Математическая Теория Игр и её Приложения, т.12, в.2, с. 3–19

УДК 519.83
ББК 22.18

ТЕОРЕТИКО-ИГРОВЫЕ МОДЕЛИ БИНАРНОГО КОЛЛЕКТИВНОГО ПОВЕДЕНИЯ

Владимир В. Бреер
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 65
e-mail: breer.vv@phystech.edu

В работе теоретико-игровые модели исследованы не с точки зрения *максимумов целевых функций* игроков, как это делается обычно, а путем решения *уравнений*, которые характеризуют *равновесие Нэша.* Такая характеризация получена для моделей *бинарного* коллективного поведения, при котором игроки выбирают одну из двух возможных стратегий. На основании результатов для общей модели изучены теоретико-игровые модели *конформного порогового* бинарного коллективного поведения (БКП), при условии *разделенного на L групп* коллектива. Доказаны факт *условия существования* равновесий Нэша. Для каждого равновесия Нэша определена его *структура.* Полученные результаты проиллюстрированы на двух *примерах* конформного порогового БКП, когда группа *совпадает со всем коллективом* и когда последний разделен на *две группы.* Показано, что равновесия Нэша в первом и втором примерах являются аналогами равновесий в динамических моделях М. Грановеттера и Т. Шеллинга соответственно.

Ключевые слова: теоретико-игровые модели, равновесие Нэша, бинарный выбор, конформное поведение, модель Грановеттера, модель

Шеллинга.

Поступила в редакцию: 16.03.20 *После доработки*: 18.05.20 *Принята к публикации*: 29.05.20

1. Введение

Рассмотрим *коллектив* (группу, толпу и т.п.), состоящий из конечного числа *агентов.* Каждый агент осуществляет *выбор* одной из двух *стратегий*, такой выбор назовем *бинарным. Осуществление* выбора *всеми* агентами коллектива, назовем *Бинарным Коллективным Поведением* (БКП). Множество выбранных *всеми* агентами стратегий назовем *профилем стратегий* [5] или *ситуацией* [3]. Множество выбранных стратегий *другими* агентами, кроме данного, назовем *обстановкой* для этого агента [3]. Множество *ситуаций* упорядочивается *целевой функцией* агента, в соответствии с его *выгодой.* Действуя *рационально*, при *фиксированной обстановке* агент выбирает ту из двух стратегий, для которой достигается *максимум* его целевой функции. Ту же стратегию агент может выбрать, учитывая вместо максимума *знак разности* этих двух значений целевой функции. Так, если знак разности *положителен*, то он выберет стратегию, являющуюся аргументом *уменьшаемого*, иначе — аргумент *вычитаемого.* Если рассматриваемые значения целевой функции равны, то выбор агента *может быть произвольным.* Эту *разность* между значениями целевой функции будем назвать *индикатором выбора* (определение 2.1).

Для построения *математической модели БКП* необходимо ответить на вопрос, *по какому правилу* агенты, находясь в коллективе, осуществляют описанный выше выбор. В настоящей работе изучается *игра в нормальной форме*, когда агенты-*игроки* совершают бинарный выбор *однократно, одновременно и независимо*, при этом все параметры игры являются *общим знанием.* В условиях игры в нормальной форме правила бинарного выбора стратегий игроками как с помощью целевой функции, так и с помощью индикатора выбора, *эквивалентны* для исхода игры. В последующих разделах равновесие Нэша, центральное понятие в теории игр, исследуется с помощью индикатора выбора.

В разделе 2 введены такие базовые понятия БКП, как множество состояний, профиль бинарных стратегий, обстановка, целевая функция и, наконец, *индикатор выбора* (определение 2.1). Показано, что последний обладает свойством *симметрии* относительно «собственной переменной» (2.2). Считается, что существует *хотя бы один* профиль стратегий, при котором выбор агента *определен* (2.3), а именно индикатор выбора для него — *ненулевой.* Это ограничение приводит к тому, что *абсолютное значение* индикатора выбора достигает своего *положительного минимума* по всем ситуациям, на которых функция принимает *ненулевые значения* (2.4). Этот характерный для каждого агента минимум называется наименьшей значимостью выбора (определение 2.2). Таким образом для БКП построена общая теоретико-игровая модель в виде *игры в нормальной форме*, для *равновесий Нэша* (РН) которой (определение 2.3) доказана характеризация в виде решений *системы уравнений* (2.6) в теореме 2.1. Эта игра и характеризация РН использованы в более *частных моделях* других разделов через *параметризацию* как самой *целевой функции*, так и *множества обстановок* игрока, и являются обобщением результатов, полученных в работах [2, 1].

