Математическая Теория Игр и её Приложения, т.12, в.1, с. 91–115

УДК 517.977
ББК

ОЦЕНКА ГЛАДКОЙ АППРОКСИМАЦИИ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ФУНКЦИИ ДЛЯ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ*

Александр М. Тарасьев
Анастасия А. Усова
Институт математики и механики
им. Н.Н. Красовского УрО РАН
620108, Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, 16
Уральский федеральный университет
620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19
e-mail: tam@imm.uran.ru, ausova@imm.uran.ru

В прикладных задачах управления, возникающих при моделировании экономических, экологических, демографических и других процессов, взаимосвязь зависимых и свободных основных переменных определяется статистически, что, вообще говоря, не гарантирует гладкой функциональной зависимости. В частности, в моделях экономического роста производственную функцию, описывающую зависимость выпуска от факторов производства, часто предполагают всюду гладкой, однако это не позволяет включать в исходную модель качественные показатели, влияющие на производственный выпуск. Предлагаемый подход снимает ограничение, связанное с дифференцируемостью производственной функции всюду. Основная идея состоит в гладкой аппроксимации производственной

* Работа выполнена при поддержке РНФ (проект № 19-11-00105)

функции, которая осуществляется не априори, а строится совместно с интегрированием гамильтоновой системы. Восстановление дифференцируемой аппроксимации производственной функции проводится путем построения асимптотического наблюдателя состояния вспомогательной системы. Следует отметить, что стандартный подход аппроксимации негладких компонент модели на конечном интервале времени здесь может не сработать, и поэтому требуется стабилизация гамильтоновой системы на бесконечном интервале времени. Теоретические результаты подтверждаются численными экспериментами, что продемонстрировано на однофакторной модели экономического роста.

Ключевые слова: оптимальное управление, принцип максимума Понтрягина, гамильтонова система, асимптотический наблюдатель.

Поступила в редакцию: 08.11.19 *После доработки*: 16.12.19 *Принята к публикации*: 23.12.19

1. Введение

В статье рассматривается задача оптимального управления на бесконечном промежутке времени, основанная на моделях экономического роста, построением и обоснованием которых занимались многие известные экономисты и математики, в частности, К. Эрроу, Л.В. Канторович, Р. Соллоу, К. Шелл, Г.М. Гроссман, Е. Хелпман, Р. Айрес, М. Интрилигатор, Л. Крушвиц, У.Ф. Шарп и другие [13, 18, 25, 24, 14]. Суть задачи управления состоит в динамической оптимизации инвестиционного потока, направленного на увеличение эффективности основных производственных факторов. Качество инвестиционного процесса оценивается интегральным индексом потребления, дисконтированным на бесконечном промежутке времени [3, 23, 9]. Данная постановка задачи является достаточно стандартной и многократно использовалась для исследования различных экономических процессов [15, 16, 6, 28, 5].

В представленной работе акцент сделан на то, что производственная функция, связывающая выпуск с основными производственными факторами, предполагается кусочно-гладкой. Причины недифференцируемости производственной функции лежат прежде всего в статистическом анализе [1] экономической модели, который используется для ее идентификации, поскольку сама модель может включать не только непрерывные показатели, но и качественные идентификаторы, которые приводят к негладкости производственной функции в точках смены значений качественных признаков. Тем не менее, необходимость включения в модель экзогенных качественных показателей объясняется тем, что они позволяют учесть структурные изменения в развитии экономической ситуации в регионе (или стране), значимость которых определяется статистическими методами.

Исследование задачи оптимального управления проводится в рамках принципа максимума Л.С. Понтрягина [8] для случая неограниченного промежутка времени [3, 22, 12]. Однако недифференцируемость производственной функции приводит к тому, что правые части исходной управляемой системы не являются непрерывно дифференцируемыми. Для устранения этой проблемы в работе предлагается процедура сглаживания производственной функции путем восстановления ее производной по фазовой переменной. Данная процедура опирается на построение асимптотического наблюдателя полного состояния вспомогательной системы по известным непрерывным значениям исходной производственной функции [7, 17].

В рамках качественного анализа гамильтоновой системы осуществляется поиск и определение типа ее стационарного состояния через исследование якобиана системы, вычисленного в стационарной точке. На основе качественных свойств гамильтоновой системы для ее интегрирования применяются разработанные ранее методы [6, 23, 9]. Но в данном случае, гамильтонова система рассматривается не сама по себе, а совместно с дополнительной подсистемой дифференциальных уравнений, которые восстанавливают гладкую аппроксимацию производственной функции по ее известным значениям. Важно подчеркнуть, что априорное сглаживание компонент модели и соответствующие оценки для аппроксимационных решений на конечном интервале времени (см., например, [2]) в общем случае не могут быть автоматически распространены для задачи оптимального управления на бесконечном горизонте, т.к. параметры такой оценки могут зависеть, в том числе, и экспоненциальным образом от длины интервала времени.

В качестве примера применения предложенного алгоритма анализа моделей роста с кусочно-гладкой производственной функцией рассмотрена модель развития экономики Японии [23], в которой производственная функция непрерывно склеивается из двух функций типа Кобба-Дугласа и недифференцируема в точке склейки. Проводится процедура идентификации модели роста и на основе соответствующих эконометрических тестов показывается, что наличие структурных изменений в экономике региона является статистически значимым. Далее осуществляется построение асимптотического наблюдателя вспомогательной системы и запускается алгоритм решения расширенной гамильтоновой системы. Полученные приближенные решения сравниваются со статистическими данными.

Следующий раздел статьи посвящен описанию модели роста и постановке задачи управления. Далее проводится анализ задачи в рамках принципа максимума Понтрягина и осуществляется построение наблюдателя состояния вспомогательной системы для восстановления гладкой аппроксимации производственной функции. В третьем разделе приводится численный алгоритм построения приближенного решения гамильтоновой системы. В последующей части работы, для иллюстрации применения предложенного метода рассматривается пример модели роста с кусочно-гладкой производственной функцией, и построенные модельные траектории сравниваются со статистическими трендами. В заключительной части суммируются представленные результаты и приводятся возможные направления дальнейших исследований в этой области.

