен в момент времени t.

[2] Считаем, что безрисковый актив имеет постоянную цену, равную единице.

[3] Точкой обозначены переменные, описывающие эволюцию цен. Более точно, это предыстория $\bar{x}_{t-1} = (x_0, \dots, x_{t-1}) \in (\mathbb{R}^n)^t$ для K_t, в то время как для функций v_t^* и g_t, введенных ниже, это история $\bar{x}_t = (x_0, \dots, x_t) \in (\mathbb{R}^n)^{t+1}$.

ону. Таким образом, получаем рекуррентные соотношения:[4]

$$v^*_N(\bar{x}_N) = g_N(\bar{x}_N),$$
$$v^*_{t-1}(\bar{x}_{t-1}) = g_{t-1}(\bar{x}_{t-1}) \bigvee \inf_{h \in D_t(\bar{x}_{t-1})} \sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} \left[v^*_t(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y) - hy \right],$$
$$t = N, \dots, 1, \tag{BA}$$

где $\bar{x}_{t-1} = (x_0, \dots, x_{t-1})$ описывает предысторию по отношению к настоящему моменту t. Условия для справедливости (BA) сформулированы в Теореме 3.1 из [4].

При этом удобно (формально) считать, что $g_0 = -\infty$ (отсутствие обязательств по выплатам в начальный момент времени); $g_t \geq 0$ для $t = 1, \dots, N$ в случае американского опциона. Множество $D_t(\cdot)$ предполагается выпуклым и $0 \in D_t(\cdot)$.

Многозначные отображения $x \mapsto K_t(x)$ и $x \mapsto D_t(x)$, а также функции $x \mapsto g_t(x)$, предполагаются заданными для всех $x \in (\mathbb{R}^n)^t$, $t = 1, \dots, N$. Поэтому функции $x \mapsto v^*_t(x)$ задаются уравнениями (BA) для всех $x \in (\mathbb{R}^n)^t$.

В уравнениях (BA) функции v^*_t, а также соответствующие точные верхние и нижние грани, принимают значения в расширенном множестве вещественных чисел $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = [-\infty, +\infty]$ – двухточечной компактификации[5] $\mathbb{R}$. При этом функции v^*_t ограничены сверху благодаря следующему предположению:

найдутся константы $C_t \geq 0$ такие, что для каждого $t = 1, \dots, N$ и всех возможных траекторий $\bar{x}_t = (x_0, \dots, x_t) \in B_t$ выполнено $g_t(x_0, \dots, x_t) \leq C_t$. (B)

Будем считать, что константы C_t выбраны минимальными, т.е.

$$C_t = \sup_{x \in B_t} g_t(x),$$

и будем обозначать

$$C = \bigvee_{t=1}^{N} C_t. \tag{1.1}$$

[4] Знак $\bigvee$ обозначает максимум, $hy = \langle h, y \rangle$ – скалярное произведение вектора h на вектор y.

[5] Окрестности точек $-\infty$ и $+\infty$ имеют вид $[\infty, a)$, $a \in \mathbb{R}$ и $(b, +\infty]$, $b \in \mathbb{R}$ соответственно.

Для удобства обозначений мы сделаем «аддитивную» замену в последней переменной функций v_t^*, полагая

$$w_t(\bar{x}_{t-1}, y) = w_t(x_1, \ldots, x_{t-1}, y) = v_t^*(x_1, \ldots, x_{t-1}, x_{t-1} + y), \tag{T}$$

и далее будем использовать w_t в правых частях уравнений Белмана–Айзекса, $t = N, \ldots, 0$, т.е в виде:

$$v_{t-1}^*(\cdot) = g_{t-1}(\cdot) \bigvee \inf_{h \in D_t(\cdot)} \sup_{y \in K_t(\cdot)} \big[w_t(\cdot, y) - hy\big], \quad t = N, \ldots, 1.$$

Напомним, что здесь и далее точкой обозначены «текущие» переменные; в последней формуле, например, аргументом является $\bar{x}_{t-1}$.

Траекторию на временном интервале $[0, t] = \{0, \ldots, t\}$ цен активов $(x_0, \ldots, x_t) = \bar{x}_t$ мы назовем возможной, если $x_0 \in K_0$, $x_1 \in K_1(x_0)$, $\ldots$, $x_t \in K_t(x_0, \ldots, x_{t-1})$; $t = 0, 1, \ldots, N$. Обозначим B_t – множество возможных траекторий цен активов на временном интервале $[0, t]$; тем самым

$$B_t = \{(x_0, \ldots, x_t) : x_0 \in K_0, \Delta x_1 \in K_1(x_0), \ldots, \Delta x_t \in K_t(x_0, \ldots, x_{t-1})\}. \tag{1.2}$$

Заметим, что (1.2) равносильно рекуррентным соотношениям[6]

$$\begin{aligned} B_t &= \{(\bar{x}_{t-1}, x_t) : \ \bar{x}_{t-1} \in B_{t-1}, \Delta x_t \in K_t(\bar{x}_{t-1})\} = \\ &= \{(\bar{x}_{t-1}, x_t) : \bar{x}_{t-1} \in B_{t-1}, x_t \in x_{t-1} + K_t(\bar{x}_{t-1})\}, \ t = 1, \ldots, N. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Везде далее будем считать, что выполнены предположения, перечисленные в Теореме 3.1 из [4], а также предположения, перечисленные в пункте 1) Замечания 3.1 из [4].

В работе [5] изучаются понятия «безарбитражности» для детерминистской модели рынка — отсутствие гарантированного арбитража, отсутствие арбитражных возможностей, отсутствие гарантированного арбитража с неограниченной прибылью. Вводится понятие грубости (структурной устойчивости) «безарбитражности», получены критерии грубости.

В статье [6] исследуются свойства полунепрерывности и непрерывности решений уравнений Беллмана-Айзекса (BA). При весьма

[6] Здесь $x + A = \{z : \ z - x \in A\}$.

слабом предположении «безарбитражности» рынка — грубом условии отсутствия гарантированного арбитража с неограниченной прибылью, получен основной результат, касающийся «гладкости» решений уравнений (BA).

В Предложении 2.1 из [6] приведены достаточные условия компактности B_t – достаточно полунепрерывности сверху компактнозначных отображений $x \mapsto K_t(\cdot)$, $t = 1, \ldots, N$, а также достаточные условия для выполнения свойства (B) – в дополнение к полунепрерывности сверху $K_t(\cdot)$ требуется еще и полунепрерывность сверху $g_t(\cdot)$, $t = 1, \ldots, N$.

В [7] для случая отсутствия торговых ограничений при условиях, обеспечивающих непрерывность функций Беллмана-Айзекса, получены оценки модуля непрерывности, в частности для случая липшицевости.

В настоящей статье вводится смешанное расширение чистых стратегий «рынка». Исследуются вопросы, связанные с существованием игрового равновесия, и его следствия.

2. Смешанные стратегии «рынка»

После получения уравнений Беллмана-Айзекса, опираясь на экономические соображения, а также исследования свойств «гладкости» решений, следующим принципиально важным этапом, допускающим прозрачную экономическую интерпретацию, является переход к смешанным стратегиям «рынка». Здесь как раз и появляются вероятности, и, как мы увидим далее, в том числе, естественным образом возникнут, при определенных предположениях относительно торговых ограничений, риск-нейтральные вероятности.

Рассмотрение смешанных стратегий «хеджера» не имеет смысла, поскольку выражение в квадратных скобках формулы (BA) является линейной функцией[7] аргумента h, а множество $D_t(\cdot)$ – выпукло.

Рассмотрим класс $\mathcal{P}_t(\cdot)$ распределений[8] Q на $\mathbb{R}^n$ (вероятностных

---

[7] Напомним, что это связано с предположением об отсутствии транзакционных издержек.

[8] Область $\mathcal{A}$ определения Q, т.е. σ-алгебру подмножеств $\mathbb{R}^n$, можно выбирать в зависимости от конкретного $\mathcal{P}_t(\cdot)$. Например, в качестве $\mathcal{A}$ можно взять класс всех подмножеств, если $\mathcal{P}_t(\cdot)$ содержит меры, сосредоточенные не более чем в счетном множестве точек. В других случаях, можно взять, например, боре-

мер), удовлетворяющий следующим свойствам.

1) Для $Q \in \mathcal{P}_t(\cdot)$ (топологический) носитель $\mathrm{supp}(Q)$ меры Q содержится в компакте $K_t(\cdot)$.

2) Класс $\mathcal{P}_t(\cdot)$ содержит все меры Дирака δ_x (вырожденные распределения, сосредоточенные в одной точке x, то есть носитель меры δ_x равен одноточечному множеству $\{x\}$).

Класс $\mathcal{P}_t(\cdot)$, удовлетворяющий 1) и 2), назовем смешанным расширением класса стратегий «рынка». Примером смешанного расширения класса чистых стратегий может служить класс всех вероятностных мер $\mathcal{P}^n(K_t(\cdot))$, сосредоточенных не более чем в $n+1$ точке $K_t(\cdot)$.