В разделе 3 приведены два примера *порогового конформного БКП*, содержащиеся в моделях М. Грановеттера [7] и Т. Шеллинга [8], в первом из которых коллектив *не делится* на группы, а во втором состоит из *двух антагонистических между собой групп.* Далее построена более *частная* по отношению к разделу 1 и более *общая* по отношению к приведенным примерам модель в виде *игры в нормальной форме.* В этой игре множество игроков разделено на L групп (включая случай одной группы), при этом *значением порога* игрока параметризована его *целевая функция*, а *количеством игроков* из «своей» и «чужих» групп, выбравших *определенную* стратегию, — множество его *обстановок.* Чтобы удовлетворить условию (2.3) введено *ограничение на значения порогов* (3.1). Пороговое конформное БКП определено с помощью *целевой функции* (3.2), через которую, в свою очередь, построен *индикатор выбора* (3.3). Далее введена *эмпирическая функция распределения порогов* (3.4), с помощью которой параметризована *система уравнений* (2.6) из теоремы 2.1 и доказано соответствующее следствие 3.1. *Решения* системы уравнений (3.5), которые соответствуют РН, найдены в теореме 3.1. Остальные решения описаны в виде *условий* (3.9). В следствии 3.2 доказано, что *структура* любого РН представляется в виде (3.10).

В разделе 4 полученные результаты применены к примерам *порогового конформного БКП*, содержащиеся в работах М. Грановеттера [7] и Т. Шеллинга [8]. Для каждого из них определены пороги, параметры обстановок, целевые функции и индикаторы выбора, эмпирические функции распределения порогов, приведены решения систем уравнений и структуры РН.

В заключении подведены итоги и перечислены перспективные направления дальнейших исследований.

2. Общая теоретико-игровая модель БКП

Пусть имеется конечное множество агентов $N = \{1, \ldots, n\}$. Агент $i \in N$ выбирает одну из двух стратегий $\omega_i \in \{0,1\}$, соответственно задано *множество состояний* выборов агентов — $\{0,1\}^n$.

Обозначим $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \{0,1\}^n$ *профиль стратегий* множества агентов, а $\omega_{-i} = (\omega_1, \ldots, \omega_{i-1}, \omega_{i+1}, \ldots, \omega_n)$ – *обстановку* для i-го агента. *Рациональность* поведения агента i будем описывать его стремлением к максимизации своей *целевой функции* $f_i : \{0,1\} \times \{0,1\}^{n-1} \to \mathbb{R}$ путем выбора им соответствующей стратегии $\omega_i \in \{0,1\}$ для фиксированной обстановки $\omega_{-i} \in \{0,1\}^{n-1}$.

Определение 2.1. *Правило $s_i : \{0,1\}^n \to \mathbb{R}$ назовем индикатором выбора:*

$$s_i(\omega) = s_i(\omega_i, \omega_{-i}) \triangleq f_i(\omega_i, \omega_{-i}) - f_i(1 - \omega_i, \omega_{-i}). \tag{2.1}$$

Из (2.1) легко видеть, что индикатор выбора обладает следующим свойством *симметрии* относительно *«собственной переменной»*:

$$s_i(\omega_i, \omega_{-i}) = -s_i(1 - \omega_i, \omega_{-i}). \tag{2.2}$$

Так как агент рационален, то, если $s_i(\omega_i, \omega_{-i}) > 0$ агент выбирает стратегию ω_i, иначе если $s_i(\omega_i, \omega_{-i}) \neq 0$, то по симметрии (2.2), он выбирает $1 - \omega_i$. При $s_i(\omega_i, \omega_{-i}) = 0$ агент может сделать *произвольный выбор*, т.е. агент *индифферентен* к профилю стратегий ω.

Будем считать, что для любого агента i существует хотя бы один профиль стратегий, к которому он неиндифферентен, т.е.

$$\forall i \in N \; \exists \omega^{(i)} \in \{0,1\}^n : s_i\left(\omega^{(i)}\right) \neq 0 \tag{2.3}$$

Это условие обосновано тем, что иначе агент индифферентен к любой обстановке, и для него все выборы произвольны.

Абсолютное значение $|s_i(\omega)|$ показывает, на какую величину различаются значения целевой функции для возможных двух стратегий. Поэтому величину $|s_i(\omega)|$ назовем *значимостью выбора.*

Определение 2.2. *Для агента i величина*

$$\varepsilon_i \triangleq \min_{\{\omega : s_i(\omega) \neq 0\}} |s_i(\omega)| \tag{2.4}$$

называется наименьшей значимостью выбора.

Согласно сделанному выше предположению (2.3), множество $\{\omega : s_i(\omega) \neq 0\}$ не пусто для любого i, и наименьшая значимость выбора (2.4) имеет конечное ненулевое значение.

Из определения 2.2 следует, что все значения индикатора выбора игрока i (2.1) либо равны нулю, либо лежат вне интервала $(-\varepsilon_i, \varepsilon_i)$.

Рассмотрим *игру* $H = \langle N, \{0,1\}^n, \{f_i\}_{i\in N}\rangle$ *в нормальной форме* агентов-игроков из множества N, совершающих бинарный выбор *однократно, одновременно и независимо*, максимизируя свои целевые функции в условиях, когда все параметры игры являются общим знанием.