2. Модель экономического роста и задача управления

В работе рассматривается классическая односекторная модель экономического роста, детальное описание которой можно найти в ряде работ, например, в статьях [23, 5]. Основным производственным фактором в модели выступает основной капитал x, а зависимость выпуска y от капитала x описывается производственной функцией $y = f(x)$. Согласно основным свойствам производственной функции (см. [19, гл. 8, § 1]), она является положительной, возрастающей функцией для всех значений фактора x, лежащего в области $\mathcal{K}$, называемой *экономической областью*. Поскольку в данной работе производственная функция рассматривается кусочно-гладкой, мы предполагаем, что ее производная ограничена в $\mathcal{K}$, а в точках негладкости терпит разрывы первого рода, иными словами, если в точке ξ

производственная функция недифференцируема, то пределы ее разностных отношений конечны

$$\lim_{x\to\xi-0}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}=\phi_\xi^->0,\ \lim_{x\to\xi+0}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}=\phi_\xi^+>0. \qquad (2.1)$$

Закон убывающей доходности, который фактически означает вогнутость производственной функции, будем считать выполненным, т.е. в интервалах ее гладкости вторая производная $f''(x)\leqslant 0$, а в точках разрыва ξ из (2.1) производной производственной функции $y=f(x)$ считаем выполненным неравенство $\phi_\xi^-\geqslant\phi_\xi^+$.

Динамика основного капитала определяется по формуле Соллоу — Шелла [25]

$$\dot{x}(t)=u(t)f\big(x(t)\big)-\delta x,\quad x(0)=x_0, \qquad (2.2)$$

где рост капитала обусловлен долей u выпуска y, направленной в инвестирование основных фондов x, а его размытие обусловлено амортизационными издержками, объем которых составляет долю δ ($\delta>0$) от основного капитала.

В условиях замкнутой экономической системы уравнение баланса устанавливает соотношение между инвестициями $u(t)y(t)$ в основные фонды региона (страны) и уровнем потребления $c(t)$ в каждый момент времени t

$$y(t)=u(t)y(t)+c(t),$$

откуда уровень потребления находится в виде

$$c(t)=\big(1-u(t)\big)y(t). \qquad (2.3)$$

Предполагая, что уровень потребления всегда положителен, а экономическая система является замкнутой, то есть суммарный выпуск расходуется на потребление $c(t)$ и инвестиции в основной капитал $u(t)y(t)$, из (2.3) получим ограничения на инвестиционную составляющую

$$0<c(t)=(1-u(t))y(t)\quad\Rightarrow\quad 0\leqslant u(t)<1.$$

Дополнительно предположим, что доля инвестиций сверху ограничена величиной $\overline{u}\in(0,1)$, т.е.

$$u(t)\in\big[0,\overline{u}\big]=:\mathcal{U}. \qquad (2.4)$$

Оптимизационный процесс заключается в максимизации интегрального индекса потребления логарифмического типа, дисконтированного на бесконечном промежутке времени

$$J(\cdot) = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\rho t} \ln c(t) dt = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\rho t} \Big(\ln f(x(t)) + \ln \big(1 - u(t)\big)\Big) dt, \quad (2.5)$$

где положительный параметр ρ является дисконтирующим множителем. На основании представленной модели роста формулируется следующая задача управления.

З а д а ч а (CP). Требуется построить такой управляемый процесс $(\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(t))$, который максимизирует функционал качества (2.5) вдоль траекторий динамической системы (2.2), удовлетворяющих указанным начальным данным. Здесь параметр управления $\mathbf{u}(t)$ отвечает ограничениям (2.4).

Анализ задачи управления в рамках принципа максимума Понтрягина [3] предполагает существование непрерывных производных по фазовой переменной x правой части динамической системы (2.2). Однако данное требование не выполнено в силу того, что производственная функция $y = f(x)$ является кусочно-гладкой. В этой связи полагаем, что гладкая аппроксимация производственной функции $\widehat{y} = \widehat{f}(x)$ может быть построена таким образом, что ошибка аппроксимации $\widetilde{y}(t) := f(x(t)) - \widehat{f}(x(t))$ экспоненциально стремится к нулю с течением времени. Идея восстановления непрерывно-дифференцируемой аппроксимации $\widehat{y} = \widehat{f}(x)$ будет описана ниже.

2.1. Исследование задачи управления

Согласно принципу максимума Понтрягина для задач на бесконечном промежутке времени [8, 3], стационарный гамильтониан задачи управления (CP) имеет следующую структуру

$$H(x, y, \psi, u) = \ln y + \ln (1 - u) + \psi \left(uy - \delta x\right), \quad y = f(x). \quad (2.6)$$

В силу строгой вогнутости гамильтоновой функции $H(\cdot, \cdot, \cdot, u)$ (2.6) по переменной управления u (см. [5, 3, 6, 27]) структура управления $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, \psi) = \operatorname*{argmax}_{u \in \mathcal{U}} H(x, y, \psi, u)$, доставляющего максимум гамильтониану (2.6), удовлетворяет равенству

$$\mathbf{u} := \begin{cases} 0, & (x,\psi) \in \Delta_1 := \Big\{(x,\psi) : \psi y < 1\Big\}, \\ 1 - \dfrac{1}{\psi y}, & (x,\psi) \in \Delta_2 := \Big\{(x,\psi) : 1 \leqslant \psi y < \dfrac{1}{1-\overline{u}}\Big\}, \\ \overline{u}, & (x,\psi) \in \Delta_3 := \Big\{(x,\psi) : \psi y \geqslant \dfrac{1}{1-\overline{u}}\Big\}. \end{cases} \tag{2.7}$$

Следовательно, максимизированная гамильтонова функция $\mathcal{H}(x,y,\psi) := \max\limits_{u\in\mathcal{U}} H(x,y,\psi,u)$ имеет вид

$$\mathcal{H}(x,y,\psi) = \begin{cases} \ln y - \delta x \psi, & (x,\psi) \in \Delta_1, \\ -\ln\psi + \psi\,(y - \delta x) - 1, & (x,\psi) \in \Delta_2, \\ \ln y + \ln(1-\overline{u}) + \psi(\overline{u}y - \delta x), & (x,\psi) \in \Delta_3. \end{cases} \tag{2.8}$$

В условиях задачи (CP) функция $y = f(x)$ является лишь непрерывной, поэтому рассмотрим гамильтониан $\widehat{\mathcal{H}}(x,\psi) := \mathcal{H}(x,\widehat{y},\psi)$, полученный путем подстановки вместо исходной производственной функции ее гладкой аппроксимации $\widehat{y} = \widehat{f}(x)$. Гамильтонова функция $\widehat{\mathcal{H}}(x,\psi)$ (2.8) есть непрерывно-дифференцируемая функция своих переменных [6]. Более того, если аппроксимация $\widehat{y} = \widehat{f}(x)$ производственной функции обладает свойством строгой вогнутости, то гамильтониан $\widehat{\mathcal{H}}(x,\psi)$ строго вогнут по фазовой переменной при положительных значениях сопряженной переменной ψ (см. [6, 23]). Последнее свойство гарантирует то, что необходимые условия оптимальности [3, 23] являются и достаточными.