Полезным дополнительным свойством смешанного расширения также может быть следующее условие, используемое в разделе 3 статьи.

3) Класс $\mathcal{P}_t(\cdot)$ замкнут относительно образования конечных смесей распределений; другими словами, множество $\mathcal{P}_t(\cdot)$ вероятностных мер выпукло.

Когда выполнены свойства 1), 2) и 3), будем говорить о выпуклом смешанном расширении, или же о допустимом классе смешанных стратегий.

Минимальный допустимый класс $\mathcal{P}_t(\cdot)$ (удовлетворяющий условиям 1) - 3)) – это класс $\mathcal{P}^*(K_t(\cdot))$, который состоит из всех вероятностных мер, сосредоточенных в конечном числе точек из компакта $K_t(\cdot)$. Максимальный допустимый класс $\mathcal{P}_t(\cdot)$ (удовлетворяющий условиям 1) - 3)) – это класс $\mathcal{P}(K_t(\cdot))$, который состоит из всех вероятностных мер[9] с носителем, содержащимся в $K_t(\cdot)$. Отметим, что свойство 3) не

левскую σ-алгебру, что естественно, когда функции v_t полунепрерывны сверху. Невозможность использования класса всех подмножеств в общем, «непрерывном» случае связана с аксиомой выбора, приводящей к наличию неизмеримых по Лебегу множеств. В случае использования альтернативной аксиомы вместо аксиомы выбора (в добавление к аксиоматике Цермело–Френкеля теории множеств), например, аксиомы детерминированности, позволяет снять эту проблему, см. например Мычельский, Сверчковкий [13].

[9] Заданных на борелевской σ-алгебре, или же, в более общем случае, на σ-алгебре универсально измеримых подмножеств $\mathbb{R}^n$.

выполняется для смешанного расширения $\mathcal{P}^n(K_t(\cdot))$, если носитель $K_t(\cdot)$ содержит более более чем $n+1$ точку.

Особо отметим, что проблем с измеримостью (интегрируемостью) функций не возникает в случае, когда $\mathcal{P}_t(\cdot) = \mathcal{P}_t^*(K_t(\cdot))$, поскольку в этом случае любая функция интегрируема. Для рассмотрения других случаев будут накладываться дополнительные условия, которые мы обсудим далее.

Лемма 2.1. *Условия* 1) *и* 2) *на* $\mathcal{P}_t(\cdot)$ *гарантируют неизменность функции Беллмана – Айзекса* (BA) *при переходе от чистых к смешанным стратегиям из смешанного расширения* $\mathcal{P}_t(\cdot)$*, как следствие равенства*

$$\sup_{y\in K_t(\cdot)} \big[w_t(\cdot,y) - hy\big] = \sup_{Q\in\mathcal{P}_t(\cdot)} \int \big[w_t(\cdot,y) - hy\big] Q(dy), \tag{2.1}$$

где w_t *задается посредством* (T).

Действительно[10], интегралы в правой части не превосходят точной верхней грани на компакте $K_t(\cdot)$ подынтегральной функции, поскольку в силу свойства 1) имеем $\operatorname{supp}(Q) \subseteq K_t(\cdot)$, так что правая часть (2.1) не превосходит левую. С другой стороны, класс $\mathcal{P}_t(\cdot)$ смешанных стратегий, в силу условия 2), является расширением класса детерминированных стратегий, поскольку $\mathcal{P}_t(\cdot)$ содержит меры Дирака, так что правая часть (2.1) не меньше левой.

Таким образом, с учетом (2.1) новая формулировка уравнений Беллмана–Айзекса для смешанного расширения класса стратегий «рынка» $\mathcal{P}_t(\cdot)$ выглядит следующим образом:

$$v_N^*(\cdot) = g_N(\cdot),$$
$$v_{t-1}^*(\cdot) = g_{t-1}(\cdot) \vee \inf_{h\in D_t(\cdot)} \sup_{Q\in\mathcal{P}_t(\cdot)} \int \big[w_t(\cdot,y) - hy\big] Q(dy), \text{ для } t = 1,\ldots,N. \tag{2.2}$$

Вероятностная интерпретация смешанной стратегии на шаге t, т.е. меры $Q \in \mathcal{P}_t(\cdot)$, состоит в том, что Q является «кандидатом» на роль условного распределения ΔX_t при известной предыстории цен.

---

[10] Условие 3) выпуклости класса $\mathcal{P}_t(\cdot)$ смешанных стратегий не используется в доказательстве леммы, но оно требуется для доказательства теорем о седловой точке далее.

Более формально, для построения вероятностной меры $\mathbb{Q}$, являющейся распределением случайного процесса цен X_t, $t = 0, \dots, N$, селектор $Q_t(\cdot) \in \mathcal{P}_t(\cdot)$ должен еще удовлетворять условиям измеримости, чтобы обеспечить применимость конструкции теоремы Ионеску Тулча. Проблем не возникает в случае, когда $\mathcal{P}_t(\cdot) = \mathcal{P}_t^*(K_t(\cdot))$, а начальное состояние фиксировано, $X_0 = x_0$ (в этом случае число траекторий конечно).

В терминах смешанных стратегий можно сформулировать некоторые факты, связанные с отсутствием гарантированного арбитража.

Обозначим $\mathrm{conv}(K_t(\cdot))$ – выпуклую оболочку $K_t(\cdot)$, $D^0 = \{y : hy \leq 0$ для всех $h \in D\}$ – полярный[11] к D конус. Если $y \in D_t^0(\cdot)$, то это «абсолютно неблагоприятный сценарий», не приносящий прибыль на шаге времени t ни при каких допустимых стратегиях. Очевидно, конус $D_t^0(\cdot)$ является замкнутым и выпуклым.

В [4] введено условие:

$$\mathrm{conv}(K_t(\cdot)) \cap D_t^0(\cdot) \neq \emptyset. \tag{GNSA}$$

и доказано Предложение 3.1 о том, что условие (GNSA) равносильно условию отсутствия гарантированного арбитража NDSA.

Лемма 2.2. *Условие (GNSA) равносильно условию*[12]*:*

$$\text{существует мера } Q \in \mathcal{P}^*(K_t(\cdot)), \text{ такая что } \int yQ(dy) \in D_t^0(\cdot). \tag{MNSA}$$

Если выполнено условие (GNSA), то точку $y^* \in \mathrm{conv}(K_t(\cdot)) \cap D_t^0(\cdot) \neq \emptyset$, можно представить в виде выпуклой комбинации точек $y_1, \dots, y_m$ из $K_t(\cdot)$, т.е. для некоторых чисел $p_i > 0$, таких что $\sum\limits_{i=1}^m p_i = 1$, имеет место $y^* = \sum\limits_{i=1}^m p_i y_i$, так что в качестве меры Q можно взять меру $\sum\limits_{i=1}^m p_i \delta_{y_i}$, чтобы убедиться в справедливости (MNSA).

[11] Строго говоря, корректно говорить о полярном к D конусе, если D – конус, но мы позволим себе некоторую вольность речи.

[12] От "Martingale condition of No Sure Arbitrage".

Пусть теперь (GNSA) не выполнено. Поскольку $\int yQ(dy) \in \operatorname{conv}(K_t(\cdot))$, а это множество не пересекается с $D_t^0(\cdot)$, этот интеграл не может лежать в $D_t^0(\cdot)$, т.е. (MNSA) не может быть выполнено.

Замечание 2.1. Более сильное чем (MNSA) условие[13] является следствием (GNSA):

$$\text{существует мера } Q \in \mathcal{P}^n(K_t(\cdot)), \text{ такая что } \int yQ(dy) \in D_t^0(\cdot). \tag{MFNSA}$$

Действительно, по теореме Каратеодори (см., например, [14]) выпуклая оболочка множества $K_t(\cdot) \subseteq \mathbb{R}^n$ состоит из выпуклых комбинаций не более чем $n+1$ точек множества $K_t(\cdot)$; таким образом, число точек m в доказательстве Леммы 2.2 можно выбрать не превосходящим $n+1$.

Следующая теорема представляет собой слабый аналог первой фундаментальной теоремы финансовой математики для «детерминистской» постановки.

Теорема 2.1. *Условия NDSA,* (MNSA), (MFNSA) *и* (GNSA) *эквивалентны.*

Доказательство. Утверждение теоремы следует из Леммы 2.2, Замечания 2.1 и Предложения 3.1 из [4], поскольку имеют место импликации:

$$(\text{GNSA}) \implies (\text{MFNSA}) \implies (\text{MNSA}) \implies (\text{GNSA}) \iff \text{NDSA}.$$

□

Замечание 2.2.

1) В условиях отсутствия гарантированного арбитража можно, в случае фиксированной начальной цены $X_0 = x_0$, построить меру $\mathbb{Q}$, о которой речь шла ранее в данном параграфе и для которой соответствующие условные распределения ΔX_t при заданной предыстории будут удовлетворять условию (MFNSA) без необходимости требования измеримости, т.к. построенная при помощи конструкции Ионеску

13 От “Martingale with Finite set of difference values condition of No Sure Arbitrage”.