Определение 2.3. *Равновесием Нэша (РН) в игре H назовем профиль стратегий $\{\omega_i^*\}_{i=\overline{1,n}}$, для которого справедливо неравенство*

$$f_i\left(\omega_i^*, \omega_{-i}^*\right) - f_i\left(1-\omega_i^*, \omega_{-i}^*\right) = s_i(\omega^*) \geq 0, \quad \forall i \in N. \tag{2.5}$$

Характеризация РН для БКП, рассматриваемая в следующей теореме, имеет целью запись определения РН не в виде классической системы неравенств (2.5), а в виде системы уравнений, алгоритм нахождения решений которой будет рассмотрен ниже.

Теорема 2.1. *Профиль стратегий ω^* является РН (определение 2.3) тогда и только тогда, когда $\forall i \in N$ выполнено:*

$$\omega_i^* = \chi_{\left\{j\in N : s_j\left(1,\omega_{-j}^*\right)+\varepsilon_j\omega_j^*>0\right\}}(i), \tag{2.6}$$

где $\chi_A(i)$ – индикатор того, что $i \in A$, $s_j\left(1,\omega_{-j}^*\right)$ – значение индикатора выбора (2.1) игрока j, для $\omega_j^* = 1$ и обстановки ω_{-j}^*, ε_j — наименьшая значимость выбора (определение 2.2) .

Доказательство. Пусть выполнено (2.6). Если $\omega_i^* = 0$, то из (2.6) и (2.2), следует что $-s_i\left(0, \omega_{-i}^*\right) = s_i\left(1, \omega_{-i}^*\right) \leq 0$, таким образом $s_i\left(0, \omega_{-i}^*\right) \geq 0$. Следовательно для $\omega_i^* = 0$ выполнено (2.5). Если же $\omega_i^* = 1$, то из (2.6) получим $s_i\left(1, \omega_{-i}^*\right) + \varepsilon_i > 0$. Значит $s_i\left(1, \omega_{-i}^*\right) > -\varepsilon_i$, и, исходя из свойства (2.4), значения $s_i\left(1, \omega_{-i}^*\right)$ могут быть либо ноль, либо лежать правее точки $\varepsilon_i > 0$. Следовательно, $s_i\left(1, \omega_{-i}^*\right) \geq 0$, и, соответственно, для случая $\omega_i^* = 1$ также выполнено (2.5). Таким образом доказано, что профиль стратегий ω^* является РН.

Обратно, предположим противное — пусть (2.6) не выполнено, т.е. существует $i_0 \in N$, для которого возможны два случая:

1. $s_{i_0}\left(1, \omega_{-i_0}^*\right) + \varepsilon_{i_0} \leq 0$ и $\omega_{i_0}^* = 1$,
2. $s_{i_0}\left(1, \omega_{-i_0}^*\right) > 0$ и $\omega_{i_0}^* = 0$.

В первом случае, по определению (2.4), $\varepsilon_{i_0} > 0$, значит $s_{i_0}\left(1, \omega_{-i_0}^*\right) < 0$. Отсюда следует, что для $\omega_{i_0}^* = 1$ неравенство (2.5) не выполнено. Значит ω^* не является РН.

Согласно (2.2), $s_{i_0}\left(1, \omega_{-i_0}^*\right) = -s_{i_0}\left(0, \omega_{-i_0}^*\right)$, значит во втором случае $s_{i_0}\left(0, \omega_{-i_0}^*\right) < 0$. Отсюда следует, что для $\omega_{i_0}^* = 0$ неравенство (2.5) не выполнено. Значит ω^* не является РН.

Доказательство следует из «принципа от противного». □

Замечание 2.1. В силу свойства симметрии (2.2) $\forall i \in N$ уравнение (2.6) можно переписать следующим образом:

$$\omega_i^* = \chi_{\left\{j \in N : s_j\left(0, \omega_{-j}^*\right) < \varepsilon_j \omega_j^*\right\}}(i). \tag{2.7}$$

Из теоремы 2.1 получаем, что число игроков m в равновесии Нэша, выбравших $\omega_i = 1$, можно определить следующим образом:

$$m = \sum_{i \in N} \omega_i = \sum_{i \in N} \chi_{\{j \in N | s_j(1, \omega_{-j}) + \varepsilon \omega_j > 0\}}(i). \tag{2.8}$$

Число m в (2.8) играет важную роль в частных моделях БКП, когда индикаторы выбора игроков порождают *пороговые* типы поведения. В качестве примеров такого рода поведения ниже приведем теоретико-игровые аналоги ставших уже классическими пороговых моделей М. Грановеттера [7] и Т. Шеллинга [8].

3. Теоретико-игровая модель конформного порогового БКП

Прежде чем формально описать теоретико-игровую модель приведем два примера конформного[1] порогового коллективного поведения.