Гамильтонова система принципа максимума Понтрягина строится по правилу

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial\widehat{\mathcal{H}}\,(x,\psi)}{\partial\psi}, \quad \dot{\psi}(t) = \rho\psi(t) - \frac{\partial\widehat{\mathcal{H}}\,(x,\psi)}{\partial x},$$

и в каждой из областей Δ_i $(i \in \{1,2,3\})$ имеет вид

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} -\delta x, & (x,\psi) \in \Delta_1, \\ f(x) - \delta x - \dfrac{1}{\psi}, & (x,\psi) \in \Delta_2, \\ \overline{u} f(x) - \delta x, & (x,\psi) \in \Delta_3 \end{cases}$$

$$\dot{\psi}(t) = \begin{cases} (\delta+\rho)\psi - \dfrac{1}{f(x)} \dfrac{d\widehat{f}(x)}{dx}, & (x,\psi) \in \Delta_1, \\ \left(\delta + \rho - \dfrac{d\widehat{f}(x)}{dx}\right)\psi, & (x,\psi) \in \Delta_2, \\ \left(\delta + \rho - \overline{u}\dfrac{d\widehat{f}(x)}{dx}\right)\psi - \dfrac{1}{f(x)}\dfrac{d\widehat{f}(x)}{dx}, & (x,\psi) \in \Delta_3. \end{cases} \tag{2.9}$$

Детальное исследование гамильтоновых систем задачи (CP) проведено в работах [3, 12, 22, 23]. В частности, в статье [23] показано, что гамильтонова система (2.9) обладает единственной стационарной точкой (x^*, ψ^*), расположенной в области переменного управления Δ_2, если производственная функция является дважды непрерывно дифференцируемой и строго вогнутой функцией, а параметр $\overline{u}$ удовлетворяет неравенству $\overline{u} > \delta/(\delta+\rho)$.

Пусть в интервале гладкости производственной функции $y = f(x)$ найдется точка $x = x^* \in \mathcal{K}$ такая, что $f'(x^*) = \delta + \rho$. Единственность x^* гарантируется *законом убывающей доходности*. Таким образом, стационарная точка (x^*, ψ^*) системы (2.9) приближенно находится из равенств

$$\frac{df(x^*)}{dx} = \delta + \rho, \quad \psi^* = \frac{1}{f(x^*) - \delta x^*} = \frac{1}{y^* - \delta x^*}.$$

Якобиан гамильтоновой системы, вычисленный в окрестности стационарной точки имеет ровно два действительных собственных значения λ_1, λ_2, при этом, в силу строгой вогнутости производственной функции в интервалах гладкости, справедливо неравенство $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ (см. [23]). Таким образом, стационарная точка (x^*, ψ^*) носит седловой характер, что позволяет построить нелинейный регулятор, осуществляющий стабилизацию гамильтоновой системы (2.9) в окрестности установившегося состояния. Стабилизирующее управление [23, 27] строится в два этапа. Сначала находится проекция вектора $(x - x^*, \psi - \psi^*)^\top$ на собственный вектор $h_1 = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \end{pmatrix}^\top$, отвечающий отрицательному собственному значению λ_1, и из получившегося уравнения выражается сопряженная компонента ψ в виде $\psi = \psi^* + \dfrac{h_{12}}{h_{11}}(x - x^*)$. После чего найденное представление сопряженной переменной подставляется в управление (2.7), которое соответствует области Δ_2. Таким образом, нелинейный регулятор описывается соотношением

$$\mathbf{U}(x) = 1 - \Big[f(x)\Big(\psi^* + \frac{h_{12}}{h_{11}}(x - x^*)\Big)\Big]^{-1}. \qquad (2.10)$$

Стабилизированная гамильтонова система находится подстановкой (2.10) в уравнение динамики (2.2) вместо параметра управления u

$$\dot{x}(t) = \mathbf{U}(x) f(x) - \delta x. \qquad (2.11)$$

Решения системы (2.11) в ε-окрестности установившегося состояния (x^*, ψ^*) отклоняются от оптимальных решений на величину пропорциональную $o\left(\varepsilon^2\right)$, поскольку лежат в касательном подпространстве. Используя факт близости стабилизированной и оптимальной траекторий, алгоритм построения решения гамильтоновой системы (2.9) состоит в интегрировании этой системы в обратном времени, стартуя из точки $(x^*_\varepsilon, \psi^* + h_{12}/h_{11}\,(x^*_\varepsilon - x^*))$, лежащей в ε-окрестности стационарной точки, до момента достижения фазовой траекторией известной начальной позиции x_0 (см. [23]).

3. Построение аппроксимации производственной функции

Основная идея предлагаемого подхода состоит в восстановлении гладкой аппроксимации производственной функции одновременно с решением гамильтоновой системы (2.9). При этом гладкая аппроксимация производственной функции восстанавливается по ее непрерывным значениям через построение асимптотического наблюдателя. В этом разделе рассматривается расширенная система дифференциальных уравнений, которая вычисляет совместно с фазовой и сопряженной траекториями аппроксимацию $\widehat{y}(t) := \widehat{f}(x(t))$ функции объема выпуска от времени $y(t) := f(x(t))$.

Рассмотрим линейную стационарную систему уравнений

$$\left\{\begin{array}{ll} \dot{Z}(t) & = AZ(t) \\ \eta(t) & = C^\top Z(t) + e(t) \end{array}\right., \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Решение системы (3.1), вектор состояния $Z(t) \in \mathbb{R}^4$, имеет единственную наблюдаемую компоненту $z_1(t)$, которая является гладкой (имеет непрерывную производную вплоть до третьего порядка) и аппроксимирует функцию $f(x(t))$. Ошибка $e(t)$, учитывающая невязку между гладкой аппроксимацией $z_1(t)$ и функцией $f(x(t))$

$$e(t) := z_1(t) - f(x(t)) = C^\top Z(t) - f(x(t)), \tag{3.2}$$

является непрерывной и предполагается ограниченной. Иными словами,

$$\exists\, \nu > 0 : \quad \forall\, t \geqslant 0 \quad |z_1(t) - f(x(t))| = |e(t)| < \nu. \tag{3.3}$$

Отметим, что порядок системы (3.1) можно увеличивать, в принципе сколь угодно, для увеличения точности оценки ν. Для рассматриваемой в работе модели экономического роста оказывается достаточно системы четвертого порядка.

З а д а ч а н а б л ю д е н и я состоит в том, чтобы по полученным результатам наблюдения, т.е. по известной непрерывной функции $y(t) = f(x(t))$, определить значения вектор-функции $Z = Z(t)$, являющейся решением уравнения (3.1). При этом первая компонента вектор-функции $Z(t)$ будет являться гладкой аппроксимацией функции $y(t) = f(x(t))$ и может быть использована в формулах принципа максимума Понтрягина.