Тулча мера $\mathbb{Q}$ будет сосредоточена на конечном множестве возможных траекторий цен для $t = 0, \dots, N$, в количестве не более чем $(n+1)N$.

2) В случае, если $D_t^0(\cdot)$ содержит единственную точку, а такой точкой может быть только 0, условие (MFNSA), влечет «мартингальность» меры $\mathbb{Q}$ из пункта 1) данного замечания, т.е. $\Delta X_t,\ t = 1, \dots, N$, в этом случае образуют мартингал–разности (или, что равносильно, $X_t,\ t = 0, \dots, N$ является мартингалом) относительно естественной фильтрации, т.е. порожденной процессом X.

3) Для того, чтобы $D_t^0(\cdot) = \{0\}$, достаточно, чтобы множество $D_t(\cdot)$ содержало некоторую окрестность точки 0; в частности, это выполнено для рынка без торговых ограничений, т.е. когда $D_t \equiv \mathbb{R}^n$.

Поскольку введение смешанных стратегий приводит к рассмотрению динамики цен как случайного процесса, то можно поставить вопрос о «реалистичности» уже стохастической модели динамики цен. В [4] в качестве одного из возможных условий «реалистичности» предлагается считать «гладкость» зависимости условных распределений приращений цен от предыстории цен; это может быть формализовано при помощи условия феллеровости переходного ядра[14] $Q_t(\bar{x}_{t-1}, dy)$, т.е. непрерывности в слабой топологии на пространстве мер для отображений

$$\bar{x}_{t-1} \mapsto Q(\bar{x}_{t-1}, \cdot), \tag{2.3}$$

таких что

$$\mathrm{supp}(Q(\bar{x}_{t-1}, \cdot)) \subseteq K_t(\bar{x}_{t-1}). \tag{2.4}$$

Встает вопрос о совместимости поведения многозначного отображения $\bar{x}_{t-1} \mapsto K_t(\bar{x}_{t-1})$ с существованием распределений случайного процесса цен, полученного при помощи конструкции Ионеску Тулча с феллеровскими переходными ядрами (2.3), удовлетворяющими (2.4). Этот вопрос уже обсуждался нами в статье [6]: из результатов [8] следует, что для случая, возникающего в рамках рассматриваемой модели рынка, необходимое и достаточное условие состоит в полунепрерывности снизу многозначного отображения $\bar{x}_{t-1} \mapsto K_t(\bar{x}_{t-1})$.

---

[14] Здесь $Q_t(\bar{x}_{t-1}, \cdot)$ – условное распределение ΔX_t при условии $\bar{X}_{t-1} = \bar{x}_{t-1}$.

3. Равновесие в смешанных стратегиях

Основная цель данного параграфа – установить соотношение между величинами, определенными формулами (3.1) и (3.2):

$$\rho_t(\cdot) = \inf_{h \in D_t(\cdot)} \sup_{Q \in \mathcal{P}_t(\cdot)} \int \big[w_t(\cdot, y) - hy \big] Q(dy), \tag{3.1}$$

$$\rho'_t(\cdot) = \sup_{Q \in \mathcal{P}_t(\cdot)} \inf_{h \in D_t(\cdot)} \int \big[w_t(\cdot, y) - hy \big] Q(dy). \tag{3.2}$$

Разумеется, необходимо гарантировать, чтобы интегралы в (3.1) и (3.2) имели смысл. Если в качестве допустимого класса смешанных стратегий $\mathcal{P}_t(\cdot)$ выбрать $\mathcal{P}^*(K_t(\cdot))$ – класс мер, сосредоточенных на конечном множестве точек из $K_t(\cdot)$, то, как уже отмечалось, любая функция интегрируема.

Заметим, что функция $y \mapsto w_t(\cdot, y)$ ограничена: как установлено в Теореме 3.1 из [4], для всех $t = 0, \ldots, N$ имеем $v_t^* \le C$ и, стало быть, $w_t \le C$. С другой стороны, $v_t^* \ge g_t \ge 0$, так что $w_t \ge 0$. Таким образом,

$$0 \le w_t \le C.$$

С использованием условия $0 \in D_t(\cdot)$ точная нижняя грань в (3.1) не превосходит значения точной верхней грани для конкретного $h = 0$, поэтому получаем, что ρ_t ограничено сверху:

$$\rho_t \le C. \tag{3.3}$$

Величина $\rho_t(\cdot)$ входит в уравнения Беллмана–Айзекса (2.2) для смешанных стратегий, которые можно переписать в сокращенном виде:

$$\begin{aligned} v_N^*(\cdot) &= g_N(\cdot), \\ v_{t-1}^*(\cdot) &= g_{t-1}(\cdot) \vee \rho_t(\cdot), \text{ для } t = 1, \ldots, N. \end{aligned} \tag{3.4}$$

С экономической точки зрения, $\rho_t(\cdot)$ можно интерпретировать как «минимальные» требования к резервам[15], которые необходимо создать в момент времени $t-1$ (где $t = 1, \ldots, N$) для гарантированного покрытия обязательств по опциону в будущем, т.е. для возможных выплат в моменты $t, t+1, \ldots, N$.

[15] В принципе, ρ_t может принимать значение $-\infty$ (в этом случае ρ'_t также равно $-\infty$).

Как отмечалось в [4], уравнения Беллмана–Айзекса (2.2) (или, что равносильно, уравнения (3.4)) представляют собой задачу управления в условиях неопределенности, однако нам будет удобно интерпретировать задачу как динамическую игру с дискретным временем, на каждом шаге которой, при заданной предыстории цен (обозначенной точкой), возникает антагонистическая игра: первый игрок – «хеджер» – пытается минимизировать резервы на покрытие возможных выплат в будущем по обусловленному обязательству, взятому на себя, выбирая чистую стратегию $h \in D_t(\cdot)$, в то время как второй игрок – «рынок» – выбирает наиболее неблагоприятный для «хеджера» сценарий в виде смешанной стратегии – условного распределения $Q \in \mathcal{P}_t(\cdot)$ при известной траектории цен.

Приведем некоторые хорошо известные факты и термины из теории игр. Во-первых, всегда имеет место хорошо известное неравенство

$$\rho_t(\cdot) \geq \rho'_t(\cdot). \tag{3.5}$$

В частности, из (3.3) и (3.5) получаем $\rho'_t(\cdot) \leq \rho_t(\cdot) \leq C$. Если для некоторого смешанного распределения $\mathcal{P}_t(\cdot)$ имеет место равенство:

$$\rho_t(\cdot) = \rho'_t(\cdot), \tag{3.6}$$

то будем говорить, что в игре со смешанным расширением $\mathcal{P}_t(\cdot)$ имеет место (игровое) равновесие[16], а величину $\rho_t = \rho'_t$ будем называть значением игры (на шаге t); если существуют стратегии $h^*_t(\cdot) \in D_t(\cdot)$, $Q^*_t(\cdot) \in \mathcal{P}_t(\cdot)$, для которых достигается равенство (3.6), то они образуют седловую точку $(h^*_t(\cdot), Q^*_t(\cdot))$ игры, $t = 1, \ldots, N$.

В этом параграфе представлено несколько результатов, касающихся достаточных условий для равновесия в игре. Все они опираются на классическую теорему Кнезера [12], поэтому для полноты изложения и удобства читателя приводим ее формулировку.

[16] Доказательство неравенства (3.5) представляет собой легкое математическое упражнение, однако полезнее представляется не доказательство, а игровая интерпретация: можно считать $\rho_t(\cdot)$ наилучшим (с позиции первого игрока) результатом в игре, когда первым «ходит» второй игрок – рынок, максимизирующий риск, а $\rho'_t(\cdot)$ – наилучший результат в игре, когда первым «ходит» первый игрок – хеджер. Поскольку первый игрок стремится к минимизации риска, то право «первого хода», вообще говоря, может давать ему преимущество, что и отражает неравенство (3.5). В случае, когда имеет место равновесие (3.6), последовательность ходов не имеет значения.

Теорема (Кнезер). *Пусть:*

1^0. *X и Y два выпуклых множества в (вещественном) линейном пространстве.*

2^0. *Числовая функция $F(x, y)$ является аффинной*[17] *по каждому из аргументов $x \in X$ и $y \in Y$.*

3^0. *Множество X является компактным в некоторой топологии, для которой функции $x \mapsto F(x, y)$ являются полунепрерывными снизу для всех $y \in Y$.*

Тогда

$$\inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} F(x, y) = \sup_{y \in Y} \min_{x \in X} F(x, y). \tag{3.7}$$

Разумеется, аналогичное утверждение (как следствие) имеет место, когда выполняются условия 1^0 и 2^0, а вместо 3^0 предполагается следующее.