Пример *конформного порогового БКП в одной группе.*

Пример 3.1. Модель Грановеттера [7]. Происходит митинг, который может перерасти в беспорядки. У каждого агента есть индивидуальный *порог конформности* по отношению *к членам митинга*, выражающийся следующим образом: если *число агентов принимающих участие в беспорядках*

1. *больше порога*, то агент *участвует* в беспорядках,
2. *меньше порога*, то агент *не участвует* в беспорядках,
3. *равно порогу*, то агент может принять *любое из первых двух решений.*

Пример *конформного порогового БКП в двух группах.*

Пример 3.2. Модель Шеллинга [8, стр.64]. В городском районе потенциально могут проживать две группы агентов, настроенные *недружественно* друг к другу. У каждого агента есть индивидуальный *порог* по отношению *жителям района*, выражающийся следующим образом: если *разница между количеством жителей из «своей» и «чужой» групп*

1. *больше порога*, то агент *решает и продолжает проживать* в этом районе,
2. *меньше порога*, то агент *решает не проживать* в нем,
3. *равно порогу*, то агент может принять *любое из первых двух решений.*

---

[1] *Конформностью* в социальной психологии называют изменение поведения индивида, происходящее в результате реального или представляемого влияния со стороны других людей (Aronson и др. 2018).

Пусть множество игроков $N = \{1, \ldots, n\}$ разделено на L *непересекающихся* подмножеств — групп I_l, где $1 \le L \le n$, $l = \overline{1, L}$. Число агентов в группе $l = \overline{1, L}$ обозначим $n_l \ge 1$, причем из-за отсутствия пересечений справедливо $\sum\limits_{l=1}^{L} n_l = n$.

Для *идентификации* игроков, их целевых функций, стратегий и прочих параметров, связанных с игроками, будем использовать систему двойной идентификации *по группе*, к которой принадлежит игрок и по *его номеру в этой группе*. Выбор агента i из группы l как и в предыдущем разделе обозначим $\omega_{li} \in \{0, 1\}$, $i = \overline{1, n_l}$, $l = \overline{1, L}$. *Количество остальных агентов в группе* l, сделавших выбор $\omega_{lj} = 1, j = \overline{1, n_l}, j \ne i$, обозначим $m_{l\setminus i} = \sum\limits_{\{j=\overline{1,n_l}: j \ne i\}} \omega_j$, а *количество агентов из других групп*, сделавших выбор $\omega_{l'j} = 1, j = \overline{1, n_l'}, l' = \overline{1, L}, l' \ne l$, обозначим $m_{-l} = \sum\limits_{\{l'=\overline{1,L}: l' \ne l\}} \sum\limits_{j=1}^{n_{l'}} \omega_j$.

Как следует из примеров выше, выбор агента i из группы $l = \overline{1, L}$, $i = \overline{1, n_l}$, с одной стороны зависит от *разности* $m_{l\setminus i} - m_{-l}$ между количеством агентов «своей» и «чужих» групп[2], сделавших одинаковый выбор, обозначаемый[3], $\omega_{li} = 1$, и своего *порога*, с другой. Значения *разности* $m_{l\setminus i} - m_{-l}$ и *порога* сравниваются агентом, после чего он делает *выбор стратегии.*

Порог агента i из группы l обозначим $t_{li} \in \mathbb{Z}$ (threshold). Разумно предположить, что величина порога является *целочисленной*, т.к. агент *сравнивает* ее также с целочисленной величиной $m_{l\setminus i} - m_{-l}$.

Для выполнения условия (2.3), потребуем, чтобы значения порогов лежали в следующих пределах

$$n_l - n \le t_{li} \le n_l - 1, \forall i = \overline{1, n_l}, l = \overline{1, L}, \tag{3.1}$$

так как если значения порогов какого-то агента лежат вне диапазона (3.1), этот агент индифферентен к любому профилю стратегий.

Порог агента i из группы $l = \overline{1, L}$, $i = \overline{1, n_l}$ определяет его целевую функцию, а разность $m_{l\setminus i} - m_{-l}$ — ее аргумент, а именно обстановку.

---

[2] В примере 3.1 «чужих» групп нет, в примере 3.2 — одна «чужая» группа.

[3] То, что конкретно означает выбор нуля или единицы, является предметом договоренности в конкретном приложении. Так, $\omega_{li} = 1$ означает в примере 3.1 — участие в беспорядках, в примере 3.2 — проживание в интересующем районе.

Выбор стратегии рациональным агентом при пороговом конформном БКП можно формализовать в виде *игры в нормальной форме* $H^c = \langle \left\{N = \cup I_l, l = \overline{1,L}\right\}, \{0,1\}^n, \{f^c_{li}\}_{l=\overline{1,L}, i=\overline{1,n_l}}\rangle$, где индекс c означает conformity, и целевые функции агентов-игроков определяется следующим выражением

$$f^c_{li}(\omega_{li}, m_{l\setminus i}, m_{-l}) = t_{li}(1-\omega_{li}) + (m_{l\setminus i} - m_{-l})\omega_{li}, \qquad (3.2)$$

где $l = \overline{1,L}, i = \overline{1,n_l}$.

Целевые функции (3.2) порождают следующие индикаторы выбора (определение 2.1):

$$s_{li}\left(\omega_{li}, m_{l\setminus i}, m_{-l}\right) = t_{li}(1-2\omega_{li}) + (m_{l\setminus i} - m_{-l})(2\omega_{li} - 1), \qquad (3.3)$$

где $l = \overline{1,L}, i = \overline{1,n_l}$.