Отметим, что система (3.1) вполне наблюдаемая, так как (см. [4, Глава 5, §3.2. Теорема 3.2])

$$\operatorname{rank}\left(C^\top, A^\top C^\top, \left(A^\top\right)^2 C^\top, \left(A^\top\right)^3 C^\top\right) = 4.$$

Это означает, что по выходу $\eta(t)$ можно определить все компоненты вектора $Z(t)$.

Прямое решение задачи наблюдения (3.1) не гарантировано, так как собственные значения матрицы A имеют нулевое значение, и в связи с этим система (3.1) не является асимптотически устойчивой. Поэтому для решения задачи наблюдения введем вспомогательный вектор $\widehat{Z}(t) = \begin{pmatrix} \widehat{z}_1(t) & \widehat{z}_2(t) & \widehat{z}_3(t) & \widehat{z}_4(t) \end{pmatrix}^\top$, где $\widehat{z}_1(t)$, так же как и $z_1(t)$, есть гладкая аппроксимация функции $y(t) = f(x(t))$. Опираясь на известные конструкции (см. [21, Глава 14. §5], [17]), асимптотический наблюдатель полного состояния системы (3.1) строится по правилу

$$\dot{\widehat{Z}}(t) = \left(A - LC^\top\right) \widehat{Z}(t) + Lf(x(t)). \tag{3.4}$$

где вектор L выбирается так, что матрица $\left(A - LC^\top\right)$ имеет предопределенные собственные значения $\mathbf{p}$ с отрицательной действительной частью. Согласно, например, [4, Глава 5, §4.1 Теорема 4.1 и §5.1. Теорема 5.1], существование матрицы, в данном случае вектора, L гарантируется тем, что система (3.4) вполне наблюдаемая, то есть $\operatorname{rank}\Big(C^\top, A^\top C^\top, \left(A^\top\right)^2 C^\top, \left(A^\top\right)^3 C^\top\Big)$ равен 4 (см. [4, Глава 5, §3.2. Теорема 3.2]). См. также работу [20] о построении матрицы L по заданным полюсам $\mathbf{p}$.

Оценка качества аппроксимационной схемы (3.4) предлагается в следующем утверждении, которое опирается на лемму 4.2, представленную в работе [17, Lemma 4.2].

Утверждение 3.1. *Пусть матрица $\mathbb{S}$, определенная по правилу*

$$\mathbb{S} = \begin{pmatrix} Q & PL \\ L^\top P & -\theta^2 \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

является отрицательно определенной при некотором значении параметра θ^2 ($\theta^2 > 0$). Положительно определенная матрица P находится из решения уравнения Ляпунова

$$\Big(A^\top - CL^\top + \frac{k}{2}\mathbb{I}_4\Big)P + P\Big(A - LC^\top + \frac{k}{2}\mathbb{I}_4\Big) = Q \tag{3.6}$$

для любой отрицательно определенной матрицы Q. Здесь $\mathbb{I}_4$ есть единичная матрица четвертого порядка, вектор L выбран таким образом, что матрица $(A - LC^\top) \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ имеет предопределенные собственные значения λ_i, $i \in \{1, \ldots, 4\}$, с отрицательной вещественной частью, а положительное число k удовлетворяет неравенству

$$0 < k < 2 \min\left\{|\mathcal{R}e(\lambda_i)|, i \in \{1, \ldots, 4\}\right\}. \tag{3.7}$$

Тогда ошибка аппроксимация $\widehat{z}_1(t)$ *производственной функции* $f(x(t))$*, построенная путем решения системы* (3.4)*, по абсолютной величине оценивается неравенством*

$$|f(x(t)) - \widehat{z}_1(t)| \leqslant \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} e^{-(k/2)t} r_0 + \left(\frac{\theta}{\sqrt{k\lambda_{\min}(P)}} + 1\right)\nu, \quad \forall\, t \geqslant 0,$$

где положительный параметр r_0 *определяет ошибку аппроксимации в начальный момент времени, то есть* $\left\|Z(0) - \widehat{Z}(0)\right\| \leqslant r_0$*. (Знак* $\|\cdot\|$ *означает евклидову норму вектора.)*

Доказательство. 1. Искомая оценка складывается из двух составляющих, второе из которых оценивается согласно (3.3)

$$|\widehat{z}_1(t) - f(x(t))| \leqslant |\widehat{z}_1(t) - z_1(t)| + |z_1(t) - f(x(t))| \leqslant |\widehat{z}_1(t) - z_1(t)| + \nu. \tag{3.8}$$

Далее проведем оценку первого слагаемого.

2. В силу ограничения (3.7), матрица $\left(A - LC + \dfrac{k}{2}\mathbb{I}_4\right)$ имеет собственные значения с отрицательной вещественной частью. Следовательно, уравнение Ляпунова (3.6) обладает единственным решением $P = P^\top > 0$ для любой матрицы $Q = Q^\top < 0$.

Согласно уравнениям (3.1) и (3.4), динамику ошибки аппроксимации $\widetilde{Z} = Z - \widehat{Z}$ можно описать следующим образом

$$\begin{cases} \dot{Z}(t) = AZ(t), \\ \dot{\widehat{Z}}(t) = \left(A - LC^\top\right)\widehat{Z}(t) + Lf(x(t)). \end{cases}$$

Вычитая второе уравнение из первого и учитывая определение ошибки $e(t)$ (3.2), получим

$$\dot{\widetilde{Z}}(t) = \left(A - LC^\top\right)\widetilde{Z}(t) + Le(t). \tag{3.9}$$

Для уравнения (3.9) рассмотрим функцию Ляпунова вида

$$V(\widetilde{Z}) = \widetilde{Z}^\top P \widetilde{Z} > 0 \quad \forall\, \|\widetilde{Z}\| \neq 0, \quad V(\widetilde{Z})\Big|_{\widetilde{Z}=\mathbf{0}} = 0,$$

где матрица P является решением уравнения Ляпунова (3.6). Так как матрица P положительно определенная, для функции V справедливы оценки

$$\lambda_{\min}(P)\|\widetilde{Z}\|^2 \leqslant V(\widetilde{Z}) \leqslant \lambda_{\max}(P)\|\widetilde{Z}\|^2. \tag{3.10}$$

Производная функции $V(\cdot)$ в силу системы (3.9) равна

$$\dot{V} \;=\; \widetilde{Z}^\top \left((A-LC)^\top P + P(A-LC)\right)\widetilde{Z} + 2e^\top L^\top P\widehat{Z}.$$