4^0. *Множество Y является компактным в некоторой топологии, для которой функции $y \mapsto F(x, y)$ являются полунепрерывными сверху для всех $x \in X$.*

Тогда

$$\inf_{x \in X} \max_{y \in Y} F(x, y) = \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} F(x, y). \tag{3.8}$$

Замечание 3.1. Отметим, что в теореме Кнезера (равно как и в теореме Фань Цзы)

1) не утверждается конечность цены игры, т.е. выражений (3.7) и (3.8);

---

[17] Вместо предположения об аффинности функций в теореме Кнезера достаточно потребовать выпуклости F по x и вогнутости по y. Это обобщение принадлежит Фань Цзы [11], Теорема 2. Забавно, что в русскоязычной литературе по теории вероятностей для этого же автора используют кальку с американского написания фамилии – Ки Фан. Справедливости ради, отметим, что Фань Цзы соответствует китайскому произношению.

2) в левой части (3.7) $infimum$ можно заменить на $minimum$, а в правой части (3.8) $supremum$ можно заменить на $maximum$, поскольку в предположении 3^0 функции $x \mapsto \sup_{y \in Y} F(x, y)$ полунепрерывна снизу, а для случая 4^0 функция $y \mapsto \inf_{x \in X} F(x, y)$ полунепрерывна снизу, а область определения этих функций компактна в обоих случаях.

Интерес к (игровому) равновесию связан с тем, что при весьма общих предположениях относительно $K_t(\cdot)$, $D_t(\cdot)$ и $v_t(\cdot)$ равновесие (3.6) имеет место, а для $\rho_t'(\cdot)$ выражение (3.2) может быть упрощено за счет явного выражения для точной нижней грани. Для соответствующей формулировки введем обозначения:

σ_A – опорная функция множества A, т.е.

$$\sigma_A(y) = \sup_{h \in A} hy;$$

$\mathrm{bar}(A)$ – барьерный конус[18] множества A, т.е.

$$\mathrm{bar}(A) = \{y \in \mathbb{R}^n : \ \sigma_A(y) < +\infty\}.$$

Отметим, что полярный конус[19] $A^o = \{y \in \mathbb{R}^n : \ hy \leq 0$ для всех $h \in A\} = \{y \in \mathbb{R}^n : \ \sigma_A(y) \leq 0\}$ содержится в $\mathrm{bar}(A)$.

Предложение 3.1. *Пусть функции w_t и класс мер $\mathcal{P}_t(\cdot)$ таковы, что определены[20] интегралы $\int w_t(\cdot, y)Q(dy)$ для любой меры $Q \in \mathcal{P}_t(\cdot)$. Тогда*

$$\rho_t'(\cdot) = \sup_{Q \in \mathcal{P}_t(\cdot)} \left[\int w_t(\cdot, y)Q(dy) - \sigma_{D_t(\cdot)}\left(\int yQ(dy) \right) \right]. \qquad (3.9)$$

Доказательство. Доказательство этого утверждения элементарно: анализируя выражение (3.2) для $\rho_t'(\cdot)$ под знаком $supremum$ получаем:

---

[18]Этот конус является выпуклым и содержит точку 0.

[19] Строго говоря, множество A^0 называют полярным к A конусом, если A — конус; здесь мы допускаем некоторую вольность речи, называя A^0 полярным.

[20] Можно, например, в качестве $\mathcal{P}_t(\cdot)$ взять класс $\mathcal{P}^*(K_t(\cdot))$ мер, сосредоточенных в конечном множестве точек из $K_t(\cdot)$, чтобы не накладывать дополнительных требований на функции v_t^*. Либо же, например, наложить условие на v_t^*, потребовав универсальную измеримость этих функций (или же какое-нибудь свойство гладкости, например полунепрерывность).

$$\inf_{h\in D_t(\cdot)}\int\big[w_t(\cdot,y)-hy\big]Q(dy)=\int w_t(\cdot,y)Q(dy)-\sup_{h\in D_t(\cdot)}h\int yQ(dy).$$

Откуда и следует (3.9). □

Замечание 3.2.

1) Из формулы (3.9) непосредственно вытекает, что:

- либо выполняется условие отсутствия гарантированного арбитража $NDSAUP$, геометрический критерий которого имеет вид[21]

$$\operatorname{conv}\big(K_t(\cdot)\big)\cap\operatorname{bar}\big(D_t(\cdot)\big)\neq\emptyset; \qquad \text{(GNSAUP)}$$

  и тогда в формуле (3.9) точную верхнюю грань следует искать только по тем мерам $Q\in\mathcal{P}_t(\cdot)$, для которых $\int yQ(dy)\in\operatorname{bar}\big(D_t(\cdot)\big)\neq\emptyset$;

- либо же имеет место:

$$\operatorname{conv}\big(K_t(\cdot)\big)\cap\operatorname{bar}\big(D_t(\cdot)\big)=\emptyset, \qquad (3.10)$$

  и в этом случае[22] $\rho'_t(\cdot)=-\infty$.

2) Значение $\rho'_t(\cdot)$ в (3.1) не изменится, если заменить $D_t(\cdot)$ на его замыкание $\bar{D}_t(\cdot)$, так как опорная функция не изменится при замыкании множества, т.е. $\sigma_{D_t(\cdot)}=\sigma_{\bar{D}_t(\cdot)}$. Поэтому в случае равновесия (3.6), не ограничивая общности, можно считать, что торговые ограничения $D_t(\cdot)$ – замкнутые множества.

3) В случае общего положения для торговых ограничений (т.е. когда все множества $D_t(\cdot)$ не содержатся в аффинных многообразиях размерности меньше чем n) в силу выпуклости $D_t(\cdot)$ внутренность $D_t(\cdot)$ имеет замыкание, совпадающее с замыканием $D_t(\cdot)$. Поэтому, если имеет место равновесие (3.6), то не ограничивая общности, можно считать (в случае общего положения), что множества $D_t(\cdot)$ - открытые, см. Следствие 6.3.1 [14].

---

[21] См. [5], Теорема 4.1.

[22] В случае выполнения условия (3.10) имеет место равновесие $\rho_t(\cdot)=\rho'_t(\cdot)=-\infty$, что соответствует получению неограниченной прибыли от гарантированного арбитража, а хеджирование обусловленного обязательства по (проданному) опциону теряет экономический смысл, см. пункт 1 Замечания 3.5 далее.

4) Если имеет место равновесие (3.6), то уравнения (3.4) можно называть уравнениями Беллмана, поскольку хеджирующие стратегии в (3.9) больше не присутствуют, а оптимизация проводится только по смешанным стратегиям рынка.

5) В случае отсутствия торговых ограничений, т.е. когда $D_t(\cdot) \equiv \mathbb{R}^n$, барьерный конус $\mathrm{bar}(D_t(\cdot))$ содержит единственную точку 0. Поэтому формула (3.9) принимает особо простой вид при условии[23] (GNSAUP):

$$\rho_t'(\cdot) = \sup_{Q \in \mathcal{P}_t(\cdot),\, \int y\, Q(dy)=0} \int w_t(\cdot, y) Q(dy); \tag{3.11}$$

таким образом, максимизация осуществляется по «мартингальным» мерам.

6) Поскольку $0 \in D_t(\cdot)$, то $\sigma_{D_t(\cdot)}(y) \geq 0$ для всех $y \in \mathbb{R}^n$. Отсюда, в частности, следует, что полярный конус $D_t^0(\cdot) = \{y :\ \sigma_{D_t(\cdot)}(y) = 0\}$.

Предложение 3.2. *Пусть $D_t(\cdot)$ – компактное выпуклое множество, содержащее 0. Тогда для класса $\mathcal{P}_t(\cdot) = \mathcal{P}^*(K_t(\cdot))$ имеет место равновесие (3.6). При этом точная нижняя грань в (3.1) и (3.2) достигается для некоторого $h_t^*(\cdot) \in D_t(\cdot)$.*

Доказательство. Функционал $F_{t,\cdot}$, задаваемый соотношением

$$F_{t,\cdot}(h, Q) = \int \big[w_t(\cdot, y) - hy\big] Q(dy),$$

является аффинным по каждому из аргументов, $h \mapsto F_{t,\cdot}(h, Q)$ непрерывна, D непустое компактное выпуклое множество, $\mathcal{P}_t(\cdot) = \mathcal{P}^*(K_t(\cdot))$ непустое выпуклое множество, так что непосредственно применима теорема Кнезера [12]; таким образом равновесие (3.6) имеет место. □

Замечание 3.3.

1) Напомним, что величина $\rho_t(\cdot)$ в (3.1) не зависит от конкретного выбора $\mathcal{P}_t(\cdot)$, удовлетворяющего свойствам 1) и 2), см. Лемму 2.1.

---

[23] Для случая отсутствия торговых ограничений условие (GNSAUP) равносильно условию отсутствия арбитражных возможностей $NDAO$, см. [5, Замечание 4.1].

Величина $\rho'_t(\cdot)$ в (3.2), вообще говоря, может зависеть от конкретного выбора $\mathcal{P}_t(\cdot)$.