Для каждой группы игроков определим следующую функцию:

$$\Phi_l\left(q\right) = \sum_{i=\overline{1,n_l}} \chi_{\{t_{li}<q\}}\left(i\right), l = \overline{1,L}, q = \{n_l - n, \ldots, n_l\}. \qquad (3.4)$$

Если ввести строгие вероятностные определения для порогов, как случайных величин, то функция $\Phi_l\left(\cdot\right)$ является *эмпирической функцией распределения порогов* игроков в группе l. Это название будет использоваться далее, тем не менее нужно учесть отсутствие в нем строгости.

Для характеризации РН (2.5) воспользуемся теоремой 2.1, из которой выводится следующее следствие.

Следствие 3.1. *Для того, чтобы профиль стратегий* $\omega^*(m_1, \ldots, m_L) \in \{0,1\}^n$ *с числом игроков* m_l*, сделавших выбор стратегии «1» в группе* l*, где* $l = \overline{1,L}$*, была РН (определение 2.3) в игре* H^c *с индикатором выбора* (3.3)*, необходимо и достаточно, чтобы*

1. *числа* $\{m_l\}_{l=\overline{1,L}}$ *были решениями системы уравнений:*

$$m_l = \Phi_l\left(m_l - m_{-l}\right), l = \overline{1,L}, \qquad (3.5)$$

где Φ_l *определяется выражением* (3.4),

2. *профиль стратегий* $\omega^*(m_1,\ldots,m_L)$ *определялся следующим образом*

$$\omega^*_{li}(m_1,\ldots,m_L)=\chi_{\left\{j=\overline{1,n_l}\middle|t_{lj}<m_l-m_{-l}\right\}}(i), l=\overline{1,L}, i=\overline{1,n_l}. \quad (3.6)$$

Доказательство. В силу целочисленности индикатора выбора (3.3) для всех игроков li выполняется $\varepsilon_{li}=1$, поэтому справедливо следующее равенство

$$s_{li}\left(1,m_{l\setminus i},m_{-l}\right)+\varepsilon_{li}\omega_{li}=m_l-m_{-l}-t_{li}, l=\overline{1,L}, i=\overline{1,n_l}, \quad (3.7)$$

где $m_l=m_{l\setminus i}+\omega_{li}$.

Пусть выполнены равенства (3.5) и (3.6). Тогда из (3.6) и (3.7) по теореме 2.1 профиль стратегий $\omega^*_i(m_1,\ldots,m_L)$ является РН. Сложив все равенства (3.6) по $i=\overline{1,n_l}$, из определения (3.4), получим

$$\sum_{i=\overline{1,n_l}}\omega^*_{li}(m_1,\ldots,m_L)=\Phi_l(m_l-m_{-l}).$$

Тогда, из равенства (3.5) видно, что число игроков, сделавших выбор стратегии «1» в группе l, где $l=\overline{1,L}$, равно m_l.

Пусть профиль стратегий $\omega^*(m_1,\ldots,m_L)\in\{0,1\}^n$ с числом игроков m_l, сделавших выбор стратегии «1» в группе l, где $l=\overline{1,L}$, является РН (2.5). Тогда из (3.7) и теоремы 2.1 следует (3.6). Сложив все равенства (3.6) по $i=\overline{1,n_l}$, получим (3.5). □

Следствие 3.1 позволяет, решив *систему уравнений* (3.5), описать все возможные профили стратегий, которые являются РН.

Для того, чтобы найти все решения системы уравнений (3.5), упорядочим множество порогов в каждой группе $l=\overline{1,L}$ в порядке их неубывания:

$$\begin{gathered}t_{10}=n_1-n\le t_{11}\le t_{12}\le\cdots\le t_{1n_1}\le n_1-1<n_1=t_{1n_1+1},\\ \ldots\\ t_{L0}=n_L-n\le t_{L1}\le t_{L2}\le\cdots\le t_{Ln_L}\le n_L-1<n_L=t_{Ln_L+1}.\end{gathered} \quad (3.8)$$

Тогда справедлива следующая теорема о решениях системы уравнений (3.5) и следствие из нее о структуре РН.

Теорема 3.1. *Упорядоченный набор* $(m_1, m_2, \ldots, m_L)$, $m_l = \overline{0, n_l}$, $l = \overline{1, L}$ *является решением тогда и только тогда, когда выполнено*

$$t_{lm_l} < m_l - m_{-l} \leq t_{lm_l+1}, \forall l = \overline{1, L}. \tag{3.9}$$

Доказательство. Если существует упорядоченный набор

$$(m_1, m_2, \ldots, m_L), m_l = \overline{1, n_l - 1}, l = \overline{1, L},$$

для которого справедливо (3.9), то значение эмпирической функции распределения (3.4) для группы $l = \overline{1, L}$ будет равно m_l и, соответственно, выполнено равенство (3.5).