Добавим и вычтем из последнего равенства величину $kV = k\widetilde{Z}^\top P\widetilde{Z}$, где k удовлетворяет (3.7), и получим соотношения

$$\begin{aligned}
\dot{V} \;&=\; \widetilde{Z}^\top \left(\left(A - LC + \frac{k}{2}\mathbb{I}_4\right)^\top P + P\left(A - LC + \frac{k}{2}\mathbb{I}_4\right)\right)\widetilde{Z} + \\
&+\;\; 2e^\top L^\top P\widehat{Z} - kV = \begin{pmatrix} \widehat{Z} \\ e \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} Q & PL \\ L^\top P & -\theta^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \widehat{Z} \\ e \end{pmatrix} - kV + \theta^2 e^2 \\
&=\; \begin{pmatrix} \widehat{Z} \\ e \end{pmatrix}^\top \mathbb{S}\begin{pmatrix} \widehat{Z} \\ e \end{pmatrix} - kV + \theta^2 e^2 \leqslant -kV + \theta^2\nu^2.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Последнее неравенство справедливо в силу того, что матрица $\mathbb{S}$ отрицательно определенная ($\mathbb{S} < 0$), а ошибка ограничена величиной ν, которая априори может быть выбрана любой согласно [11].

Из оценки (3.11) имеем

$$V(\widetilde{Z}(t)) \leqslant V(\widetilde{Z}(0))e^{-kt} + \frac{(\nu\theta)^2}{k} \quad \forall\, t \geqslant 0. \tag{3.12}$$

Объединяя неравенства (3.10) и (3.12), получим

$$\begin{aligned}
\lambda_{\min}(P)\|\widetilde{Z}\|^2 \leqslant V(\widetilde{Z}(t)) \leqslant V(\widetilde{Z}(0))e^{-kt} + \frac{(\nu\theta)^2}{k} \leqslant \\
\leqslant \lambda_{\max}(P)\|\widetilde{Z}(0)\|^2 e^{-kt} + \frac{(\nu\theta)^2}{k}.
\end{aligned}$$

В виду положительности слагаемых в последней оценке, справедливо неравенство

$$\lambda_{\min}(P)\|\widetilde{Z}\|^2 \leqslant \left(\sqrt{\lambda_{\max}(P)}\|\widetilde{Z}(0)\|e^{-(k/2)t} + \frac{\nu\theta}{\sqrt{k}}.\right)^2$$

Откуда получаем следующую оценку

$$\|\widetilde{Z}\| \leqslant \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}}\|\widetilde{Z}(0)\|e^{-(k/2)t} + \frac{\nu\theta}{\sqrt{k\lambda_{\min}(P)}}$$

и, следовательно,

$$|z_1(t) - \widehat{z}_1(t)| \leqslant \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} e^{-(k/2)t} r_0 + \frac{\nu\theta}{\sqrt{k\lambda_{\min}(P)}}.$$

3. Для завершения доказательства, продолжим неравенство (3.8)

$$|\widehat{z}_1(t) - f(x(t))| \leqslant \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} e^{-(k/2)t} r_0 + \left(\frac{\theta}{\sqrt{k\lambda_{\min}(P)}} + 1\right)\nu$$

Таким образом, утверждение доказано. □

Замечание 3.1. В последующих рассуждениях искомая гладкая аппроксимация $\widehat{y}(t) = \widehat{f}(x(t))$ объемов выпуска $y(t) = f(x(t))$ считается построенной и равной $\widehat{z}_1(t)$, т.е. $\widehat{y}(t) := \widehat{z}_1(t)$.

Замечание 3.2. Полученная оценка может быть улучшена за счет выбора полюсов $\mathbf{p}$, которые порождают вектор L, а также параметра k (3.7). Величина ν в оценке может быть уменьшена за счет увеличения порядка системы (3.1).

Расширенная система уравнений включает гамильтонову динамику (2.9) и восстановление гладкой аппроксимации производственной функции (3.4). При этом производная $d\widehat{f}(x)/dx$ в правых частях гамильтоновой системы (2.9) заменяется выражением

$$\frac{d\widehat{f}(x(t))}{dx} = \begin{cases} -\dfrac{\widehat{z}_2(t)}{\delta x(t)}, & (x(t), \psi(t)) \in \Delta_1, \\ \dfrac{\widehat{z}_2(t)}{f(x(t)) - \delta x(t) - 1/\psi(t)}, & (x(t), \psi(t)) \in \Delta_2, \\ \dfrac{\widehat{z}_2(t)}{\overline{u} f(x(t)) - \delta x(t)}, & (x(t), \psi(t)) \in \Delta_3. \end{cases} \tag{3.13}$$

Отметим, что выражения (3.13) определены всюду за исключением единственной точки (x^*, ψ^*), лежащей в области D_2, где соответствующее соотношение имеет устранимую особенность, так как вблизи установившегося состояния принимает значения близкие к $(\delta + \rho)$.

4. Интегрирование расширенной системы уравнений

Интегрирование гамильтоновой системы уравнений осуществляется в обратном времени с начальной позицией, выбранной из окрестности установившегося состояния (x^*, ψ^*), которая расположена в касательном подпространстве, построенном в стационарной точке гамильтоновой системы. Начальное положение Z^*_ε для дополнительной подсистемы (3.4) выбирается из окрестности точки Z^*, где $Z^* = \begin{pmatrix} f(x^*) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\top$ в виде

$$Z^*_\varepsilon = \begin{pmatrix} f\left(x^*_\varepsilon\right) & (\delta+\rho)\left(x^*_\varepsilon - x^*\right) & 0 & 0 \end{pmatrix}^\top. \tag{4.1}$$

Алгоритм построения решения есть модификация схемы, предложенной в работах [28, 23, 10]. Данная модификация учитывает систему (3.4) для восстановления гладкой производственной функции. Алгоритм существенным образом опирается на предположения о существовании и единственности стационарной точки, которая в данной задаче носит седловой характер.

А л г о р и т м построения решения.

1. Выбираем параметр точности ε $(\varepsilon > 0)$ и строим ε окрестность установившегося состояния (x^*, ψ^*) гамильтоновой системы (2.9). В качестве начальной позиции для интегрирования гамильтоновой системы в обратном времени будет служить точка

$$\begin{pmatrix} x^*_\varepsilon \\ \psi^*_\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^*_\varepsilon \\ \psi^* + \dfrac{h_{12}}{h_{11}}\left(x^*_\varepsilon - x^*\right) \end{pmatrix} \in O_\varepsilon\left(x^*, \psi^*\right). \tag{4.2}$$

Таким образом, в области переменного управления Δ_2 производится интегрирование следующей системы дифференциальных уравнений с начальным условием $\begin{pmatrix} x^*_\varepsilon & \psi^*_\varepsilon & \widehat{Z}^*_\varepsilon \end{pmatrix}^\top$, где последние координаты $\widehat{Z}^*_\varepsilon$ удовлетворяют равенству (4.1):

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -f(x(t)) + \delta x(t) + \dfrac{1}{\psi(t)}, \\ \dot{\psi}(t) = -\Big(\delta + \rho - \dfrac{d\widehat{f}(x(t))}{dx}\Big)\psi(t), \\ \dot{\widehat{Z}}(t) = (A - LC)\widehat{Z}(t) + Lf(x(t)). \end{cases} \tag{4.3}$$

На каждом шаге интегрирования системы (4.3) величина $d\widehat{f}(x(t))/dx$ вычисляется по формуле (3.13).