2) Уравнения Беллмана (3.4), в условиях Предложения 3.2, где имеет место равновесие $\rho_t(\cdot) = \rho'_t(\cdot)$, а последняя величина определяется при помощи формулы (3.9), не требуют никаких дополнительных свойств функций Беллмана v_t^*, или, что равносильно, w_t.

Используя обозначения из [6, формула (3.3)], обозначим:

$$\hat{D}_t^a(\cdot) = \{h \in D_t(\cdot) : \sigma_{K_t^*(\cdot)}(-h) \leq a\}, \tag{3.12}$$

где[24] $K_t^*(\cdot) = \mathrm{conv}(K_t(\cdot))$. В соответствии с Леммой 3.1 из [6], если выполнены условие (B) и грубое условие отсутствия гарантированного арбитража с неограниченной прибылью $RNDSAUP$[25] из [6], торговые ограничения можно изменить, заменив $D_t(\cdot)$ на $\hat{D}_t^a(\cdot)$, где $a \geq C$, а константа C задается формулой (1.1), не изменив при этом значения $\rho_t(\cdot)$, а значит, в силу (3.4), решения $v_t^*(\cdot)$ уравнения (BA).

Положим

$$\begin{aligned} \rho_t^{(a)}(\cdot) &= \sup_{Q \in \mathcal{P}^*(K_t(\cdot))} \inf_{h \in \hat{D}_t^a(\cdot)} \int [w_t(\cdot, y) - hy] Q(dy) = \\ &= \sup_{Q \in \mathcal{P}^*(K_t(\cdot))} \left[\int w_t(\cdot, y) Q(dy) - \sigma_{\hat{D}_t^a(\cdot)} \left(\int y Q(dy) \right) \right]; \end{aligned}$$

равенство имеет место в силу Предложения 3.1, с учетом того, что любая функция интегрируема относительно меры $Q \in \mathcal{P}^*(K_t(\cdot))$. В силу компактности $\hat{D}_t^a(\cdot)$ применимо Предложение 3.2, так что имеет место равновесие для новых торговых ограничений $\hat{D}_t^a(\cdot)$:

$$\rho_t(\cdot) = \rho_t^{(a)}(\cdot) \geq \rho'_t(\cdot),$$

где $\rho'_t(\cdot)$ задается формулой (3.2) с исходными торговыми ограничениями $D_t(\cdot)$. Вопрос о совпадении $\rho_t^{(a)}(\cdot)$ и $\rho'_t(\cdot)$ требует, однако, дополнительного изучения.[26]

---

[24] Отметим, что имеет место равенство $\sigma_{K_t(\cdot)}(\cdot) = \sigma_{K_t^*(\cdot)}(\cdot)$.

[25] Геометрический критерий: $0 \in \mathrm{int}\{z \in \mathbb{R}^n : \ (z + K_t^*(\cdot)) \cap \mathrm{bar}(D_t(\cdot)) \neq \emptyset\}$.

[26] В последующей публикации, при условии отсутствия торговых ограничений, будет доказано совпадение этих величин, см. формулировку Теоремы 3.1 далее в данной статье.

Построение теории для случая, когда выпуклое множество $D_t(\cdot)$ не удовлетворяют условию компактности, т.е. могут быть неограничеными, без дополнительных требований к функции $y \mapsto w_t(\cdot, y)$ может приводить к значительным техническим осложнениям (см., например, [2, 3] или [10]), поэтому подобное рассмотрение выходит за рамки настоящей работы; однако при дополнительных предположениях относительно w_t, соответствующий результат приведен в Предложении 3.3 ниже.

В то же время, случай рынка без торговых ограничений без дополнительных требований к функциям $y \mapsto w_t(\cdot, y)$ может быть сведен к использованию Предложения 3.2, в предположении отсутствия арбитражных возможностей, NDAO. Имеет место следующий результат.[27]

Теорема 3.1. *В случае отсутствия торговых ограничений, т.е. когда $D_t(\cdot) \equiv \mathbb{R}^n$, в предположении NDAO имеет место равновесие (3.6) для $\mathcal{P}_t(\cdot) = \mathcal{P}^*(K_t(\cdot))$, причем точная нижняя грань в (3.6) достигается для некоторого $h_t^*(\cdot) \in \mathbb{R}^n$, и выполняется равенство*

$$\rho_t(\cdot) = \sup_{Q \in \mathcal{P}^*(K_t(\cdot)),\ \int y Q(dy) = 0} \int w_t(\cdot, y) Q(dy). \tag{3.13}$$

Отметим, что выражение в правой части (3.13) формально получается из (3.9) в случае отсутствия торговых ограничений, т.к. $\operatorname{bar}\big(D_t(\cdot)\big) = \{0\}$ и $\sigma_{D_t(\cdot)}(0) = 0$.

Следующий (альтернативный) результат о равновесии получается в предположении, что выполнено следующее условие, касающееся «гладкости» функций $v_t^*(\cdot)$.

Для $t = 0, 1, \ldots, N$ функции Беллмана–Айзекса $\bar{x}_t \mapsto v_t^*(\bar{x}_t)$ полунепрерывны сверху.[28]

(USC)

Условия для выполнения условия (USC) приведены в [6]: достаточно потребовать полунепрерывность сверху многозначных отобра-

[27] Доказательству этого факта будет посвящена последующая публикация.

[28] Это, очевидно, равносильно полунепрерывности сверху для функций $w_t(\bar{x}_{t-1}, y) = v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y)$.

жений $x \mapsto K_t(x)$, полунепрерывность снизу многозначных отображений $x \mapsto D_t(x)$ и полунепрерывность сверху функций выплат g_t, $t = 1, \ldots, N$.

Предложение 3.3. *Пусть $D_t(\cdot)$ выпуклое множество, содержащее точку* 0*.*

1) *Если выполняется условие* (USC)*, то имеет место равновесие* (3.6) *с классом $\mathcal{P}_t(\cdot)$ равным*[29] *$\mathcal{P}(K_t(\cdot))$, причем в этом случае точная верхняя грань достигается для некоторого $Q_t^*(\cdot) \in \mathcal{P}(K_t(\cdot))$.*

2) *Если выполняется условие* (USC) *и при этом $D_t(\cdot)$ компактно, то значение игры достигается для некоторой седловой точки – оптимальной пары $h_t^*(\cdot) \in D_t(\cdot)$, $Q_t^*(\cdot) \in \mathcal{P}(K_t(\cdot))$, а значение игры конечно.*

Доказательство. В силу теоремы А.Д. Александрова[30], слабая схо-

---

[29]Напомним, что $\mathcal{P}(K_t(\cdot))$ – множество всех вероятностных мер на $K_t(\cdot)$ с борелевской σ-алгеброй.

[30] Теорема 2 в §16 статьи [9] (точнее, в этой теореме речь идет о полунепрерывности снизу (сверху) функции, аргумент которой пробегает множество вероятностных мер, а значение функции — мера открытого (замкнутого) множества; однако, это легко обобщается на случай интеграла полунепрерывной функции, см, например, Теорему 8.1 из книги [15], которую он называет “Portmanteau theorem” (в переносном смысле «все собрано в одном месте»). В первом издании (1968 года) хорошо известной и цитируемой книги [1], в примечании к § 2 главы 1 Патрик Биллингсли справедливо ссылается, по поводу авторства теоремы, на серию работ А.Д. Александрова 1940–1943 годов. Однако во втором издании книги (1999 года) Биллингсли решил пошутить: ссылка на работу А. Д. Александрова исчезла, а появилась ссылка на «работу» вымышленного математика Portmanteau, которому на странице 15 приписывается эта теорема. Надо признать, что розыгрыш Биллингсли более чем удался — теперь, как правило, этот результат называют «теорема Портманто». Во франкоязычной версии Википедии по этому поводу имеется остроумное замечание. “Dans la deuxième édition de Convergence of Probability Measures, Billingsley attribue le théorème à Jean-Pierre Portmanteau, de l’université de Felletin, dans un papier que Jean-Pierre Portmanteau aurait publié en 1915 dans Annals of the University of Felletin, sous le titre farfelu « Espoir pour l’ensemble vide ». Il s’agit d’un canular : il n’y a pas de mathématicien portant le nom de Jean-Pierre Portmanteau, et il n’y a jamais eu d’université à Felletin. Et, surtout, il n’y a jamais eu d’espoir pour l’ensemble vide...”