Пусть, обратно, упорядоченный набор

$$(m_1, m_2, \ldots, m_L), m_l = \overline{1, n_l - 1}, l = \overline{1, L},$$

является решением системы уравнений (3.5), причем хотя бы один игрок сделал выбор стратегии «1». Тогда, вследствие определения эмпирической функции распределения (3.4) и упорядочения порогов (3.8), справедливо (3.9). □

Следствие 3.2. *Профиль стратегий* $\omega^*(m_1, \ldots, m_L) \in \{0, 1\}^n$ *с числом игроков* m_l*, сделавших выбор стратегии «1» в группе* l*, где* $l = \overline{1, L}$*, имеет следующую структуру*

$$\begin{aligned} &\forall i : t_{li} < m_l - m_{-l} \to \omega^*_{li}(m_1, \ldots, m_L) = 1, \\ &\forall i : t_{li} \geq m_l - m_{-l} \to \omega^*_{li}(m_1, \ldots, m_L) = 0. \end{aligned} \tag{3.10}$$

тогда и только тогда, когда $\omega^*(m_1, \ldots, m_L)$ *является РН.*

Доказательство. Пусть профиль стратегий $\omega^*(m_1, \ldots, m_L) \in \{0, 1\}^n$ с числом игроков m_l, сделавших выбор стратегии «1» в группе l, где $l = \overline{1, L}$, имеет структуру (3.10), тогда справедливо (3.6) и, вследствие упорядоченности порогов игроков (3.8), справедливо (3.9). Тогда, по теореме 3.1, следует, что упорядоченный набор $(m_1, \ldots, m_L)$ является решением системы уравнений (3.5). Таким образом выполнены достаточные условия следствия 3.1: (3.5) и (3.6). Значит, $\omega^*(m_1, \ldots, m_L)$ является РН.

Обратно, пусть $\omega^*(m_1, \ldots, m_L) \in \{0, 1\}^n$ является РН с числом игроков m_l, сделавших выбор стратегии «1» в группе l, где $l = \overline{1, L}$.

Тогда, согласно следствию 3.1, упорядоченный набор $(m_1, \ldots, m_L)$ является решением системы уравнений (3.5). Значит, по теореме 3.1, справедливо (3.9). Из упорядоченности порогов (3.8) и (3.6) (следствие 3.1 справедливо), следует, что РН имеет структуру (3.10). $\square$

В следующем разделе полученные результаты будут применены к примерам порогового конформного БКП.

4. Примеры теоретико-игровых моделей порогового конформного БКП

Теоретико-игровая модель для примера 3.1. Рассмотрим игру в нормальной форме $H^G = \langle N, \{0,1\}^n, \{f_i^G\}_{i=\overline{1,n}}\rangle$, где индекс G означает Granovetter. Так как $L = 1$, обстановкой является только величина $m_{l\setminus i} = m_{-i}$, так как m_{-l} не имеет смысла для одной группы. *Целевые функции* (3.2) игроков определяется следующим выражением

$$f_i^G(\omega_i, m_{-i}) = t_i(1-\omega_i) + m_{-i}\omega_i, i = \overline{1,n},$$

где пороги t_i, согласно (3.1) находится в пределах $0 \le t_i \le n-1, \forall i = \overline{1,n}$.

Целевые функции порождают следующие *индикаторы выбора* (определение 2.1):

$$s_i^G(\omega_i, m_{-i}) = t_i(1-2\omega_i) + m_{-i}(2\omega_i - 1), i = \overline{1,n}.$$

Введем следующую *эмпирическую функцию распределения порогов* игроков

$$\Phi(q) = \sum_{i=\overline{1,n}} \chi_{\{t_i<q\}}(i), q = \{0, \ldots, n\}.$$

Исходя из следствия 3.1, для того, чтобы профиль стратегий $\omega^*(m) \in \{0,1\}^n$ с числом игроков m, сделавших выбор стратегии «1», был РН (определение 2.3) в игре H^G необходимо и достаточно, чтобы

1. число m было корнем уравнения:

$$m = \Phi(m),$$

2. профиль стратегий $\omega^*(m)$ определялся следующим образом:

$$\omega_i^*(m) = \chi_{\left\{j=\overline{1,n}|t_j<m\right\}}(i), i = \overline{1,n_l}.$$

Упорядочим множество порогов их неубывания: $t_1 \le t_2 \le \dots \le t_n$. Согласно теореме 3.1 решения уравнения $m = \Phi(m)$ определяются следующим образом:

1. Всегда существуют 2 решения $m = 0$, $m = n$.

2. Целое число $m = \overline{1, n-1}$ является решением тогда и только тогда, когда выполнено

$$t_m < m \le t_{m+1}.$$

Согласно следствию 3.2 профиль стратегий $\omega^*(m) \in \{0,1\}^n$ с числом игроков m, сделавших выбор стратегии «1», имеет следующую структуру

$$\forall i : t_i < m \to \omega_i^*(m) = 1,$$
$$\forall i : t_i \ge m \to \omega_i^*(m) = 0,$$

тогда и только тогда, когда $\omega^*(m)$ является РН.