2. Решение системы (4.3) строится до тех пор, пока одно из следующих условий не будет выполнено:

(a) Фазовая траектория достигает известной начальной позиции x_0. В этом случае построенная траектория принимается в качестве приемлемой аппроксимации оптимального решения задачи (CP).

(b) Пара траекторий $(x(t), \psi(t))$ достигает границы области переменного управления, тогда осуществляется переключение интегрируемой гамильтоновой системы на систему, отвечающую режиму либо нулевого Δ_1, либо насыщенного управления Δ_3

$$
\begin{aligned}
&\Delta_1\colon\ \begin{cases} \dot{x} = \delta x, \\ \dot{\psi} = -\,(\delta + \rho)\,\psi + \dfrac{1}{f(x)}\dfrac{d\widehat{f}(x)}{dx}, \\ \dot{\widehat{Z}} = (A - LC)\widehat{Z} + Lf(x). \end{cases} \\
&\Delta_3\colon\ \begin{cases} \dot{x} = -\overline{u}f(x) + \delta x, \\ \dot{\psi} = -\Big(\delta + \rho - \overline{u}\dfrac{d\widehat{f}(x)}{dx}\Big)\psi + \dfrac{1}{f(x)}\dfrac{d\widehat{f}(x)}{dx}, \\ \dot{\widehat{Z}} = (A - LC)\widehat{Z} + Lf(x). \end{cases}
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

Начальными условиями здесь служат точки, лежащие на границе переключения областей управления. Интегрирование одной из указанных систем прекращается при выполнении условия остановки 2(a) или при переключении управления 2(b).

3. При выполнении пункта 2(a) алгоритма осуществляется развертка построенного решения в прямом времени.

В следующем разделе приводится пример односекторной модели роста с кусочно-гладкой производственной функцией, каждая из ветвей которых представляет собой функцию Кобба-Дугласа с различными показателями эластичности.

5. Численный пример

Рассмотрим пример односекторной модели роста с кусочно-гладкой производственной функцией, каждая ветвь которой описывается степенной функцией типа Кобба — Дугласа. Идентификация модели осуществлялась по данным экономики Японии [23]. Дисконтирующий множитель ρ и ставка амортизации основных фондов δ определены на уровнях $\rho = 0.1$ и $\delta = 0.02$, соответственно. *Экономическая область* $\mathcal{K}$ определена полуинтервалом $[2, +\infty)$, а максимальный уровень инвестиций $\overline{u}$ составляет 17% от объемов выпуска y.

5.1. Производственная функция и ее идентификация

Производственная функция $y = f(x)$ определена соотношением

$$y = f(x) = \begin{cases} \alpha_1 x^{\beta_1}, & x \leqslant x_c, \\ \alpha_2 x^{\beta_2}, & x \geqslant x_c. \end{cases}$$

Процедура идентификации осуществляется для следующей линейной регрессионной модели

$$\ln y = \beta_1 \ln x + \ln \alpha_1 + r\gamma \left(\ln x - \ln x_c\right), \tag{5.1}$$

где параметр $r = 0$ при $x < x_c$ и $r = 1$ при $x \geqslant x_c$, $\alpha_2 = \alpha_1 x_c^{-\gamma}$, и $\beta_2 = \beta_1 + \gamma$. В результате эконометрического анализа получены следующие оценки параметров производственной функции

$$\begin{aligned} \alpha_1 = 0.7466, \quad \beta_1 = 0.8806, \\ \alpha_2 = 1.9605, \quad \beta_2 = 0.5137. \end{aligned}$$

Коэффициент детерминации R^2 модели равен $R^2 = 0.9954$, что подтверждает хорошую «подгонку» регрессионной модели к реальным данным. Значимость фиктивной переменной r обосновывается при помощи критерия Стьюдента. Наблюдаемое значение статистики $\tau_o = |\gamma^*/\sigma(\gamma)|$ равно 7.5841. Критический уровень статистики τ_c вычисляется на уровне значимости 0.05 по числу степеней свободы регрессионной модели (5.1), которое вычисляется по формуле $m = N - l = 24$, где N — объем выборки ($N = 27$), l — число параметров модели ($l = 3$). В итоге, критическое значение статистики $\tau_c = T_{0.05}(24)$ составляет 2.0739, что меньше наблюдаемого уровня τ_o.

Следовательно, гипотеза о том, что $\gamma \neq 0$, не отвергается с вероятностью 95 %.

5.2. Результаты численного моделирования

Стационарная точка (x^*, ψ^*) принадлежит области переменного управления D_2 и определяется координатами $x^* = 79.4421$ и $\psi^* = 0.0589$. При этом $x^* > x_c$, соответственно, она принадлежит второй ветви производственной функции и расположена в области, где эта ветвь дважды непрерывно дифференцируема и вогнута. Стационарный уровень выпуска y^* составляет величину 18.5563. Собственные значения Якобиана, вычисленного в стационарной точке равны $\lambda_1 = -0.0724$ и $\lambda_2 = 0.1724$. Следовательно, стационарная точка носит седловой характер, и гамильтонова система (2.9) стабилизируется в стационарной точке, вдоль собственного вектора h_1, отвечающего отрицательному собственному значению. Таким образом, по направлению h_1, вдоль которого решение подходит к стационарной точке, можно выразить сопряженную переменную ψ через фазовую переменную x. Данная зависимость позволяет вычислить начальное значение сопряженной переменной для интегрирования гамильтоновой в обратном времени (4.2).

Итак, согласно алгоритму, выбираем начальную позицию (4.2), (4.1) из окрестности $\varepsilon = 0.01$ установившегося состояния для интегрирования расширенной гамильтоновой системы (4.3), (4.4) в обратном времени

$$x^*_\varepsilon = 79.4321, \quad \psi^*_\varepsilon = 0.0590, \quad Y^*_\varepsilon(1) = 18.5551, \quad Y^*_\varepsilon(2) = -0.0012.$$

Система интегрируется до тех пор пока траектория основного капитала $x = x(t)$ не достигнет исходной начальной позиции $x_0 = 7.4448$.