димость вероятностных мер Q_n к мере Q на польском (полном сепарабельном метрическом) пространстве с борелевской σ–алгеброй равносильна тому, что для любой полунепрерывной сверху и ограниченной снизу числовой функции f имеет место неравенство:

$$\limsup_{n\to\infty} \int f\, dQ_n \le \int f\, dQ.$$

Поэтому аффинный по каждой переменной функционал

$$F_{t,\cdot}(h,Q) = \int \big[w_t(\cdot,y) - hy\big] Q(dy)$$

является полунепрерывным сверху по Q в слабой топологии[31] на множестве $\mathcal{P}(K_t(\cdot))$ всех вероятностных мер на $K_t(\cdot)$ с борелевской σ-алгеброй. Выбирая в качестве $\mathcal{P}_t(\cdot)$ множество $\mathcal{P}(K_t(\cdot))$, являющееся компактным в слабой топологии, мы вновь получаем возможность применения теоремы Кнезера, но уже не с «правой», а с «левой» стороны функционала F, т.е. с предположением 4^0 вместо 3^0. Таким образом, имеет место равновесие (3.6) с $\mathcal{P}_t(\cdot)$ равным $\mathcal{P}(K_t(\cdot))$.

То, что точная верхняя грань в соответсвующих выражениях достигается, следует из того, что полунепрерывная сверху функция достигает максимума на компактном множестве. Пункт 2) вытекает из пункта 1) и Предложения 3.2. $\square$

Замечание 3.4. Ограниченность $D_t(\cdot)$, на наш взгляд, является вполне реалистичным (с экономической точки зрения) предположением, поскольку обычно леверидж ограничен требованиями к обеспечению, а также к экономическому и регуляторному капиталу; кроме того, риск-менеджмент зачастую устанавливает ограничения на показатели риска портфеля и на концентрацию (см. [4], Пример 1, пункт 4). Кроме того, вряд ли безопасно пользоваться стратегиями хеджирования, которые используют неограниченно большие позиции. Наконец, неограниченные позиции физически нереализуемы.

Полезные следствия можно извлечь из Предложения 3.1 из [5], содержащего выводы о характере «арбитража» на рынке в момент

---

[31] Это топология (для польского пространства) метризуема, см. например, [1], так что можно обойтись сходимостью последовательностей (а не направленностей).

времени t при заданных $K_t(\cdot)$ и $D_t(\cdot)$ в терминах некоторой «игры», имеющей значение $\pi_t(\cdot)$; интерпретация величины $\pi_t(\cdot)$ – гарантированная (безрисковая) прибыль от одношаговой операции в момент времени t с допустимыми стратегиями. Здесь нам потребуются лишь первые два пункта этого предложения.

Предложение 3.4. *Пусть $D_t(\cdot)$ – выпуклое множество, содержащее точку* 0*, тогда:*

1) *имеет место равновесие:*[32]

$$\pi_t(\cdot) = \sup_{h \in D_t(\cdot)} \min_{y \in \mathrm{conv}(K_t(\cdot))} hy = \min_{y \in \mathrm{conv}(K_t(\cdot))} \sup_{h \in D_t(\cdot)} hy; \qquad (3.14)$$

2) *величина $\pi_t(\cdot)$ всегда неотрицательна (возможно, равна $+\infty$), причем она равна нулю, если выполнено условие отсутствия гарантированного арбитража NDSA, и положительна, если существует гарантированный арбитраж.*

В случае гарантированного арбитража (т.е. когда $\pi_t(\cdot) > 0$) будем различать два случая: в соответствии с предложенной в [5] терминологией будем говорить о гарантированном арбитраже с неограниченной прибылью в момент t, если $\pi_t(\cdot) = +\infty$, обозначая такой арбитраж SAUP[33], о гарантированном арбитраже с ограниченной прибылью в момент t, если $0 < \pi_t(\cdot) < +\infty$, обозначая такой арбитраж SABP[34]. Отметим, что достаточным условием отсутствия SAUP является компактность $D_t(\cdot)$. В случае отсутствия торговых ограничений, при наличии гарантированного арбитража, имеют место неограниченные прибыли, т.е. SAUP; в этом случае $\mathrm{bar}\big(D_t(\cdot)\big) = \{0\}$.

В [5] был поставлен вопрос, может ли иметь смысл хеджирование в случае, когда существует гарантированный арбитраж с ограниченной прибылью SABP. Было установлено, что если рассматривать одномерную задачу (с одним рисковым активом), то ответ на этот вопрос будет отрицательным: оптимальная стратегия соответствует извлечению максимально возможной прибыли.

---

[32] Условие компактности $D_t(\cdot)$ не требуется (достаточно условия компактности $K_t(\cdot)$).

[33] От “Sure Arbitrage with Unbounded Profit”.

[34] От “Sure Arbitrage with Bounded Profit”.

В двумерном случае, однако, можно дать положительный ответ на поставленный вопрос, что говорит об экономической целесообразности суперхеджирования для опционов типа[35] "rainbow".

Пример 3.1. Рассмотрим одношаговую (т.е. $t \in \{0, 1\}$) модель с двумя рисковыми активами, с динамикой цен мультипликативно - независимого типа, вида:

$$X_1^1 = M_1^1 X_0^1,\ M_1^1 \in [\alpha^1, \beta^1]$$
$$X_1^2 = M_1^2 X_0^2,\ M_1^2 \in [\alpha^2, \beta^2],$$

начальное состояние цен известно:

$$X_0^1 = x_0^1 > 0,\ X_0^2 = x_0^2 > 0.$$

Тогда[36]

$$\Delta X_1 = X_1 - X_0 \in K = K_1(x_0) = [a^1(x_0), b^1(x_0)] \times [a^2(x_0), b^2(x_0)],$$

где $a^i = a^i(x_0) = (\alpha^i - 1)x_0^i$; $b^i = b^i(x_0) = (\beta^i - 1)x_0^i$, $i = 1, 2$.

Пусть торговые ограничения состоят в запрете коротких позиций по рисковым активам и в лимите $r > 0$ на вложения $h = (h^1, h^2)$ в рисковые активы; тем самым

$$h^1 \geq 0,\ h^2 \geq 0,\ h^1 x_0^1 + h^2 x_0^2 \leq r,$$

т.е. $h \in D = D_1(x_0)$, где D представляет собой треугольник[37] с вершинами $(0, 0)$, $(\varepsilon_1, 0)$ и $(0, \varepsilon_2)$, где $\varepsilon_1 = r/x_0^1 > 0$, $\varepsilon_2 = r/x_0^2 > 0$.

Предположим, что у «хеджера» имеется обусловленное обязательство по опциону "straddle"[38] на второй актив, т.е. имеем функцию выплат

$$g(\bar{x}^1, \bar{x}^2) = |x_1^2 - x_0^2| = |\Delta x_1^2| = |y^2|,$$

где обозначено $y^i = \Delta x_1^i$, $i = 1, 2$. Далее, наложим на параметры α^i и β^i, $i = 1, 2$ условия, чтобы по одному рисковому активу (для

---

[35] Т.е. когда число рисковых активов, фигурирующих в функциях (потенциальных) выплат $g_t(\cdot)$, не менее двух.

[36] Отметим, что в данном примере компакт K — выпуклый.

[37] Отметим, что D – компактно, $\mathrm{bar}(D) = \mathbb{R}^n$ и, значит, $\mathrm{bar}(D) \cap \mathrm{conv}(K) = K$.

[38] Точнее, так называют комбинацию из двух опционов – длинных позиций по опционам "call" и "put" на один и тот же актив с одинаковой ценой исполнения, равной текущей цене базового актива, и с одинаковым сроком до исполнения.

определенности - по первому) был бы гарантированный арбитраж[39], а по другому не было бы арбитражных возможностей[40], т.е. $\beta^1 > \alpha^1 > 1$ и $\alpha^2 < 1 < \beta^2$ (что равносильно $b^1 > a^1 > 0$ и $a^2 < 0 < b^2$).

Поскольку $D_t(\cdot)$ в данном примере компактны, применимо Предложение 3.2 о наличии равновесия в классе смешанных стратегий $\mathcal{P}^*(K)$, т.е. $\rho_t(\cdot) = \rho'(\cdot)$. Задачу максимизации (3.9) будем решать в два этапа: сначала условная оптимизация при условии $\int yQ(dy) = z$, а затем, на втором этапе, оптимизация по z полученного на первом этапе решения.

Первый этап сводится к нахождению вогнутой оболочки[41] f^* для функции $f(y^1, y^2) = |y^2|$; в данном случае это легко получается благодаря выпуклости f и прямоугольности K:

$$f^*(z_1, z_2) = \gamma z_2 + \delta,\ z = (z_1, z_2) \in K,$$

где

$$\gamma = \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2},\ \delta = -\frac{2b^2a^2}{b^2 - a^2} > 0.$$

На втором этапе нужно найти максимум по $z = (z_1, z_2)$ на K вогнутой функции

$$(z_1, z_2) \mapsto f^*(z_1, z_2) - \sigma_D(z_1, z_2),$$

где опорная функция σ_D имеет вид

$$\sigma_D(z_1, z_2) = 0 \bigvee (\varepsilon_1 z_1) \bigvee (\varepsilon_2 z_2) = (\varepsilon_1 z_1) \bigvee (\varepsilon_2 z_2),$$

так как $z_1 \geq a^1 > 0$. Выберем теперь α^2 и β^2 так, $\alpha^2 + \beta^2 > 2$, т.е. $a^2 + b^2 > 0$; тогда $\gamma > 0$. Кроме того, пусть $\gamma < \varepsilon_2$ и $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} a^1 < b^2$ (это условие на начальные цены x_0). Тогда максимум w достигается при $z_1 = a_1$, $\varepsilon_1 z_1 = \varepsilon_2 z_2$, т.е. в точке $z^* = (z_1^*, z_2^*) = (a^1, c^2) \in K$, где $c^2 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} a^1 = \frac{x_0^2}{x_0^1} a^1$, причем $a^2 < c^2 < b^2$. Этот максимум достигается для смешанных стратегий, сосредоточенных не более, чем в трех точках, причем, в силу выпуклости функции выплат, в крайних точках K, т.е. в вершинах этого прямоугольника. Поскольку z^* лежит на стороне прямоугольника K – на отрезке, соединяющем вершины (a^1, a^2) и

---

[39] Имеется в виду случай операций только с этим активом.