Замечание. Число корней уравнения $m = \Phi(m)$ *максимально* и равно $n+1$, а значит существует $n+1$ равновесий Нэша, при равномерном распределении порогов игроков $\{t_i = i-1\}_{i=1\dots n}$. Действительно, два решения $m = 0$, $m = n$ существуют всегда согласно теореме 3.1. По той же теореме промежуточные $n-1$ решений существуют, т.к. $t_m < m \le t_{m+1}$ выполнено для всех $m = \overline{1, n-1}$. Этот частный случай находится в соответствии с базовой моделью Грановеттера [7], когда функция распределения порогов совпадает с биссектрисой первого квадранта. Когда все пороги равны $n-1$, существует только *два крайних РН* $m = 0$ и $m = n$.

Теоретико-игровая модель для примера 3.2. Рассмотрим игру в нормальной форме

$$H^S = \langle \{I_1, I_2\}, \{0,1\}^n, \left\{f_i^{(1)}\right\}_{i=\overline{1,n_1}}, \left\{f_i^{(2)}\right\}_{i=\overline{1,n_2}} \rangle,$$

где индекс S означает Schelling.

Целевые функции (3.2) игроков определяется следующим выражением

$$f_i^{(1)}(\omega_i^{(1)}, m_1, m_2) = t_i^{(1)}(1-\omega_i^{(1)}) + (m_1 - m_2)\omega_i^{(1)}, i = \overline{1, n_1},$$
$$f_i^{(2)}(\omega_i^{(2)}, m_2, m_1) = t_i^{(2)}(1-\omega_i^{(2)}) + (m_2 - m_1)\omega_i^{(2)}, i = \overline{1, n_2},$$

где m_1 и m_2 — число игроков соответствующих групп, сделавших выбор стратегии «1». Пороги игроков группы 1, обозначенные $t_i^{(1)}$, согласно (3.1) находится в пределах $-n_2 \le t_i^{(1)} \le n_1 - 1, \forall i = \overline{1, n_1}$, а игроков группы 2, обозначенные $t_i^{(2)}$, согласно (3.1) находится в пределах $-n_1 \le t_i^{(2)} \le n_2 - 1, \forall i = \overline{1, n_2}$.

Целевые функции порождают следующие *индикаторы выбора* (определение 2.1):

$$s_i^{(2)}\left(\omega_i^{(2)}, m_{-i}^{(2)}, m^{(1)}\right) = t_i^{(1)}(1-2\omega_i^{(1)}) + (m_1 - m_2)(2\omega_i^{(1)} - 1), i = \overline{1, n_2},$$
$$s_i^{(1)}\left(\omega_i^{(1)}, m_{-i}^{(1)}, m^{(2)}\right) = t_i^{(2)}(1-2\omega_i^{(2)}) + (m_2 - m_1)(2\omega_i^{(2)} - 1), i = \overline{1, n_1}.$$

Введем для каждой группы игроков следующие *эмпирические функции распределения порогов* игроков:

$$\Phi_1(q) = \sum_{i=\overline{1,n_1}} \chi_{\left\{t_i^{(1)} < q\right\}}(i), q = \{-n_2, \ldots, n_1\},$$
$$\Phi_2(q) = \sum_{i=\overline{1,n_2}} \chi_{\left\{t_i^{(2)} < q\right\}}(i), q = \{-n_1, \ldots, n_2\}.$$

Исходя из следствия 3.1, для того, чтобы профиль стратегий $\omega^*(m_1, m_2) \in \{0,1\}^n$ с числом игроков m_1, m_2, сделавших выбор стратегии «1» в группах 2 и 1 соответственно, был РН (2.5) в игре H^S, необходимо и достаточно, чтобы

1. числа m_1, m_2 были корнями системы уравнений:
$$\begin{aligned} m_1 &= \Phi_1(m_1 - m_2), \\ m_2 &= \Phi_2(m_2 - m_1), \end{aligned} \tag{4.1}$$

2. профиль стратегий $\omega^*(m_1, m_2)$ определялся следующим образом
$$\omega_{1i}^*(m_1, m_2) = \chi_{\left\{j=\overline{1,n_1} \middle| t_j^{(1)} < m_1 - m_2\right\}}(i), i = \overline{1, n_1},$$
$$\omega_{2i}^*(m_1, m_2) = \chi_{\left\{j=\overline{1,n_2} \middle| t_j^{(2)} < m_2 - m_1\right\}}(i), i = \overline{1, n_2}.$$

Следствие 3.1 позволяет, решив *систему уравнений* (4.1), описать все возможные профили стратегий, которые являются РН.

Для того, чтобы найти все решения системы уравнений (4.1), упорядочим множество порогов в каждой группе в порядке неубывания последних:

$$-n_2 \le t_1^{(1)} \le t_2^{(1)} \le \dots \le t_{n_1}^{(1)} \le n_1 - 1,$$
$$-n_1 \le t_1^{(2)} \le t_2^{(2)} \le \dots \le t_{n_2}^{(2)} \le n_2 - 1.$$

Согласно теореме 3.1 решения системы уравнений (4.1) определяются следующим образом:

1. Всегда существуют 2 решения:$(0, n_2)$, $(n_1, 0)$.