Для построения расширенной гамильтоновой системы (4.3), (4.4) необходимо выбрать вектор L, который обеспечивает асимптотическую устойчивость подсистеме (3.4). Искомый вектор L строится по полюсам $\mathbf{p}$, выбор которых осуществляется экспериментально. Для полюсов $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} -0.6 & -0.75 & -1.5 & -1.75 \end{pmatrix}$ вектор L имеет следующие координаты

$$L = \begin{pmatrix} 4.6000 & 7.4625 & 5.0062 & 1.1812 \end{pmatrix}.$$

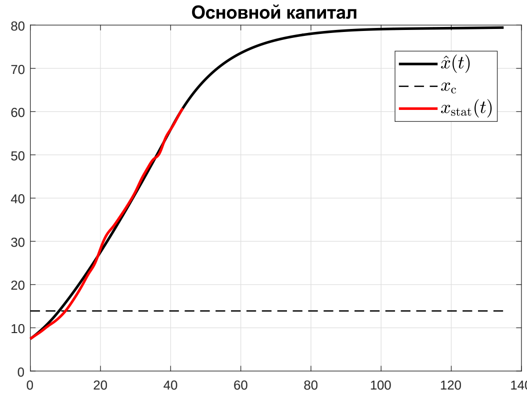

Рисунок 1. Основной капитал $\widehat{x}(t)$ в сравнении со статистическими данными

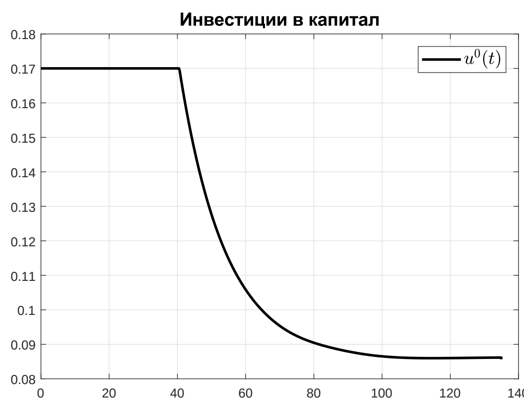

Рисунок 2. Доля выпуска, инвестируемая в основной капитал $u^0(t)$

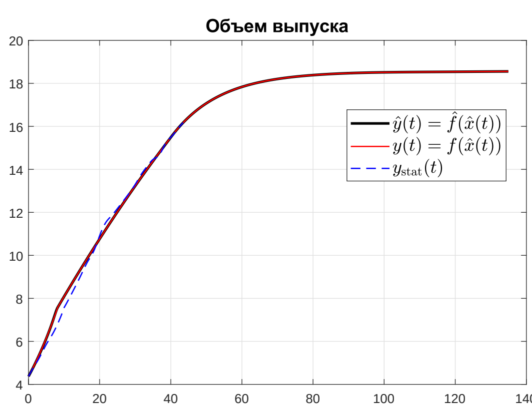

Рисунок 3. Объем выпуска $\widehat{y}(t) = \widehat{f}\,(\widehat{x}(t))$ в сравнении с выпуском, вычисленным вдоль исходной производственной функции $y(t) = f(\widehat{x}(t))$, и статистическими данными

Результаты численных экспериментов изображены на рис. 1–3. Основной капитал $\widehat{x} = \widehat{x}(t)$, вычисленный как решение расширенной гамильтоновой системы с аппроксимированной производственной функцией, в сравнении с реальными статистическими данными представлен на рис. 1. Видно, что модельная траектория адекватно отражает реальный экономический тренд. Это свидетельствует о том, что инвестиционная политика, проводимая в регионе, в целом отвечает тому оптимальному сценарию, который определяется в модели экономического роста и изображен на рис. 2. Относительно оптимального сценария развития следует отметить, что он имеет переключение с максимального уровня $\overline{u} = 0.17$, на ниспадающий инвестиционный тренд, который стремится к устойчивому уровню инвестиций, определяемого значением $u^* = 0.0866$. Действительно, сначала динамика модели отвечает зоне насыщенного управления, а с течением времени произведение $\widehat{\psi}(t)\widehat{y}(t)$ убывает до величины $1/(1 - \overline{u}) = 1.2048$, и в этот момент происходит изменение режима управления, как показано на рис. 2, и далее решается система, отвечающая области переменного управления, где в дальнейшем и происходит ее стабилизация в установившемся состоянии.

График, изображенный на рис. 3, показывает три траектории объема выпуска. Первая траектория $\widehat{y}(t)$, обозначенная сплошной толстой серой линией, есть решение расширенной системы (4.3), (4.4). Вторая траектория $y(t)$, выделенная черной штрих-пунктирной линией, получена подстановкой в исходную производственную функцию расчетных значений основного капитала $y(t) = f(\widehat{x}(t))$, и третья траектория, нарисованная черной штриховой линией, отображает реальные статистические данные по объемам выпуска. Из графика видно, что модельная траектория $\widehat{y}(t)$ хорошо приближает значения исходной производственной функции $y(t)$ вдоль решений $\widehat{x}(t)$ гамильтоновой системы.

6. Заключение

В статье рассматривается задача оптимального управления для модели экономического роста с кусочно-гладкой производственной функцией. Негладкость производственной функции может быть следствием включения в модель качественных показателей развития экономики региона или наличия структурных изменений в экономике, что выявляется на этапе идентификации регрессионной модели при помощи фиктивных переменных.

Для построения решения задачи управления в рамках ранее разработанного алгоритма [26, 23] гамильтонова система принципа максимума Понтрягина дополняется системой уравнений, восстанавливающих гладкую производственную функцию, которая достаточно точно приближает исходную производственную функцию и относительно быстро сходится к ней в интервалах гладкости последней.

Предложенная схема интегрирования гамильтоновых систем с разрывной правой частью, возникающей по причине негладкости производственной функции, проиллюстрирована на примере, который показывает, что аппроксимированная производственная функция хорошо сглаживает изломы исходной функции и в тоже время позволяет решить задачу управления в рамках разработанных ранее методов для случая с гладкими производственными функциями. Оценка приближения, полученная в утверждении, гарантирует ограниченность ошибки. Точность аппроксимации при этом может быть увеличена за счет увеличения порядка системы (3.1). Для рассматриваемой задачи экономического роста, где производственная функция представляет собой непрерывную склейку двух функций типа Кобба-Дугласа, достаточно взять систему (3.1) четвертого порядка. Более того, для решения расширенной системы не требуется построение вспомогательной аппроксимации функции выпуска $f(x(t))$, так как наблюдатель (3.4) использует только саму функцию $f(x(t))$, а не ее приближение.