[40] Аналогично предыдущей сноске.

[41] Общие результаты на эту тему будут представлены в последующей публикации.

(a^1, b^2), то в данном случае максимум достигается для смешанного распределения сосредоточенного в двух точках, (a^1, a^2) и (a^1, b^2), а именно:

$$Q^* = q_1 \delta_{(a^1,a^2)} + \delta_{(a^1,b^2)},$$

где q_1 и q_2 определяются из системы линейных уравнений

$$\begin{cases} q_1 a^1 + q_2 b^2 = c^2, \\ q_1 + q_2 = 1, \end{cases}$$

т.е.

$$q_1 = \frac{b^2 - c^2}{b^2 - a^2} > 0, \ q_2 = \frac{c^2 - a^2}{b^2 - a^2} > 0.$$

Далее, нетрудно найти минимизатор $h^* \in D$ для функции $h \mapsto \varphi(h) = \bigvee\limits_{y \in K'} (|y^2| - hy)$, где $K' = \{(a^1, a^2), (a^1, b^2)\}$. Поскольку

$$\varphi(h) = (|a^2| - h^1 a^1 - h^2 a^2) \bigvee (|b^2| - h^1 a^1 - h^2 b^2) = -h^1 a^1 + (-a^2 - h^2 a^2) \bigvee (b^2 - h^2 b^2)$$

то минимум φ на D достигается для

$$h^{2*} = \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} = \gamma > 0,$$

$$h^{1*} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}(\varepsilon_2 - \gamma) = \frac{r - \gamma x_0^2}{x_0^1} > 0.$$

Таким образом, оптимальная стратегий «хеджера» $h^* = (h^{1*}, h^{2*})$ подразумевает при выбранных параметрах задачи занимать длинные позиции по обоим рисковым активам – не вкладывать все средства в первый («арбитражный») актив, а хеджировать позицию по второму активу (как если бы первого актива не было), приобретая второго актива на сумму $h^{2*} x_0^2 = \gamma x_0^2 > 0$, а в пределах остатка лимита r, инвестировать в первый актив с целью (ограниченного) арбитража, приобретая первый актив на сумму $h^{1*} x_0^1 = r - \gamma x_0^2 > 0$.

Стратегия $\check{h} = (\check{h}^1, \check{h}^2)$, отвечающая максимальному вложению в первый («арбитражный») актив, т.е.

$$\check{h}^1 = \varepsilon_1, \ \check{h}^2 = 0,$$

дает гарантированный результат (по потенциальным потерям):

$$\check{v} = \sup_{y \in K} (g(x^0 + y) - \check{h} y) = \sup_{y^1 \in [a^1, b^1]} \sup_{y^2 \in [a^2, b^2]} (|y^2| - \varepsilon_1 y^1) = b^2 - \varepsilon_1 a^1.$$

Оптимальный же гарантированный результат, с использованием стратегии h^*, лучше:

$$v_0^* = u_1(z^*) = \left[\gamma\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}a^1\right) + \delta\right] - \varepsilon_1 a^1 < [\gamma b^2 + \delta] - \varepsilon_1 a^1 = b^2 - \varepsilon_1 a^1 = \check{v},$$

поскольку $\gamma > 0$ и $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}a^1 < b^2$, в силу выбора параметров. □

Предложение 3.4 позволяет оценить $\rho_t(\cdot)$ и $\rho'_t(\cdot)$ из (3.1) и (3.2): с использованием $\pi_t(\cdot)$ мы сейчас установим оценку снизу для ρ', а также более точную, чем (3.3), оценку сверху для ρ.

Предложение 3.5. *Имеют место неравенства*

$$C - \pi_t(\cdot) \geq \rho_t(\cdot) \geq \rho'_t(\cdot) \geq -\pi_t(\cdot). \tag{3.15}$$

Доказательство. Поскольку $0 \leq v_t(\cdot, x_{t-1} + y) \leq C$ для всех $y \in K_t(\cdot)$, обозначив $m(Q) = \int yQ(dy)$, имеем:

$$C + \inf_{h \in D_t(\cdot)} \sup_{Q \in \mathcal{P}_t(\cdot)} \big[- hm(Q)\big] \geq \rho_t(\cdot) \geq \rho'_t(\cdot) \geq \sup_{h \in D_t(\cdot)} \inf_{Q \in \mathcal{P}_t(\cdot)} \big[- hm(Q)\big].$$

Нетрудно видеть, что $m(Q)$ пробегает в точности $\mathrm{conv}(K_t(\cdot))$, когда Q пробегает $\mathcal{P}_t(\cdot)$ (это вытекает из свойств допустимого класса $\mathcal{P}_t(\cdot)$).

Поэтому:

$$C - \sup_{h \in D_t(\cdot)} \min_{y \in \mathrm{conv}(K_t(\cdot))} hy \geq \rho_t(\cdot) \geq \rho'_t(\cdot) \geq - \min_{y \in \mathrm{conv}(K_t(\cdot))} \sup_{h \in D_t(\cdot)} hy,$$

откуда, с учетом (3.14), вытекает (3.15). □

Замечание 3.5.

1) Отметим, что когда имеет место SAUP, т.е. $\pi_t(\cdot) = +\infty$, из (3.15) получаем равновесие $\rho_t(\cdot) = \rho'_t(\cdot) = -\infty$; с учетом (3.3) можно сделать вывод, что нет нужды создавать резервы на покрытие обязательств в будущем, когда можно извлекать неограниченную гарантированную прибыль.

2) Отметим также, что из (3.15) вытекает при $C = 0$ (что равносильно $g_t \equiv 0, t = 1, \ldots, N$) равновесие $\rho_t = \rho'_t = -\pi_t(\cdot)$.

3) Кроме того, из (3.15) и пункта 2) Предложения 3.4 получаем, что, если выполнено NDSA, то $\rho'_t(\cdot) \geq 0$.

Рассмотрим теперь европейский опцион с функцией выплат в терминальный момент равной $g(x_0, \ldots, x_N) = g(\cdot) \geq 0$, причем $g(\cdot) \leq C$. Полагая формально $g_t \equiv -\infty$ для $t = 0, \ldots, N-1$ и $g_N = g(\cdot)$, получаем из (3.4) уравнения Беллмана–Айзекса для европейского опциона:

$$\begin{aligned} v_N^*(\cdot) &= g(\cdot), \\ v_{t-1}^*(\cdot) &= \rho_t(\cdot) \text{ для } t = N, \ldots, 1. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Если выполнено условие «безарбитражности» NDSA, то нетрудно показать, что $v_t^*(\cdot) \geq 0$ для всех $t = 0, \ldots, N$. Действительно, для $t = N$ это следует из предположения о неотрицательности g. Используя неравенство (3.5) и неравенство из пункта 3) Замечания 3.5, получаем $\rho_t(\cdot) \geq \rho_t'(\cdot) \geq 0$, $t = N, \ldots, 1$, а значит, в соответствии с (3.16), $v_{t-1}^*(\cdot) = \rho_t(\cdot) \geq 0$. Таким образом, $v_t^*(\cdot) \geq 0$ для всех $t = 0, 1, \ldots, N$.

Поэтому, если выбрать $g_t \equiv 0$ при $t = 0, \ldots, N-1$ и $g_N = g$, то результат для функции Беллмана–Айзекса v_t^* с использованием уравнений (3.4), получается такой же, как и для $g_t = -\infty$ при $t = 0, \ldots, N-1$, т.е. в предположении NDSA имеем, что европейский опцион сводится к частному случаю американского опциона. Если при этом также имеет место равновесие (3.6), то получаем уравнение Беллмана (3.16), где $\rho_{t-1}(\cdot) = \rho_{t-1}'(\cdot)$ задается формулой (3.9).

Аналогичным образом может быть рассмотрен бермудский опцион — при условии «безарбитражности» NDSA такой опцион сводится к частному случаю американского опциона (у которого некоторые функции выплат нулевые, а некоторые — неотрицательные).