2. Упорядоченный набор (m_1, m_2), $m_1 = \overline{0, n_1 - 1}$, $m_2 = \overline{0, n_2 - 1}$ является решением тогда и только тогда, когда выполнено

$$t_{m_1}^{(1)} < m_1 - m_2 \le t_{m_1+1}^{(1)},$$
$$t_{m_2}^{(2)} < m_2 - m_1 \le t_{m_2+1}^{(2)}.$$

Согласно следствию 3.2 профиль стратегий $\omega^*(m_1, m_2) \in \{0, 1\}^n$ с числом игроков m_1, m_2, сделавших выбор стратегии «1» в группах 2 и 1, имеет следующую структуру

$$\forall i : t_i^{(1)} < m_1 - m_2 \to \omega_{1i}^*(m_1, m_2) = 1,$$
$$\forall i : t_i^{(1)} \ge m_1 - m_2 \to \omega_{1i}^*(m_1, m_2) = 0,$$
$$\forall i : t_i^{(2)} < m_2 - m_1 \to \omega_{2i}^*(m_1, m_2) = 1,$$
$$\forall i : t_i^{(2)} \ge m_2 - m_1 \to \omega_{2i}^*(m_1, m_2) = 0,$$

тогда и только тогда, когда $\omega^*(m_1, m_2)$ является РН.

5. Заключение

В статье рассмотрены теоретико-игровые модели *бинарного коллективного поведения* (БКП). Доказанная для общего случая теорема 2.1 о характеризации РН через систему уравнений позволила с помощью следствия 3.1 найти условия существования (теорема 3.1) и структуру РН (следствие 3.2) для случая *порогового конформного* БКП. Полученные результаты применены к примерам пороговых моделей коллективного поведения Грановеттера и Шеллинга.

В дальнейшем возможны несколько перспективных направлений исследования моделей БКП.

Во-первых, рассматривая ее как теоретико-игровую, находить условия существования и структуру РН для других моделей, например *пороговых анти-конформных* или *смешанных* [1].

Обоснованием второго направления является то, что через индикатор выбора можно ввести *функцию-индикатор* (см. определение в [4, стр. 49]):

$$\delta_i^{'}(\omega) = \chi_{\{j \in N | s_j(1, \omega_{-j}) + \varepsilon_i \omega_j > 0\}}(i) - \omega_i,$$

которая указывает игроку i стоит ли ему изменять стратегию ω_i, чтобы достичь максимума своей целевой функции при существующих значениях чужих стратегий ω_{-i}. Такое поведение называется *индикаторным* (см. [6]) и оно позволяет изучать динамические модели в дискретном и непрерывном времени.

Третьим направлением исследования является модель БКП с *бесконечным множеством* агентов. Ее можно изучать с помощью предельного перехода для *эмпирической функции распределения* порогов (3.4), которая, как известно из теории вероятностей, при определенных условиях сходится к теоретической функции распределения. Это направление подразумевает использование как *статических* моделей, которые исследуются методами *статистической физики*, так и *динамических* моделей, для которых разработаны методы *теории случайных процессов* и *динамических систем*.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бреер В.В. *Теоретико-игровые модели конформного поведения* // Автоматика и телемеханика. 2012. Вып. 10. С. 111–126.

2. Бреер В.В., Новиков Д.А. *Пороговые модели взаимного страхования* // Математическая теория игр и ее приложения. 2011. Т. 3, вып. 4. С. 3–22.

3. Губко М.В., Новиков Д.А. *Теория игр в управлении организационными системами.* М: Синтег, 2002.

4. Малишевский А.В. *Качественные модели в теории сложных систем.* М.: Физматлит, 1998.

5. Мазалов В.В. *Математическая теория игр и ее приложения.* СПб: «Лань», 2017.

6. Опойцев В.И. *Равновесие и устойчивость в моделях коллективного поведения.* М.: Наука, 1977.

7. Granovetter M. *Threshold Models of Collective Behavior* // American Journal of Sociology. 1978, Vol. 83 (6). P. 1420–1443.

8. Schelling T.C. *Micromotives and Macrobehavior.* New York, London: Norton & Company, 2006.

GAME-THEORY MODELS OF BINARY COLLECTIVE BEHAVIOR

Vladimir V. Breer, Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Cand.Sc. (breer@live.ru).

Abstract: Game-theoretic models were investigated not from the point of view of the maxima of the players' utility functions, as is usually done, but by solving algebraic equations that characterize the Nash equilibrium. This characterization is obtained for models of binary collective behavior, in which players choose one of two possible strategies. Based on the results for the general model, game-theoretic models of conformal threshold Binary Collective Behavior (BCB) are studied, provided the collective is divided into L groups. The conditions for the existence of Nash equilibria is proved. For each Nash equilibrium, its structure is defined. The results obtained are illustrated by two examples of conformal threshold BCB when the group coincides with the whole team and when the latter is divided into two groups. It is shown that the Nash equilibria in the first and second examples are analogues of the equilibria in the dynamic models of M. Granovetter and T. Schelling, respectively.

Keywords: game-theoretic models, Nash equilibrium, binary choice, conformity, Granovetter model, Schelling model.