В дальнейшем, планируется получить оценки точности работы алгоритма по функционалу качества задачи управления, аналогично гладкому случаю (см. [26, 23]). Важно также отметить, что несмотря на снижение требований к производственной функции, метод не позволяет отказаться от условий существования и единственности стационарной точки, и вогнутости производственной функции в ее окрестности. Эти требования существенны для алгоритма интегрирования гамильтоновой динамики в обратном времени из начальной позиции, взятой с собственного вектора, отвечающего отрицательному собственному значению.

Отметим, что для задач управления, удовлетворяющим условиям монотонности (2.1) (в гладком случае см. [3, гл. 1, § 10]), предложенный подход показывает, что модельные траектории адекватно отражают реальные экономические тренды и может быть использован для построения сценариев развития экономики региона на основе моделей роста с негладкими производственными функциями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айвазян С.А. *Методы эконометрики.* Москва: Магистр: ИНФРА-М, 2010.

2. Асеев С.М. *Метод гладких аппроксимаций в теории необходимых условий оптимальности для дифференциальных включений* // Изв. РАН. Сер. математическая. 1997. Т. 61, No 2. С. 3–26.

3. Асеев С.М., Кряжимский А.В. *Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста* // Тр. МИАН. 2007. Т. 257. С. 1–272.

4. Егоров А.И. *Основы теории управления.* М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

5. Красовский А.А., Тарасьев А.М. *Динамическая оптимизация инвестиций в моделях экономического роста* // Автомат. и телемех. 2007. Т. 10, С. 38-–52.

6. Красовский А.А., Тарасьев А.М. *Свойства гамильтоновых систем в принципе максимума Понтрягина для задач экономического роста* // Тр. МИАН. 2008. Т. 262. С. 127–145.

7. Куржанский А.Б. *Управление и наблюдение в условиях неопределенности.* М.: Наука, 1977.

8. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. *Математическая теория оптимальных процессов.* 4-е изд. М.: Наука, 1983.

9. Тарасьев А.М., Усова А.А. *Построение регулятора для гамильтоновой системы двухсекторной модели экономического роста* // Тр. МИАН. 2010. Т. 271. С. 278–298.

10. Тарасьев А.М., Усова А.А. *Стабилизация гамильтоновой системы для построения оптимальных траекторий* // Тр. МИАН. 2012. Т. 277. С. 257–274.

11. Тиман А.Ф. *Теория приближения функций действительного переменного.* М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1960.

12. Ane B.K., Tarasyev A.M., Watanabe C. *Construction of nonlinear stabilizer for trajectories of economic growth* // J. Optim. Theory Appl. 2007. Vol. 134, no. 2. P. 303–320.

13. Arrow K.J. *Production and capital. Collected papers.* Cambridge; Massachusetts; London: The Belknap Press of Harvard University Press, 1985. Vol. 5.

14. Ayres R., Krasovskii A.A., Tarasyev A.M. *Nonlinear stabilizers of economic growth under exhausting energy resources* // Proc. of the IFAC CAO'09. 2009. P. 251–256.

15. Crespo Cuaresma J., Palokangas T., Tarasyev, A. *Dynamic systems, economic growth, and the environment.* Berlin; Heidelberg: Springer, 2010.

16. Crespo Cuaresma J., Palokangas T., Tarasyev, A. *Green growth and sustainable development.* Berlin; Heidelberg: Springer, 2013.

17. Efimov D., Polyakov A., Levant A., Perruquetti W. *Convergence acceleration for observers by gain commutation* // Internat. J. Control. 2017. P. 1–20.

18. Grossman G.M., Helpman E. *Innovation and growth in the global economy.* Cambridge; London: MIT. Press, 1991.

19. Intriligator M.D. *Mathematical optimization and economic theory.* Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002. (Ser.: Classics Appl. Math.)

20. Kautsky J., Nichols N.K., Van Dooren P. *Robust Pole Assignment in Linear State Feedback* // International Journal of Control, 1985. Vol. 41. P. 1129–1155.

21. Khalil H.K. *Nonlinear Systems (3rd ed.)*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2002.

22. Krasovskii A.A., Kryazhimskiy A.V., Tarasyev A.M. *Optimal control design in models of economic growth* // Evolutionary methods for design, optimization and control. Barcelona: CIMNE, 2008. P. 70–75.

23. Krasovskii A., Tarasyev A. *Conjugation of Hamiltonian systems in optimal control problems* // Proc. of the 17th IFAC World Congress. 2008. Vol. 17, no. 1. P. 7784–7789.

24. Shell K. *Applications of Pontryagin maximum principle to economics* // Math. System Theory and Economics. 1969. No. 1. P. 241–292.

25. Solow R.M. *Growth theory: An exposition.* N Y: Oxford University Press, 1970.

26. Tarasyev A.M., Usova A.A. *An Iterative Direct-Backward Procedure for Construction of Optimal Trajectories in Control Problems with Infinite Horizon* // Proc. of the 18th IFAC World Congress, Vol. 18, 2011.

27. Tarasyev A.M., Usova A.A. *Structure of the Jacobian in economic growth models* // Proc. of the 16th IFAC Workshop CAO. 2015. Vol. 48, no. 25. P. 191–196.

28. Tarasyev A.M., Watanabe C. *Optimal dynamics of innovation in models of economic growth* // J. Optim. Theory Appl. 2001. Vol. 108, no. 1. P. 175–207.

AN ESTIMATE OF A SMOOTH APPROXIMATION OF THE PRODUCTION FUNCTION FOR INTEGRTAING HAMILTONIAN SYSTEMS

Alexander M. Tarasyev, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of RAS, Ural Federal University, Dr.Sc. (tam@imm.uran.ru),

Anastasiia A. Usova, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of RAS, Ural Federal University, Cand.Sc., PhD (ausova@imm.uran.ru).

Abstract: In many applied control problems in economics, ecology, demography, and other areas, the relationship between dependent and independent main variables is determined statistically, which does not guarantee the smoothness of the model functional dependence. Particularly, in economic growth models, the production function describing the dependence of the output on the production factors is commonly supposed to be everywhere smooth; however, because of this constraint, qualitative parameters affecting the output cannot be included in the model. We propose an approach overcoming the requirement for the production function to be everywhere differentiable. The method is based on a smooth approximation of the production function, which is constructed in parallel with the integration of the Hamiltonian system. A differentiable approximation of the production function is derived by constructing an asymptotic observer of the state of an auxiliary system. It should be noted that the standard approach to the approximation of nonsmooth components of the model on a finite time interval may not work here, which implies the necessity to stabilize the Hamiltonian system on an infinite time interval. The theoretical results are supported by numerical experiments for the one-sector economic growth model.

Keywords: optimal control, Pontryagin maximum principle, Hamiltonian system, asymptotic observer.