Естественно поставить вопрос, когда равенство (3.6) может нарушаться (т.е. в (3.5) имеет место строгое неравенство), — построить пример, когда равновесие не имеет место. Исходя из результатов, полученных в этом параграфе, для того чтобы построить такой пример:

1) $D_t(\cdot)$ не должно быть компактно;

2) функция $y \mapsto w_t(\cdot, y)$ не должна быть полунепрерывной сверху;

3) в случае гарантированного арбитража не должно быть неограниченной прибыли;

4) в случае отсутствия торговых ограничений не должно выполняться NDAO, и не должно быть гарантированного арбитража.

Пример 3.2. Рассмотрим случай одномерной одношаговой мультипликативной модели без торговых ограничений, описанной в Примере 3.2 из [5], с конкретным выбором параметров, обеспечивающих наличие арбитражных возможностей, но отсутствие гарантированного арбитража. Для удобства читателя воспроизведем пример из [5] здесь.

Цену единственного «рискового» актива X_t^1 будем записывать без верхнего индекса, т.е. как X_t. Динамика цены этого актива задается в виде мультипликативного представления вида:

$$X_t = M_t X_{t-1}, \quad t = 1, \ldots, N,$$

где $X_0 > 0$.

Априорно известно, что $M_t \in [\alpha, \beta], \quad \beta > \alpha > 0$, так что модель является однородной по времени, со свойством мультипликативной независимости, см. терминологию в статье [4], раздел 2. Здесь $K_t(x_0, \ldots, x_{t-1}) = \big[x_{t-1}(\alpha - 1), x_{t-1}(\beta - 1)\big]$.

Условие «безарбитражности» NDAO, т.е. отсутствия арбитражных возможностей, очевидно, равносильно $1 \in (\alpha, \beta)$, то есть через один период в будущем возможно как повышение, так и понижение цены рискового актива; другими словами, доходность на периоде t рискового актива $R_t = M_t - 1$ может быть как положительной, так и отрицательной. Если $\alpha = 1$ или $\beta = 1$, имеется арбитражная возможность, но выполнено условие «безарбитражности» NDSA, т.е. отсутствие гарантированного арбитража. Если же $\alpha > 1$ или $\beta < 1$, то имеет место гарантированный арбитраж.

Далее рассмотрим одношаговый частный случай этой модели, т.е. когда $N = 1$. Выберем $\alpha = 1$ и начальную цену $X_0 = 1$, тогда $K_1(1) = [0, b]$, где $b = \beta - 1 > 0$. В качестве опциона возьмем бинарный[42] опцион “call” с функцией выплат[43] $g_1(x) = I_{(1,+\infty)}(x)$. Очевидно, эта

[42] На английском языке для таких опционов есть два синонима: «binary» и «digital».

[43] Здесь I_A — индикатор множества A, т.е. $I_A(x) = 1$ при $x \in A$ и $I_A(x) = 0$ при

функция не является полунепрерывной сверху (хотя полунепрерывна снизу). В этом случае $v_1^*(1, 1+y) = g_1(1+y) = I_{(0,+\infty)}(y)$.

Нетрудно найти значение $\rho_t(\cdot)$ в данной модели с учетом Леммы 2.1:

$$\rho_t(\cdot) = \min_{h\in\mathbb{R}^1} \sup_{Q\in\mathcal{P}_t(\cdot)} \int \big[v_1^*(1, 1+y) - hy\big] Q(dy) = \min_{h\in\mathbb{R}^1} \sup_{y\in K_1(1)} \big[I_{(0,+\infty)}(y) - hy\big].$$

Поскольку

$$\sup_{y\in[0,b]} \big[I_{(0,+\infty)}y - hy\big] = \begin{cases} 1 & \text{если } h \geq 0, \\ 1 - bh & \text{если } h < 0, \end{cases} \tag{3.17}$$

то выражение (3.17) имеет минимальное значение 1, при $h \geq 0$. Таким образом,

$$\rho_1(1) = 1.$$

Это случай, когда первым ходит игрок «рынок». Если хитрый «хеджер» ходил бы первым, то его незаслуженный результат был бы:

$$\rho_1'(1) = \sup_{Q\in\mathcal{P}_t(\cdot)} \min_{h\in\mathbb{R}^1} \int \big[v_1^*(1, 1+y) - hy\big] Q(dy).$$

Нетрудно видеть, что

$$\min_{h\in\mathbb{R}^1} \int \big[I_{(0,+\infty)}y - hy\big] Q(dy) = \begin{cases} -\infty & \text{если } m(Q) \neq 0, \\ 0 & \text{если } m(Q) = 0. \end{cases} \tag{3.18}$$

Здесь равенство $m(Q) = 0$ выполняется только в том случае, если $Q = \delta_0$, т.е. мера сосредоточена в точке 0. Поэтому выражение (3.18) имеет максимальное значение 0 при $Q = \delta_0$; следовательно,

$$\rho_1'(1) = 0.$$

Таким образом, этот пример показывает существенность условий (USC), компактности $D_t(\cdot)$, а также, в случае отсутствия торговых ограничений, условия NDAO для того, чтобы имело место равновесие 3.6.□

$x \notin A$. Выбор начальной цены отвечает случаю, называемому "tie" ("breakeven point").

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Биллингсли П. *Сходимость вероятностных мер: Пер. с англ.* М.: Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы. 1977.

2. Рохлин Д.Б. *Расширенная версия теоремы Даланга-Мортона-Виллинджера при выпуклых ограничениях на портфель* // Теория вероятн. и ее примен. 2004. Том 49, № 3. С. 503–521.

3. Рохлин Д.Б. *Исследования по теории арбитража в стохастических моделях финансовых рынков: диссертация док. физ.-мат. наук: 01.01.05.* Ростов-на-Дону, 2010.

4. Смирнов С.Н. *Гарантированный детерминистский подход к суперхеджированию: модель рынка, торговые ограничения, безарбитражность и уравнения Беллмана-Айзекса* // Математическая Теория Игр и ее Приложения. 2018. Том 10. № 4. С. 59–99.

5. Смирнов С.Н. *Гарантированный детерминистский подход к суперхеджированию: свойства «безарбитражности» рынка* // Математическая Теория Игр и ее Приложения. 2019. Том 11. № 2. С. 68–95.

6. Смирнов С.Н. *Гарантированный детерминистский подход к суперхеджированию: свойства полунепрерывности и непрерывности решений уравнений Беллмана-Айзекса* // Математическая Теория Игр и ее Приложения. 2019. Том 11. № 4. С. 87–115.

7. Smirnov S.N. *A Guarantied Deterministic Approach to Superhedging: Lipschitz Properties of Solutions of the Bellman-Isaacs Equations* // In “Frontiers of Dynamics Games. Game Theory and Management, St. Petersburg”, Birkhauser. 2019.

8. Смирнов С.Н. *Феллеровское переходное ядро с носителями мер, заданными многозначным отображением* // Труды института математики и механики УрО РАН. 2019. Том 25, № 1.

9. Alexandroff A.D. *Additive set-functions in abstract spaces* // Математический сборник. 1943. Т. 13(55). № 2–3. С. 169–238.

10. Evstigneev I.V., Schürger K., Taksar M.I. *On the fundamental theorem of asset pricing: random constraints and bang-bang no-arbitrage criteria* // Mathematical Finance. 2004. Vol. 14, № 2. Pp. 201–221.

11. Fan K. *Minimax theorems* // Proceedings of the National Academy of Sciences. 1953. Vol. 39. Pp. 42–47.

12. Kneser H. *Sur un théorème fondamental de la théorie des jeux* // CR Acad. Sci. Paris. 1952. Vol. 234. Pp. 2418–2420.

13. Mycielski J., Świerczkowski S. *On the Lebesgue measurability and the axiom of determinateness* // Fundamenta Mathematicae. 1964. Vol.54. Pp. 67–71.

14. Rockafellar R.T. *Convex Analysis*. Princeton: Princeton University Press, 1970.

15. Topsoe F. *Topology and measure. Lecture Notes in Mathematics*. New York: Springer-Verlag. 1970.

A GUARANTEED DETERMINISTIC APPROACH TO SUPERHEDGING: MIXED STRATEGIES AND GAME EQUILIBRIUM

Sergey N. Smirnov, Department of System Analysis, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University, Cand.Sc., associate prof. (s.n.smirnov@gmail.com).

Abstract: For a discrete-time superreplication problem, a guaranteed deterministic formulation is considered: the problem is to ensure a cheapest coverage of the contingent claim on an option under all scenarios which are set using a priori defined compacts, depending on the price history: price increments at each moment of time must lie in the corresponding compacts. The market is considered with trading constraints and without transaction costs. The statement of the problem is game-theoretic in nature and leads directly to the Bellman – Isaacs equations. In this article, we introduce a mixed extension of the "market" pure strategies. Several results concerning game equilibrium are obtained.

Keywords: guaranteed estimates, deterministic price dynamics, superreplication, option, arbitrage, absence of arbitrage opportunities, Bellman-Isaacs equations, multivalued mapping, mixed strategies, game equilibrium.